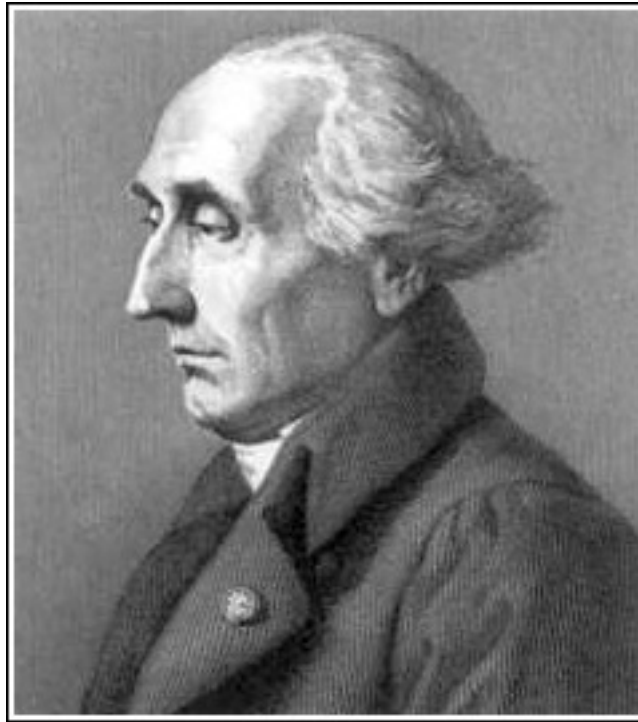


Un nou criteri per optimitzar la resolució de problemes matemàtics

11/2009 - Matemàtiques.

Els problemes de programació matemàtica intenten resoldre processos que tenen diferents possibles solucions, però només una d'elles és l'òptima, la que s'ajusta més a unes condicions prestablertes pel mateix enunciat del problema. Els procediments clàssics permeten trobar solucions òptimes en el cas de problemes convexos i no poden assegurar-ho en cap altre cas. Ara bé, si la convexitat és present en alguna forma, per exemple, quan la funció objectiu pot expressar-se com a diferència de funcions convexes, aleshores es poden descriure nous procediments que permeten calcular solucions òptimes. Un nou ús de la convexitat s'ha prè com a eix central en la discriminació de les solucions en el present estudi, per millorar l'eficiència en l'obtenció de les solucions òptimes.



Joseph Louis Lagrange (1736-1813); en el seu honor es van anomenar els Multiplicadors de Lagrange, una de les eines d'optimització de funcions de varies variables.

D'una forma general els problemes de programació matemàtica es poden definir com els del càlcul del màxim o mínim d'una funció d'una o varies variables, quan aquestes estan sotmeses a un conjunt de restriccions de diferent tipus. Un programa matemàtic s'indica en la forma següent,

$$\begin{array}{ll} \text{minimitzar} & F(x) \\ \text{subjecte a} & x \in S \subset \mathbb{R}^n, \end{array} \tag{1}$$

on, en el cas més general per nosaltres, podem pensar que S és un conjunt compacte i $F(x)$ una funció continua sobre S . L'objectiu de la programació matemàtica és localitzar entre els elements del conjunt S , anomenats solucions factibles del programa, aquells on la funció $F(x)$, anomenada funció objectiu, prengui el menor valor. Aquestes solucions, si existeixen, se les anomena solucions òptimes del programa. A la pràctica aquest concepte s'ha de precisar distingint entre solucions òptimes locals i globals. El concepte d'òptim local es defineix per comparació entre els valors de la funció objectiu en un subconjunt de les solucions factibles limitat a un entorn arbitrari de la solució. Si la comparació s'amplia a tots els elements del conjunt factible S aleshores tenim el concepte d'òptim global.

Definició 1 Donat $x_0 \in S$ i un nombre real $\epsilon > 0$, definim el conjunt

$$U(x_0, \epsilon) := \{x \in S \setminus \{x_0\} : \|x - x_0\| \leq \epsilon\}.$$

- i) x_0 és un òptim local del programa (1) si existeix un nombre real $\epsilon > 0$ tal que per tot $x \in U(x_0, \epsilon)$ tenim que $F(x_0) \leq F(x)$.
- ii) x_0 és un òptim global del programa (1) si per tot $x \in S$ tenim que $F(x_0) \leq F(x)$.

Evidentment tot òptim global és local.

Si un problema és convex, i.e., $F(x)$ és convexa i a més S és convex, se sap que cada òptim local és global. En els problemes on la convexitat de la funció objectiu o de les restriccions no poden ser comprovades, és raonable pensar que el problema pot tenir múltiples òptims locals. L'optimització global tracta de la caracterització i càlcul dels òptims globals dels problemes amb multiplicitat d'extrems. Suposem que, utilitzant les tècniques standard d'optimització local de la programació no lineal, haguem obtingut un punt estacionari del programa. En aquest punt tenim que aturar el programa ja que cap procediment local pot informar-nos si la solució obtinguda és global o no, i en aquest últim cas com continuar per obtenir un punt factible millor. Qualsevol procediment d'optimització global no pot defugir la qüestió de com transcendir un punt factible, si n'hi ha cap, o en cas contrari com evidenciar que el punt trobat és un òptim global del problema. Els mètodes d'optimització global són substancialment diferents dels mètodes locals i, entre d'altres, utilitzen eines combinatories tals com cutting-plane, branch and bound i branch and cut. Totes aquestes tècniques són costoses en temps d'ordinador.

Quan volem aplicar tècniques d'optimització global per resoldre problemes de programació matemàtica amb múltiples extrems sempre ens trobem en que la convexitat està present d'una forma o altra. Aquest és el cas si la funció objectiu es pot representar com a diferència de funcions convexes, $F(x) = f(x) - g(x)$, on $f(x)$ i $g(x)$ són convexes (funció DC), i, a més, suposem que el conjunt factible, S , és convex. Aleshores, el programa matemàtic

$$\begin{array}{ll} \text{minimitzar} & f(x) - g(x) \\ \text{subjecte a} & x \in S \subset \mathbb{R}^n \end{array} \quad (2)$$

es pot transformar, mitjançant la introducció d'una nova variable t , en un programa equivalent convex i amb una restricció "reverse convex" (és a dir, una inequació definida per una funció convexa però amb la desigualtat en sentit contrari al que hauria de tenir per que el seu conjunt solució fos convex):

$$\begin{array}{ll} \text{minimitzar} & f(x) - t \\ \text{subjecte a} & g(x) - t \geq 0, \\ & x \in S \subset \mathbb{R}^n. \end{array} \quad (3)$$

"Equivalent", en aquest cas, significa que a partir d'un mínim global de (2) es pot trobar un mínim global de (3) i viceversa. Hi ha algorismes eficients, dins el camp de l'optimització global, per resoldre aquests tipus de problemes. Ara bé, una funció DC admet infinites representacions com a diferència de funcions convexes. Només cal fixar-se en $F(x) = f(x) + f(x) - (g(x) + f(x))$; on $f(x)$ és una funció convexa qualsevol. Les preguntes que sorgeixen en aquest punt són:

- 1) és possible, donada una representació DC, trobar-ne un altre que millori l'eficiència computacional de l'algorisme que resol (3)?,
- 2) hi ha una representació DC que sigui la millor de totes?

A l'article introduïm els conceptes necessaris per respondre les anteriors preguntes en el cas els polinomis de varies variables i donem un procediment per calcular la millor representació DC d'una funció polinòmica, anomenada mínima representació DC. També es descriuen uns quants experiments numèrics, els quals mostren la importància de la mínima representació DC des d'un punt de vista de l'eficiència computacional. Un dels exemples presentats amb detall consisteix en una aplicació a un problema de generació hidroelèctrica.

Albert Ferrer (UPC), Juan Enrique Martínez Legaz

Departament d'Economia i d'Història Econòmica

"Improving the efficiency of DC global optimization methods by improving the DC representation of the objective function". Ferrer, Albert; Martínez-Legaz, Juan Enrique. J. Glob. Optim. 43, No. 4, 513-531 (2009).