ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
Revista de investigación y experiencias didácticas
Núm. 30.2 (2012): 109-130
ISSN: 0212-4521

# UNA APROXIMACIÓN ONTOSEMIÓTICA A LA VISUALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

## AN ONTO-SEMIOTIC APPROACH TO VISUALIZATION IN MATHEMATICS EDUCATION

Juan D. Godino, Margherita Gonzato
*Universidad de Granada*
jgodino@ugr.es • mgonzato@ugr.es

José A. Cajaraville, Teresa Fernández
*Universidad de Santiago de Compostela*
ja.cajaraville@usc.es • teref.blanco@usc.es

RESUMEN: La visualización es un campo de investigación de creciente importancia en educación matemática. Sin embargo, el estudio de su naturaleza y relación con otras formas de registro y comunicación de información continúa siendo tema de reflexión. En este trabajo proponemos una manera de entender el lenguaje y el pensamiento visual, y sus relaciones con el lenguaje y pensamiento analítico, usando las herramientas teóricas del «enfoque ontosemiótico» del conocimiento matemático. Mostraremos que la noción de «configuración visual» de objetos y procesos, con sus diferentes modalidades contextuales, permite articular diversas perspectivas sobre la visualización, comprender sus relaciones con otras formas analíticas de expresión y reconocer diversos grados de visualización de la actividad matemática.

PALABRAS CLAVE: objeto matemático, visualización, aprendizaje, comprensión, lenguaje y pensamiento analítico

ABSTRACT: Visualization is a research field of growing importance in mathematics education. However, the study of their nature and relationship to other forms of information recording and reporting continues to be a subject of reflection. In this article we propose a way of understanding the language and visual thinking, and their relations with the language and analytical thinking, using the theoretical tools of the «onto-semiotic approach» to mathematical knowledge. We will show that the notion of «visual configuration» of objects and processes, in its various contextual forms, allow articulate different perspectives on visualization, to understand its relationships with other analytical forms of expression and to recognize different levels of visualization in mathematical activity.

KEY WORDS: mathematical object, visualization, learning, understanding, analytical language and thinking

Fecha de recepción: marzo 2011 • Aceptado: setiembre 2011

*Para citar*: Godino, J. D., Gonzato, M., Cajaraville,J. A. y Fernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 30 (2),. 109-130

## 1. INTRODUCCIÓN

La visualización ha recibido mucha atención como tema de investigación en Educación Matemática, especialmente en el área de la geometría (Bishop, 1989; Clement y Battista, 1992; Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996; Gutiérrez, 1996). Se trata de evaluar los procesos y capacidades de los sujetos para realizar ciertas tareas que requieren «ver» o «imaginar» mentalmente los objetos geométricos espaciales, así como relacionar los objetos y realizar determinadas operaciones o transformaciones geométricas con los mismos. También este tema ha recibido atención desde un punto de vista del propio trabajo del matemático, en los momentos de abordar la resolución de problemas, formulación de conjeturas, así como en otras áreas diferentes de la geometría (Guzmán, 1996).

El trabajo de Presmeg (2006) ofrece una perspectiva extensa de las investigaciones realizadas en la comunidad de educación matemática, articulada alrededor de las conferencias del Grupo Internacional PME, sobre el papel de la visualización en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Dicho «survey» concluye enunciando 13 «grandes cuestiones» sobre este campo de investigación, entre las cuales destacamos,

«5. ¿Qué procesos de conversión están implicados en el cambio flexible entre varios registros matemáticos, incluyendo los de naturaleza visual, combatiendo de esta manera el fenómeno de la compartamentalización? …

9. ¿Cómo puede facilitar o dificultar el uso de inscripciones visuales e imaginería la reificación de procesos como objetos matemáticos?

10. ¿Cómo se puede aprovechar la visualización para promover la abstracción matemática y la generalización? …

13. ¿Cuál es la estructura y cúales son los componentes de una teoría general de la visualización para la educación matemática?» (Presmeg, 2006, p. 227)

Otras cuestiones formuladas por Presmeg se dirigen principalmente a cómo promover las habilidades de visualización en la enseñanza de las matemáticas, tema central abordado en la monografía de Rivera (2011)

En este artículo estamos interesados por avanzar una respuesta al problema de elaborar una teoría que esclarezca la naturaleza y componentes de la visualización y su relación con otros procesos implicados en la actividad matemática, su enseñanza y aprendizaje. Un aspecto clave de la elaboración de una teoría de la visualización en educación matemática debe incluir el estudio de las relaciones de esta forma de percepción con otras modalidades de expresión ostensiva (lenguajes analíticos o secuenciales), y sobre todo, su relación con los objetos matemáticos no ostensivos (sean considerados como mentales, formales, o ideales).

Con dicho fin usaremos el marco teórico integrativo del «enfoque ontosemiótico» del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). En particular vamos a proponer una tipología de objetos ligados a los procesos de visualización, los cuales intervienen en prácticas matemáticas específicas ligadas a tipos de situaciones - problemas. Estos objetos pueden ser, lingüísticos y artefactos materiales, conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos, además de las propias tareas o problemas en las cuales se ponga en juego la percepción visual.

El artículo incluye los siguientes apartados. En primer lugar indicamos aspectos relevantes de los antecendentes del tema y las nociones teóricas del EOS que vamos a aplicar. En la sección 3 describimos la noción de «objeto visual» y proponemos una categorización de dichos objetos. Estos objetos se pueden contemplar desde distintos puntos de vista (personal - institucional; particular - general, ...) dando lugar a diferentes modalidades contextuales y funcionales de los mismos (sección 4). Seguidamente aplicamos las herramientas elaboradas al análisis de dos tareas que ponen en juego objetos y procesos visuales, resaltando las relaciones sinérgicas entre los lenguajes visuales y analíticos. El trabajo finaliza con unas conclusiones e implicaciones para la investigación y la práctica educativa.

## 2. ANTECEDENTES Y MARCO TEÓRICO

Antes de abordar la cuestión central de nuestro trabajo es necesario aclarar el uso de los términos visual y visualización. Siguiendo a Piaget e Inhelder Presmeg (2006) se considera que cuando una persona crea una disposición espacial de objetos físicos (incluyendo como tales las inscripciones matemáticas) hay una imagen visual en la mente de la persona que guía esa creación. De este modo la visualización incluye los procesos de construir y transformar tanto la «imaginería» visual mental como todas las inscripciones de naturaleza espacial que puedan estar implicadas en la actividad matemática.

Arcavi (2003, p. 217) describe la visualización en términos muy generales: «La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre retratos, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y comprensiones avanzadas». Asimismo, considera que la matemática, como creación humana y cultural que trata con objetos y entidades muy diferentes de cualquier fenómeno físico, se apoya fuertemente sobre la visualización en sus diferentes formas y niveles, no solo en el campo de la geometría.

Duval (2002) distingue entre visión y visualización. La visión es la percepción directa de un objeto espacial; la percepción visual necesita exploración mediante movimientos físicos, del sujeto que ve, o del objeto que se mira, porque nunca da una aprehensión completa del objeto. Entiende la visualización como representación semiótica de un objeto, una organización bi-dimensional de relaciones entre algunos tipos de unidades. Mediante la visualización cualquier organización puede ser sinopticamente comprendida como una configuración (p. 15), haciendo visible todo lo que no es accesible a la visión y aportando una aprehensión global de cualquier organización de relaciones. Para Duval (2002) la visualización plantea tres problemas desde el punto de vista del aprendizaje: (1) discriminación de las características visuales relevantes; (2) el procesamiento figural, cambios entre registros visuales (descomponer, recomponer una figura; reconfiguración); cambio de perspectiva, ...; (3) coordinación con el registro discursivo.

Para el caso de la geometría, la distinción entre las imágenes mentales de objetos perceptibles y las entidades geométricas, y el reconocimiento de las relaciones dialécticas entre las mismas es abordada con nitidez por Fischbein (1993) con la noción de *concepto figural*. La principal tesis del trabajo de Fischbein es que la geometría trata con entidades mentales que poseen simultáneamente características conceptuales y figurales. «Los objetos de investigación y representación en el razonamiento geométrico son por tanto entidades mentales, llamadas por nosotros conceptos figurales, que reflejan propiedades espaciales (forma, posición, tamaño), y al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales – como idealidad, abstracción, generalidad, perfección.» (p. 143). Como afirma Fischbein, en las teorías cognitivas actuales, los conceptos y las imágenes se consideran básicamente como dos categorías distintas de entidades mentales.

La visualización se puede entender como un doble proceso, uno que va de lo material a lo inmaterial (mental o ideal) (que podemos llamar visualización ascendente), y el inverso que va de lo inmaterial a lo material (visualización descendente). «La visualización ofrece un método de ver lo invisible» (Arcavi, 2003, p. 216). Este «ver» puede ser puramente mental y entonces involucra objetos no-ostensivos, o puede estar relacionado con una representación física y entonces ser objeto perceptible.

Para el caso de la geometría, Clement y Battista (1992) describen la geometría escolar como el «estudio de los objetos espaciales, relaciones, y transformaciones que han sido formalizadas (o matematizadas) y los sistemas axiomáticos matemáticos que se han construido para representarlos. En cambio, el razonamiento espacial consiste en el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y manipulan representaciones, relaciones y transformaciones mentales de los objetos espaciales» (p. 420). En esta descripción se mencionan objetos de naturaleza bien diferente como ingredientes que constituyen la geometría escolar y el razonamiento espacial. Por una parte están los objetos espaciales, que se deben entender como los cuerpos físicos que nos rodean, sus posiciones en el espacio físico; por otra, se mencionan las representaciones mentales de tales objetos, relaciones y transformaciones (entidades psicológicas); y finalmente, los sistemas axiomáticos matemáticos (entidades institucionales o culturales) que se han construido para representar los objetos físicos (y los mentales).

Consideramos que estas nociones son insuficientes para el estudio de los problemas de enseñanza y aprendizaje de tareas que requieren visualización y razonamiento espacial al centrar la atención básicamente en la faceta o dimensión cognitiva. Incluso el estudio de dicha faceta queda frecuentemente restringida a la dialéctica entre los ostensivos visuales y sus correspondientes representaciones internas o mentales.

En este trabajo vamos a analizar la noción de visualización aplicando las herramientas del «enfoque ontosemiótico» del conocimiento matemático (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007). En este marco teórico se considera que el análisis de la actividad matemática, de los objetos y procesos que intervienen en la misma, centra la atención inicial en las *prácticas* que realizan las personas implicadas en la solución de determinadas situaciones-problemas matemáticos. La aplicación de este planteamiento a la visualización nos lleva a distinguir entre «prácticas visuales» y «prácticas no visuales» o simbólico/analíticas. Con dicho fin fijamos la atención en los tipos de objetos lingüísticos y artefactos que intervienen en una práctica los cuales serán considerados como visuales si ponen en juego la *percepción visual.* Aunque las representaciones simbólicas (lengua natural o lenguajes formales) consisten en inscripciones visibles, no consideraremos dichas inscripciones como propiamente visuales, sino como analíticas o sentenciales. Los lenguajes secuenciales (por ejemplo, lógicas simbólicas, lenguajes naturales) usan solo la relación de concatenación para representar relaciones entre objetos. Por el contrario en los diagramas se hace uso de relaciones espaciales para representar otras relaciones. «La idea es que los lenguajes sentenciales están basados en señales acústicas que son secuenciales por naturaleza, y por ello deben tener una sintaxis compleja que lo compense para expresar ciertas relaciones - mientras que los diagramas, siendo bidimensionales, son capaces de mostrar algunas relaciones sin la intervención de una sintaxis compleja» (Shin y Lemon, 2008, p.10)

Nuestro análisis de la visualización tiene en cuenta la distinción Peirceana entre tres tipos de signos (icono, índice y símbolo). Según la relación que los signos tengan con el objeto, Peirce (1965) realiza la siguiente clasificación:

- *Iconos*: Tienen una relación de semejanza, en tanto se parecen al objeto que representan. La relación con aquello a lo que se refieren es directa, por ejemplo: pinturas, retratos, dibujos figurativos, mapas, etc. La representación muestra la estructura u organización del objeto.
- *Índices:* La relación con los objetos que representan es de contigüidad (relación de causa-efecto) con respecto a la realidad. Por ejemplo, un rayo (es índice de tormenta), una huella (es índice de alguien que pasó por ahí), etc.
- *Símbolos:* Representa al objeto designado en virtud de un hábito o regla que es independiente de cualquier cualidad física, o contigüidad contextual, con el objeto. Ejemplo: palabras, logotipos, escudos de armas, señales de tráfico.

Los diferentes tipos de signos pueden combinarse, en el caso particular de la fotografía, por ejemplo se trataría de un icono (en tanto hay una relación de semejanza con el objeto) pero también es índice puesto que la fotografía se ve afectada por el objeto que representa (la fotografía se produce a través de registrar diferencias lumínicas de aquello que representa).

Los diagramas son considerados en la semiótica Peircena como un tipo de iconos mediante los que se representan relaciones inteligibles entre un conjunto de objetos[1]. Una característica que distingue a los iconos es que mediante la observación directa del mismo se pueden descubrir otras verdades relativas al objeto distintas de las que son suficientes para determinar su construcción. Esta capacidad de revelar verdades no esperadas es precisamente en lo que radica la utilidad de las fórmulas algebraicas, por lo que su carácter icónico-diagramático es el que prevalece. Así, por ejemplo, la expresión $y = x^2 - 2x + 1$, es una parábola; la mera expresión informa de las propiedades esenciales de dicho objeto matemático. Sin embargo, las letras de las expresiones algebraicas, tomadas de manera aislada, no son iconos, sino índices: cada letra es un índice de una cantidad. Por el contrario, los signos +, =, /, etc., son símbolos en el sentido de Peirce. «En las expresiones algebraicas encontramos, por tanto, ejemplo de la imbricación de los tres tipos de signos en la escritura matemática: las letras funcionan como índices, los signos de las operaciones, igualdad, desigualdad, etc. son símbolos, mientras la expresiones como un todo funcionan como un icono» (Filloy, Puig y Rojano, 2008, p. 47)

Los «objetos visuales», y los procesos de visualización de donde provienen, forman *configuraciones* o sistemas semióticos constituidos «por los objetos intervinientes y emergentes en un sistema de prácticas, junto con los procesos de significación que se establecen entre los mismos (esto es, incluyendo la trama de funciones semióticas que relaciona los objetos constituyentes de la configuración)» (Godino y cols, 2011).

En este trabajo, la visualización será analizada, en primer lugar, desde el punto de vista de los objetos primarios que en ella participan (figura 1), esto es, los tipos de situaciones-problemas (tareas), elementos lingüísticos y materiales, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos en los cuales se dice que hay visualización. Usualmente los objetos visuales participarán en las prácticas matemáticas junto con otros objetos no visuales (analíticos o de otro tipo). La visualización en matemáticas no se reduce a ver, sino que también conlleva interpretación, acción y relación.

En segundo lugar la visualización será analizada aplicando las dualidades o modalidades contextuales (figura 2) desde las cuales se pueden considerar los tipos de objetos visuales previamente identificados. En esta fase se introducen las necesarias distinciones entre objetos visuales personales (cognitivos), e institucionales (socio-epistémicos); objetos visuales particulares (extensivos) y generales (intensivos); objetos visuales ostensivos (materiales) y no-ostensivos (mentales, ideales, inmateriales); objetos visuales unitarios (usados como un todo global) y sistémicos (formados por un sistema de elementos estructurados). Finalmente, los objetos visuales son considerados como antecedentes o consecuentes de funciones semióticas (dualidad expresión y contenido).

En la sección 5 aplicamos las ideas desarrolladas en las secciones previas al análisis de dos tareas matemáticas tratando de mostrar las relaciones complejas y sinérgicas entre las configuraciones visuales y analíticas que se ponen en juego en su resolución. Concluimos indicando algunas implicaciones de nuestro estudio para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

## 3. OBJETOS VISUALES PRIMARIOS

La consideración de un «objeto» como visual o no visual no es clara en la literatura. Por una parte tenemos los objetos físicos espaciales que se perciben con el sentido de la vista, que serán los primeros candidatos para ser considerados como «objetos visuales». Una foto, un dibujo o cualquier otra inscripción icónica de los objetos físicos son también claramente objetos visuales en un sentido estricto. La psicología se ha interesado por la naturaleza de las representaciones internas en la mente de las personas

1. Un estudio extenso del papel de los diagramas en el razonamiento matemático, y de la visualización en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se encuentra en Rivera (2011).

de los objetos físicos espaciales, como también de las ideas y conceptualizaciones. De aqui viene el uso de nociones teóricas tales como «imágenes mentales», «esquemas - imagen», «concepciones», ..., las cuales, obviamente no se pueden percibir directamente con la vista.

Desde el punto de vista de la educación matemática nos interesa elaborar un modelo para analizar el papel del lenguaje, los artefactos y el pensamiento visual en la construcción y comunicación de los diversos tipos de objetos matemáticos, y por tanto, del aprendizaje. El EOS propone considerar como «objetos que intervienen en la práctica matemática», no solo los medios de expresión lingüística, y en su caso los artefactos manipulativos, sino también los conceptos, las proposiciones, procedimientos y argumentos. Las propias situaciones - problemas o tareas matemáticas de cuya solución emergen los anteriores objetos son también considerados como objetos que intervienen en la práctica matemática, los cuales deben ser también visualizados (figura 1).

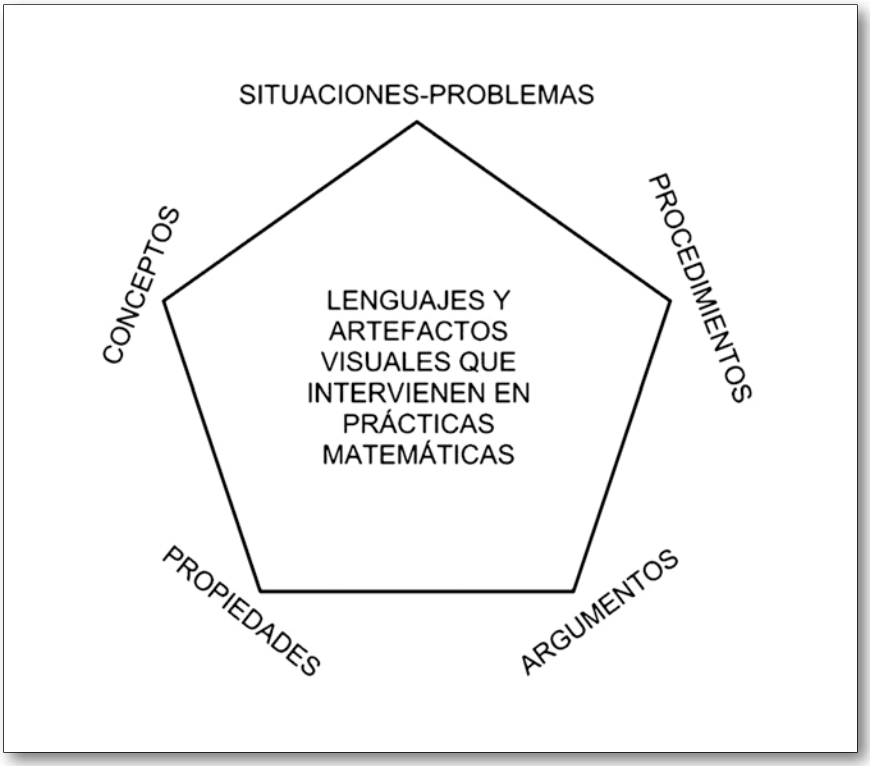



Fig. 1. Visualización y objetos matemáticos

A continuación elaboramos una tipología de objetos visuales para cada una de las categorias de objetos matemáticos primarios. Usaremos la tarea indicada en la figura 2 como ejemplo ilustrativo.

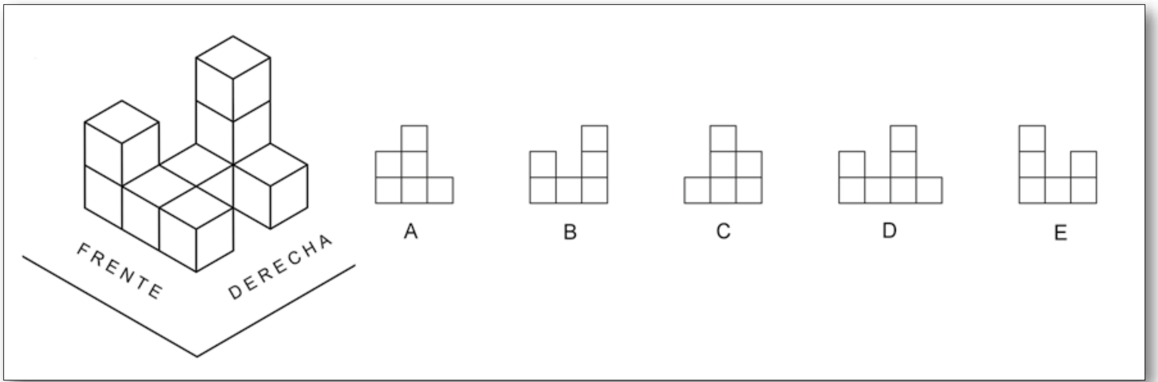



Fig. 2: ¿Cuál de las figuras A, B, C, D, E corresponde a la vista desde atrás?

## *Lenguaje visual*

Se trata de los medios de comunicación icónica, indexical y diagramática de la forma y de la posición relativa de objetos en el espacio, o que representan la estructura de sistemas conceptuales. Un primer esbozo de tipos de «lenguajes visuales» puede ser la siguiente:

- icónico (fotografías, pictogramas, planos, mapas...)
- manipulativo (artefactos, cuerpos geométricos, ...)
- deíctico/gestual (indicadores de forma, posición, orientación, …)
- diagramático (diagrama, grafos, esquemas, croquis, ...)

Las inscripciones simbólicas no las incluiremos entre los tipos de lenguajes visuales, aunque ciertamente se trata de inscripciones visibles/audibles. Los símbolos son signos inmotivados, en los que la relación entre el significante y el significado es totalmente convencional. En la tarea de la Figura 2 se usa lenguaje icónico para comunicar la vista en perspectiva del objeto y las posibles proyecciones planas del mismo. Los términos 'frente', 'derecha', y las letras A, B, C, D, E, y las argumentaciones que deben darse para justificar que la vista C es la solución a la tarea son elementos del lenguaje simbólico - natural. Pero en el contexto de la tarea se usan de manera indexical, señalando posiciones en las representaciones del objeto físico evocado.

## *Tareas visuales*

Los procesos de visualización, y sus resultados, los «objetos visuales», «imágenes» o «visualizaciones», intervienen asociados a determinadas tareas en las cuales se realizan ciertas prácticas apoyadas en otros objetos y procesos. La visualización se pone en juego en dos tipos principales de situaciones/tareas en las cuales se comunica información (a otros, o a uno mismo), lo cual implica registro e interpretación de dicha información:

1) Comunicación de la forma, sus componentes y estructura, de objetos espaciales, o bien de objetos imaginados (pensados o ideales). La comunicación tiene lugar mediante el uso del lenguaje visual (representaciones materiales en forma de fotos, dibujos, esquemas, ...)
2) Comunicación de la posición relativa de objetos en el espacio. Se trata de «ver» y posicionar relativamente en el espacio físico a uno mismo y a los objetos del entorno (tareas de orientación). Implica el uso de lenguaje deíctico (términos como, arriba, abajo; delante, detrás, derecha, iz-

quierda; cerca, lejos; norte, sur, este, oeste). La comunicación de la posición puede ser realizada mediante el uso de artefactos, medios materiales, como maquetas, planos, mapas, etc.

Los objetos físicos, y sus representaciones, pueden sufrir diversas transformaciones (movimientos, semejanzas, proyecciones,...), lo que da origen a una nueva clase de situciones:

3) Reconocimiento de invariancias en las formas, o en sus representaciones, por transformaciones específicas, lo cual se apoya en la discriminación visual: comparar varios objetos, dibujos, imágenes e identificar similitudes o diferencia entre ellos.

La tarea de la figura 2 incluye aspectos de los tipos anteriores.

Otro tipo de tareas que involucran visualización pueden ser:

4) Reconocimiento y representación mediante diagramas de la estructura de sistemas conceptuales, como es el caso de las figura 1, en la que se trata de representar esquemáticamente los tipos de objetos primarios y relaciones entre los mismos que propone el EOS.

## Procedimientos *(operaciones visuales)*

La siguiente relación incluye tipos básicos de operaciones, procedimientos o técnicas que consideramos visuales:

- Proyectar cuerpos en el plano, seccionar, rotar, simetrizar, trasladar, deslizar, …
- Construir sólidos a partir de sus proyecciones planas
- Transformar representaciones visuales mediante descomposición y recomposición de figuras, ...
- Representar gráficamente relaciones, …

La tarea de la figura 2 pone en juego la operación de proyección ortogonal del cuerpo desde distintas posiciones posibles.

## Conceptos visuales

Entendemos por concepto un invariante o entidad cuyo significado es fijado por una definición o regla, existiendo una ilimitada variedad de posibles ejemplos que cumplen dicha regla. En el estudio del espacio y la geometría es necesario distinguir entre los conceptos de representación material (dibujo, imagen, modelos tridimensionales, …) y los correspondientes conceptos figurales representados por medio de lenguaje visual (triángulo, prisma cuadrangular recto, etc.)

Los sistemas de representación cartesiana, o de otro tipo, incluyen configuraciones de conceptos de naturaleza visual y espacial (arriba, abajo, derecha, izquierda, norte, sur, ...)

A título de ejemplo, en la Figura 2 se ponen en juego los conceptos de objeto visible, objeto oculto, sistema de referencia tridimensional, punto de vista (o foco), puntos de vista opuestos (frente es opuesto a atrás; derecha es opuesta a izquierda), ángulo frente-arriba-derecha, plano de proyección, rectas proyectantes, direcciones de mirada del observador (rayo visual),…

## Propiedades

Se trata de relaciones entre conceptos expresadas mediante proposiciones (esto es, enunciados cuya verdad o falsedad se debe establecer). Algunos tipos de proposiciones visuales, esto es, propiedades que intervienen en la solución de tareas visuales y se expresan en lenguaje visual:

– Propiedades de los procedimientos visuales utilizados: por ejemplo la conservación de la forma y tamaño por movimientos rígidos,
– Propiedades del lenguaje visual utilizado: conservación de la forma en las proyecciones proporcionales, propiedades de las isometrías (rotaciones, traslaciones, simetrías), propiedades de las diferentes proyecciones,
– Propiedades de los conceptos visuales.

En la figura 2 se ponen en juego propiedades propias de las diferentes proyecciones (isométrica y ortogonales), por ejemplo, sabemos que las proyecciones paralelas sobre un plano ortogonal conservan la forma, tamaño y posición relativa de los cuerpos proyectados. En consecuencia las caras del cubo son cuadrados cuando se miran frontalmente, mientras que si se miran desde un ángulo diferente aparecen como figuras romboédricas. Observamos que el objeto representado en perspectiva se considera orientado, es decir, posee un «frente», «izquierda», «arriba», «derecha».

### Argumentos/justificaciones visuales

La elaboración de un discurso justificativo de las proposiciones y de los procedimientos requerirá, según el caso, la simple presentación del objeto material correspondiente, si se trata de «propiedades» de naturaleza empírica, o podrá requerir la elaboración de argumentaciones deductivas basadas en reglas previamente aceptadas. Las llamadas «demostraciones sin palabras» de propiedades geométricas generales requerirá el uso conjunto de un discurso analítico que evoque las definiciones y teoremas previamente establecidos. En el estudio de la geometría dinámica con recursos informáticos es frecuente el uso de justificaciones de propiedades y procedimientos mediante el arrastre de las figuras, siendo por tanto, en gran medida justificaciones visuales.

En el caso de la figura 2, teniendo en cuenta el significado atribuido a los conceptos de frente, derecha y atrás, los convenios de representación plana de objetos tridimensionales, y las propiedades de las proyecciones ortogonales se debe aceptar que si el observador se pone detrás del edificio, a su izquierda verá un solo cubo, al centro tres cubos apilados y a su derecha dos cubos apilados (argumento). Por tanto, la representación plana de la figura que vería desde atrás sería la C.

## 4. VISUALIZACIÓN Y ESPECIFICACIONES CONTEXTUALES

Los objetos visuales descritos en la sección 3 pueden ser clasificados desde distintos puntos de vista según los contextos y juegos de lenguaje en que intervienen. En el marco del EOS se consideran las siguientes dualidades aplicables a los objetos matemáticos:

1) Personal e institucional, individuales o idiosincrásicos de una personal, sociales o compartidas por un colectivo, o comunidad.
2) Ostensivo (perceptible), no ostensivo (inmaterial, mental o ideal). Aqui se tiene en cuenta las distinciones entre representaciones materiales (artefactos materiales o simbólicos) y las representaciones mentales (esquemas, ...), o sociales (reglas o hábitos compartidos en una institución o comunidad de prácticas)
3) Unitario y sistémico. Las imágenes son vistas como un todo y se «opera» con ellas como un todo unitario, o bien son vistas como sistemas formados por partes, y se opera con las partes.
4) Extensivo - intensivo (ejemplar - tipo; particular - general). Una imagen puede ser usada como icono de una clase o tipo de objetos visuales.

5) Expresión - contenido (función semiótica; representación - significación). Ayuda a distinguir entre las representaciones visuales y los objetos no ostensivos representados.

Como indicamos en la figura 3 aplicaremos las dualidades contextuales mencionadas a los objetos y procesos implicados en la visualización. La aplicación de estas «miradas» complementarias permite articular de manera sistemática diversos puntos de vista sobre la visualización aportados por otros marcos teóricos, como mostraremos a continuación.

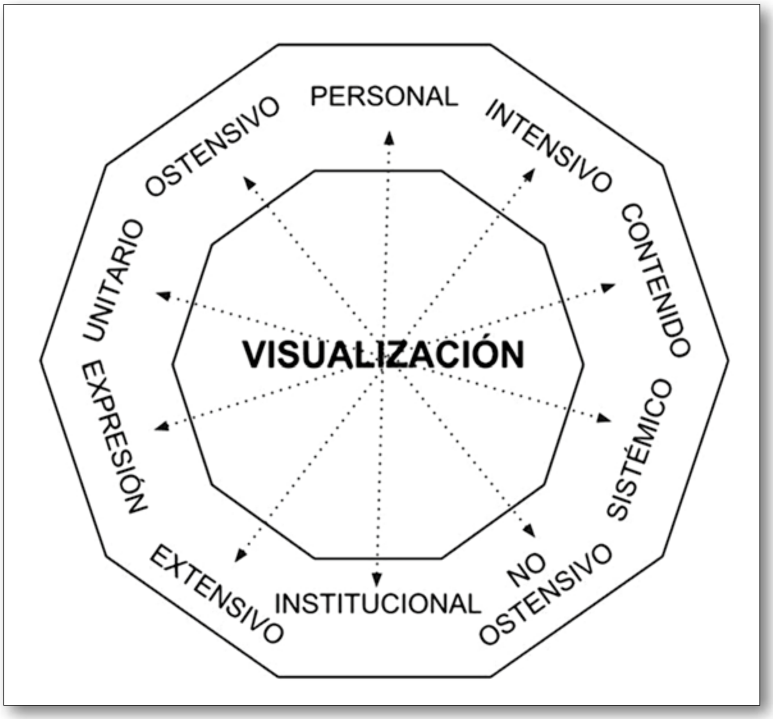



Fig. 3. Especificaciones contextuales de la visualización

## Dualidad personal – institucional

La dialéctica entre cognición individual y social o cultural es interpretada en el EOS mediante la dualidad personal - institucional. Nuestro planteamiento de la visualización no entra en la discusión filosófica y psicológica del funcionamiento interno de la mente y si la información es representada y procesada de manera icónica o de otro modo (Thomas, 2010). La dualidad personal - institucional introducida en el EOS postula una forma de existencia de los objetos matemáticos que califica de personal o mental (sin entrar en detalles sobre la efectiva naturaleza de tales objetos) y otra forma de existencia que considera como institucional, a los cuales se les atribuye una naturaleza intersubjetiva/normativa.

En las investigaciones cognitiva interesadas en el papel de la percepción, y en consecuencia en la visualización, en los distintos campos de conocimiento, y también en educación matemática, se ha introducido la noción de «image schema» (esquema-imagen)[2]:

2. Preferimos «traducir» 'image schema' con una palabra compuesta al considerar que refleja mejor el significado de la expresión inglesa, u otras similares usadas por otros autores como, image schemata o types of imagery.

> «An image schema is a recurring dynamic pattern of our perceptual interactions and motor programs that gives coherence and structure to our experience. Experience is to be understood in a very rich, broad sense as including basic perceptual, motor-program, emotional, historical, social and linguistic dimensions». (Johnson 1987: xiv, xvi)

Nuestras experiencias corporales/visuales se incrustan en nuestra mente en forma de esquemas-imagen que apoyan y condicionan los procesos de conceptualización y de razonamiento proposicional/analítico. Algunos ejemplos de esquemas- imagen: continente/contenido; parte/todo; inicio/trayectoria/final; objeto. Los esquemas - imagen orientacionales como, centro - periferia, dentro - fuera, frente - detrás, arriba - abajo; son de particular interés para organizar los sistemas de objetos que se ponen en juego en las representaciones gráficas de funciones (Font, Bolite y Acevedo, 2010).

Los esquemas - imagen son estructuras cognitivas/mentales que se generan en el cerebro de los individuos como resultado de ciertas prácticas y están, por tanto, impregnados de percepción. El objeto matemático (inmaterial) también emerge de las prácticas de las personas implicadas ante cierto tipo de situaciones - problemas, pero tiene unas caracteristicas formales, normativas, convencionales, socio-epistémicas, que no concuerdan con las connotaciones empiristas de los esquemas - imagen y las visualizaciones.

La concepción del conocimiento matemático según el enfoque de la cognición corporeizada (Jonhson, 1987; Lakoff y Nuñez, 2000) impregna al objeto matemático de matices empíricos a través del lenguaje metafórico que resalta las raíces empíricas del conocimiento, pero que oculta su verdadera naturaleza. Se requiere, por tanto, controlar conscientemente el uso de las metáforas visuales o corporeizadas transmitidas por los esquemas - imagen. El principal conflicto con las esquemas - imagen es que su uso metafórico puede pasar desapercibido, y el profesor y los alumnos no distinguen entre el dominio fuente (perceptual) y el diana (matemático) (Font, Bolite y Acevedo, 2010).

## Dualidad ostensivo – no ostensivo

La dualidad ostensivo - no ostensivo postula que cualquier objeto matemático (ideal, abstracto) lleva asociado, como la cara de una moneda lleva asociada su correspondiente cruz, uno o diversos objetos ostensivos. Estos pueden ser símbolos o inscripciones, o representaciones visuales más o menos ricas indicadoras de su composión y estructura.

El EOS concede un papel esencial a la «ostensión» en la práctica matemática al postular que cada objeto matemático (abstracto, ideal, general, inmaterial, no ostensivo) tiene una faceta ostensiva, esto es, mostrable públicamente, visualmente o de otro modo perceptivo. Esta ostensión puede consistir en las inscripciones simbólicas, necesarias para representar los objetos, entendidos como un todo unitario, y poder «operar» con ellos en progresivos niveles de generalidad, o bien visualizaciones icónicas o diagramáticas que muestren la estructura del objeto, entendido de manera sistémica.

Sin embargo, entre las facetas ostensiva y no ostensiva de los objetos matemáticos hay relaciones dialécticas delicadas. Fischbein (1998) analiza la tensión entre los aspectos formales/ conceptuales de los objetos matemáticos y los aspectos figurales en el caso de los objetos geométrico-espaciales, o sea, entre lo inmaterial/conceptual y lo material/ visual. Por una parte, el objeto matemático es inmaterial, invisible, pero depende para su «existencia» de lo material, visible. Esta es una manera de expresar la paradoja cognitiva del aprendizaje matemático que describe Duval (2006).

El EOS propone una solución a esta paradoja asumiendo los postulados pragmatista - antropológicos (Peirce, 1965; Wittgenstein, 1953) para los objetos matemáticos. Como se describe en Font, Godino, Planas y Acevedo (2010), la proyección metafórica a partir de esquemas-imagen (Lakoff y Nuñez, 2000) es un aspecto importante para explicar la emergencia de los objetos matemáticos (considerados como no ostensivos, ideales, abstractos, inmateriales y diferentes de sus representaciones ostensivas), pero que es insuficiente para describir el complejo proceso que permite su emergencia. En este artículo no entraremos a explicar este complejo proceso de emergencia, nos limitaremos a resaltar que, al ser el dominio de partida de la proyección metafórica un esquema-imagen, el resultado de la proyección, aunque tenga naturaleza no ostensiva, abstracta, inmaterial, está contaminado, en muchos casos, de connotaciones visuales. En el caso de la tarea de la figura 2, se debe proyectar metafóricamente el esquema- imagen orientacional (Font, Bolite, Acevedo, 2010) para entender la tarea y, por otra parte, dicha proyección metafórica se halla fosilizada en el lenguaje técnico utilizado para formular la tarea (vista desde atrás).

## Unitario – sistémico

Esta dualidad está ligada a los procesos de reificación, en el sentido de constitución de objetos por parte de un sujeto individual como una totalidad, la cual interviene como tal en nuevas actividades y procesos, y al proceso inverso de descomposición de una entidad sistémica en sus elementos constituyentes.

La figura 2, donde se presenta la perspectiva isométrica de un supuesto cuerpo espacial, permite ilustrar el juego dialéctico entre las facetas unitaria - sistémica de un objeto, en este caso, visual. El cuerpo espacial (aqui imaginado) y el dibujo en perspectiva presentado ostensivamente, intervienen como una globalidad, como un todo unitario que puede ser contemplado desde diferentes puntos de vistas. La solución de la tarea y su justificación, la vista C es la correcta porque es la única que puede corresponder a la vista desde atrás, requiere considerar el cuerpo, y su perspectiva global como un sistema formado por piezas dispuestas de una forma particular. Descomponer y recomponer un cuerpo o una figura geométrica en sus partes constituyentes son operaciones características de la visualización. En el caso de esquemas y diagramas, como las figuras 1 y 4, la visualización resalta las partes constituyentes del sistema de objetos representados y las nuevas entidades que se constituyen: las configuraciones cognitivas y epistémicas de objetos y procesos.

## Extensivo – intensivo

Un objeto se dice que es extensivo si interviene en una práctica matemática como un ejemplar particular, mientras que se dice que es intensivo si interviene como un tipo, clase o generalidad. Estos atributos de los objetos matemáticos, emergentes de los procesos duales de particularización y generalización, son relativos al juego de lenguaje en que participan, y no entidades absolutas.

Con la figura 4, en la que se presenta una «demostración visual» de un teorema matemático, se puede ilustrar claramente el funcionamiento de esta dualidad. El triángulo dibujado, sus ángulos, la recta paralela a uno de los lados, son objetos visuales particulares. Sin embargo, están en representación de *cualquier* triángulo, como también las operaciones que se hacen con el dibujo se supone que son operaciones que se pueden realizar con cualquier triángulo. Estas suposiciones son las que permiten concluir que, en efecto, la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a un ángulo llano. Fischbein y Nachlieli (1998) resaltan la tensión entre los ejemplos prototípicos, las metáforas, los paradigmas y analogías y los objetos generales a los cuales refieren. Tales concreciones y materializaciones son esenciales en los procesos de invención y comunicación matemática, pero, sin embargo, es necesario controlar su uso mediante las definiciones y reglas previamente asumidas.

## Dualidad expresión – contenido

La noción de representación es introducida en el EOS mediante la dualidad expresión - contenido, como un tipo particular de relación entre los objetos primarios introducidos en el modelo; usualmente el antecedente de tales relaciones serán entidades lingüísticas, pero también pueden ser otros tipos de entidades. La expresión puede ser una imagen, un dibujo, un diagrama, ..., que representa (metafórica o icónicamente) un objeto físico, una figura geométrica, una estructura conceptual. Se trata de comprender una realidad compleja en términos de otra que la representa y con la que se opera.

Los distintos elementos que componen la representación visual de la figura 2 funcionan como expresión (significante) de diversas funciones semióticas cuyos contenidos (significados) son objetos geométricos no ostensivos, como son los diversos conceptos y propiedades indicados en la sección 3, usualmente definidos y enunciados de manera analítica.

La dualidad expresión - contenido da cuenta del uso metafórico de objetos visuales (configuraciones) para comprender una realidad abstracta, no ostensiva, en términos de otra realidad ostensiva, visual. Mediante la figura 1 (visualización y objetos matemáticos) y la figura 4 (especificaciones contextuales de la visualización) se quiere resaltar algunos aspectos estructurales (componentes y relaciones) que configuran las nociones cognitivas y epistémicas del EOS. Es claro que el uso del pentágono (figura 1) y del decágono (figura 3) es meramente metafórico.

# 5. ANÁLISIS DE TAREAS DE VISUALIZACIÓN

En esta sección analizaremos dos tareas matemáticas que ponen en juego procesos de visualización. Se trata de dos demostraciones «sin palabras»: 1) la demostración algebraica y visual de que la suma de los *n* primeros números impares es $n^2$; 2) la demostración de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es un ángulo llano (figura 4).

El análisis se centra en mostrar la trama de objetos visuales y no visuales que se ponen en juego, y las relaciones que se establecen entre los mismos, o sea, el sistema semiótico que forman. En sístesis se trata de desvelar los conocimientos que se ponen en juego en la resolución y la sinergia que se establece entre los objetos visuales y analíticos.

## Tarea aritmético – algebraica

*Enunciado:* ¿Cuánto suman los *n* primeros números impares?

*Solución 1:* Sea $S_n$ dicha suma: $S_n = 1 + 3 + ... + (2n – 1)$. Si escribimos dicha suma con los términos permutados de orden, $S_n = (2n – 1) + (2n – 3)+ ... + 1$, y sumamos ambas expresiones obtenemos, $2S_n = 2n + 2n + ... + 2n = n(2n) = 2n^2$. Por tanto, $S_n = n^2$. Suponiendo que esta fórmula es válida para n, se comprueba que es también válida para el siguiente, n+1; en efecto, $S_{n+1} = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$.

*Análisis ontosemiótico de la solución algebraica*

Esta tarea matemática, así formulada, no es de tipo visual de acuerdo con la caracterización presentada en la sección 3. En el enunciado se pone en juego el concepto de número impar, y el conjunto de los *n* primeros números impares (objeto no ostensivo e intensivo, referido mediante la variable *n*). En la búsqueda de la conjetura $S_n = n^2$, se comienza por escribir de manera alfanumérica la expresión de la suma de los *n* primeros números impares, $S_n = 1 + 3 + ... + (2n – 1)$, poniendo en juego una propiedad de dichos números: un número impar cualquiera se puede expresar en función de los números pares, $2n – 1$.

La expresión alfanumérica $S_n = 1 + 3 + ... + (2n – 1)$ es un objeto ostensivo que refiere a un sistema de objetos no ostensivos (secuencia de números impares, suma, resta y multiplicación) relacionados entre sí para producir un nuevo objeto no ostensivo, resultado de la suma. Este sistema de objetos no ostensivos (por tanto, no visuales) está «representado» o referido mediante la inscripción $S_n = 1 + 3 + ... + (2n – 1)$, la cual globalmente considerada funciona, en el sentido Peirceano, como un diagrama de la indicada estructura conceptual y procedimental.

En el siguiente paso se aplica un procedimiento claramente visual: permutar el orden de escritura de los sumandos, lo cual ayuda a «ver» que en la suma de ambas expresiones todos los términos suman lo mismo, $2n$. El resto del proceso de resolución se hace mediante cálculos algebraicos y aplicación del principio de inducción matemática, los cuales permiten establecer que la conjetura es válida para cualquier número natural. Tales propiedades y procedimientos son claramente analíticos.

*Solución 2*:

Brown (1997, p. 169) presenta el diagrama de la figura 4 como la «demostración con imágenes» del teorema: $1 + 3 + ... + (2n -1) = n^2$.

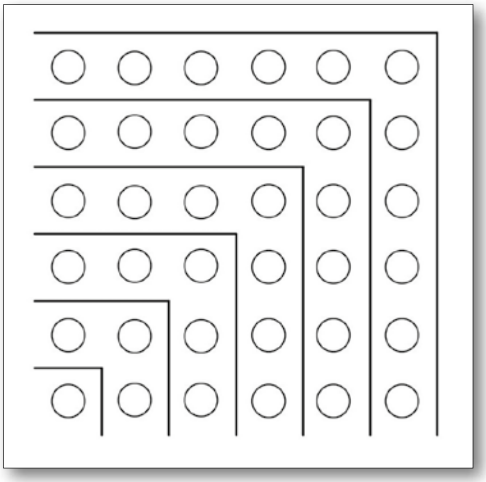


Fig. 4.

## Análisis ontosemiótico de la solución visual

Para «ver» la demostración del teorema en la figura es necesario realizar diversas operaciones visuales e interpretaciones semióticas que pueden no ser percibidas de manera inmediata por los alumnos. Una explicación de la figura y del proceso de inducción sugerido mediante un lenguaje analítico se revela como necesario, sobre todo cuando se requiere establecer que el resultado de la suma $n^2$ es válido para todo número natural.

Si «vemos» la figura como una secuencia de retículos cuadrados encajados que, partiendo de 1 punto, se van añadiendo sucesivamente 3, 5, 7, 9, 11 puntos, se puede observar que el número total de puntos en cada paso se corresponde con 1, $2^2$, $3^2$, etc. Para el paso 6º (que corresponde a la suma del impar $11 = 2\times6–1$) se observa que la suma de puntos es $36 = 6^2$.

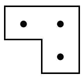
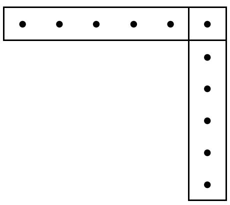
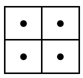
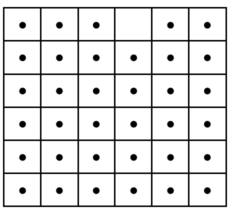
El primer término de la serie a sumar, 1, se debe asociar con el punto del ángulo inferior izquierdo. La suma del segundo término, 3, supone añadir 3 puntos más que se deben disponer de una manera precisa para formar el cuadrado de lado 2 colocado en la esquina inferior izquierda.

Es necesario ver que los 4 puntos de dicho cuadrado se obtienen como la suma $1 + (2 \times 2–1)$ para que de este modo se pueda entender que finalmente se está sumando hasta el término general $(2\times n– 1)$, o sea, los $n$ primeros números impares. Reconocer que dicha suma es $n^2$ requiere justificar que se están agrupando $n$ figuras cuadrangulares cuyas «áreas» (discretas) se calculan mediante el producto lado × lado.

En la tabla 1 indicamos algunas de las funciones semióticas implicadas en la interpretación y comprensión de la prueba visual del teorema, mostrando los objetos analíticos que se deben poner en juego para que efectivamente el diagrama muestre la estructura del teorema y su justificación. El diagrama gráfico se presenta como un objeto unitario que se debe *descomponer* en unidades semióticas más elementales de dos maneras diferentes: como secuencia de regiones angulares que expresan los impares en función de los pares siguientes, y como secuencia de cuadrados de lado los naturales correspondientes. El diagrama tiene un carácter necesariamente *particular*, en este caso, limitado al caso de la suma de los seis primeros números impares, pero es una ayuda valiosa para inferir que la propiedad es válida para cualquier número finito de sumandos.

Se debe reconocer, no obstante, el papel heurístico que desempeña la figura para comprender la naturaleza de la tarea y sobre todo para conjeturar que la suma total de puntos (números impares) es $n^2$.

Tabla 1.
Funciones semióticas implicadas en la demostración visual

| Expresión visual | Contenido analítico |
|---|---|
|  | 1 (primer número impar) |
|  | $3 = 2 \times 2 - 1$<br>(concepto de número tres como segundo impar, expresado de manera analítica) |
| … | … |
|  | $11 = 2 \times 6 - 1$<br>(concepto de número once como sexto impar, expresado de manera analítica) |
|  | $1 = 1^2$ (primer número impar expresado como cuadrado de sí mismo) |
|  | $4 = 2^2 = 1 + (2 \times 2 - 1)$<br>(la suma de los dos primeros números impares es igual a $2^2$; comprobación visual de las condiciones de aplicación de la fórmula del área de un cuadrado de lado 2) |
| … | … |
|  | $36 = 6^2 =$<br>$= 1 + (2 \times 2 - 1) + (2 \times 3 - 1) + (2 \times 4 - 1) + (2 \times 5 - 1) + (2 \times 6 - 1) =$<br>$= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$<br>(la suma de los seis primeros números impares es igual a $6^2$; comprobación visual de las condiciones de aplicación de la fórmula del área de un cuadrado de lado 6) |

Con este ejemplo se muestran las relaciones de cooperación entre objetos visuales y no visuales en la actividad matemática realizada para resolver un problema aritmético – algebraico. «Como los telescopios ayudan a la simple vista, algunos diagramas son instrumentos (mas bien que representaciones) que ayudan al ojo de la mente» (Brown, 1997, p. 174). Brown analiza demostraciones de este y otros teoremas de teoría de números y reconoce las limitaciones y controversias que tales «demostraciones» pueden suscitar desde el punto de vista matemático. Reconoce que las imágenes usadas refieren a casos particulares ($n = 6$), pero al mismo tiempo funcionan como *símbolos* para cualquier $n$. Pero esto supone, desde nuestro de vista, poner en juego simultáneamente recursos analíticos para que efectivamente la argumentación constituya una demostración del teorema.

## Tarea geométrica

La figura 5 presenta una «demostración» de una propiedad geométrica: la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a un ángulo llano.

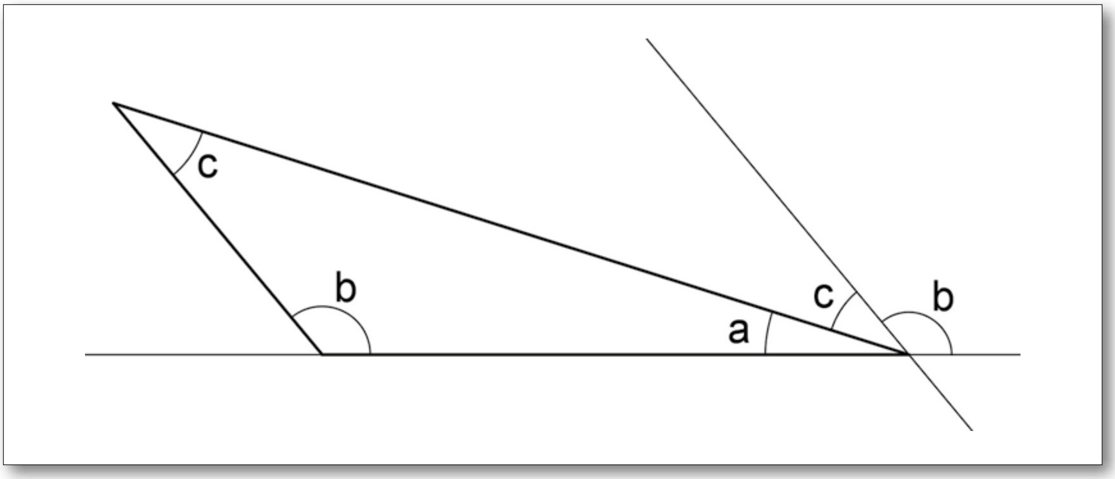



Fig. 5. Suma de los ángulos interiores de un triángulo

Se ponen en juego los siguientes objetos visuales:

- Dibujo de un triángulo, destacando sus tres ángulos designados por las letras *a, b, c*. Estas letras son símbolos que refieren a las amplitudes angulares mediante su colocación en las proximidades de las ángulos respectivos (funcionan también como índices).
- Trazado de un segmento paralelo a uno de los lados.
- Reconocimiento de la igualdad de los pares de ángulos nombrados con las letras *b* y *c*.
- La operación de composición de los tres ángulos *a, b, c*, para formar el ángulo suma.
- Reconocimiento que el ángulo suma es igual a un ángulo llano.

La «demostración» se basa en las siguientes «afirmaciones» implícitas sobre objetos visuales, que se deben expresar en lenguaje analítico para comprender la demostración:

- El ángulo *c* ha sido girado y trasladado de tal modo que se coloca de manera contigua al *a*; la amplitud angular de *c* se conserva.
- El ángulo *b* se ha trasladado hasta colocarlo contiguamente al *c* previamente movido; la amplitud de *b* se conserva.
- Se *ve* que los tres ángulos están dispuestos contiguamente y sin solapamientos y que forman conjuntamente un ángulo llano.

La demostración del teorema involucra además otros procesos y objetos no ostensivos (visuales y no visuales):

– El triángulo trazado es un ejemplar genérico de cualquier triángulo (dualidad particular – general; proceso de generalización). La figura triangular es vista como un sistema formado por tres ángulos, mientras que el ángulo llano participa como entidad unitaria, resultado de la composición de la suma de los tres ángulos del triángulo (dualidad unitario – sistémico).
– Los dibujos y las operaciones visuales realizadas con ellos refieren a otras entidades no ostensivas diferentes:
  • Conceptos de triángulo, ángulo, recta paralela, ángulo llano, suma de amplitudes angulares; dichas entidades están reguladas por una definición, normalmente expresada de manera analítica.
  • Propiedades: invariancia de la amplitud angular por giros y traslaciones (dualidad ostensivo – no ostensivo).
– Los movimientos rígidos de los ángulos *b* y *c* son inferidos de propiedades de los ángulos formados al intersectar dos rectas paralelas (recta auxiliar trazada por uno de los vértices siendo paralela a un lado) por una secante (dualidad ostensivo – no ostensivo).

Esta tarea y su solución forman un sistema semiótico (una configuración de objetos y procesos) en el que participan objetos visuales icónicos geométricos, a los cuales se les aplican operaciones de descomposición y recomposición. El papel argumentativo que desempeñan los objetos visuales está, sin embargo, apoyado necesariamente en otros objetos y procesos analíticos aplicados en las normas que regulan los conceptos y proposiciones que intervienen en la práctica matemática.

Davis (1993) defiende la necesidad de reconocer un mayor papel a la visualización en la propia práctica matemática, analizando ejemplos de «teoremas visuales» como el mostrado en la figura 4. Considera que las relaciones entre el mundo visual y el mundo de las estructuras lógicas deductivas son muy sutiles. Sostiene que ha pasado el día en el que se afirmaba que la demostración matemática como usualmente se practica es la única certificación de la verdad matemática. La cuestión es reconocer la utilidad de la visión en dichos procesos y sobre todo concederle un estatus en el proceso de descubrimiento.

Nuestro análisis de las demostraciones visuales concuerda con la posición de Davis, Brown y otros autores, pero amplia además dicha perspectiva desvelando la intervención necesaria de elementos analíticos en dichas demostraciones, esto es, mostrando que los pensamientos visual y analítico se encuentran sinérgicamente entrelazados.

## 6. SÍNTESIS E IMPLICACIONES PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

El fin último de los esfuerzos de investigación en didáctica de las matemáticas es la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Para ello es necesario adoptar una perspectiva global que tenga en cuenta la diversidad de factores que condicionan tales procesos. Aunque fijemos nuestra atención en un aspecto específico, por ejemplo, el papel de la visualización en el estudio de las matemáticas, será necesario tener en cuenta cómo interacciona la visualización con otros lenguajes y formas de pensamiento, su dependencia de factores culturales, recursos tecnológicos, etc. De particular importancia será la posición que se adopte sobre el papel que desempeña la visualización en la propia actividad de producción y comunicación matemática, su papel en la formación de conceptos, procedimientos y modos de justificación de las proposiciones matemáticas.

Como síntesis del análisis realizado en este trabajo sobre la visualización podemos decir que la configuración de objetos y procesos puestos en juego en la realización de una práctica matemática por un sujeto,

(1) Siempre involucra lenguajes analíticos en mayor o menor medida, aunque la tarea refiera a situaciones sobre el mundo perceptible. Esto es así por el carácter esencialmente regulativo-sentencial de los conceptos, proposiciones y procedimientos matemáticos. El ejemplo de la demostración del teorema sobre la suma de los ángulos interiores de un triángulo (figura 4) ilustra esta afirmación.
(2) Una tarea no visual puede ser abordada, al menos parcialmente, mediante lenguajes visuales los cuales permiten expresar de manera eficaz la organización o estructura de la configuración de objetos y procesos puestos en juego, especialmente mediante diagramas o con el uso metafórico de iconos e índices.

En consecuencia, la configuración de objetos y procesos asociados a una práctica matemática estará formada usualmente por dos componentes, uno visual y otro analítico, los cuales se apoyan sinérgicamente en la solución de la tarea correspondiente (figura 6). El componente visual puede desempeñar un papel clave en la comprensión de la naturaleza de la tarea y en el momento de formulación de conjeturas, mientras que el componente analítico lo será en el momento de generalización y justificación de las soluciones. El grado de visualización puesto en juego en la solución de una tarea dependerá del carácter visual o no de la tarea y también de los estilos cognitivos particulares del sujeto que la resuelve, como han puesto de manifiesto diversas investigaciones (Krutestkii, 1976; Presmeg, 1986; Pitta-Pantazi y Christou, 2009).

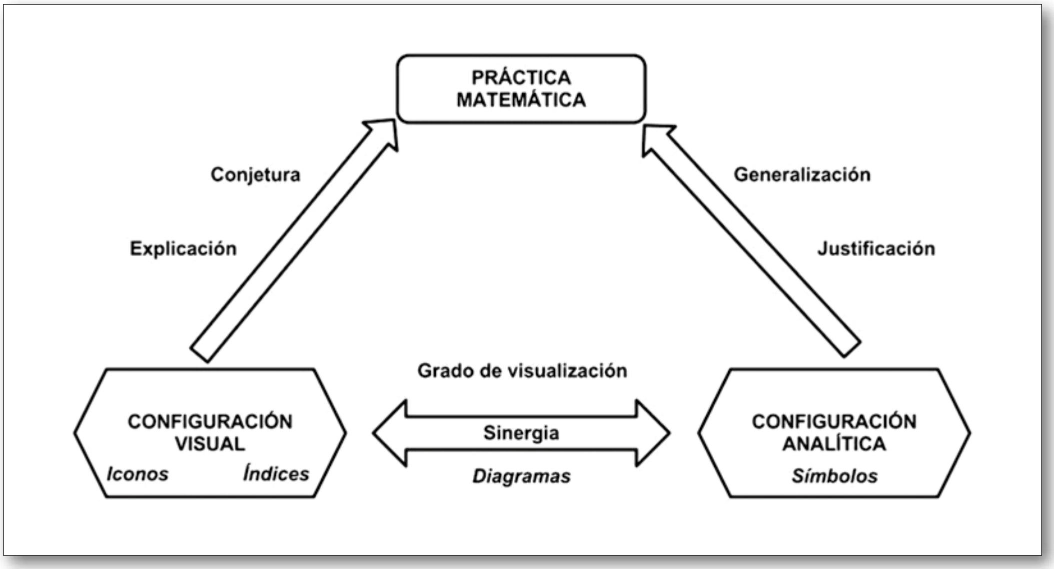



Figura 6. Sinergia entre configuraciones visuales y analíticas

El análisis que hemos realizado de la visualización, usando algunas herramientas del EOS, aporta una visión complementaria respecto de otras perspectivas más centradas en la descripción de los estilos cognitivos visuales/analíticos y su influencia en la resolución de problemas. Nuestro objetivo ha sido profundizar en la naturaleza de la visualización y su relación con las formas analíticas-secuenciales del pensamiento matemático. Hemos tratado de caracterizar la práctica matemática en tareas que involucran visualización, sean estas realizadas por un sujeto individual (conocimiento subjetivo), o compartida en un marco institucional (conocimiento objetivo), identificando los tipos de objetos y procesos que se ponen en juego en la realización de dicha práctica.

La aplicación de la dualidad ostensivo - no ostensivo a los distintos tipos de objetos matemáticos primarios (problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) proporciona un punto de vista nuevo sobre el papel de la visualización en la práctica matemática. En un primer paso hemos visto necesario asumir la distinción Peircena de los tipos de signos para distinguir entre lenguajes visuales, caracterizados por la presencia de índices, iconos y diagramas, y lenguajes analíticos, los cuales se basan en el uso de símbolos. Seguidamente consideramos necesario distinguir entre problemas/tareas visuales de las no visuales o analíticas; las primeras refieren a situaciones en las que intervienen objetos del mundo sensible (cuerpos físicos, relaciones espaciales y representaciones visuales); en las segundas intervienen esencialmente entidades lógicas, numéricas, analíticas. Estas distinciones se trasladan también al resto de las entidades primarias (reglas y justificaciones).

Una tarea visual se puede abordar con medios analíticos y viceversa, una analítica se puede abordar con medios visuales. Es más, en la realización de una práctica visual intervienen de hecho objetos no visuales, y en la realización de una práctica analítica pueden intervenir objetos visuales, particularmente diagramas. Esta es una consecuencia de la aplicación de la dualidad ostensivo - no ostensivo a los distintos tipos de objetos matemáticos primarios, la cual da cuenta de la dialéctica entre lo visual y analítico. Para cualquier tipo de objeto matemático primario se postula la presencia o intervención en su constitución y funcionamiento de una faceta ostensiva (pública, perceptible, simbólica o visual) y otra faceta no ostensiva (normativa, lógica, ideal, mental) las cuales interaccionan de manera sinérgica, como se ha puesto de manifiesto en el análisis de los ejemplos de la sección 5. Esto es así por la asunción del presupuesto antropológico sobre la naturaleza de los objetos matemáticos: tales objetos son entendidos como las reglas (gramaticales) de uso de los lenguajes simbólicos o visuales mediante los cuales se describen los mundos que la matemática modeliza.

Una consecuencia educativa de nuestro análisis es que los sujetos cuyo estilo cognitivo es básicamente analítico (respectivamente, visual) deberían ser instruidos para desarrollar habilidades visuales (respectivamente, analíticas), porque ambas habilidades son útiles para la práctica matemática en diferentes momentos de su realización. Se trataría pues de favorecer el desarrollo del estilo cognitivo harmónico que describió Krutestkii (1976), el cual combina características del visual y analítico.

Parece claro que la visualización penetra en todas las ramas de las matemáticas, no solo en la geometría, en coordinación con otras formas de expresión, en particular los lenguajes analíticos/secuenciales. También está presente en los diversos niveles de estudio matemático, sea en la educación elemental, como superior o incluso profesional. No obstante, el análisis de la eficacia relativa de los modos visuales de razonamiento respecto de los modos analíticos, según los tipos de tareas y fases de estudio, es un tema que requiere investigación. El interés por el uso de representaciones icónicas y diagramáticas se ha generado por la suposición de que de algún modo se consideran más efectivas que las representaciones lógicas tradicionales para cierto tipo de tareas. Ciertamente, por ejemplo, un mapa es una gran ayuda para la navegación, más que la descripcion verbal de un paisaje. Sin embargo, aunque existen ciertas ventajas psicológicas en el uso de diagramas, son a menudo inefectivos como representaciones de objetos y relaciones abstractas (Shin y Lemon, 2008).

El papel de la visualización en el trabajo matemático, profesional o escolar, es complejo ya que está frecuentemente imbricado con el uso de inscripciones simbólicas, que aunque «se vean», su significación es puramente convencional. El problema tiene relevancia incluso cuando la visualización se refiere al uso de objetos visuales, los cuales interaccionan no solo con las inscripciones simbólicas, sino también y principalmente con el entramado de objetos conceptuales, procedimientales, proposicionales y argumentativos que se ponen en juego en las correspondientes configuraciones.

El profesor, y previamente los diseñadores curriculares y formadores de profesores, debe tomar conciencia del papel de la visualización, y en general la ostensión, en la construcción y comunicación matemática. Por una parte, no se debe confundir el objeto matemático con sus representaciones ostensivas, sean visuales o de otro tipo. Es necesario tener en cuenta la naturaleza no ostensiva, inmaterial, de los objetos matemáticos y las relaciones dialécticas complejas que se establecen entre estos objetos y sus representaciones materiales. Al mismo tiempo se tiene que saber que no hay objeto matemático sin sus diversas representaciones, porque tal objeto no es otra cosa que las reglas de uso de dichas representaciones.

## RECONOCIMIENTO

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, EDU2010-14947, Ministerio de Ciencia e Innovación (Madrid) y de la Beca FPU, AP2008-04560.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARCAVI, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241.

BISHOP, A. J. (1989). Review of research on visualisation in mathematics education. Focus on Learning Problems in Mathematics, 11 (1), 7-16.

BROWN, J. R. (1997). Proofs and pictures. *British Journal for the Philosophy of Science, 48*, 161–180.

CLEMENTS, D. H. y BATTISTA, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. A. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 161- 2004). NCTM, Macmillan, P. C.

DAVIS, P. (1993). Visual theorems. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 333–344.

DUVAL, R. (2002) Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt, (ed.), *Representations and Mathematics Visualization,* (pp. 311-335). North American Chapter of PME: Cinvestav-IPN.

DUVAL, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103–131.

FILLOY, E. PUIG, L. y ROJANO T. (2008). *Educational algebra. A theoretical and empirical approach*. Berlín: Springer.

FISCHBEIN, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-142.

FISCHBEIN, E. y Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal in Science Education*, 20 (10), 1193-1211.

FONT, V., BOLITE, J. y ACEVEDO, J. (2010). Metaphors in mathematics classrooms: analyzing the dynamic process of teaching and learning of graph functions. *Educational Studies in Mathematics,* 75 (2), 131-152.

FONT, V., GODINO, J. D., PLANAS, N. y ACEVEDO, J. I. (2010). The object metaphor and sinecdoque in mathematics classroom discourse. *For the Learning of Mathematics,* 30(1), 15-19.

GODINO, J. D. (2002). Un Enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 22 (2/3), 237-284.

GODINO, J. D., BATANERO, C., y FONT, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 39(1–2), 127–135.

GODINO, J. D., FONT, V., WILHELMI, M. R. y LURDUY, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, 77 (2), 247-265.

GUTIÉRREZ, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference* (1, pp. 3-19), Valencia.

GUZMÁN, M. (1996) *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático.* Pirámide, Madrid.

HERSHKOWITHZ, R., PARZYSZ, B. y DORMOLEN, J. VAN (1996). Space and shape. En, A. J. Bishop et al. (Eds), *International Handbook of Mathematics Education*, (pp. 161-201). Dordrecht: Kluwer A. P.

JOHNSON, M. (1987). *The body in the mind: The bodily basis of meaning, imagination, and reason*. Chicago, IL: Chicago University Press.

KRUTETSKII, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* Chicago: The University of Chicago Press.

LAKOFF, G., y Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* New York, NY: Basic Books.

PEIRCE, C. S. (1965). *Obra lógico-semiótica*. Madrid: Taurus, 1987.

PITTA-PANTAZI, D. y CHRISTOU, C. (2009). Cognitive styles, dynamic geometry and measurement performance. *Educational Studies in Mathematics,* 70, 5-26.

PRESMEG, N. (1986). Visualisation and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 297-311.

PRESMEG, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), H*andbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp.210-213). UK: Sense Publishers.

RIVERA, F. D. (2011). *Toward a visually-oriented school mathematics curriculum. Research, theory, practice, and issues*. Dordrecht: Springer.

SHIN, S-J. y LEMON, O. (2008). Diagrams. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. http://plato.stanford.edu/entries/diagrams/

THOMAS, N.J.T. (2010). Mental imagery. *Stanford Encyclopedia of Philosophy. http://plato.stanford.edu/entries/mental-imagery/*

WITTGENSTEIN, L. (1953). *Philosophical investigations.* New York, NY: The MacMillan Company.

## INFORMACIÓN SOBRE LOS AUTORES

JUAN D. GODINO. Catedrático de Universidad. Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada. Correo electrónico: jgodino@ugr.es

JOSÉ A. CAJARAVILLE. Profesor Titular de Universidad. Departamento de Didáctica das Ciencias Experimentais. Área de Didáctica da Matemática. Facultad de Ciencias da Educación. Universidade de Santiago de Compostela. Correo electrónico: ja.cajaraville@usc.es

TERESA FERNÁNDEZ. Profesora Titular de Escuela Universitaria. Departamento de Didáctica das Ciencias Experimentais. Área de Didáctica da Matemática. Facultad de Ciencias da Educación. Universidade de Santiago de Compostela. Correo electrónico: teref.blanco@usc.es

MARGHERITA GONZATO. Becaria FPU. Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada. Correo electrónico: mgonzato@ugr.es

# AN ONTO-SEMIOTIC APPROACH TO VISUALIZATION IN MATHEMATICS EDUCATION

Juan D. Godino, Margherita Gonzato
Universidad de Granada
jgodino@ugr.es • mgonzato@ugr.es
José A. Cajaraville, Teresa Fernández
Universidad de Santiago de Compostela
ja.cajaraville@usc.es • teref.blanco@usc.es

Visualization is a research field of growing relevance in mathematics education. However, the study of its nature and relationships to other ways of registering and presenting information is still a subject of reflection. In this article we propose a way of understanding visual language and thinking, and their relationships with analytical language and thinking, using the theoretical tools of the «onto-semiotic approach» to mathematical knowledge. We suggest that the notion of «visual configuration» of objects and processes, in its various contextual forms, allows to articulate different perspectives of visualization, to understand its relationships with other analytical forms of expression and to recognize different levels of visualization in mathematical activity.

Visualization is firstly, analyzed, from the point of view of the primary objects involved in the same, that is, the types of problem situations (tasks), linguistic elements and material objects, concepts, propositions, procedures and arguments in which is said that intervenes visualization. In mathematical practices visual objects and other non-visual objects (analytical or otherwise) are involved. Visualization in mathematics is not reducible to seeing, but also involves interpretation, action and establishing relationships.

Secondly, visualization is analyzed by using the dualities or contextual modalities from which we can consider the types of previously identified visual objects.  In this phase we introduce the necessary distinctions between personal (cognitive), and institutional (socio-epistemic) visual objects; particular (extensive) and general (intensive) visual objects; ostensive (materials) and non-ostensive (mental, ideal, immaterial) visual objects; unitary (used as a whole) and systemic (formed by a system of structured elements) visual objects. Finally, visual objects are considered as antecedents or consequents of semiotic functions (expression and content duality).

This model of visualization is applied to analyze two mathematical tasks (a geometric and another arithmetic-algebraic task) by showing the complex relationships and synergies between the visual and analytical configurations that are brought into play in its resolution.

To conclude the analysis performed in this article, we suggest that:

(1) The configuration of objects and processes used when carrying out a mathematical practice always involves analytical languages in a greater or lesser extent, even when the task refers to perceptible world situations. This fact is essentially due to the regulatory-sentential nature of concepts, propositions and mathematical procedures.
(2) A non-visual task can be addressed, at least partially, through visual languages which enable to effectively express the organization or structure of the configuration of objects and processes used, especially with diagrams or with metaphorical use of icons and indexes.

Consequently, the configuration of objects and processes associated with mathematical practices will usually consist of two components, one visual and another analytic, which synergistically cooperate in the solution of the corresponding task. The visual component can play a key role in understanding the nature of the task and at the time of making conjectures, while the analytical component will be used in the moment of generalization and justification of solutions.

The analysis of visualization, carried out using some tools of the «onto-semiotic approach to mathematical knowledge» (Godino, Batanero and Font, 2007), provides a complementary view of other theoretical perspectives more focused on the description of visual/analytical cognitive styles and their influence on problem solving. Our aim was to explore the nature of visualization and its relation to other analytical-sequential forms of mathematical thinking.

An educational implication of our analysis is that subjects whose cognitive style is basically analytic (respectively, visual) should be instructed to develop visual skills (respectively, analytical), because both skills are useful for mathematical practice at different stages of their execution. Hence, it would be necessary to favour the development of the harmonic cognitive style, which combines visual and analytical features.

KEYWORDS*: Mathematical object, visualization, learning, understanding, analytical language and thinking*

REFERENCE: Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 39(1–2), 127–135.