

BLUESTAR: IMPLEMENTACIÓ D'UNA APLICACIÓ PER A LA VISUALITZACIÓ 3D DE FUNCIONS REALS, COM A EINA D'APRENTATGE

AUTOR

Nom: Enric Martí

Departament: Ciències de la Computació

Centre: Escola Tècnica Superior d'Enginyeria, UAB

E-mail: enric.marti@uab.cat

Nom: Serafín Fernández

Departament: Ciències de la Computació

Centre: Escola Tècnica Superior d'Enginyeria, UAB

E-mail: serafin.fernandez@campus.uab.cat

Nom: Glòria Estapé

Departament: Economia de l'Empresa

Centre: Escola Universitària d'Estudis Empresarials

E-mail: gloria.estape@uab.cat

RESUM DE L'EXPERIÈNCIA

En aquest article es presenta un programa d'ajut a l'aprenentatge per a estudiants de matemàtiques de primers cursos de carrera, que permet visualitzar en 3D i de forma dinàmica funcions reals de 2 variables reals. Interessa que es puguin examinar, de forma interactiva amb el mouse, les superfícies que representen les funcions des de diferents angles i perspectives, de manera que se'n puguin apreciar les característiques (com és la funció al voltant d'un punt, on no és contínua o no és diferenciable, o on té un punt de sella, etc.). Amb aquesta eina es pretén aconseguir una millor comprensió de l'estudiant en aquestes funcions i dels models de més d'una variable, que presenten trets sorprenentment més diversos que en les funcions d'una variable, i que les projeccions en 2D de les superfícies generalment no permeten apreciar.

Basat en un entorn gràfic utilitzat en l'assignatura de Gràfics per Computador 2 de la titulació d'Enginyeria Informàtica s'ha implementat aquesta aplicació que consta de dos mòduls principals: un intèrpret d'equacions que admet els principals operadors aritmètics, així com funcions exponencials i trigonomètriques i un mòdul de visualització i càlcul de seccions.

Per visualitzar una funció cal introduir la seva expressió equacional, definir el domini de valors on volem representar-la i opcionalment una paleta de colors per representar els valors més baixos i els més alts. Un cop generada la funció tridimensional es pot visualitzar des de diferents punt de vista de forma interactiva amb el mouse. Es poden emmagatzemar fins a 9 funcions, podent combinar la visualització de totes elles.

L'aplicació es troba en fase de proves per part dels professors de matemàtiques, i es preveu utilitzar-la com a eina docent el proper curs 2007-08 dins de dues assignatures de la Diplomatura en Empresariats.

Paraules Clau: Visualització gràfica, aplicacions informàtiques per a la docència, recursos virtuals.

Àmbit general d'interès de l'aplicació: Es tracta d'un programa d'ajut a l'aprenentatge per a estudiants de matemàtiques de primers cursos, que visualitza en 3D i de forma dinàmica funcions de 2 variables, permetent així una millor comprensió dels models de més d'una variable, de trets més diversos que els d'una variable.

1 Introducció

Un dels objectius bàsics de qualsevol curs de matemàtiques dirigit a estudiants de primers cursos de carrera és la comprensió a fons dels conceptes que s'hi estudien. Com gairebé qualsevol professor de la matèria pot assegurar per pròpia experiència, la distinció entre "comprensió" i "estudi" és fonamental, ja que si falta la primera els estudiants es "veuen abocats a la confusió i a la memorització maquinal de conceptes sense significat, amb les òbvies conseqüències" [Gir03]. De fet, les matemàtiques cal considerar-les com una metodologia sistemàtica de pensar, que permet obtenir solucions a problemes reals fent servir models. La modelització és una manera de simplificar, fent abstracció dels elements que es consideren significatius d'una situació, de manera que sigui més fàcil relacionar-los i manipular-los per a extreure'n prediccions i conclusions aplicables a la situació representada mitjançant el model. I per a poder efectuar totes aquestes activitats amb èxit cal la comprensió de les eines matemàtiques que permeten fer aquestes manipulacions.

En general, els experts en didàctica estan d'acord que hi ha tres factors importants per afavorir l'aprenentatge significatiu (en matemàtiques): un enfocament pedagògic adient, un bon ús d'eines tecnològiques, i un bon entorn d'aprenentatge ([DHS01], [GGR00], [HiW92], [Tal00]). En particular, l'aprenentatge dels conceptes matemàtics i de les seves relacions es pot reforçar a través de l'ús de diversos tipus de representacions, des de diagrames a esquemes i representacions gràfiques i simbòliques. Totes poden ajudar als estudiants a reconèixer les connexions entre conceptes relacionats, i a millorar les seves habilitats matemàtiques. No obstant, les representacions, encara que siguin molt concretes, poden no servir per a clarificar conceptes si es perceben com a producte final enlloc de com a eina per a interpretar el món ([DuK06]). Cal doncs ser molt curós en el tipus d'eines que es presenten als estudiants, i en que aquests puguin - fins a cert punt almenys - manipular-les per a extreure'n les seves pròpies conclusions. I per a fer-ho, les eines tecnològiques - programaris informàtics - són actualment imprescindibles.

Els cursos bàsics de càlcul a la Universitat acostumen a incloure dues parts diferenciades. D'una banda, l'estudi de les funcions d'una variable real, i per tant de tots els fenòmens que es poden descriure i treballar emprant només dues variables, una dependent de l'altra. La segona part (o un segon curs en cas d'assignatures de recorregut més petit) és l'extensió dels conceptes bàsics del càlcul infinitesimal a funcions de més d'una variable, i la seva aplicació a situacions en que el resultat del model depèn de la interacció d'un mínim de dues variables independents. Però les possibilitats d'utilitzar eines tecnològiques en aquestes dues parts de

la matèria són molt diferents. Pel que fa a la primera, el nombre i diversitat de programari disponible permet molts usos diferents, de manera relativament senzilla, tant en una classe magistral com a il·lustració de l'explicació per part del docent, com en sessions de laboratori pels propis estudiants.

En canvi, per a l'estudi de funcions de més d'una variable, les coses són ben diferents, afegint a la major complexitat del tema tractat, una menor disponibilitat d'eines per a il·lustrar-lo, accentuant d'aquesta manera la diferència amb el cas de les funcions d'una variable. D'una banda cal dir que les eines informàtiques disponibles són més "sofisticades", però també resulta que l'ús que cal fer-ne és diferent. Per a explicar aquest darrer punt pot ser útil la classificació de Twining (2002) del programari informàtic com a eina d'aprenentatge en tres enfocaments diferents:

- per a donar *suport* a l'aprenentatge, sense variar-ne ni el contingut ni el procés, però millorant l'eficiència o efectivitat d'alguns dels processos implicats. Per exemple, amb l'ús d'un full de càlcul es pot ajudar a la comprensió del concepte de límit (o de derivada) d'una funció en un punt, a partir del càlcul de múltiples valors de la funció en punts propers al del límit. Aquest procés és molt més eficient que fer els càlculs manualment, i permet ràpidament copsar el concepte i el problema que suposa la seva definició formal.
- per *estendre* l'aprenentatge, si el contingut o el seu procés d'aprenentatge es canvien a través de l'ús de programari, però aquest canvi també s'hauria pogut fer sense l'ús d'un ordinador. Per exemple, Lynch [Lyn06] cita l'ús de programari gràfic per a "facilitar que els estudiants examinin més formes gràfiques de funcions d'una variable de les que podrien obtenir manualment, de manera que puguin formar conjectures i explorar-les més ràpidament". S'estén l'aprenentatge facilitant un enfocament conceptual (no de procediment) dels processos d'ensenyament i adquisició de coneixements.
- per *transformar* l'aprenentatge, sempre que el contingut o el procés d'aprenentatge es canvien per l'ús de programari, canvis que no s'haurien pogut portar a terme sense l'ús d'ordinadors.

L'estudi de funcions de més d'una variable és un dels temes on l'ús de programari informàtic permet transformar el procés d'aprenentatge, especialment si es disposa d'un sistema que permeti la representació gràfica - i per tant l'exploració ràpida i senzilla de la forma i propietats - d'aquest tipus de funcions. En efecte, diversos estudis demostren el profund impacte del processament cognitiu espacial en la construcció de models mentals, i els canvis i millores dels processos d'aprenentatge obtinguts - en diversos camps - amb l'ús d'eines informàtiques per a visualitzar interactivament estructures de 3D [KMH04, Huk06].

Per a les funcions de dues variables reals - evidentment les úniques que es poden representar en 3D - es disposa de diverses eines per a realitzar aquesta visualització. Al mercat hi ha diferents paquets "professionals" que inclouen aquest tipus de representació gràfica entre les seves utilitats: Maple, Matlab, Mathematica o també Derive en són bons exemples. A part de la variable econòmica (el preu és considerable en alguns casos, i inclou manteniment anual), el fet que es tracti de paquets amb moltes funcionalitats és més aviat un inconvenient que no pas un avantatge a nivell docent. En efecte, tot i que l'ús docent d'aquests programes està ben documentat (veure per exemple [Gir02] o [CGM06]) també ho estan els requeriments en termes de temps que necessita el docent en la preparació de material utilitzant aquests programaris. Aquesta dificultat es tradueix també en que els

estudiants difícilment poden tenir un accés fàcil als programes i a manipular-los correctament en poc temps com per a ser-los realment d'ajut en el seu aprenentatge¹.

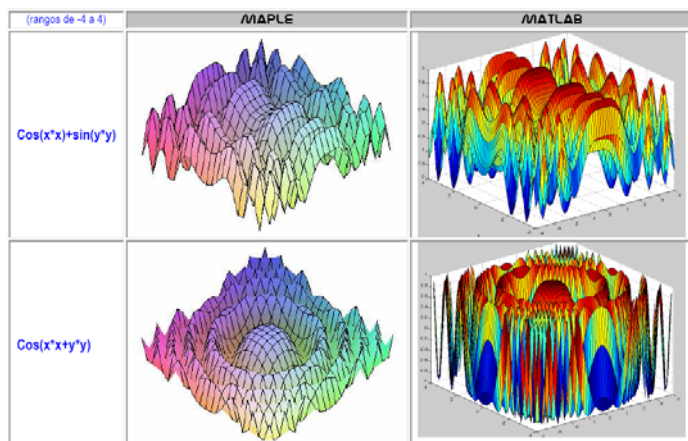


Figura 1. Visualització de dues funcions reals de dues variables en Maple i Matlab.

A la figura 1 es poden veure exemples de visualització de funcions en 3D en dos dels programes mencionats més amunt. Tot i les diferències apreciables, en ambdós casos la qualitat del “producte final” és clarament bona. No obstant, a més d'aquesta característica, cal tenir-ne en compte d'altres, com la interactivitat en la visualització (que es pugui canviar fàcilment el punt de vista per a observar la funció), el nombre de funcions que es poden visualitzar simultàniament, o la facilitat per a introduir i/o canviar el rang de valors de les variables per les que cal fer la representació.

<i>Característica</i>	<i>MAPLE</i>	<i>MATLAB</i>
Nombre de funcions visualitzables simultàniament	una	una
Visualització de mètrica?	Si	Si
Visualització interactiva?	Si	No
Grau de complexitat per a un usuari inexpert	Alta	Alta

Taula 1. Comparativa en la visualització de funcions entre Maple i Matlab.

De la comparativa que es mostra a la taula 1 es desprenen les mancances d'aquests programaris i l'interès en disposar d'una eina per a la visualització de funcions 3D més dinàmica, configurable i dedicada a l'aprenentatge d'aquest tipus de funcions per a estudiants de matemàtiques.

2 Objectius

L'objectiu del treball que es presenta en aquest article és la definició i implementació d'un software d'ajut a l'aprenentatge per a estudiants de matemàtiques de primers cursos de carrera, que permeti visualitzar en 3D i de forma dinàmica funcions reals de 2 variables reals. Interessa que es puguin examinar les superfícies que representen les funcions des de diferents angles i perspectives (amb comandes donades directament a través del mouse per a ser àgils)

¹ El programari DERIVE és potser una excepció en aquest punt, però la seva visualització de funcions en 3D és segurament també la més pobre del grup, a més de que té una animació molt limitada i difícil.

de manera que se'n puguin apreciar les característiques (com és la funció al voltant d'un punt on no és contínua o no és derivable, o on té un punt de sella, etc.). El programa facilitaria una millor comprensió de l'estudiant d'aquestes funcions i dels models de més d'una variable, que presenten trets sorprenentment més diversos que en les funcions d'una variable, i que les projeccions en 2D de les superfícies generalment no permeten apreciar.

Les funcionalitats bàsiques d'aquest software serien:

- Caldria partir de l'expressió analítica de la funció, fent l'input en un format adient per a ser tractat en el programa de forma còmoda, però conservant els estàndards habituals de la formulació matemàtica en programari informàtic.
- Un cop presentada la superfície, el programa hauria de permetre també entrar una o més trajectòries a 3^2 (a partir igualment de la seva expressió analítica explícita) i marcar en un altre color sobre la dita superfície les imatges dels punts de la trajectòria donada.
- Seria interessant que el programa pogués representar més d'una superfície simultàniament. Entre d'altres, permetria comprovar la diferenciabilitat d'una funció en un punt presentant el pla que suposadament és tangent a la superfície.

Cal tenir en compte que el programa ha de mantenir la qualitat en la representació en 3D, i que aquest requeriment ha d'incloure l'anàlisi prèvia per a determinar el domini de qualsevol funció que s'introdueixi (incloent possibles discontinuïtats, i punts quina imatge no es pot calcular) sense donar errors ni fer hipòtesis sobre el seu valor.

A la taula 2 es mostren les característiques desitjades per l'aplicació, en comparació a les mostrades en la taula 1 referents a Maple i Matlab.

<i>Característica</i>	<i>APLICACIÓ</i>
Nombre de funcions visualitzables simultàniament	9
Visualització de mètrica?	Si
Visualització interactiva?	Si
Grau de complexitat per a un usuari inexpert	Baixa

Taula 2. Requeriments de l'aplicació de visualització de funcions 3D.

L'article s'organitza de la següent manera. A la secció 3 s'expliquen les principals funcionalitats de l'aplicació. A la secció 4 es mostren alguns resultats de funcions, comparant-los amb les visualitzacions que s'obtenen de les mateixes funcions en Maple i Matlab. Finalment a la secció 5 es revisen les conclusions del treball realitzat i possibles millores de l'aplicació.

3 Desenvolupament de l'aplicació

Un cop proposats els objectius del projecte, i vistes les característiques de programes semblants, varem optar per desenvolupar l'aplicació (que anomenarem *BlueStar*) a partir d'un entorn bàsic [MGJ06] amb mínimes però importants funcions de visualització ja implementades que s'utilitza en l'assignatura de Gràfics per Computador 2 de la titulació d'Enginyeria Informàtica de l'Escola d'Enginyeria (ETSE) de la UAB. Aquest entorn és sobre la plataforma Windows, i com a eina de programació Visual C++ amb la llibreria gràfica OpenGL, àmpliament utilitzada en aplicacions gràfiques interactives i videojocs.

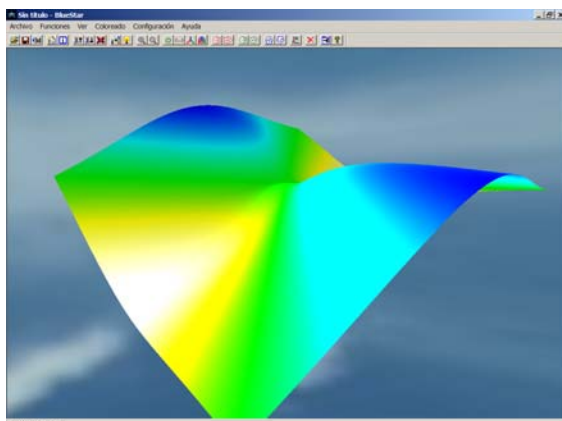
Les funcionalitats principals que s'han implementat en l'aplicació BlueStar són:

- Lectura i interpretació de funcions matemàtiques: Inserció mitjançant teclat de la funció 3D que es vol visualitzar. A més de la funció es defineix el rang de valors X,Y sobre el que volem definir la funció i colors per a la definició del pseudocolor.
- Visualització interactiva de les funcions: Utilitzant el moviment del mouse i els botons del mateix podem visualitzar de forma interactiva la funció centrada a l'origen.
- Visualització simultània de vàries funcions: L'aplicació permet visualitzar més d'una funció (fins a 9) simultàniament podent establir comparatives de forma.
- Pseudocolor: Assignació de color segons una paleta de colors definida en funció d'interval d'alçades. Cada interval pot definir un color o un rang de dos colors.
- Seccions: Definir una segona funció que talla a la primera, visualitzant la forma del tall.

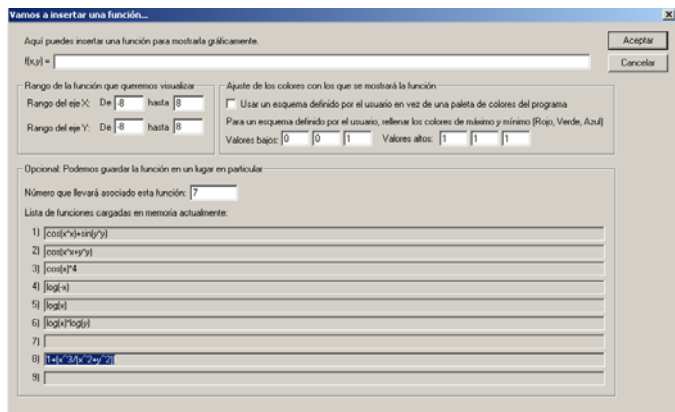
L'aspecte de l'entrada a l'aplicació és el que es pot veure a la figura 2. Seguidament explicarem les principals funcionalitats de l'aplicació.

3.1 Lectura i interpretació de funcions matemàtiques

L'aplicació Bluestar ha desenvolupat un intèrpret d'expressions matemàtiques per a poder llegir la funció 3D que es vol visualitzar. Admet la clàssica expressió matemàtica formada per operadors aritmètics (+,-,*,/,^), variables (x,y) i constants numèriques, funcions trigonomètriques bàsiques (sin,cos) i de més complexes (arcsin, arcosin, sinh, cosh, tgh), altres funcions com log i exp, admetent els parèntesis com a símbol que defineix la precedència de les operacions. Un exemple d'aquesta sintaxi es pot veure en la figura 3.



(a)



(b)

Figura 2. Pantalla principal de Bluestar amb la funció $\frac{x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}$ per rang de valors $(-3,3) \times (-3,3)$

(a). Finestra per a inserir una funció, on es veu la sintaxi que s'utilitza en les funcions. A més de la funció, en aquesta finestra es defineix la paleta de colors de la funció.

La visualització de la funció és una de les tasques que porten més temps de càlcul. La llibreria OpenGL proporciona eines per a la visualització de malles de punts de forma ràpida, aprofitant el possible els recursos del hardware gràfic. Aquesta visualització es basa en la formació de triangles, dos per a cada 4 punts de mostreig veïns que formen un triangle.

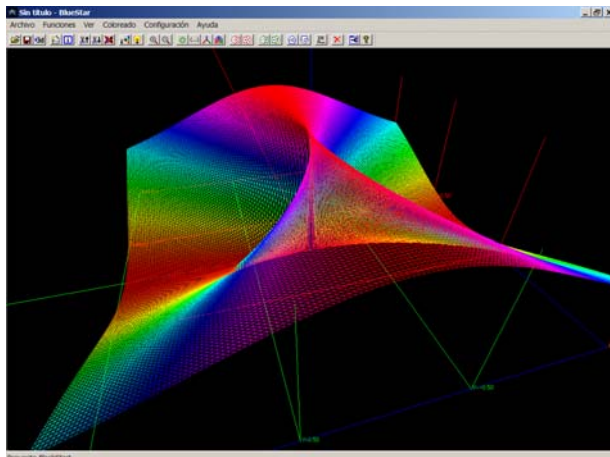
La visualització de la funció és una de les tasques que porten més temps de càlcul. La llibreria OpenGL proporciona eines per a la visualització de malles de punts de forma ràpida, aprofitant els recursos del hardware gràfic. Aquesta visualització es basa en la formació de triangles, dos per a cada 4 punts de mostreig veïns que formen un triangle. Aquesta representació basada en triangles permet visualitzar la funció en forma de malla o il·luminada, el que proporciona una sensació de solidesa a la funció. Un exemple d'aquesta visualització es pot veure a la *figura 3*.

3.2 Visualització interactiva

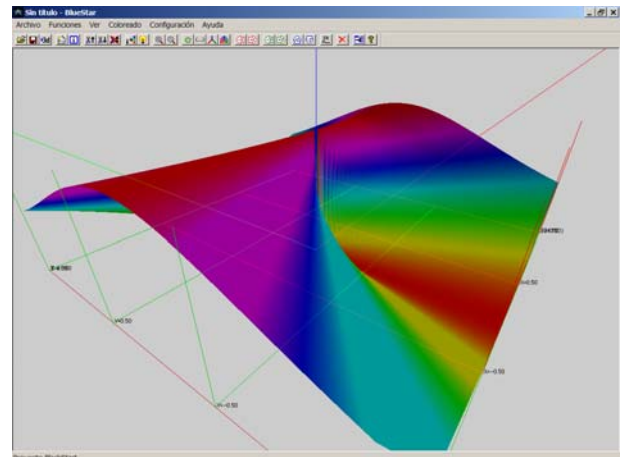
Un dels principals atractius de l'aplicació BlueStar és la possibilitat de veure la funció des de tots els angles de vista de forma ràpida. Aquesta funcionalitat queda definida per defecte a l'executar l'aplicació i es pot realitzar gràcies al mouse.

Inicialment tenim situat el punt de vista mirant a l'origen de coordenades aquest està separat una distància R de l'origen. Prenent aquesta posició en coordenades esfèriques (R, φ, θ) , utilitzem els moviments horitzontal i vertical del mouse per a desplaçar-nos en direcció φ i θ respectivament, dins l'esfera de radi R que mira l'origen, de forma que podem veure la funció des de qualsevol posició. Això es realitza quan tenim el botó esquerre del mouse apretat. Mantenint apretat el botó dret i desplaçant el mouse verticalment modifiquem la component R de les coordenades esfèriques, apropant-nos (disminució de R) o allunyant-nos (augment R) de la funció que visualitzem.

A la barra d'eines de la part superior de la pantalla (*figura 2b*) es poden triar diferents punts per a centrar la superfície a la pantalla i augmentar o disminuir el rang de la presentació triat inicialment.



(a)



(b)

Figura 3. Visualització de la funció $\frac{x^2}{x^2 + y^2}$ en filferros (a) i amb il·luminació suavitzada (b).

3.3 Pseudocolor

L'aplicació permet a l'usuari definir una paleta de colors per a representar la funció, que s'assignen als punts segons l'alçada. Aquesta paleta de colors es pot definir de dues formes:

- Fixe: Definir un rang inferior i superior d'alçada i el color (r,g,b) associat a aquest rang d'alçades.

- Interpolat: Definim un rang inferior i superior d'alçada i dos colors: l'associat a l'alçada inferior i l'associat a l'alçada superior, els dos colors en format (r,g,b). L'aplicació calcula el color de les alçades intermitges per interpolació lineal.

La paleta de colors es defineix amb un senzill fitxer que es pot carregar a l'aplicació quan es vulgui. En les figures 3 i 4 es mostren funcions amb paleta de color fixa.

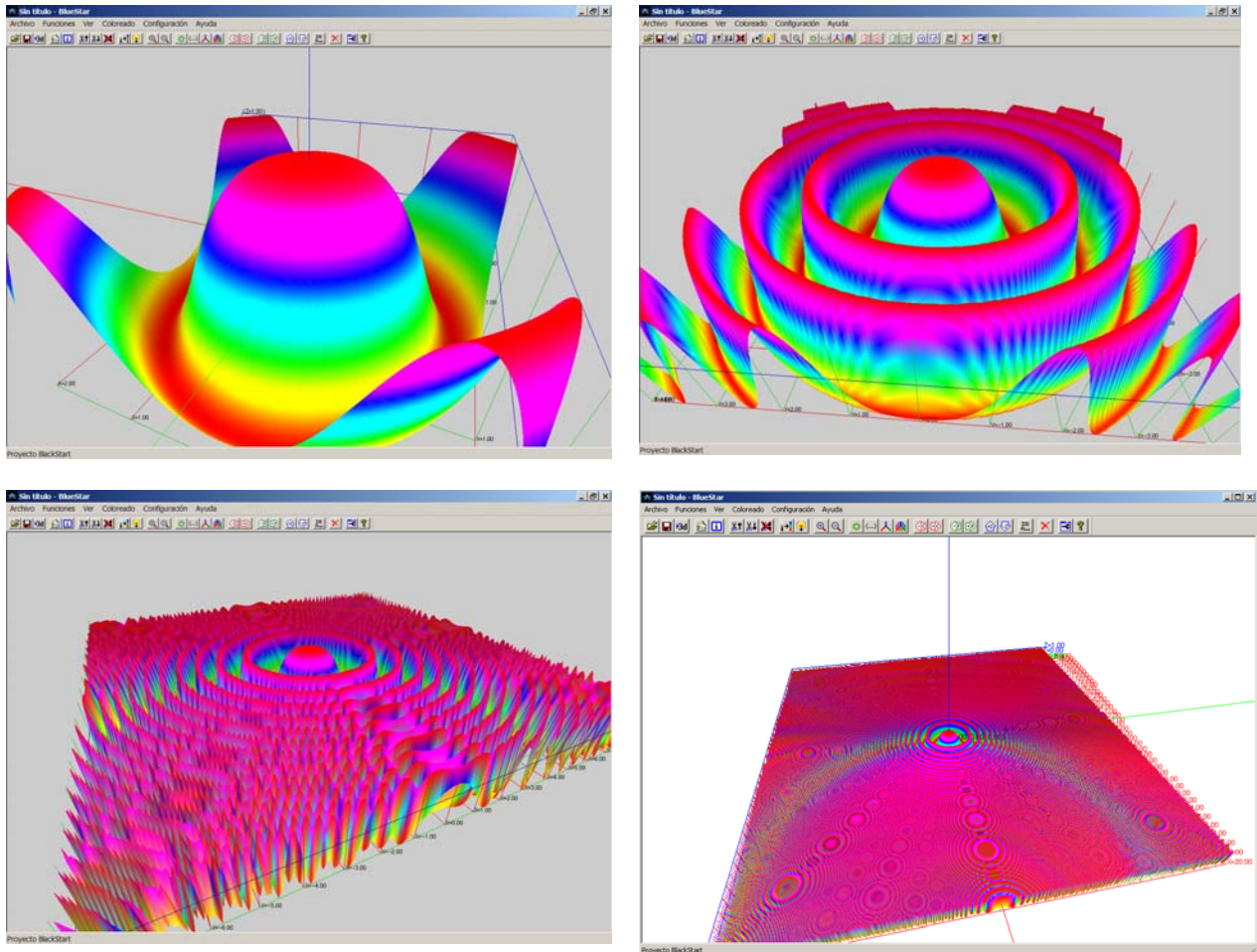


Figura 4. Visualització de la mateixa funció $\cos(x^2 + y^2)$ des de diferents punts de vista i amb diferents rangs, obtinguts simplement amb les opcions predefinides del programa.

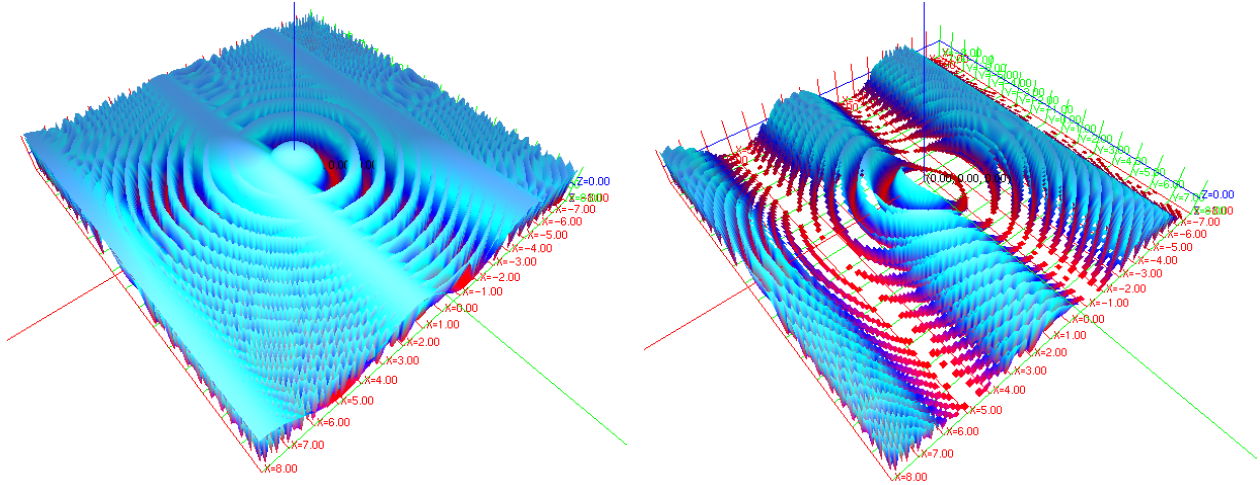
3.4 Seccions

Per a qualsevol funció que visualitzem podem definir una funció de tall sobre ella. Aquesta funció de tall es defineix amb la mateixa sintaxi d'expressions matemàtiques. Cal definir en el moment de definir la funció de tall si volem fer la secció per la part superior (eliminant la part superior de la funció) o per la part inferior. S'assumeix per la funció de tall el mateix rang de valors que per la funció sobre la que s'aplica la secció.

Com a restriccions cal destacar que només es pot definir una única funció de tall sobre la que es visualitza, i aquesta funció de tall només pot retallar una única funció. Per aplicar aquesta funcionalitat només ha de ser visible una funció.

No estan implementats els talls verticals, però s'hi està treballant en una futura versió.

En la *figura 5* podem veure les funcions $\cos(x^2 + y^2)$ i $\sin(x)$ visualitzades simultàniament, (*figura 5a*) i la secció de la segona funció sobre la primera, habilitatnt el tall de la funció per dalt.



(a)

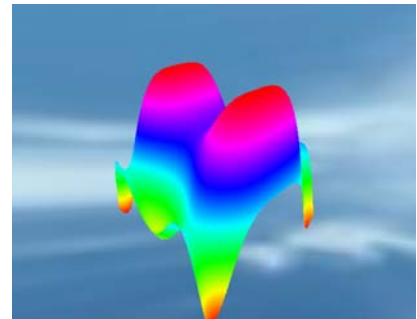
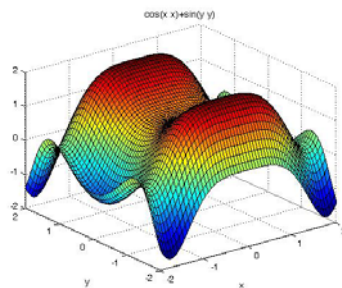
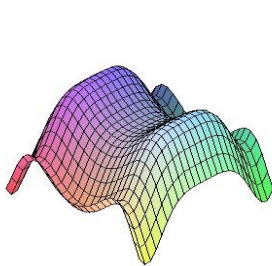
(b)

Figura 5. Visualització conjunta de les funcions $\cos(x^2 + y^2)$ i $\sin(x)$ (a) i resultat de la secció de la primera funció sobre la segona aplicant el tall per dalt (b).

4 Resultats

Per a validar la capacitat de representació de l'aplicació BlueStar, s'ha realitzat un petit estudi on es fa una comparativa de qualitat d'imatge sobre diferents rangs d'una funció amb els següents programes: Maple 9, Matlab 7.02 i BlueStar 1.0 (la nostra aplicació). Entenem que la *qualitat d'imatge* serà més alta com més semblant sigui la funció visualitzada respecte la original.

La funció escollida per la compartiva és $\cos(x^2 + y^2)$. L'elecció d'aquesta funció es degut a que presenta certa periodicitat i que el seu període es va escurçant en la distància fins a cert punt per després allargar-se en sentit invers. Es tracta d'una funció amb una forma previsible. Ademés es tracta d'una funció molt sensible a la quantitat de mostres que s'obtinguin. Els rangs de valors escollits en les variables de X i Y són: de -2 a 2 (*figura 6*), de -8 a 8 (*figura 7*), de -16 a 16 (*figura 8*).



Maple

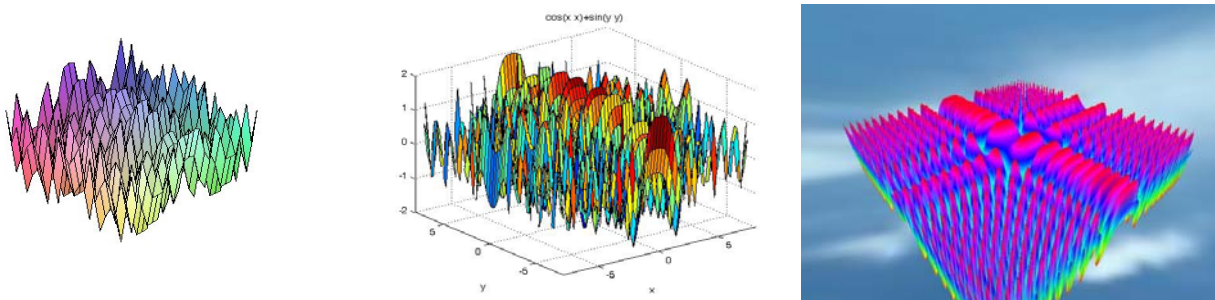
Matlab

BlueStar

Figura 6. Visualització de la funció $\cos(x^2 + y^2)$ de -2 a 2 en les aplicacions Maple, Matlab i BlueStar.

En la *figura 6*, Maple dibuixa sense problemes la funció matemàtica. Matlab utilitza un major mostreig, pel que tampoc té problemes de visualització. BlueStar tampoc presenta problemes.

En la *figura 7*, la qualitat de la funció en Maple comença a baixar degut al baix mostreig. La forma pot induir a error. Matlab, malgrat té un major mostreig, dificulta una mica la seva visibilitat degut al pseudocolor dels triangles, que és gradual independentment dels quadrats que genera. BlueStar manté una certa qualitat en la representació de la funció, degut a la construcció de la funció en triangles i a l'ús d'il.luminacions més realistes, en concret la il.luminació difusa.

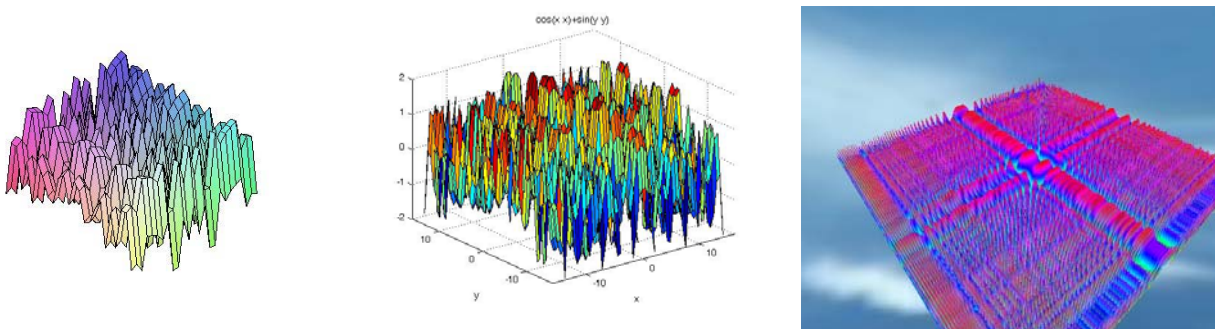


Maple

Matlab

BlueStar

Figura 7. Visualització de la funció $\cos(x^2 + y^2)$ de -8 a 8 en les aplicacions Maple, Matlab i BlueStar.



Maple

Matlab

BlueStar

Figura 8. Visualització de la funció $\cos(x^2 + y^2)$ de -16 a 16 en les aplicacions Maple, Matlab i BlueStar.

En la *figura 8*, la forma que presenta Maple ja no correspon a la funció real. El màxim rang de representació s'ha superat. El pseudocolor és bo degut a que és independent del mostreig. Matlab li costa representar la funció adequadament, tant a nivell de mostreig com de pseudocolor. BlueStar manté una bona representació de la funció, tot i que comença a mostrar signes de debilitat al ser incapaç de generar suficient mostreig de l'ondulació que té un període molt curt.

CONCLUSIONS I DISCUSSIÓ

Es presenta en aquest article els requeriments, disseny i implementació d'una aplicació per a la visualització de funcions 3D reals amb 2 variables, com a eina d'aprenentatge d'aquest tipus de funcions en assignatures de matemàtiques. L'aplicació aprofita les

prestacions gràfiques i la interactivitat de la llibreria gràfica OpenGL per a visualitzar les funcions a partir de malles triangulars.

L'aplicació permet visualitzar simultàniament fins a 9 funcions, assignar pseudocolor segons alçades, variar el rang de representació de les funcions i realitzar seccions d'aquestes funcions per comprendre millor la seva topologia.

Com a millores que estem estudiant cal destacar:

- Interpretació de funcions en format LaTeX, el que en dona més capacitat de representació de funcions i ens apropa als usuaris de latex a l'ús d'aquesta aplicació.
- Definió d'efectes de llum més sofisticats (lluents, més d'una font de llum, intensitat difusa i especlar, etc.) que ressalten les formes de la funció.
- Definió d'altres operadors sobre les funcions, semblants a les seccions implementades.

Els autors estan oberts a que l'aplicació s'utilitzi per part del professorat interessat en la docència de les matemàtiques, demanant a canvi suggeriments i proves per a millorar l'aplicació desenvolupada, desitjant que aquesta aplicació contribueixi com a eina docent a una millor comprensió de les formes tridimensionals per part dels alumnes de matemàtiques.

Agraïments

A l'IDES, i al grup IDES *Imatge Digital Interactiva*, organitzadors del curs d'*Imatge Digital Interactiva*, gràcies al qual dos dels autors d'aquest article es varen posar en contacte, fruit del qual ha sigut aquest projecte, que esperem sigui l'inici d'aquesta col·laboració, oberta a altres docents interessats en l'aprenentatge de les matemàtiques.

REFERÈNCIES

- [CGM06] G.B. Costa, M. Gorak, B.S. Melendez (2006). Visualization of Two Dimensional to Three Dimensional Transformations - Exploration through Technology. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology*, 37(7): 842-859.
- [DHS01] T.Dreyfus, R. Hershkowitz, B. Schwartz (2001). Abstraction in context: the case of peer interaction. *Cognitive Science Quarterly*, 1(3): 307-367.
- [DuK06] S. Durmuş, E. Kakakirik (2006). Virtual Manipulatives in Mathematics Education: A Theoretical Framework. *The Turkish Online Journal of Educational Technology*, 5(1), article 12.
- [FvDF93] J.D. Foley, A. van Dam, S.K. Feiner, J.F. Hughes, R. Phillips (1993). *Introduction to Computer Graphics*, Addison-Wesley.
- [Gir02] J.H. Giraldo (2002). Using Animations in the Teaching of Calculus Concepts, in M.L. Connell, N.V. Lovery, D.L. Harnich (eds.), *Proceedings of SITE 2002: Society for Information Technology and Teacher Education International Conference*, Association for the Advancement of Computing in Education, Norfolk, pp. 1078-79.
- [GGR00] M. Goss, P. Galbraith, P. Renshaw, V. Geiger (2000). Reshaping teacher and student roles in technology-enriched classrooms. *Mathematics Education Research Journal*, 12(3): 303-320.

- [HiW92] J. Hiebert, D. Wearne (1992). Links between teaching and learning place value with understanding in first grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23: 98-122.
- [Huk06] T. Huk (2006). Who benefits from learning with 3D models? The case of spatial ability. *Journal of Computer Assisted Learning*, 22: 392-404.
- [KMH04] M. Keehner, D.R. Montello, M. Hegarty, C. Cohen (2004). Effects of interactivity and spatial ability on the comprehension of spatial relations in a 3D computer visualization, in K. Forbus, D. Gentner, T. Regier (eds.), *Proceedings of the 26th Annual Conference of the Cognitive Science Society*, Erlbaum, pp. 666-671.
- [Lyn06] J. Lynch (2006). Assessing Effects of Technology Usage on Mathematics Learning. *Mathematics Education Research Journal*, 18(3): 29-43.
- [MGJ06] E. Martí, D. Gil, C. Julià (2006). A PBL experience in the teaching Computer Graphics, *Computer Graphics Forum*, 26(1): 1-9.
- [MRS06] E. Martí, J. Rocarias, A. Sánchez, P. Radeva, R. Toledo, J. Vitrià (2006). Caronte: una proposta d'entorn de gestió documental per a assignatures d'Enginyeria Informàtica, *IV Congreso Internacional Docencia Universitaria e Innovación*, Barcelona.
- [Tal00] D. Tall (2000). Cognitive development in advanced mathematics with technology. *Mathematics Education Research Journal*, 12(3): 196-218.
- [Twi02] P. Twining (2002). Conceptualizing computer use in education: Introducing the Computer Practice Framework (CPF). *British Educational Research Journal*, 28(1): 95-110.