IDENTIFICACIÓN DE OBSTÁCULOS PARA UN USO CON COMPRENSIÓN DEL CÁLCULO DIFERENCIAL EN FÍSICA

López-Gay, Rafael y Martínez Torregrosa, Joaquín
Departamento de Didáctica General y Didácticas Específicas de la Universidad de Alicante

1. INTRODUCCIÓN

El cálculo diferencial se usa de forma generalizada cuando se enseña física en un curso universitario. La razón no es otra que la necesidad del cálculo para abordar situaciones mínimamente complejas, más cercanas a la realidad que las tratadas en cursos elementales, aunque en muchas ocasiones esta justificación no se hace explícita y parece quedar reducida a una cuestión de rigor o abstracción en el lenguaje. Esto puede provocar importantes deficiencias y dificultades matemáticas que contribuyen a crear barreras para comprender la física y abordarla con una actitud positiva (Steinberg y otros, 1996).

Porter y Masingila (2000) afirman que los estudiantes piensan que no hay conceptos tras los procedimientos, para ellos las matemáticas consisten en realizar operaciones puntuales sobre símbolos sin significado, y reducen su aprendizaje a la memorización de algoritmos.

No hemos encontrado muchos trabajos que aborden el problema de la introducción y utilización del cálculo *en el contexto de la física*. Cabe mencionar, a modo de excepción, el interesante trabajo de un equipo pluridisciplinar y de nivel universitario sobre el concepto de diferencial (Artigue y Viennot, 1987; Groupe Didactique du CNRS, 1989) que apoya nuestra percepción inicial y nos ha servido de punto de partida para nuestro estudio.

2. OBJETIVOS

Con la intención de mejorar el uso del cálculo en la física, hemos considerado necesario previamente analizar la situación actual para identificar los obstáculos que guíen el diseño de nuestras secuencias de enseñanza. Pero, desde nuestro punto de vista, no tiene sentido realizar ese análisis sin clarificar antes en qué consiste un aprendizaje con comprensión del cálculo diferencial. Será esta clarificación la que nos dará luz sobre qué aspectos analizar y sobre qué obstáculos han de ser tenidos en cuenta si queremos cambiar la situación.

Hemos realizado un estudio histórico sobre la evolución del cálculo diferencial, en especial sobre el concepto de diferencial teniendo en cuenta su importancia en las aplicaciones físicas. Ese estudio nos ha llevado a reconocer dos importantes concepciones que aún se mantienen en la enseñanza (Leibniz y Cauchy), pero también nos ha permitido tomar como punto de partida una nueva concepción (Fréchet) para clarificar y entender lo que se hace y por qué se hace cuando se usa el cálculo en la física. Las conclusiones de ese estudio han sido presentadas con detalle en otros trabajos (Mtnez. Torregrosa y otros, 2002), aunque resumimos aquí algunas ideas necesarias para comprender mejor los resultados que se presentarán más adelante:

– Cuando se busca la relación funcional entre dos magnitudes: $\Delta y=f(\Delta x)$, la causa que obliga a usar el cálculo diferencial no es el supuesto valor más o menos pequeño de Δx o Δy sino la existencia de una relación no lineal entre ambas magnitudes

- La diferencial ($\mathrm{d}y$) no es un Δy más o menos pequeño, ni es el Δy correspondiente a un Δx más o menos pequeño, ni tampoco es el límite al que tiende Δy cuando Δx tiende a cero. La diferencial ($\mathrm{d}y$) es una estimación lineal del Δy producido por un Δx, y tiene la forma: $\mathrm{d}y=k(x)\cdot\Delta x$ o, como suele escribirse: $k(x)\cdot\mathrm{d}x$ La forma exacta de esa expresión a veces constituye una definición (por ejemplo: $\mathrm{d}W=F_r\cdot\mathrm{d}r$) y otras es una hipótesis que se deriva del análisis físico de la situación (por ejemplo: $\mathrm{d}I=-\alpha\cdot I\cdot\mathrm{d}x$).
– La diferencial es una función de dos variables (x, Δx) y puede tomar distintos valores numéricos, grandes o pequeños, según el valor de x, Δx.
– Para que la diferencial permita llegar al resultado exacto *vía* integral (límite de una serie de sumas), la pendiente de la estimación lineal ($\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$) debe coincidir con la derivada de la función (límite de un cociente de incrementos). De esta forma, la derivada puede interpretarse como un cociente diferencial.

La clarificación realizada nos ha llevado a identificar cuáles serían los indicadores de una comprensión adecuada del concepto de diferencial en el campo de la física, sea cual sea la concepción que se utilice:

1. **Saber cuándo y por qué se hace necesario su uso,** es decir, conocer cuál es el problema que hace insuficiente el cálculo ordinario. En concreto, saber que es necesario recurrir a la diferencial cuando queremos hallar el Δy producido en un Δx, y la relación entre Δy e Δx no es lineal ($\Delta y/\Delta x$ no es constante).

2. Conocer la estrategia que utiliza el cálculo para resolver ese problema y comprender el sentido de los distintos pasos que se recorren. En concreto:
• Saber explicar con precisión y sentido físico el significado de las expresiones diferenciales, reconocer sin ambigüedad que la diferencial puede tomar valores numéricos e interpretar el significado de los mismos.
• Conocer y justificar la relación que existe entre la diferencial ($\mathrm{d}y$) y la derivada (y'): $y'=\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, y aceptar sin ambigüedad los razonamientos en los que se utiliza esa relación.
• Conocer el significado de la integral y saber justificar el denominado Teorema Fundamental, es decir, por qué la integral definida requiere el cálculo de *antiderivadas* o funciones primitivas.
• Utilizar con sentido esa estrategia en situaciones y problemas en los que se domine el contenido físico de los mismos.

3. Ser consciente de la naturaleza hipotética, tentativa, en casi todas las situaciones físicas, de la expresión diferencial de partida, y saber que la validez de esa hipótesis no puede ser contrastada directamente sino a través del resultado al que conduce.

4. Valorar positivamente el papel de la diferencial en el aprendizaje de la física. Este componente axiológico debería ser una consecuencia natural cuando se comprende el papel crucial que juega la diferencial en el tratamiento de situaciones físicas de interés.

El objetivo de este trabajo es presentar el diseño experimental, resultados y conclusiones del análisis de lo que entienden y hacen los estudiantes universitarios cuando utilizan el cálculo diferencial, utilizando como guía los indicadores de comprensión.

3. DISEÑO EXPERIMENTAL Y MUESTRA

Para analizar la presencia o no de los indicadores entre los estudiantes universitarios hemos obtenido siete consecuencias directamente contrastables relacionadas con tales indicadores. Para contrastar esas consecuencias, hemos diseñado una amplia variedad de instrumentos, tanto cualitativos como cuantitativos, que se presentarán durante la exposición junto con el estadillo que hemos elaborado para su análisis. Los instrumentos diseñados han sido:

– *Ocho cuestiones* cerradas o semiabiertas, sobre la justificación y el significado de expresiones diferencia-

les, sobre razonamientos de uso frecuente relacionados con la derivada y la integral, o sobre la actitud y opinión de los entrevistados.
– Tres problemas con notas aclaratorias, que deben resolver realizando comentarios cada vez que usan el cálculo diferencial.
– Una entrevista individual semiestructurada, realizada sobre la resolución de un problema -escrita por un hipotético alumno-. Las preguntas de la entrevista pretenden profundizar en las respuestas a los cuestionarios escritos. Los extractos nos permitirán ilustrar y confirmar la interpretación de los resultados obtenidos con los otros instrumentos.

Cada consecuencia será sometida a prueba con más de uno de estos instrumentos, y cada instrumento se referirá a su vez a más de una consecuencia, lo que permitirá estudiar la coherencia de los resultados.

Las cuestiones se pasaron en el mes de mayo, en presencia del investigador o algún colaborador, durante una clase de física en situación de examen. Cada estudiante recibía, por término medio, un problema y tres cuestiones referidas a distintas consecuencias, y el tiempo requerido para su contestación no era superior a los cuarenta minutos.

Los estudiantes de la muestra, todos con asignaturas de física, pertenecen a grupos completos de cuatro universidades de otras tantas capitales (Almería, Alicante, Madrid y Valencia), repartidos entre nueve profesores diferentes. Para presentar los resultados, los hemos dividido en dos grupos: alumnos de primer curso y alumnos de cursos superiores, para discernir si los *malos* resultados son achacables al fracaso *en general* que suele producirse en el primer curso. En concreto, se trata de 283 estudiantes de primer curso (103 de carreras técnicas, 102 de ciencias físicas, 45 de ciencias biológicas y 33 de informática superior) y 184 estudiantes de cursos superiores (79 de 2º de ciencias químicas, 65 de 2º de ciencias físicas, 19 de 3º de ciencias físicas y 21 de 5º de ciencias físicas).

Algunos instrumentos fueron utilizados también con 270 estudiantes de COU (con la asignatura de física) pertenecientes a grupos completos de seis institutos distintos. Los resultados de estos alumnos servirán de elemento de comparación con los universitarios.

4. RESULTADOS

En lugar de presentar los resultados obtenidos con cada instrumento particular, se presentarán agrupados en torno a cada uno de los indicadores de comprensión. Aunque durante la exposición se hará una presentación más amplia, adelantamos aquí algunos de los resultados más destacados:

Cuándo y por qué es necesario usar la diferencial:
– Cuando se les pide que señalen cuál es la razón que justifica con mayor precisión el paso de $\Delta v=a\cdot\Delta t$ a la expresión $dv=a\cdot dt$, señalan correctamente la causa: "*Porque la aceleración depende del tiempo*": el 10,7% de los estudiantes de COU, el 2,2% de los estudiantes universitarios de primer curso y el 3,3% de los estudiantes de cursos superiores.
– Cuando se les pide que señalen, entre varias ecuaciones del movimiento $x(t)$, en cuáles es imprescindible usar el cálculo diferencial para averiguar la rapidez instantánea, señalan correctamente l*as ecuaciones no lineales*: el 16,2% de COU, el 11,2% de primer curso universitario y el 4,7% de cursos superiores.
– Cuando resuelven problemas con la petición expresa de incluir explicaciones y aclaraciones, se refieren (correcta a o incorrectamente) a la razón por la que usan diferenciales: el 1,8% de COU, el 1,1% de primer curso universitario y el 4,8% de los estudiantes de cursos superiores.

Estos resultados muestran con rotundidad la falta de comprensión sobre las razones que obligan a usar diferenciales.

Significado de expresiones diferenciales: El único significado que aparece en las cuestiones es el que identifica la diferencial con un incremento muy pequeño o infinitesimal (concepción de Leibniz), que, como cualquier docente conoce, es el significado que habitualmente se le asigna en las clases y textos de física. Sin embargo, este significado no se hace explícito con la frecuencia que cabría esperar, pues más del 90% de cualquier grupo de estudiantes no dedica ni una sola frase a explicar el significado de las expresiones diferenciales que utilizan cuando resuelven problemas en los que se piden comentarios explicativos. En concreto, cuando se pregunta a los estudiantes por la expresión relativa a las desintegraciones nucleares: $\mathrm{d}N=-\lambda \cdot N \cdot \mathrm{d}t$, expresan aunque sea vagamente la idea de cantidad infinitamente pequeña: el 23,1% de COU, el 43,2% de primer curso universitario y el 21,2% de estudiantes de cursos superiores.

Relación entre derivada y diferencial:
– Cuando simplemente se les presenta la expresión: $\mathrm{d}R/\mathrm{d}z=L \cdot z$, señalan como lectura correcta de esa expresión: "*la diferencial de R entre la diferencial de z es igual a…*": el 12% de los estudiantes de primer curso universitario.
– Cuando se les presenta el razonamiento: "*dR/dz=L·z, y despejando dR se obtiene: dR=L·z·dz*", señalan que el razonamiento es correcto y leen la ecuación final como: "*la diferencial de R es igual a…*": el 76,0% de los estudiantes de primer curso universitario.

En el contexto operativo de la segunda parte consideran correcta una idea que no habían considerado correcta en la primera parte. Interpretamos esta inconsistencia como un reflejo del predominio del operativismo frente a la comprensión: al enfrentarse con un razonamiento que se repite con frecuencia en los textos y clases de nivel universitario, contestan aceptando implícitamente la derivada como cociente; sin embargo, no aceptan esa misma idea cuando se les pregunta sin referencia directa a una regla mecánica.

La integral y su cálculo mediante antiderivadas: Cuando resuelven problemas, sólo el 7,6% de los estudiantes de cursos superiores intenta explicar la integral como (límite de una) suma de muchos términos, lo que hemos interpretado no como desconocimiento sino como un reflejo del uso operativo del cálculo. Pero ningún estudiante intenta justificar por qué esa suma se calcula mediante la técnica inversa a la del cálculo de derivadas. Cuando se les pide, después de presentarles el teorema fundamental, que escriban argumentos para justificarlo, sólo el 2,8% de los estudiantes de primer curso, y ninguno de los restantes, escribe algún comentario del que pueda deducirse argumento alguno.

Percepción sobre el uso de la diferencial en la física y valoración de su importancia:
– Se muestran explícitamente de acuerdo con la idea: "*cuando se usa el cálculo en las clases de física desconecto, pues sé de antemano que no me voy a enterar, y atiendo sólo a la fórmula final*": el 43,5% de los estudiantes de COU, el 65,5% de primer curso universitario y el 54,0% de los de cursos superiores.
– Se muestran explícitamente de acuerdo con la idea: "*mi profesor usa el cálculo porque lo necesita, pero él no espera que nosotros lo entendamos*": el 47,2% de COU, el 59,5% de primer curso universitario y el 41,3% de los de cursos superiores
– Se declaran de acuerdo o neutros con la idea: "*el uso del cálculo es una de las causas más importantes de que a los alumnos no les guste la física*": el 77,8% de COU, el 65,5% de primer curso universitario y el 44,4% de los de cursos superiores

Resulta así que un gran número de estudiantes, muy llamativo en el caso de cursos superiores aunque sean menos de la mitad, renuncian a entender el uso del cálculo y reconocen además que tampoco su profesor espera más de ellos, considerando en estas condiciones que el cálculo provoca rechazo hacia la física.

5. CONCLUSIONES

Los resultados que hemos adelantado y el total de resultados que hemos obtenido, analizados en su conjunto, confirman que existe un uso mecánico y algorítmico del cálculo, despreocupado por la comprensión y el sentido de lo que se hace, lo que provoca una falta de confianza y un claro rechazo hacia el uso del cálculo.

Esta situación sería difícilmente sostenible sin la existencia de dos ideas fundamentales:
– la idea intuitiva -y errónea- de que la suma de infinitos trozos infinitesimales aproximados acabará dando siempre un resultado correcto, sin importar la forma concreta como se eligen esos trozos tan pequeños, amparados en que, al final, el error será despreciable
– la apariencia de rigor y de que funciona, con tal de aplicar correctamente las reglas de cálculo.

REFERENCIAS

STEINBERG, R.N. y otros (1996). Mathematical Tutorials in Introductory Physics. *The International Conference on Undergraduate Physics Education (ICUPE)*, College Park, Maryland. http://www.physics.umd.edu/perg/papers/redish/index.html

ARTIGUE, M. Y VIENNOT, L. (1987). Some aspects of students' conceptions and difficulties about dif-fe-ren-tials. *Proceedings of the Second In-ter-na-tio-nal Se-mi-nar: Misconceptions and Educa-tio-nal Strate-gies in Scien-ces and Mathe-ma-tics* (vol. III). Cornell, Ithaca, USA: Ed. Cornell U.

GROUPE DIDACTIQUE DU CNRS (1989). *Procedures différentielles dans les enseignements de mathematiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire*. Université Paris 7: IREM et LDPES.

MTNEZ. TORREGROSA, J. y otros (2002). La diferencial no es un incremento infinitesimal. Evolución del concepto de diferencial y su clarificación en la enseñanza de la Física. *Enseñanza de las Ciencias*, 20(2), pp. 271-283.