

ANALOGÍAS DE REDES ELÉCTRICAS COMO HERRAMIENTA EDUCATIVA PARA EL ESTUDIO DE DIVERSOS FENÓMENOS FÍSICOS

GÓMEZ-LOPERA¹, S. A.; DEL CERRO², F. y ALHAMA¹, F.

¹ Dept. de Física Aplicada. Universidad Politécnica de Cartagena. Campus Muralla del Mar. 30202, Cartagena. Tf.: +34 968 325599, +34 968 325512. <salvador.glopera@upct.es> <paco.alhama@upct.es>

² Área de Máquinas y Motores Térmicos. Facultad de Ciencias. Campus Espinardo, Universidad de Murcia. Tf.: +34 968 367696. <fcerro@um.es>

Palabras clave: Analogías; Software educativo; Redes eléctricas; Método de simulación por redes; Ecuaciones en derivadas parciales.

1. INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas correspondientes a fenómenos físicos regidos por ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, lineales o no, implica un conocimiento profundo de cálculo analítico o numérico por lo que, en general, estos problemas no se encuentran al alcance de los alumnos de facultades de ciencias o escuelas de ingeniería, desconocedores en su fase de formación de estas modernas y complejas técnicas matemáticas. A pesar de ello, es posible, en muchos casos, abordar la resolución de los mismos recurriendo al empleo de analogías y resolviendo los modelos formalmente equivalentes (es decir, regidos por el mismo conjunto de ecuaciones) mediante programas de ordenador adecuados a tal fin. Este es el caso de las analogías eléctricas ya que, una vez elaborado el modelo en red, se dispone de programas de resolución de circuitos de fácil manejo.

El conjunto de ecuaciones que rige un buen número de fenómenos físicos es reducido. Así, los problemas de difusión y transporte de calor y los de difusión y transporte de masa obedecen a una misma ecuación que, a su vez, con pequeñas modificaciones, es también la ecuación de difusión y reacción de contaminantes en suelos y en la atmósfera. La analogía se establece, en este caso, adoptando una equivalencia entre las magnitudes propias de transporte: el potencial causante del flujo (presión, concentración, temperatura...) es la tensión eléctrica en el modelo en red mientras que el propio flujo (materia, calor...) es la corriente eléctrica (González-Fernández, 2002).

La elaboración de un diseño equivalente de red que obedezca a estas ecuaciones permitiría de forma rápida, precisa y eficaz resolver y simular estos problemas y un sinnúmero de variantes de los mismos, lo que daría al estudiante una potente herramienta de aprendizaje en el campo de la ciencia y la ingeniería.

La metodología propuesta en este trabajo no es nueva aunque la literatura hace uso de ella sólo para problemas lineales. Aquí pretendemos extenderla a problemas de carácter no lineal aprovechando los dispositivos que, a tal efecto, están integrados hoy en las librerías de estos programas. Aplicaciones ya publicadas de esta metodología pueden encontrarse en las referencias Cerro y Alhama, 2004, Cerro, Campo y Alhama, 2004, y Cerro, Gómez-Lopera y Alhama, 2004;

2. PROCESOS DE TRANSPORTE. CONDUCCIÓN DE CALOR

Antes de abordar en detalle algún ejemplo concreto presentaremos, bajo un esquema simple pero general, el problema de los procesos de transporte. Dado un sistema material continuo, entenderemos que una magnitud o propiedad P se transporta en el seno del mismo si dicha propiedad satisface la ecuación de balance local (referida a un punto del espacio o un volumen infinitesimal dV limitado por una superficie infinitesimal dS) dada por la expresión (González-Fernández, 2002)

$$\frac{\partial aP(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \sigma(\mathbf{r},t) \quad [1]$$

donde $P(\mathbf{r},t)$, y $\sigma(\mathbf{r},t)$ son funciones continuas relacionadas con la magnitud transportada y a es una constante independiente del tiempo, t , y la posición, \mathbf{r} . El término $\partial aP/\partial t$ puede deberse a dos contribuciones: a la producción o destrucción de aP por la existencia de fuentes y/o sumideros y a la transferencia de la cantidad aP a través de la superficie dS . Por tanto, σ y $\nabla \cdot \mathbf{j}$ serán, respectivamente, los términos de producción-aniquilación y transferencia de dicha cantidad. Como vemos, la ecuación [1] es una ecuación en derivadas parciales (EDP) cuya solución, que requiere de un conjunto de condiciones de contorno, es en general compleja.

Una primera simplificación de la anterior ecuación proviene de considerar que el proceso tiene lugar en una sola dirección (unidimensional). Entonces, utilizando geometría cartesiana y considerando que la coordenada x es la correspondiente a tal dirección espacial, dicha expresión queda simplificada en la forma

$$a \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = \sigma \quad [2]$$

Estas ecuaciones han de discretizarse en la variable espacial conformándose un conjunto de ecuaciones diferenciales (en el tiempo) en diferencias finitas que sirven de base para el diseño del modelo en red. Así, en general, conocida la ecuación de balance de un fenómeno de transporte concreto y tras establecer una analogía entre variables físicas y eléctricas, se puede diseñar un modelo en red (circuito eléctrico) equivalente cuya solución numérica es idéntica. La solución del modelo en red en un programa de simulación adecuado permite interpretar los resultados en función de las variables físicas de interés y escudriñar aspectos complementarios de la solución muy intuitivos en el modelo.

Como ejemplo típico de proceso de transporte podemos citar la conducción de calor. El objetivo principal de este análisis es encontrar la distribución de temperaturas en todos los puntos del medio y la densidad de flujo de calor en cualquier sección del mismo. La ecuación térmica de balance es

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = \sigma \quad [3]$$

donde ρ es la densidad del medio, c el calor específico, T la temperatura, \mathbf{j} la densidad de flujo de calor y σ la razón de generación de energía interna de calor por unidad de volumen.

3. EJEMPLO DE ANALOGÍA ELÉCTRICA: ALETA 1-D BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN Y RADIACIÓN

Veamos, como ejemplo, el caso de una aleta simple de sección arbitraria que trabaja bajo condiciones de contorno de convección y radiación (Fig. 1). La no linealidad inherente a la radiación no permite encontrar una solución analítica de los problemas sometidos a esta condición de contorno, por lo que sólo es posible obtener soluciones numéricas aproximadas. El modelo en red (González-Fernández, 2002) está basado en la clásica analogía termoelectrónica descrita en los libros de texto de transmisión de calor (Incropera y Dewitt, 1996) que asocia las variables térmicas densidad de flujo de calor y temperatura a las variables eléc-

tricas corriente y potencial eléctrico respectivamente. Este modelo supone un avance sobre la analogía clásica ya que por un lado, puede asumir problemas no lineales, y por otro, los modelos diseñados pueden ejecutarse en un programa adecuado de simulación de circuitos eléctricos de los muchos que existen, incluso en versiones educativas.

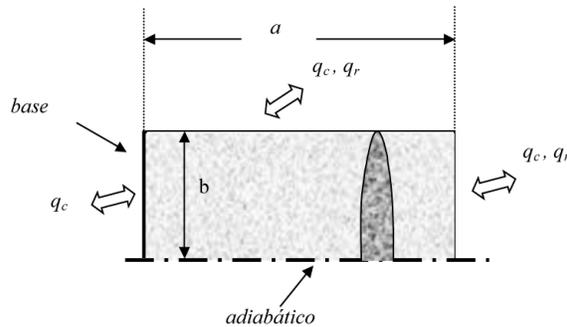


FIGURA 1
Geometría y configuración física de la aleta

La Fig. 1 muestra el esquema físico de la aleta de sección arbitraria, cuyo modelo matemático está integrado por las ecuaciones (Incropera y Dewitt, 1996):

$$kS_c \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \rho c_e \frac{\partial T}{\partial t} + hp(T - T_{r,c}) + \varepsilon \sigma p (T^4 - T_{r,c}^4) \quad [4]$$

$$T_{(x=0, t)} = T_b, T_{(x, t=0)} = T_0 \quad [5]$$

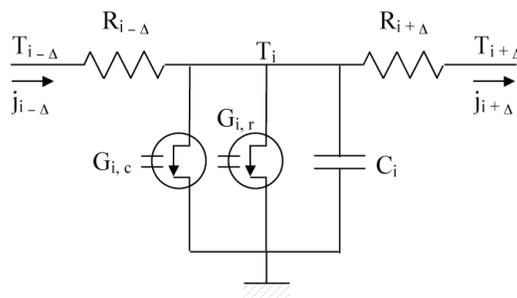


FIGURA 2
Modelo en red para un elemento de volumen de aleta

El modelo en red de un elemento de volumen de la aleta se muestra en la Fig. 2. Los valores de las resistencias y el condensador son $R_{i-\Delta} = R_{i+\Delta} = L/(2Nk)$ y $C_i = (L/N)\rho c_e$. $G_{i,c}$ y $G_{i,r}$ son generadores de corriente controlados que implementan los flujos de convección y radiación. N es el número de elementos de volumen o circuitos conectados en serie.

Si se diseña un programa de cálculo adecuado que resuelva la red eléctrica y tenga una interfaz sencilla y agradable, se puede proporcionar a un alumno esta herramienta para que él mismo estudie directamente el problema y obtenga su solución de un modo inmediato, pudiendo él, entonces, interpretarla ayudándose de la analogía termoelectrónica. Nosotros tenemos experiencia en este sentido, fruto de la cual ha sido el diseño y mejora de diversos programas educativos de aplicación del método de redes (del Cerro, Gómez-Lopera y Alhama, 2004) y que actualmente tenemos en fase de evaluación directa sobre los alumnos de

nuestras universidades. Hemos diseñado diversas prácticas de simulación y resolución en un ordenador, prácticas que serían, en unos casos, excesivamente caras de adquirir, y en otros, imposibles de montar. Hemos podido comprobar que la utilización de los mismos permite a los alumnos una comprensión más directa, rápida y profunda de los problemas estudiados que los clásicos métodos educativos, y hemos conseguido introducir en los planes de estudio materias imposibles de estudiar anteriormente.

4. CONCLUSIONES

El uso de analogías de redes eléctricas basado en el Método de Simulación por Redes, que asocia de manera adecuada las magnitudes de transporte de diferentes fenómenos físicos con sus equivalentes en el transporte eléctrico (diferencia de potencial y corriente eléctrica), permite obtener de un modo rápido (tiempos de computación despreciables) y muy preciso la solución numérica de cualquier problema complejo que venga formulado por una EDP (o un conjunto de ellas acopladas entre sí) y un conjunto de condiciones de contorno. La analogía propuesta, que evita enfrentar al alumno con el engorroso aparato matemático asociado a las solución de estas ecuaciones, cuando existe, es muy intuitiva para alumnos de carreras de ciencia e ingeniería ya que conocen básicamente la teoría de circuitos. El material requerido es un ordenador y un programa de simulación de redes eléctricas. La potencial aplicación de este método de analogías en estos niveles de enseñanza superior se descubre como una poderosa herramienta al alcance de cualquier laboratorio y de inestimable ayuda para el profesor.

5. BIBLIOGRAFÍA

- DEL CERRO, F. y ALHAMA, F. (2004). Teaching Coupled differential Equations by the Network Method. *International conference education an research "progress thorough partnership"*, pp 815-823.
- DEL CERRO, F., CAMPO, A. y ALHAMA, F. (2004). The Teaching of Unsteady Heat Conduction Using the Thermo-electric analogy and the Code Pspice. Nonlineal Models. *International conference education an research "progress thorough partnership"*, pp 79-87.
- DEL CERRO, F., GÓMEZ-LOPERA, S.A. y ALHAMA, F. (2004). Simulador para el diseño de aletas simples basado en la analogía RC. *Anales de Ingeniería Mecánica. Revista de la Asociación Española de Ingeniería Mecánica*, Vol. 1, pp. 743-748.
- GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ, C. F. (2002). Applications of the network simulation method to transport processes. *Network Simulation Method*. Kerala, India: Research Signpost. Pp. 1-31.
- INCROPERA, F. P. Y DEWITT, D. P. (1996). *Introduction to heat transfer*. New York: John Wiley and Sons.