Publicacions Matemàtiques, Vol **38** (1994), 269–298.

APPROXIMATION PAR DES FONCTIONS HOLOMORPHES A CROISSANCE CONTROLEE

PH. CHARPENTIER, Y. DUPAIN AND MODI MOUNKAILA

Abstract

Let Ω be a bounded pseuco-convex domain in $\mathbb{C}^n$ with a $\mathcal{C}^\infty$ boundary, and let S be the set of strictly pseudo-convex points of $\partial\Omega$. In this paper, we study the asymptotic behaviour of holomorphic functions along normals arising from points of S. We extend results obtained by M. Ortel and W. Schneider in the unit disc and those of A. Iordan and Y. Dupain in the unit ball of $\mathbb{C}^n$. We establish the existence of holomorphic functions of given growth having a "prescribed behaviour" on almost all normals arising from points of S.

1. Introduction

1.1. Historique.

Dans ce travail, on étudie le comportement asymptotique au bord des fonctions holomorphes à croissance contrôlée dans un domaine pseudo-convexe borné de $\mathbb{C}^n$.

Les premiers résultats dans cette direction ont été obtenus en dimension 1 en 1954 par F. Bagemihl et W. Seidel ([**1**]): précisément ils démontrent que si φ est une fonction continue sur le disque unité D du plan complexe, il existe un fonction holomorphe f dans D telle que, pour presque tout $\xi \in \partial D$, on a $\lim\limits_{r\to 1}(f(r\xi) - \varphi(\xi)) = 0$. Une telle fonction ne peut pas, en général, être bornée, et il est naturel de se demander si on peut contrôler sa croissance. En 1971 J. P. Kahane et Y. Katznelson ([**6**]) montrent que si ψ est mesurable sur ∂D, pour tout ordre de croissance θ non borné, il existe une fonction holomorphe G dans D admettant ψ pour limite radiale presque partout et vérifiant $|G| \leq \theta$. Enfin, en 1985, M. Ortel et W. Schneider généralisent ce dernier résultat à des limites inférieures et supérieures pour les parties réelle et imaginaire de G ([**8**]).

En dimension supérieure, les premiers résultats sont apparus peu de temps après la démonstration de l'existence des fonctions intérieures. Tout d'abord, dans [**4**], M. Hakim et N. Sibony généralisent le théorème de F. Bagemihl et W. Seidel à la boule unité de $\mathbb{C}^n$ et à une classe assez vaste de domaines pseudoconvexes, et Y. Dupain obtient un résultat analogue dans la boule précisant les points exeptionnels ([**2**]). Le premier résultat faisant intervenir un contrôle de croissance a été obtenu par A. Iordan ([**5**]) dans la boule unité de $\mathbb{C}^n$. Finalement un résultat précis dans la boule unité de $\mathbb{C}^n$, a été obtenu en 1991 par Y. Dupain ([**3**]), et c'est celui-ci que nous nous proposons de généraliser aux domaines pseudoconvexes de $\mathbb{C}^n$.

Il faut noter que la partie difficile du théorème réside dans le contrôle de la croissance de la fonction qui approxime, et il n'est pas clair qu'un tel résultat soit vrai dans un domaine quelconque.

1.2. Notations et énoncé du théorème.

n étant un entier ≥ 2, l'espace $\mathbb{C}^n$ est muni du produit scalaire standard $\langle z, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i\overline{w_i}$ et de la norme qui lui est associée.

Dans toute la suite, Ω désignera un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ de fonction définissante ρ de classe $\mathcal{C}^1$. On notera σ la mesure de Lebesgue induite sur $\partial\Omega$. La lettre D désignera le disque unité du plan complexe, et on notera μ la mesure de lebesgue normalisée sur ∂D.

Pour tout point $w \in \partial\Omega$ on notera n_w le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$ orienté extérieurement.

Pour tout $z \in \mathbb{C}^n$ on notera $\delta(z)$ la distance au complémentaire de Ω.

Enfin nous noterons $H(\Omega)$ l'algèbre des fonctions holomorphes dans Ω et $A(\Omega)$ la sous-algèbre des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$.

Donnons maintenant la définition d'ordre de croissance que nous utiliserons:

Définition 1.1. Un ordre de croissance non borne est une fonction $\theta :]0,1[\to]0,+\infty[$ décroissante telle que $\lim_{x\to 0}\theta(x) = +\infty$.

Dans cet article nous démontrons le théorème suivant:

Théorème 1.2. *Soient Ω un domaine pseudoconvexe borné de $\mathbb{C}^n$ à bord $\mathcal{C}^\infty$, φ une fonction continue dans Ω et θ un ordre de croissance non borné. Alors il existe une fonction f holomorphe dans Ω et une bijection croissante $\beta :]0,1[\to]0,1[$ telles que:*

1) $|f(z)| \leq \theta(\delta(z))$, $z \in \Omega$;

2) *pour presque tout point de stricte pseudoconvexité w de $\partial\Omega$, on a:*

$$\lim_{\epsilon\to 0} f(w-\epsilon n_w) - \varphi(w-\beta(\epsilon)n_w) = 0$$

1.3. Schéma de la démonstration.

La fonction f est construite sous forme d'une série $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ où f_k est une fonction de $A(\Omega)$ d'ordre de croissance inférieur à $\theta/2^k$ qui est une approximation convenable de $\varphi_k = \varphi - \sum_{j=1}^{k-1} f_j$. Plus précisément, pour des paramètres inférieurs à $1/2^k$, une fonction g est une approximation convenable de ψ sur un ouvert O pour les paramètres α et λ s'il existe un ensemble $W \subset O$, $\sigma(W) > (1-\alpha)\sigma(0)$, et deux réels λ_1 et λ_2, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda$, tels que:

(i) $\epsilon < \lambda_1 \Rightarrow |g(w-\epsilon n_w) - \psi(w)| < \alpha$, $w \in W$;
(ii) $\lambda_1 \leq \epsilon \leq \lambda_2 \Rightarrow |g(w-\epsilon n_w) - \psi(w)| < |\psi(w)| + \alpha$, $w \in W$;
(iii) $\lambda_2 \leq \epsilon \Rightarrow |g(w-\epsilon n_w)| < \alpha$.

Les méthodes utilisées pour construire ces approximations utilisant des propriétés de stricte convexité, nous sommes amenés à considérer des biholomorphismes locaux au voisinage des points de stricte pseudoconvexité et donc à construire des approximations locales dans un domaine strictement convexe. Lors du retour dans le domaine pseudoconvexe se posent alors deux problèmes. Tout d'abord les fonctions approximantes étant obtenues au travers des biholomorphismes elles ne sont plus définies que localement et il faut les globaliser. D'autre part, les normales du domaine pseudoconvexe ne sont pas les images des normales du strictement convexe, et les propriétés d'approximations dans le strictement convexe doivent être vérifiees le long de certaines courbes.

Pour résoudre le premier problème nous sommes amenés à construire, dans le strictement convexe, des approximations vérifiant, outre les conditions précédentes, des conditions sur la croissance des dérivées, la globalisation se faisant alors naturellement en résolvant un $\overline{\partial}$.

Bien que les propriétés d'approximation doivent être obtenues le long de familles de courbes "admissibles", il est plus simple, vu le côté technique de la méthode, d'obtenir tout d'abord des approximations préliminaires le long des normales au domaine strictement convexe. Ce n'est qu'à la fin du paragraphe concernant les strictement convexes que l'on deduira les approximations cherchées de celles obtenues le long des normales.

Dans les strictement convexes, les approximations avec contrôle des dérivées sont obtenues par un procédé itératif utilisant des approximations un peu plus faibles c'est-à-dire vérifiant essentiellement seulement les propriétés (ii) et (iii) ci-dessus, la propriété (i) étant remplacée par la propriété suivante:

(i') $\epsilon < \lambda_1 \Rightarrow |g(w - \epsilon n_w) - \psi(w)| < c|\psi(w)| + \alpha, \quad w \in W(\text{où } c < 1).$

A ce niveau, le point de départ de la méthode de construction est directement inspiré de [**3**]: les approximations de la fonction φ sont obtenues en faisant le produit d'une fonction de $A(\Omega)$ approximant φ (sans contrôle de croissance) et d'une autre qui approxime la constante 1 avec de bons contrôles sur sa croissance et celles de ses dérivées. C'est grâce à un choix judicieux des paramètres intervenant dans les constructions des fonctions précédentes que l'on peut conclure.

L'article est ainsi divisé en deux parties. Dans la premiere on se place dans un domaine stritement convexe et on y montre un résultat d'approximation local suffisament fin. Dans la seconde, on utilise les biholomorphismes locaux précédement cités et le résultat de la première partie pour démontrer le résultat final.

2. Le cas strictement convexe

Le point de départ de la construction est l'existence, en tout point w de $\partial\Omega$, de fonctions élémentaires possédant de bonnes propriétés dans un voisinage de ce point ainsi que "loin" de celui-ci. Ceci est basé sur la stricte convexité du domaine sous la forme de l'existence de boules osculatrices à $\partial\Omega$ en w: nous construisons des fonctions élémentaires dans ces boules, les fonctions dans le domaine étant obtenues simplement par restriction. Les fonctions dans les boules sont construites, à partir du théorème de Mergelyan dans le disque unité de $\mathbb{C}$, par projection sur la normale complexe au point w.

Afin de simplifier au maximum des passages techniques assez longs, nous introduisons des notations et une pseudo-distance exprimées directement en fonction de ces projections. Bien que cette pseudo-distance soit équivalente à la racine carrée de la distance euclidienne, c'est elle que nous utiliserons car elle intervient directement dans les calculs.

2.1. Notations et définition de la pseudo-distance.

La stricte convexité de Ω entraîne qu'il existe $R_1 > 0$ et $R_2 > 0$ tels que, pour tout $w \in \partial\Omega$, il existe deux points $u(w)$ et $v(w)$ pour lesquels les boules euclidiennes $B'(u(w), R_0)$ et $B'(u(w), R_1)$ sont tangentes à $\partial\Omega$ en w et

$$B'(v(w), R_1) \subset \Omega \subset B'(u(w), R_0). \tag{2.1}$$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer $R_0 = 1$, et, pour tout $w \in \partial\Omega$,

$$\Omega \subset B'\left(\frac{w + u(w)}{2}, \frac{1}{2}\right). \tag{2.2}$$

Pour tout point $w \in \partial\Omega$, notons L_w la fonction de Ω dans $[0, 1[$ définie par

$$L_w(z) = |\langle z - u(w), n_w \rangle|, \tag{2.3}$$

et $L : \Omega \to [0, 1[$ celle donnée par

$$L(z) = \max_{w \in \partial\Omega} L_w(z). \tag{2.4}$$

On notera que si z est assez proche de $\partial\Omega$, on a $L(z) = 1 - \delta(z)$. Toutefois, dans les calculs explicites que nous fallons faire dans tout le domaine, c'est la fonction $L(z)$ qui intervient directement, et tous les résultats intermédiaires sont exprimés en fonction de L et non pas de δ.

On considère l'application $d : \partial\Omega \times \partial\Omega \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$d(w, w') = 1 - \langle w' - u(w), n_w \rangle = 1 - L_w(w'), \tag{2.5}$$

et, pour $w \in \partial\Omega$, et $r > 0$, on note

$$B(w, r) = \{w' \in \partial\Omega / d(w, w') < r\}. \tag{2.6}$$

La proposition suivante montre que d se comporte essentiellement comme une pseudo-distance et introduit des constantes qui interviendront dans les calculs ultérieurs:

Proposition 2.1. *1) Il existe une constante $Q > 0$ telle que pour w_1 et w_2 dans $\partial\Omega$ on a*

$$d(w_1, w_2) \leq Q d(w_2, w_1). \tag{2.7}$$

2) Il existe une constante $A > 0$ telle que pour $w_i \in \partial\Omega$, $i = 1, 2, 3$, on a

$$d(w_1, w_2) \leq A \min_{\substack{\{i,j\}=\{1,2\} \\ \{k,l\}=\{2,3\}}} [d(w_i, w_j) + d(w_k, w_l)]. \tag{2.8}$$

3) Il existe deux constantes strictement positives b_0 et b_1 telles que pour $w \in \partial\Omega$ et $r \leq 1$, on a

$$b_0 r^{n-1/2} \leq \sigma(B(w,r)) \leq b_1 r^{n-1/2}. \tag{2.9}$$

Cette proposition se déduit aisément de l'existance d'une constante ρ_0, $0 < \rho_0 < R_1/8$ telle que, pour $w \in \partial\Omega$ et $r \leq \rho_0$, on a

$$B'\left(w, \sqrt{2R_1 r}\right) \subset B(w,r) \subset B'\left(w, 2\sqrt{r}\right).$$

Pour des raisons de commodité, nous noterons

$$b_2 = b_1/b_0. \tag{2.10}$$

Des raisons techniques qui apparaîtront clairement par la suite nous amènent à définir une notion d'ouvert assez petit suivante:

Nous dirons qu'un ouvert de $\partial\Omega$ est **assez petit** s'il est de surface ≤ 1, de complémentaire non vide, et si, pour tous points w et w' de $\partial\Omega$ et tout ϵ, $0 < \epsilon < R_1$, on a

$$|\langle w - \epsilon n_w - u(w'), n_{w'}\rangle| < \min\left(1 - \frac{\epsilon}{2}, 1 - \frac{1 - |\langle w - u(w'), n_{w'}\rangle|}{2}\right). \tag{2.11}$$

Naturellement tout point possède un voisinage assez petit.

2.2. Approximation de la fonction 1 avec contrôle de croissance.

Dans ce sous-paragraphe nous construisons, pour tout ouvert assez petit O du bord de Ω, une fonction holomorphe à croissance contrôlée, petite ainsi que ses dérivées loin de O, proche de 1 près du bord sur un ensemble de normales "assez gros" issu de O et convenablement contrôlée sur ces même normales.

La finesse de l'approximation dépend d'un paramètre k. Pour k fixé, la méthode consiste à définir notre fonction comme somme de N_k fonctions vérifiant des conditions du même type sur des ouverts plus petits judicieusement choisis.

L'existence de telles fonctions est donnée par le lemme d'aproximation locale (lemme 2.3) assez technique qui est établi en utilisant un certain nombre de fonctions auxiliaires définies après l'énoncé de la proposition.

Proposition 2.2. *Il existe un réel Δ, $0 < \Delta < 1$, tel que, pour tous réels α, $\beta \in]0,1[$, il existe un réel $M_1 > 0$ tel que pour tout ouvert assez petit O de $\partial\Omega$, pour tout entier positif k assez grand, il existe une fonction $F_k \in A(\Omega)$, une fonction $G_k : \Omega \to [0,1[$, un ouvert $O_k \subset\subset O$, un sous-ensemble $W_k \subset\subset O_k$ vérifiant $\sigma(W_k) > (1-\beta)\sigma(O)$, et deux réels ϵ_k^1 et ϵ_k^2, $0 < \epsilon_k^1 < \epsilon_k^2 = 2/k$, de telle sorte que l'on ait les propriétés suivantes:*

(I) $|F_k(z)| \leq M_1(L(z))^k$ *dans* Ω;

(II) *pour* $w \in W_k$ *on a:*

(i) $G_k(w - \epsilon n_w) \in [\Delta, 1/2]$ *pour* $\epsilon < \epsilon_k^1$,

(ii) $|F_k(w - \epsilon n_w) - G_k(w - \epsilon n_w)| < \alpha$ *pour* $\epsilon \in [0, R_1[$;

(III) *pour* $m \in \mathbb{N}^n$, $|m| \leq n+1$, *on a*

$$|\partial^m F_k(z)| < \alpha \text{ pour } z \in \overline{\Omega}\setminus\{w - \epsilon n_w,\ w \in O_k \text{ et } \epsilon < \epsilon_k^2\}.$$

Suivant les idées développées dans [**3**], nous définissons tout d'abord des fonctions auxiliaires. Soient a et b tels que

$$e^{-1} < a < b < e^{-1/2}, \tag{2.12}$$

et soit $c : [0,1] \to [0,1]$ la fonction définie par

$$c(r) = \begin{cases} 0, & \text{si } r \in [0,a], \\ & \text{affine sur } [a,b], \\ 1, & \text{si } r \in [b,1]. \end{cases} \tag{2.13}$$

Dans toute la suite, nous ne considérons que des entiers k vérifiant la condition suivante:

$$(1 - 1/k)^k < a \text{ et } (1 - 1/2k)^k > b. \tag{2.14}$$

Pour tout entier k vérifiant 2.14, nous noterons $k' = k'(k)$ le plus petit entier supérieur à $2k$ vérifiant la condition

$$\begin{cases} (n+1)!(2k-1)^{k'+1}(2k-2)^{-k'+n+1}(1-1/k)^{\frac{2k'}{3}-(n+1)} < 1, \\ (1-1/k)^{k'}\left(\frac{2k-1}{2k-2}\right)^{k'} < a. \end{cases} \tag{2.15}$$

On vérifie facilement que $k' = o(k^2)$.

Remarquons que si $\delta(z) < R_1$, $z \in \partial\Omega$, il existe un et un seul $(w, \epsilon) \in \partial\Omega \times [0, R_1[$ tel que $z = w - \epsilon n$.

Pou tout $w_0 \in \partial\Omega$, considérons la fonction $g_{w_0} : \Omega \to [0,1[$ définie par
(2.16)
$$g_{w_0}(z) = \begin{cases} t_\epsilon^{k'} c(t_\epsilon^{k'}), & \text{si } \exists (w,\epsilon) \in \partial\Omega \times [0, R_1[\text{ tel que } z = w - \epsilon n_w, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où

$$t_\epsilon = \left(1 - \frac{\epsilon}{\|w - u(w_0)\|}\right) |\langle w - u(w_0), n_{w_0}\rangle|. \tag{2.17}$$

Lemme 2.3. *Pour tous réels η, $\gamma \in]0,1[$, pour tout $w_0 \in \partial\Omega$ et tout entier positif k assez grand, il existe une fonction $F_{w_0 k} \in A(\Omega)$, un voisinage $V_{w_0}^k$ de w_0 dans $\partial\Omega$ et un sous-ensemble $W_{w_0}^k$ de $V_{w_0}^k$ tel que $\sigma(W_{w_0}^k) > (1-\beta)\sigma(V_{w_0}^k)$ et vérifiant les propriétés suivantes:*

(I) $\forall w \in W_{w_0}^k$, $\forall \epsilon \in [0, R_1[$, *on a* $|F_{w_0 k}(w - \epsilon n_w) - g_{w_0}(w - \epsilon n_w)| < \eta$;

(II) $\forall z \in \overline{\Omega}$ *tel que* $|\langle z - u(w_0), n_{w_0}\rangle| < 1 - 1/k'$, *on a* $|F_{w_0 k}(z)| < \eta(L_{w_0}(z))^{k'}$;

(III) $\forall m \in \mathbb{N}^n$, $|m| \leq n+1$, $\forall z \in \overline{\Omega}$ *tel que* $|\langle z - u(w_0), n_{w_0}\rangle| < 1 - 1/k$, *on a* $|\partial^m F_{w_0 k}(z)| \leq \eta(L_{w_0}(z))^{k'/3}$.

Démonstration du lemme 2.3:

1. Détermination de la fonction $F_{w_0 k}$.

Comme dans [**3**], considérons un ensemble de Cantor E dans ∂D dont la mesure sera précisée ultérieurement. a et b étant les réels définis en 2.12, appliquons le théorème de Mergelyan au compact

$$K = \{|z| \leq a\} \cup \{r\xi,\, r \in [a.1],\, \xi \in E\}.$$

Il existe donc $h \in H(\mathbb{C})$ telle que

$$\begin{aligned} &|h(z)| < \eta/4, \text{ si } |z| < a, \\ &|h(r\xi) - c(r)\overline{\xi}| < \eta/4,\ \forall \xi \in E,\ \forall r \in [0,1]. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Pour k satisfaisant 2.14, posons maintenant

$$f_k(z) = z^{k'} h(z^{k'}). \tag{2.19}$$

Soit E_k le sous-ensemble de ∂D défini par: $\xi \in E_k \Leftrightarrow \xi^{k'} \in E$, de sorte que $\sigma(E_k) = \sigma(E)$. En utilisant [**3**, III.1.1], on établit aisément les deux propriétés suivantes:

$$|f_k(r\xi) - r^{k'} c(r^{k'})| < \eta/4,\ \forall \xi \in E_k,\ \forall r \in [0,1], \tag{2.20}$$

et,

$$|f_k(z)| < (\eta/4)|z|^{k'}, \text{ si } |z| < 1 - 1/k'. \tag{2.21}$$

De plus, la fonction h étant dans $H(\mathbb{C})$, il existe un réel $M_1 > 0$ tel que

$$|f_k(z_1) - f_k(z_2)| \leq k' M_1 |z_1 - z_2|, \forall\, z_1,\, z_2 \in \overline{D}. \tag{2.22}$$

Par ailleurs, la formule de Cauchy appliquée au cercle $|\xi| = |z|\left(\frac{2k-1}{2k-2}\right)$ donne, pour $m \leq n+1$,

$$|f_k^{(m)}(z)| \leq (n+1)! \frac{(2k-1)^{k'+1}}{(2k-2)^{k'-n-1}} |z|^{k'-n-1} \max_{|xi| = |z|\left(\frac{2k-1}{2k-2}\right)} |h(\xi^{k'})|.$$

Cette inégalité combinée à 2.15 et 2.18 donne

$$|f_k^{(m)}(z)| < \eta |z|^{k'/3}, \forall\, m \leq n+1, \forall\, z \in D \text{ tel que } |z| < 1 - 1/k. \tag{2.23}$$

Nous définissons alors la fonction $F_{w_0 k}$ par

$$F_{w_0 k}(z) = f_k(\langle z - u(w_0), n_{w_0}\rangle), \quad z \in \overline{\Omega}. \tag{2.24}$$

2. Définition des ensembles $V_{w_0}^k$ et $W_{w_0}^k$.

Posons

$$V_{w_0}^k = B(w_0, 2/k'), \tag{2.25}$$

et

$$W_{w_0}^k = \left\{ w \in V_{w_0}^k \text{ tel que } \frac{\langle w - u(w_0), n_{w_0}\rangle}{|\langle w - u(w_0), n_{w_0}\rangle|} \in E_k \right\}, \tag{2.26}$$

et montrons que si k est assez grand, on a, uniformement par rapport à $w_0 \in \partial\Omega$,

$$\sigma(W_{w_0}^k) > (1-\gamma)\sigma(V_{w_0}^k).$$

Notons T_{w_0} le plan tangent en w_0 à $\partial\Omega$ et Π_{w_0} la projection stéréographique de centre $u(w_0)$ sur T_{w_0}. Il existe $r > 0$ tel que, pour tout $w_0 \in \partial\Omega$ et tout $A \subset B(w_0, r)$, on a

$$\frac{1}{2}\sigma_{2n-1}(\Pi_{w_0}(A)) \leq \sigma(A) \leq 2\sigma_{2n-1}(\Pi_{w_0}(A)). \tag{2.27}$$

Soit $w_0 \in \partial\Omega$, et soit H_t l'hyperplan orthogonal à n_{w_0} passant par $u(w_0) + tn_{w_0}$. Soit $K_t = \bigcup_{s \geq t} H_s$, et soit $t_0 = t_0(k)$ le plus grand indice tel que $V^k_{w_0} \subset K_{t_0}$. Posons alors $V^k = \partial\Omega \cap K_{t_0}$. Des considérations géométriques simples montrent l'existence d'une constante $C > 0$ ne dépendant que de Ω telle que V^k soit contenu dans $B(x_0, C/k')$. La proposition 2.1 implique alors qu'il existe une constante, notée encore C, telle que $\sigma(V^k) \leq C\sigma(V^k_{w_0})$.

Notons par ailleurs que, $\overline{\Omega}$ et K_{t_0} étant convexes, $\Pi_{w_0}(V^k)$ est convexe.

Posons

$$L^k = \left\{ z \in V^k \text{ tel que } \frac{\langle z - u(w_0), n_{w_0} \rangle}{|\langle z - u(w_0), n_{w_0} \rangle|} \notin E_k \right\}.$$

Il nous suffit clairement de voir que, pour k assez grand (indépendament de $w_0 \in \partial\Omega$),

$$\sigma(L^k) < \frac{\gamma}{C}\sigma(V^k),$$

et comme il existe k_0 tel que, pour $k \geq k_0$ et $w_0 \in \partial\Omega$, V^k est contenu dans une boule assez petite pour pouvoir appliquer 2.27, on est finalement ramené à montrer que

$$\sigma_{2n-1}(\Pi_{w_0}(L^k)) < \frac{\gamma}{4C}\sigma_{2n-1}(\Pi_{w_0}(V^k)).$$

Pour cela, posons $f(y) = \sigma_{2n-1}(\{z \in \Pi_{w_0}(V^k)/\Pi_{D_0}(z) = y\})$, où Π_{D_0} est la projection orthogonale sur la droite passant par w_0 et engendrée par Jn_{w_0}, w_0 étant considéré comme l'origine de cette droite. $\Pi_{w_0}(V^k)$ étant convexe, f est concave sur l'intervalle $]\alpha, \beta[$ où elle est non nulle (remarquer que $-\alpha \simeq \beta \simeq 1/\sqrt{k'}$).

En écrivant alors

$$\sigma_{2n-1}(\Pi_{w_0}(V^k)) = \int_\alpha^\beta f(y)\,dt, \text{ et, } \sigma_{2n-1}(\Pi_{w_0}(L^k)) = \int_\alpha^\beta \chi_k(y)f(y)\,dy,$$

où χ_k est la fonction caractéristique de $\Pi_{D_0}(\Pi_{w_0}(L^k))$, la concavité de f et un découpage de $]\alpha, \beta[$ en intervalles de longueur $1/k$ (sauf peut-être le dernier intervalle) fournissent la majoration

$$\sigma_{2n-1}(\Pi_{w_0}(L^k)) \leq \frac{\gamma}{8C}\sigma(\Pi_{w_0}(V^k)) + \frac{\gamma}{2Ck}\frac{2\sigma(\Pi_{w_0}(V^k))}{(\beta - \alpha)}.$$

Si l'on se choisit l'ensemble de Cantor E de sorte que $\mu(E) > 1 - \gamma/16C$, on conclut en se rappelant que $\lim_{k \to \infty} \frac{\sqrt{k'}}{k} = 0$.

3. Estimation de la fonction F_{w_0}.

Les propriétés (II) et (III) proviennent respectivement de 2.21 et 2.23. Démontrons donc (I).

Soit $w \in W^k_{w_0}$ de sorte qu'il existe $\xi \in E_k$ tel que

$$\langle w - u(w_0), n_{w_0}\rangle = r\xi \text{ avec } r = |\langle w - u(w_0), n_{w_0}\rangle|.$$

Soient $\epsilon > R_1$ et t_ϵ le réel défini en 2.17. Montrons que

$$|f_k(\langle w - \epsilon n_w - u(w_0), n_{w_0}\rangle) - f_k(t_\epsilon \xi)| < \eta/2. \tag{2.28}$$

Distiguons deux cas:

Premier cas: $\epsilon < 2/k'$.

On a

$$|t_\epsilon \xi - (\langle w - \epsilon n_w - u(w_0), n_{w_0}\rangle)| = \epsilon \left| \frac{\langle w - u(w_0), n_{w_0}\rangle}{\|w - u(w_0)\|} - \langle n_w, n_{w_0}\rangle \right|,$$

et comme le deuxième membre de cette inégalité est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de w qui s'annule en w_0, il existe une constante K, ne dépendant que de Ω telle que d'après la proposition 2.1 le premier membre soit majoré par $K/\sqrt{k'}$. L 'inégalité cherchée s'obtient donc en utilisant 2.22 et en prenant k suffisament grand.

Second cas: $\epsilon \geq 2/k'$.

Dans ce cas, on a $t_\epsilon < 1 - 1/k'$. Comme l'ouvert est assez petit, on a de plus

$$|\langle w - \epsilon n_w - u(w_0), n_{w_0}\rangle| < 1 - 1/k',$$

et 2.28 résulte aussitôt de 2.21.

La propriété (I) résulte enfin aisément de 2.28, car, ϵ étant inférieur à R_1, la définition 2.16 de g_{w_0} et 2.20 donnent

$$|f_k(t_\epsilon \xi) - g_{w_0}(w - \epsilon n_w)| < \eta/2. \quad \blacksquare$$

Démonstration de la proposition 2.2:

Pour k assez grand, posons

$$O_k = \{w \in O / d(w, \partial O) > 2/k\}$$

et

$$O'_k = \{w \in O / d(w, \partial O) > 4A/k\},$$

de sorte que $O'_k \subset\subset O_k \subset\subset O$ et $\lim_{k\to\infty} \sigma(O\backslash O'_k) = 0$. On suppose de plus que k est choisi de sorte que le lemme 2.3 soit vérifie avec les paramètres

$$\begin{aligned} &\eta = \frac{\alpha}{2c_0}, \\ (2.29) \qquad &c_0 = b_2 2^{5n} A^{2n} Q^n \left(1 + \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{2^{ns}}{e^{2s/3}}\right), \\ &\gamma = \frac{\beta}{b_2(16AQ)^{n-1/2}}. \end{aligned}$$

Considérons maintenant une famille $(w_i)_{1\le i\le N_k}$ de points de O'_k maximale pour la relation

$$(2.30) \qquad i \neq j \Rightarrow d(w_i, w_j) > 1/(4Qk').$$

Pour $i = 1, \dots, N_k$ considérons la fonction $F_i^k = F_{w_i k}$, le voisinage $V_i^k = V_{w_i}^k$ de w_i es l'ensemble $W_i^k = W_{w_i}^k$ obtenus en appliquant le lemme 2.3 aux paramètes η et γ définis ci-dessus, et notons $g_i = g_{w_i}$, $L_i = L_{w_i}$ et $u_i = u(w_i)$.

Définition de W_k.

Remarquons que les V_i^k recouvrent O'_k et que

$$(2.31) \qquad V_i^k = B(w_i, 2/k') \subset B(w_i, 2/k) \subset O_k,$$

et posons

$$(2.32) \qquad W_k = \bigcap_{i=1}^{N_k} [(O'_k \cap W_i^k) \cup (O'_k \backslash V_i^k)],$$

de sorte que $W_k \subset O'_k \subset\subset O_k \subset\subset O$.

Evaluons la mesure de W_k: le lemme 2.3 et 2.9 donnent

$$\sigma(O\backslash W_k) \le \sum_{i=1}^{N_k} \sigma(V_i^k \backslash W_i^k) < \sum_{i=1}^{N_k} \gamma\sigma(V_i^k) \le \gamma b_1 N_k (2/k')^{n-1/2}.$$

De plus les ensembles $B(w_i, 1/8QAk')$ étant deux à deux disjoints, on a

$$(2.33) \qquad \sigma(O) \ge N_k b_0 (1/8AQk')^{n-1/2},$$

et il vient

$$\sigma(O\backslash W_k) < b_2(16AQ)^{n-1/2} \gamma\sigma(O) = \beta\sigma(O).$$

Remarquons de plus que 2.33 et le fait que $\sigma(O) \leq 1$ entraînent

$$N_k \leq \frac{1}{b_0}(8AQk')^n. \tag{2.34}$$

Construction des fonctions F_k et G_k.

Posons $F'_k(z) = \sum_{i=1}^{N_k} F_i^k(z)$ c'est-à-dire

$$F'_k(z) = \sum_{i=1}^{N_k} (\langle z - u_i, n_{w_i}\rangle)^{k'} h((\langle z - u_i, n_{w_i}\rangle)^{k'}). \tag{2.35}$$

Montrons tout d'abord que

$$|F'_k(z)| < c_0 \|h\|_\infty (L(z))^k. \tag{2.36}$$

Pour cela majorons premièrement $\sum_{i=1}^{N_k} \langle w - u_i, n_{w_i}\rangle|^{k'/3}$ uniformément par rapport à $w \in \partial\Omega$.

Pour $w \in \partial\Omega$, posons $A_0 = A_0(w) = \{i/d(w_i, w) < 2/k'\}$, et, pour $s = 1, \ldots, N$, $N-1$ désignant la partie entière de $\mathrm{Log}_2\, k'$, $A_s = A_s(w) = \{i/2^s/k' \leq d(w_i, w) < 2^{s+1}/k'\}$. Alors on a

$$\mathrm{Card}\, A_s \leq b_2 2^{5n+2ns} A^{2n} Q^n. \tag{2.37}$$

En effet 2.37 résulte du fait que $i \neq j$ implique $B(w_i, 1/8QAk') \cap B(w_j, 1/8QAk') = \emptyset$, que si $i \in A_s$ on a $B(w_i, 1/8QAk') \subset B(w, A2^{s+1}/k' + 1/8Qk')$ et de 2.9.

Si $s \geq 1$, pour $i \in A_s$, on a $|\langle w - u_i, n_{w_i}\rangle|^{k'/3} \leq (1 - 2^s/k')^{k'/3} \leq e^{-2^s/3}$, et comme $|\langle w - u_i, n_{w_i}\rangle| \leq 1$ pour tout i, il vient, d'après 2.37, et la définition 2.29 de c_0,

$$\sum_{i=1}^{N_k} |\langle w - u_i, n_{w_i}\rangle|^{k'/3} \leq c_0, \quad w \in \partial\Omega. \tag{2.38}$$

Alors 2.36 résulte de 2.35, 2.4 et 2.3, 2.38 et du principe du maximum appliqué à la fonction $\sum_{i=1}^{N_k} |\langle z - u_i, n_{w_i}\rangle|^{k'/3}$.

Montrons maintenant que

$$(2.39)\quad \left|F'_k(w-\epsilon n_w)-\sum_{i\in A_w} g_i(w-\epsilon n_w)\right|<\alpha,\ \forall\, w\in W_k,\ \forall\,\epsilon\in[0,R_1[.$$

Pour $w\in W_k$, posons $A_w=\{i/w\in W_i^k\}$. Si $i\notin A_w$, $d(w_i,w)\geq 2/k'$ et comme l'ouvert O est assez petit, pour $\epsilon\in[0,R_1[$, on a $|\langle w-\epsilon n_w-u_i,n_{w_i}\rangle|<1-1/k'$ et le (III) du lemme 2.3 donne

$$\sum_{i\notin A_w}|F_i^k(w-\epsilon n_w)|\leq \eta\sum_{i\notin A_w}(L_i(w-\epsilon n_w))^{k'}.$$

Par définition de L_{w_i} (2.3), 2.38 donne alors

$$\sum_{i\notin A_w}|F_i^k(w-\epsilon_w)|<\eta c_0.$$

Par ailleurs, si $i\in A_w$ et $\epsilon\in[0,R_1[$, puisque $A_w\subset A_0(w)$, par 2.37 on a

$$(2.40)\qquad \operatorname{Card}A_w\leq b_2 2^{5n}A^{2n}Q^n,$$

et le (I) du lemme 2.3 donne

$$\sum_{i\in A_w}|F^k(w-\epsilon n_w)-g_i(w-\epsilon n_w)|\leq b_2 2^{5n}A^{2n}Q^n\eta,$$

ce qui, avec l'inégalité précédant 2.40 donne 2.39.

Majorons maintenant les dérivées de F'_k.

En posant $\epsilon_k^2=2/k$, le (III) du lemme 2.3 montre que pour tout $|m|\leq n+1$ et tous $w\in O_k$ et $\epsilon\geq\epsilon_k^2$, on a $|\partial^m F_i^k(w-\epsilon n_w)|<\eta(L_{w_i}(w-\epsilon n_w))^{k'/3}$, ce qui, d'après 2.38 entraîne

$$(2.41)\quad |\partial^m F'_k(w-\epsilon n_w)|<\eta c_0<\alpha,\ \forall\, m\in\mathbb{N}^n,\ |m|\leq n+1,\ \forall\, w\in O_k,\ \forall\,\epsilon\geq\epsilon_k^2.$$

D'après 2.31, si $w\in O\backslash O_k$, on a $d(w_i,w)\geq 2/k$, et, puisque l'ouvert O est assez petit, le lemme 2.3 et 2.38 entraînent aussi

$$(2.42)\quad |\partial^m F'_k(w-\epsilon n_w)|<\eta c_0<\alpha,\ \forall\, m\in\mathbb{N}^n,\ |m|\leq n+1,\ \forall\, w\notin O_k,\ \forall\,\epsilon\in[0,R_1[.$$

Les inègalités 2.41 et 2.42 et le principe du maximum donnent donc

$$(2.43)\quad |\partial^m F'_k(z)| < \alpha, \forall m \in \mathbb{N}^n, |m| \le n+1, \\ \forall z \notin \{w - \epsilon n_w, w \in O_k, \epsilon \in [0, \epsilon_k^2|\}.$$

Définissons maintenant la fonction G'_k par

$$(2.44)\qquad G'_k(z) = \begin{cases} \sum_{i \in A_w} g_i(w - \epsilon n_w), & \text{si } \exists(w,\epsilon) \in W_k \times [0, R_1[\\ & \quad \text{tel que } z = w - \epsilon n_w, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Vérifions maintenant qu'il existe $\epsilon_k^1 > 0$ tel que

$$(2.45)\qquad G'_k(w - \epsilon n_w) \in [b, b_2 2^{5n} A^{2n} Q^n], \forall w \in W_k, \forall \epsilon < \epsilon_k^1.$$

En effet, si $w \in W_k$ et $\epsilon < R_1$, on a $G'_k(w - \epsilon n_w) = \sum_{i \in A_w} t_{w_i\epsilon}^{k'} c(t_{w_i\epsilon})$ (voir 2.16 et 2.17) et la maximalité de la famille des points w_i (c.f. 2.30 et 2.7) entraîne qu'il existe $i_0 \in A_w$ tel que $d(w_{i_0}, w) < 1/4k'$ ce qui donne $t_{w_{i_0}\epsilon} > 1 - 1/4k' - \epsilon$.

Posons alors $\epsilon_k^1 = 1/4k'$. On a donc, pour $\epsilon < \epsilon_k^1$, $t_{w_{i_0}\epsilon} > 1 - 1/2k'$, et, par définition de c et du réel b (c.f. 2.13), on a $t_{w_{i_0}\epsilon}^{k'} > b$ et $c(t_{w_{i_0}\epsilon}^{k'}) = 1$. On obtient donc 2.45 en utilisant 2.37.

Finalement, on obtient la proposition 2.2 en prenant $\Delta = b/(2^{5n+1} b_2 A^{2n} Q^n)$, $M = c_0 \|h\|_\infty$, $F_k = F'_k/(2^{5n+1} b_2 A^{2n} Q^n)$, $G_k = G'_k/(2^{5n+1} b_2 A^{2n} Q^n)$, $\epsilon_k^1 = 1/4k'$ et $\epsilon_k^2 = 2/k$. Les propriétés (I), (II) et (III) de cette proposition se déduisent respectivament des relations 2.36, 2.39, 2.45 et 2.43 en remarquant que, pour (I), la fonction h ne dépend que de η et γ c'est-à-dire de α et β. ∎

2.3. Approximation locale faible de la fonction φ.

Dans ce sous-paragraphe, comme il a été dit dans l'introduction, nous construisons maintenant une première approximation de la fonction φ, sur un ouvert assez petit sans contrôle de croissance.

La méthode, mis à part le contrôle de croissance, est la même que celle développée dans le sous-paragraphe précédent auquel nous empruntons les notations ainsi que certains résultats.

Proposition 2.4. *Il existe une constante c_1, $0 < c_1 < 1$, telle que, pour tous α', $\beta' \in]0,1[$, toute fonction φ continue sur $\partial\Omega$ et tout ouvert* *assez petit O de $\partial\Omega$, il existe une fonction $H \in A(\Omega)$, un ensemble $W' \subset\subset O$ et un réel ϵ', $0 < \epsilon' < R_1$, tels que:*

(I) $\sigma(W') > (1-\beta)\sigma(O)$;
(II) $|H(w-\epsilon n_w) - \varphi(w)| < c_1|\varphi(w)| + \alpha'$, $\forall\, w \in W'$, $\forall\, \epsilon < \epsilon'$.

Démonstration:

Reprenons les notations de la démonstration de la proposition 2.2: soit l un entier. Considérons une famille $(w_i)_{1\le i\le N_l}$ de points de O'_k maximale pour la relation $i \neq j \Rightarrow d(w_i, w_j) > 1/(4Ql')$ où l' est l'entier associés à l (c.f. 2.15). Soit $W_i'^l$ le sous-ensemble de $V_i'^l = B(w_i, 2/l')$ défini en 2.26, pour $w_0 = w_i$, et associé à l'ensemble de Cantor E'_l défini dans la preuve du lemme 2.3 pour le paramètre $\frac{\beta'}{(16AQ)^{n-1/2}b_2}$. Enfin, notons W'_l l'ensemble défini en 2.32 à partir des $W_i'^l$.

Soit $\varphi_1 = \varphi/(2b_2 2^{5n} A^{2n} Q^n)$.

L'entier l étant fixé, soit $s : [0,1] \to [0,1]$ définie par

$$s(t) = s_l(t) = \begin{cases} 0, & \text{sur } [0, 1-1/l'], \\ \text{affine}, & \text{sur } [1-1/l', 1-1/2l'], \\ 1, & \text{sur } [1-1/2l', 1]. \end{cases}$$

Comme dans la démonstration du lemme 2.3, le théorème de Mergelyan conduit aussitôt au lemme suivant:

Lemme 2.5. *Pour tout entier $i \le N_l$, il existe une fonction $h_i^l \in A(D)$ telle que:*

(I') $|h_i^l(z)| < \alpha'/(4N_l)$, $\forall\, z$ *tel que* $|z| < 1 - 1/l'$;
(II') $|h_i^l(rz) - s(r)\varphi_1(w_i)| < \alpha'/(4N_l)$, $\forall\, z \in E'_l$.

Posons $f_i^l(z) = h_i^l(\langle z - u_i, n_{w_i}\rangle)$, $H = \displaystyle\sum_{i=1}^{N_l} f_i^l$ et montrons que pour tout l assez grand H vérifie le (II) de la proposition 2.4 pour ϵ' assez petit.

Soit $w \in W'_l$, posons $A'_w = \{i/w \in W''^l_i\}$, $r_i = |\langle w-u_i, n_w\rangle|$ et écrivons

$$
\begin{aligned}
|H(w-\epsilon n_w) - \varphi(w)| &\leq \sum_{i\in A'_w} |f^l_i(w-\epsilon n_w) - f^l_i(w)| \\
&+ \sum_{i\in A'_w} |f^l_i(w) - s(r_i)\varphi_1(w_i)| \\
&+ \sum_{i\in A'_w} s(r)|\varphi_1(w_i) - \varphi_1(w)| \\
&+ \left|\sum_{i\in A'_w} s(r_i)\varphi_1(w) - \varphi(w)\right| \\
&+ \sum_{i\notin A'_w} |f^l_i(w-\epsilon n_w| \\
&= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5.
\end{aligned}
\tag{2.46}
$$

Nous allons montrer d'une part qu'il existe $c_1 < 1$ tel que $S_4 \leq c_1|\varphi(w)|$ et, d'autre part que les quatre autres sommes sont majorées par $\alpha'/4$ pour l assez grand. Ceci démontrera le (II) de la proposition en prenant $W' = W'_l$ pour un tel l.

Majoration de S_4. Par définition de φ_1, on a

$$S_4 \leq \left(1 - \sum_{i\in A'_w} \frac{s(r_i)}{2b_2 2^{5n}A^{2n}Q^n}\right)|\varphi(w)|.$$

La maximalité de la famille (w_i) et 2.9 et 2.7 entraînent l'existence d'un $i_0 \in A'_w$ tel que $d(w_{i_0}, w) \leq 1/4l'$ ce qui implique $r_{i_0} > 1 - 1/2l'$ et donc, par définition de s, $s(r_{i_0}) = 1$. Comme $\mathrm{card}(A'_w) < b_2 2^{5n+1}A^{2n}Q^n$ (2.40) et comme $0 \leq s(r_i) \leq 1$, $\forall i$, on obtient le résultat cherché en posant $c_1 = 1 - 1/(b_2 2^{5n+1}A^{2n}Q^n)$.

Majoration de S_1. Les fonctions f^l_i étant uniformément équicontinues dans $\overline{\Omega}$, il existe un réel ϵ'_l, $0 < \epsilon'_l < 1/l$, tel que $\forall\, w \in \partial\Omega$, $\forall\, \epsilon < \epsilon'_l$ et $\forall\, i \leq N_l$, on a

$$|f^l_i(w-\epsilon n_w) - f^l_i(w)| < \frac{\alpha'}{4b_2 2^{5n}A^{2n}Q^n},$$

et le résultat se déduit de 2.40.

Majoration de S_2. Elle découle immédiatement de la propriété (II') du lemme 2.5.

Majoration de S_3. φ étant uniformement continue sur $\partial\Omega$, pour l assez grand, on a, pour $i \in A'_w$ (ce qui implique $d(w_i, w) < 2/l' \leq 1/l$)

$$|\varphi_1(w_i) - \varphi_1(w)| < \frac{\alpha'}{4b_2 2^{5n} A^{2n} Q^n},$$

et il suffit d'utiliser encore 2.40.

Majoration de S_5. Si $i \notin A'_w$, puisque $w \in W'_l$, on a $w \notin V'_i$ et $|\langle w - u_i, n_{w_i}\rangle| < 1 - 2/l'$. L'ouvert O étant assez petit, on a donc $|\langle w - \epsilon n_w - u_i, n_{w_i}\rangle| < 1 - 1/l'$ et le résultat découle du (I') du lemme 2.5. ■

2.4. Approximation locale faible de φ le long des normales par une fonction holomorphe à croissance controlée.

Nous allons maintenant faire le produit des fonctions construites dans les deux son paragraphes précédents, avec un choix judicieux des paramètres, pour obtenir une première approximation locale de φ avec contrôle de croissance:

Proposition 2.6. *Il existe une constante c, $0 < c < 1$, telle que, pour tout couple de réels η, $\gamma \in]0,1[$, tout ouvert assez petit O de $\partial\Omega$ et toute fonction continue φ sur $\partial\Omega$, il existe deux réels strictement positifs M et M' tels que pour tout entier k suffisamment grand, il existe un ouvert $O_k \subset\subset O$, un sous-ensemble W^k de O_k vérifiant $\sigma(W^k) > (1-\gamma)\sigma(O)$ une fonction $f_k \in A(\Omega)$ et deux reels ϵ_k^1, ϵ_k^2, $0 < \epsilon_k^1 < \epsilon_k^2 = 2/k$, satisfaisant les propriétés suivantes:*

(I) $|f_k(z)| \leq M(L(z))^k$, $\forall\, z \in \Omega$;

(II)

(i) $|f_k(w - \epsilon n_w) - \varphi(w)| < c|\varphi(w)| + \eta$, $\forall\, w \in W^k$, $\forall \epsilon < \epsilon_k^1$;

(ii) $|f_k(w - \epsilon n_w) - \varphi(w)| < |\varphi(w)| + \eta$, $\forall\, w \in W^k$, $\forall \epsilon \in [\epsilon_k^1, \epsilon_k^2[$;

(III) $|\partial^m f_k(z)| < \eta$, $\forall\, z \in \Omega \backslash \{w - \epsilon n_w,\, w \in O_k,\, \epsilon < \epsilon_k^2\}$, $\forall m \in \mathbb{N}^n$, $|m| \leq n+1$.

(IV) $\|\nabla f_k\|_\infty \leq k' M'$.

Démonstration:

Appliquons tout d'abord la proposition 2.4 aux paramètres $\alpha' = \eta/2$ et $\beta' = \gamma/2$ avec les notations qui y sont introduites et posons $M'' = \|H\|_{\mathcal{C}^{n+1}(\overline{\Omega})} + 2$. Puis appliquons la proposition 2.2 aux paramètres $\alpha = \eta/M''C$, $C = \sum_{i \leq m} C_m^i$, $C_m^i = C_{m_1}^{i_1} \dots C_{m_n}^{i_n}$ et $\beta = \eta/2$ et en prenant $k > 2/\epsilon'$ suffisament grand. Là aussi conservons les notations qui y sont introduites. Posons alors $f_k = HF_k$, $W^k = W_k \cap W'$, de sorte que

$\sigma(W^k) > (1-\gamma)\sigma(O)$, $M = M''M_1$. Les ensembles O_k et les réels ϵ_k^1 et ϵ_k^2 sont ceux de la proposition 2.2.

Clairement, le (I) est immédiat et le (III) provient de la formule de Leibnitz et du (III) de la proposition 2.2.

Démonstration de (II).

Posons $F_k = G_k + R_k$ (proposition 2.2) et écrivons

$$\begin{aligned} f_k(w-\epsilon n_w) - \varphi(w) = {} & G_k(w-\epsilon n_w)(H(w-\epsilon n_w) - \varphi(w)) \\ & + (G_k(w-\epsilon n_w) - 1)\varphi(w) \\ & + R_k(w-\epsilon n_w)H(w-\epsilon n_w). \end{aligned}$$

Si $w \in W^k$ et $\epsilon < \epsilon_k^2$, on a $\epsilon < \epsilon'$ et la proposition 2.4 donne $|H(w-\epsilon n_w)-\varphi(w)| < c_1|\varphi(w)|+\eta/2$. Par ailleurs, le (II)(ii) de la proposition 2.2 donne $|R_k(w-\epsilon n_w)| < \alpha = \eta/CM''$ ce qui entraîne $|R_k(w-\epsilon n_w)H(w-\epsilon n_w)| < \eta/2$ et donc

(2.47)
$$|f_k(w-\epsilon n_w) - \varphi(w)| < (c_1 G_k(w-\epsilon n_w) + (1 - G_k(w-\epsilon n_w)))|\varphi(w)| + \eta,$$

ce qui est le (II)(ii) puisque $0 \leq G_k \leq 1$.

De plus, si $\epsilon < \epsilon_k^1$, on a $\Delta \leq G_k(w-\epsilon n_w) \leq 1/2$ (proposition 2.2) et 2.47 donne le (II)(i) en posant $c = 1 - \Delta(1-c_1)$.

Démonstration de (IV).

Puisque $|F_k(z)| \leq M(L(z))^k \leq M$ (proposition 2.2), on a $\|\nabla f_k\|_\infty \leq MM'' + M''\|\nabla F_k\|_\infty$. Majorons alors $\|\nabla F_k\|_\infty$. Par définition de F_k (c.f. fin de la démonstration de la proposition 2.2) et d'après 2.38, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial F_k}{\partial z_j}(z)\right| & \leq \sum_{i=1}^{N_k} k' |\langle z - u_i, n_{w_i}\rangle|^{k'-1} \{|h(\langle z-u_i, n_{w_i}\rangle^{k'})| \\ & \quad + |h'(\langle z-u_i, n_{w_i}\rangle^{k'})|\} \\ & \leq k'(\|h\|_\infty + \|h'\|_\infty) \sum_{i=1}^{N_k} |\langle z-u_i, n_{w_i}\rangle|^{k'-1} \\ & \leq k' c_0 (\|h\|_\infty + \|h'\|_\infty). \end{aligned}$$

Finalement, $\|\nabla f_k\|_\infty \leq k'(MM'' + M''c_0 n(\|h\|_\infty + \|h'\|_\infty))$ ce qui est (IV) avec $M' = MM'' + M''c_0 n(\|h\|_\infty + \|h'\|_\infty)$. ■

2.5. Approximation de la fonction φ le long d'une famille de courbes.

Lorsque nous utilisons les biholomorphismes locaux pour transférer au voisinage d'un point de stricte pseudoconvexité d'un pseudo-convexe les résultats dans les strictement convexes, les normales dans le pseudo-convexe sont image de courbes sur lesquelles il nous faut donc avoir les propriétés d'approximation. C'est ce que nous faisons dans ce sous-paragraphe. Précisément, nous définissons des courbes admissibles et montrons que les résultats précédents sont encore vrais si on remplace les normales par de telles courbes.

Soient $w_0 \in \partial\Omega$ et $0 < r < R_1/2$. Nous dirons que τ est une famille de courbes admissible dans $B(w_0, r)$ s'il existe un diffeomorphisme de classe $\mathcal{C}^2$ ψ de $B'(w_0, 2r)$ dans $\mathbb{C}^n$ tel que:

(i) $\psi^{-1}(\xi) \in \partial\Omega \cap B'(w_0, 2r)$ implique $d\psi^{-1}(n_\xi)$ est proportionnel à $n_{\psi^{-1}(\xi)}$.

(ii) $\tau(w,t) = \psi^{-1}(\psi(w) - tn_{\psi(w)})$ pour tout $w \in \partial\Omega \cap B'(w_0, r)$ et tout $r \geq 0$ tel que $\psi(w) - tn_{\psi(w)} \in \psi(\Omega \cap B'(w_0, r)$.

τ étant une telle famille de courbes, définissons deux réels t' et t'' de la manière suivante:

(i) w' étant l'unique point de $\partial\Omega \cap B(w_0, 2r)$ tel que $\tau(w,t)$ appartienne à la normale en w', on pose $\tau(w,t) = w' - t'n_{w'}$;

(ii) $w - t''n_w$ est la projection orthogonale de $\tau(w,t)$ sur n_w.

Par ailleurs, ψ étant un diffeomorphisme conservant la direction normale, il existe trois constantes C_3, C_4, C_5, ne dépendant que de ψ, telles que:

- $C_3 t \leq t' \leq C_4 t$;
- $|w - w'| \leq C_5 t^2$;
- $|\tau(w,t) - w - t''n_w| \leq C_5 t^2$.

Avec ces notations, posons $C = 2/C_3$, et démontrons la proposition suivante.

Proposition 2.7. *Avec les notations définies ci-dessus, pour tout ouvert O assez petit contenu dans $B(w_0, r) \cap \partial\Omega$, tout couple de réels η, $\gamma \in]0,1[$, et toute fonction φ continue sur $\partial\Omega$, il existe un réel M tel que, pour tout entier k asez grand, il existe un ouvert $U_k \subset\subset O$, un sous-ensemble W^k de U_k vérifiant $\sigma(W^k) > (1-\gamma)\sigma(O)$, une fonction $f_k \in A(\Omega)$ et deux réels ν_k^1 et ν_k^2, $0 < \nu_k^1 < \nu_k^2 = C/k < R_1$, tels que:*

(I) $|f_k(z)| \leq M(L(z))^k$;

(II) *pour tout $w \in W^k$,*

  (i) $|f_k(\tau(w,t) - \varphi(w))| < c|\varphi(w)| + \eta$, $\forall\, t < \nu_k^1$, où c est la constante définie dans la proposition 2.6;

(ii) $|f_k(\tau(w,t) - \varphi(w))| < |\varphi(w)| + \eta$, $\forall\, t < \nu_k^2$;

(III) $|\partial^m f_k(z)| < \eta$, $\forall m \in \mathbb{N}^n$, $|m| \leq n+1$, $\forall z \in \overline{\Omega}\backslash\{\tau(w,t),\, w \in U_k,\, t < \nu_k^2\}$.

Démonstration:

Appliquons la proposition 2.6 avec les paramètres $\eta/2$ et γ en concervant les notations qui y sont introduites. Montrons que, pour k assez grand, la proposition 2.7 est satisfaite en prenant $U_k = \{w \in O/d'(w, O_k) < 1/k\}$. Remarquons que, pour k assez grand, O_k est relativement compact dans U_k.

La propriété (I) étant trivialement vérifiee, démontrons (II).

Soit $w \in W^k$. On a:

$$|f_k(\tau(w,t)) - \varphi(w)| \leq |f_k(\tau(w,t)) - f_k(w - t''n_w)| + |f_k(w - t''n_w) - \varphi(w)|.$$

D'une part, le (IV) de la proposition 2.6 donne

$$\begin{aligned} |f_k(\tau(w,t)) - f_k(w - t''n_w)| &\leq k'M'|\tau(w,t) - (w - t''n_w)| \\ &\leq k'M'C_5t^2, \end{aligned}$$

et, d'autre part, les (II)(ii), (III) et (II)(i) de cette même proposition 2.6 entraînent respectivement

$$|f_k(w - t''n_w) - \varphi(w)| < |\varphi(w)| + \eta/2,\ t < \epsilon_k^1/C_4,$$

et

$$|f_k(w - t''n_w) - \varphi(w)| < c|\varphi(w)| + \eta/2.$$

Ceci démontre le (II) pour k assez grand en posant $\nu_k^1 = \epsilon_k^1/C_4$ puisque $k' = o(k^2)$.

Démontrons maintenant (III).

Choisissons k assez grand de sorte que $\{w' - t'n_{w'}/t' < 2/k,\, w' \in O_k\}$ soit contenu dans $\tau(U_k \times [0, C_0[)$. Soit $w \in \partial\Omega \cap B(w_0, r)$. Si $t \geq 2/(kC_3)$, on a $\tau(w,t) = w' - t'n_{w'}$ avec $t' \geq 2/k$. Par ailleurs si $w \notin U_k$ et $t < 2/(kC_3) = C/k$ alors $|w - w'| < 1/k$, pour k assez grand, et donc $w' \notin O_k$. Ceci montre que, pour k assez grand,

$$\{w' - t'n_{w'}/0 \leq t' \leq 2/k,\, w' \in O_k\} \subset \{\tau(w,t)/w \in U_k,\, t < C/k\},$$

et on conclut avec le (III) de la proposition 2.6. ∎

2.6. Approximation locale.

Nous établisons maintenant le résultat local final dans un stritement convexe. Il s'obtient par une itération convenable du résultat précédent:

Théorème 2.8. *Soient τ une famille de courbes admissible dans $B(w_0, R)$, O un ouvert assez petit de $\partial\Omega$ contenu dans $\partial\Omega \cap B(w_0, r)$, φ une fonction continue sur $\partial\Omega$ et θ un ordre de croissance non borné. Pour tout réels ν, $\beta \in]0,1[$ et $\lambda > 0$ il existe un ouvert $O' \subset\subset O$, un sous-ensemble W de O' vérifiant $\sigma(W) > (1-\beta)\sigma(O)$, deux réels α_1 et α_2, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \lambda$, et une fonction $f \in A(\Omega)$ satisfaisant les propriétés suivantes:*

(I) $|f(z)| < \theta(\delta(z))$, $z \in \Omega$;

(II) *pour* $w \in W$,

 (i) $|f(\tau(w,t)) - \varphi(w)| < \nu$, $\forall\, t < \alpha_1$;

 (ii) $|f(\tau(w,t)) - \varphi(w)| < |\varphi(w)| + \nu$, $\forall\, t \in [\alpha_1, \alpha_2[$;

(III) $|\partial^m f(z)| < \nu$, $\forall\, m \in \mathbb{N}^n$, $|m| \leq n+1$, $\forall\, z \in \overline{\Omega} \backslash \{\tau(w,t),\, w \in O',\, t < \alpha_2\}$.

Démonstration:

Nous allons construire f sous la forme $\sum f_i$, où les f_i sont données par récurrence à l'aide de la proposition 2.7.

Posons $\nu' = \nu/2$. Soit N un entier vérifiant $c^{N-1} \max\limits_{\partial\Omega} |\varphi| < \nu'$.

Appliquons la proposition 2.7 à l'ouvert O, la fonction φ et les paramètres $\eta_1 = \nu'/2$ et $\gamma_1 = \beta/2$. Cela nous donne un réel M_1, et, en choisissant un entier k_1 assez grand de sorte que $M_1(L(z))^{k_1} \leq \theta(\delta(z))/2$, un ouvert U_1, un ensemble W^1, une fonction f_1 et deux réels ν_1^1 et ν_1^2, avec les conclusions de la proposition 2.7.

f_1 étant uniformément continue, il existe r_1, $0 < r_1 < \nu_1^1$, tel que pour tout $w \in \partial\Omega \cap B(w_0, r)$ et tout $\epsilon < r_1$, on a $|f_1(\tau(w,\epsilon)) - f_1(w)| < \eta_1$.

Soit $1 \leq s \leq N$. Supposons construits les f_i, U_i, W^i ν_i^1, ν_i^2 pour $1 \leq i \leq s$ et les r_i pour $i = 1, \ldots, s-1$. Soit alors r_s, $0 < r_s < \nu_s^1$ tel que, $\forall\, w \in \partial\Omega \cap B(w_0, r)$, $\forall\, t < r_s$, $|f_s(\tau(w,t)) - f_s(w)| < \eta_s = \nu'/2^s$.

Posons $\varphi_{s+1} = \varphi - \sum\limits_{i=1}^{s} f_i$ et appliquons la proposition 2.7 à la fonction φ_{s+1} et aux paramètres $\eta_{s+1} = \nu'/2^{s+1}$ et $\gamma_{s+1} = \beta/2^{s+1}$. On a donc un réel M_{s+1}, et, en choisissant un entier k_{s+1} de sorte que $M_{s+1}(L(z))^{k_s+1} < \theta(\delta(z))/2^{s+1}$ et $\nu_{s+1}^2 = C/k_{s+1} < r_s$, une fonction f_{s+1}, un ouvert U_{s+1}, un sous-ensemble W^{s+1} et un réel ν_{s+1}^1.

On pose alors $f = \sum\limits_{i=1}^{N} f_i$, $O' = \bigcup\limits_{i=1}^{N} U_i$, $W = \bigcap\limits_{i=1}^{N} W^i$, $\alpha_1 = r_N$, $\alpha_2 = \nu_1^2$

et $r_0 = 1$.

Il est clair que $\sigma(W) > (1-\beta)\sigma(O)$ et que

(2.48)
$$r_0 > \alpha_2 = \nu_1^2 > \nu_1^1 > r_1 > \nu_2^2 > \nu_2^1 > \cdots > \nu_N^2 > \nu_N^1 > r_N = \alpha_1.$$

La propriété (I) est trivalement vérifiee, et, pour tout $i \leq N$, on a les relations $U_i \subset O'$, $\nu_i^2 < \alpha_2$, et le (III) est donc conséquence du (III) de la proposition 2.7.

Il nous reste à démontrer le (II).

Soit $w \in W$. Puisque $w \in W^i$, $i \leq N$, le (II)(i) de la proposition 2.7 entraîne

$$|\varphi_i(w)| = |\varphi_{i-1}(w) - f_{i-1}(w)| < c|\varphi_{i-1}(w)| + \nu'/2^{i-1},$$

et il s'ensuit que

$$|\varphi_i(w)| < c^{i-1}|\varphi(w)| + \sum_{s=1}^{i-1} \frac{\nu'}{2^s}. \tag{2.49}$$

Par ailleurs, si $t < \nu_i^1$, la même propriété entraîne

$$|f_i(\tau(w,t)) - \varphi_i(w)| < c|\varphi_i(w)| + \nu'/2^i$$

et

$$|f_i(\tau(w,t)) - \varphi_i(w)| < c^i|\varphi(w)| + \sum_{s=1}^{i} \frac{\nu'}{2^s},\ \forall\, t < \nu_i^1. \tag{2.50}$$

De plus, le (III) de la proposition 2.7 et la décroissance de la suite ν_k^2 donnent

$$\sum_{s=i}^{N} |f_s(\tau(w,t))| < \sum_{s=i}^{N} \frac{\nu'}{2^s},\ \forall\, t > \nu_i^2. \tag{2.51}$$

Enfin, par définition des r_i

$$|f_i(\tau(w,t)) - f_i(w)| < \nu'/2^i,\ \forall\, t < r_i. \tag{2.52}$$

Montrons (II)(i). En écrivant

$$|f(\tau(w,t)) - \varphi(w)| \leq |f_N(\tau(w,t)) - \varphi_N(w)| + \sum_{i=1}^{N-1} |f_i(\tau(w,t)) - f_i(w)|,$$

on voit aussitôt que la conclusion résulte de 2.50 et 2.52, car $t < \alpha_1$, implique $t < \nu_i^1$ et $t < r_i$.

Montrons enfin (II)(ii).

Soit $t \in [\alpha_1, \alpha_2[$, soit i_0 l'indice tel que $t \in [r_{i_0}, r_{i_0-1}[$. Ecrivons

$$\begin{aligned}|f(\tau(w,t)) - \varphi(w)| \leq \sum_{i=1}^{i_0-1} |f_i(\tau(w,t)) - f_i(w)| + |f_{i_0}(\tau(w,t)) - \varphi_{i_0}(w)| \\ + \sum_{i=i_0+1}^{N} |f_i(\tau(w,t))|.\end{aligned}$$

Puisque $\nu_{i_0+1}^2 < t < r_{i_0-1}$, d'après 2.52 et 2.51, le premier et le dernier terme du second membre de l'inégalité ci-dessus sont respectivement majorés par $\sum_{i=1}^{i_0-1} \nu'/2^i$ et $\sum_{i=i_0+1}^{N} \nu'/2^i$, et, pour conclure, il suffit de voir que

$$|f_{i_0}(\tau(w,t)) - \varphi_{i_0}(w)| < |\varphi(w)| + \nu'.$$

Si $t \in [r_{i_0}, \nu_{i_0}^2[$, c'est une conséquence du (II)(ii) de la proposition 2.7 et si $t \in [\nu_{i_0}^2, r_{i_0-1}[$, cela résulte de 2.49 et 2.51. ∎

3. Le cas des domaines pseudoconvexes

Soient Ω un domaine pseudoconvexe borné de $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ à bord $\mathcal{C}^\infty$ et S l'ensemble des points de stricte pseudoconvexité de $\partial\Omega$.

Pour tout point $w \in S$, il existe un voisinage ouvert V de w dans $\mathbb{C}^n$, un ouvert $\tilde{V}$ dans $\mathbb{C}^n$, un biholomorphisme ψ d'un voisinage de $\overline{V}$ sur un voisinage de $\overline{\tilde{V}}$ et un domaine strictement convexe $\tilde{\Omega}$ de $\mathbb{C}^n$ tels que $\psi(V \cap \partial\Omega) \subset \partial\tilde{\Omega}$ et $\psi(V \cap \Omega) \subset \tilde{\Omega}$.

Les fonctions distance au bord de Ω et $\tilde{\Omega}$ seront respectivement notées δ et $\tilde{\delta}$ et les mesures de surface sur $\partial\Omega$ et $\partial\tilde{\Omega}$ respectivement $d\sigma$ et $d\tilde{\sigma}$.

Il existe un réel $r_1 > 0$ tel que, $\forall\, z, z' \in \overline{V} \cap \overline{\Omega}$, $r_1|z - z'| \leq |\psi(z) - \psi(z')|$.

Par ailleurs, nous choisirons le voisinage V assez petit de sorte que l'ouvert $\tilde{V} \cap \partial\tilde{\Omega}$ soit assez petit au sens défini dans le paragraphe 2 et que, $\forall\, z \in V \cap \Omega$, il existe un unique $(w, \epsilon) \in \partial\Omega \cap V \times \mathbb{R}^+$ tel que $z = w - \epsilon n_w$.

Enfin des calculs ultérieurs nous amènent à considérer les constantes suivantes: $r_0 = 1 + \|J\psi\|_{\partial\overline{\Omega} \cap \overline{V}}$, $r_0' = 1 + \|J\psi^{-1}\|_{\partial\overline{\tilde{\Omega}} \cap \overline{\tilde{V}}}$.

3.1. Approximation locale de la fontion φ par une fonction holomorphe à croissance contrôlée.

Si nous appliquons le théorème 2.8 par l'intermédiaire des biholomorphismes locaux, nous obtenons des fonctions localement définies dans Ω avec un bon comportement radial. Il nous fat alors les globaliser convenablement, en particulier, sans perdre les contrôles sur les normales. C'est le but du présent sous-paragraphe.

Soit w_0 un point de $\partial\Omega$. Considérons les ensembles V, $\tilde{\Omega}$, $\tilde{V}$, le biholomorphisme ψ associé à w_0 et les réels r_0, r_0' et r_1 définis ci-dessus.

Quitte à réduire V, on peut supposer que $\tilde{V}$ est une boule centrée en un point de $\partial\tilde{\Omega}$ de sorte que la famille de courbes définies dans $\tilde{\Omega}$ par $\tau(\psi(w),\epsilon) = \psi(w - \epsilon n_w)$, $\epsilon \in [0, C(\psi)]$, $w \in V \cap \partial\Omega$ soit admissible, l'ouvert $\tilde{V} \cap \partial\tilde{\Omega}$ restant assez petit.

Posons $O = V \cap \partial\Omega$ et, avec ces notations, montrons la proposition suivante:

Proposition 3.1. *Pour tous réels η, $\gamma \in]0,1[$, $\lambda > 0$, il existe un ouvert $O' \subset\subset O$ tel que, pour toute fonction φ continue sur $\partial\Omega$ et tout ordre de croissance non borné θ, il existe une fonction $f \in A(\Omega)$, un ensemble $W \subset\subset O'$ vérifiant $\sigma(W) > (1-\gamma)\sigma(O)$ et deux réels λ_1 et λ_2, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda$, satisfaisant les propriétés suivantes:*

(I) $|f(z)| \leq \theta(\delta(z))$ *dans* Ω*;*

(II) *pour* $w \in W$*,*

(i) $|f(w - \epsilon n_w) - \varphi(w)| < \eta$, $\forall \epsilon < \lambda_1$*;*

(ii) $|f(w - \epsilon n_w) - \varphi(w)| < |\varphi(w)| + \eta$, $\forall \epsilon \in [\lambda_1, \lambda_2[$*;*

(III) $|f(z) < \eta$, $\forall z \in \overline{\Omega} \backslash \{w - \epsilon n_w,\, w \in O',\, \epsilon < \lambda_2\}$.

Démonstration:

Posons $\tilde{\varphi}_1 = \varphi \circ (\psi^{-1}_{|\tilde{V} \cap \partial\tilde{\Omega}})$ et considérons une extension $\tilde{\varphi}$ de cette fonction à $\partial\tilde{\Omega}$. Soit θ_1 un ordre de croissance non borné vérifiant, pour tout $z \in V \cap \Omega$, $\theta_1(\tilde{\delta}(\psi(z))) \leq \theta(\delta(z))$. Supposons de plus $\eta < \theta_1(1)$ et posons $\theta' = \theta_1 - \eta/2$.

Appliquons le théorème 2.8 à l'ouvert $\tilde{O} = \tilde{V} \cap \partial\tilde{\Omega}$, à la fonction $\tilde{\varphi}$, aux paramètres ν ($\nu < \eta/2$ sera fixé ultérieurement) $\beta = \gamma/r_0 r_0'$, λ et à l'ordre de croissance θ'. Ainsi, nous avons une fonction $\tilde{f} \in A(\tilde{\Omega})$, un ouvert $\tilde{O}' \subset\subset \tilde{V} \cap \partial\tilde{\Omega}$, un ensemble $\widetilde{W} \subset\subset \tilde{O}'$ et un couple de réels α_1 et α_2. De plus, on peut choisir le réel α_2 de sorte que l'ensemble $\{\tau(\psi(w),\epsilon),\, \psi(w) \in \tilde{O}',\, \epsilon < \alpha_2\}$ soit relativement compact dans $\tilde{V}$.

Posons alors $h = \tilde{f} \circ \psi_{|\overline{V} \cap \overline{\Omega}}$, $O' = \psi^{-1}(\tilde{O}')$, $W = \psi^{-1}(\widetilde{W})$ et $\lambda_1 = \alpha_1$, $\lambda_2 = \alpha_2$.

La mesure de W s'estime immédiatement par changement de variables: $\sigma(O \backslash W) \leq r_0' \tilde{\sigma}(\tilde{O} \backslash \tilde{W}) \leq r_0' \beta \tilde{\sigma}(\tilde{O}) \leq r_0' r_0 \beta \sigma(O) = \gamma \sigma(O)$, ce qui est $\sigma(W) > (1-\gamma)\sigma(O)$.

h étant définie à partir du théorème 2.8, elle appartient à $A(V \cap \Omega)$ et vérifie les propriétés suivantes:

(1) $|h(z)| \leq \theta(\delta(z)) - \nu$, $z \in V \cap \Omega$;

(2) si $w \in W$,

  (i) $|h(w - \epsilon n_w) - \varphi(w)| < \nu$ pour $\epsilon < \lambda_1$;

  (ii) $|h(w - \epsilon n_w) - \varphi(w)| < |\varphi(w)| + \nu$, si $\epsilon \in [\lambda_1, \lambda_2[$;

(3) $|\partial^m h(z)| < \nu$, $\forall m \in \mathbb{N}^n$, $|m| \leq n+1$, $\forall z \in \overline{\Omega} \backslash \{w - \epsilon n_w,\ w \in O',\ \epsilon < \lambda_2\}$.

Construction de la fonction f.

Soient $K = \{w - \epsilon n_w,\ w \in \overline{O'},\ \epsilon \leq \lambda_2\}$, $U = \Omega \backslash K$ et χ une fonction dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ valant 1 sur K et 0 sur $\overline{\Omega} \backslash V$. Posons $\rho = \chi h$ de sorte que $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$.

Soit $t = \overline{\partial} \rho = \sum_{j=1}^{n} h \frac{\partial \chi}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z_j}$. Vérifions que t est dans l'espace de Sobolev $W^{n+1,2}_{(0,1)}(\Omega)$. Puisque Supp $\frac{\partial \chi}{\partial \overline{z}_j} \subset \overline{U} \cap \overline{V}$ et puisque h est holomorphe, on a

$$\left| \partial^p \left(h \overline{\partial}^q \frac{\partial \chi}{\partial \overline{z_j}} \right)(z) \right| \leq C \|\chi\|_{\mathcal{C}^{n+2}(\overline{\Omega})} \sup_{|j| \leq n+1} |\partial^j h(z)|,$$

où $C = \sum_{i \leq m} C_m^i$. Comme $\overline{U} \cap \overline{V} = (\overline{\Omega} \cap \overline{V}) \backslash \{w - \epsilon n_w,\ w \in O',\ \epsilon < \lambda_2\}$, la propriété (3) entraîne que $|\partial^j h(z)| < \nu$ dans $\overline{U} \cap \overline{V}$, et, si on pose $c_0 = C\,\mathrm{Vol}(\Omega)^{1/2}$ et $c_1 = \|\chi\|_{\mathcal{C}^{n+2}(\overline{\Omega})}$, il vient

$$\left\| \partial^p \left(h \overline{\partial}^q \frac{\partial \xi}{\partial \overline{z_j}} \right) \right\|_{L^2(\overline{U} \cap \overline{V})} < c_0 c_1 \nu.$$

Finalement

$$\|t\|_{W^{n+1,2}_{(0,1)}(\Omega)} < (n+2)^2 c_0 c_2 \nu.$$

D'après le théorème de J.J. Kohn [**7**], il existe une fonction $g \in W^{n+1,2}(\Omega)$ telle que $\overline{\partial} g = t$ avec la majoration $\|g\|_{W^{n+1,2}(\Omega)} \leq c_2 (n+2)^2 c_0 c_1 \nu$ où c_2 ne dépend que de Ω et de n, et, d'après le lemme de Sobolev, $g \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ et $\|g\|_\infty \leq (n+2)^2 c_3 c_2 c_1 c_0 \nu$ où c_3 ne dépend que de Ω.

On choisit alors $\nu = \min[\theta(1)/2, \eta/2, \eta/(n+2)^2 c_3 c_2 c_1 c_0)]$ ce qui donne $\|g\|_\infty < \eta/2$.

On choisit enfin $f = \chi h - g$.

Montrons que f vérifie les propriétés voulues.

Tous d'abord, le (I) résulte aussitôt de la propriété (1) pour h et de l'estimation de g.

Par ailleurs si $w \in W$ et $\epsilon < \lambda_2$, on a $\chi(w - \epsilon n_w) = 1$ et,

$$|f(w - \epsilon n_w - \varphi(w)| \leq |h(w - \epsilon n_w) - \varphi(w)| + \eta/2,$$

et le (II) découle des propriétés (2) pour h.

La propriété (III) est tout aussi immédiate: si $z \in \overline{\Omega} \backslash \{w - \epsilon n_w,\ w \in O',\ \epsilon < \lambda_2\}$, on a, soit $z \in \overline{\Omega} \backslash V$ soit $z \in \{\overline{\Omega} \cap \overline{V} \backslash \{w - \epsilon n_w,\ w \in O',\ \epsilon < \lambda_2\}$; dans le premier cas on a $\chi(z) = 0$ et donc $|f(z)| < \eta/2$, et, dans le second, la propriété (3) pour h donne $|h(z)| < \eta/2$ ce qui implique $|f(z)| < \eta$. ■

3.2. Approximation de φ sur une partie compacte de S.

Nous empilons maintenant les approximations locales précédentes pour en obtenir une globale sur un compact de S.

Notons r_2 un réel stritement positif tel que, pour tout $z \in \Omega$, vérifiant $\delta(z) < r_2$, il existe un unique couple $(w, \epsilon) \in \partial\Omega \times [0, r_2[$ tel que $z = w - \epsilon n_w$ et montrons le résultat suivant:

Théorème 3.2. *Pour tout compact K de S, tous réels α, $\beta \in]0, 1[$, $\lambda > 0$, toute fonction φ continue sur $\partial\Omega$ et tout ordre de croissance non borné θ, il existe une fonction $F \in \partial(\Omega)$, un ensemble $W \subset K$ vérifiant $\sigma(W) > (1 - \beta)\sigma(K)$ et deux réels α_1 et α_2, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \lambda$, tels que l'on ait les propriétés suivantes:*

(I) $|F(z)| \leq \theta(\delta(z))$, $\forall\, z \in \Omega$;

(II) *Pour tout $z \in W$,*

(i) $|F(w - \epsilon n_w) - \varphi(w)| < \alpha$, $\forall\, \epsilon < \alpha_1$;

(ii) $|F(w - \epsilon n_w) - \varphi(w)| < |\varphi(w)| + \alpha$, $\forall\, \epsilon \in [\alpha_1, \alpha_2[$,

(iii) $|F(w - \epsilon n_w)| < \alpha$, $\forall\, \epsilon \in [\alpha_2, r_2[$.

Démonstration:

A tout point $w \in S$, associons un voisinage O de w dans $\partial\Omega$ vérifiant les propriétés de la proposition 3.1 et considérons un nombre fini de points w_i, $1 \le i \le N$, tels que les ouverts O_i associés recouvrent K. Soit $(\chi_i)_{1\le i\le N}$ une partition continue de l'unité telle que $\operatorname{Supp}\chi_i \subset O_i$ et $\sum_{i=1}^{N} \chi_i = 1$ sur K. Posons $\varphi_i = \chi_i\varphi$.

La proposition 3.1 appliquée aux paramètres η/N, $\gamma = \frac{\beta\sigma(K)}{\sum_i \sigma(O_i)}$, $\lambda > 0$, la fonction φ_i et l'ordre de croissance θ/N nous fournit une fonction $f_i \in A(\Omega)$ un ouvert $O_i' \subset\subset O_i$, un ensemble $W \subset\subset O_i'$ et deux réels λ_1^i et λ_2^i, $0 < \lambda_1^i < \lambda_2^i < \lambda$.

Prenons alors $F = \sum_{i=1}^{N} f_i$, $W = \bigcap_{i=1}^{N}((K \cap W_i) \cup (K\backslash O_i))$, $\alpha_1 = \frac{1}{2} \min_{1\le i\le N}\{\lambda_1^i\}$ et $\alpha_2 = 2 \max_{1\le i\le N} \lambda_2^i$. Le choix de γ entraîne que $\sigma(W) > (1-\beta)\sigma(K)$ et celui de θ_i donne la propriété (I).

Montrons (II).

Soit $w \in W$. Si $w \in W\backslash W_i$, on a $w \notin O_i$, et $|f_i(w - \epsilon n_w)| < \alpha/N$ et $\varphi_i(w) = 0$. Ainsi

$$(3.53)\quad |F(w - \epsilon n_w) - \varphi(w)| < \sum_{w\in W_i} |f_i(w - \epsilon n_w) - \varphi_i(w)| + \sum_{w\notin W_i} \alpha/N.$$

Si $\epsilon < \alpha_1$, on a $\epsilon < \lambda_1^i$, $\forall\, i \in \{1, \dots, N\}$ et $|f_i(w-\epsilon n_w)-\varphi_i(w)| < \alpha/N$, ce qui donne le (II)(i).

Supposons maintenant $\epsilon \in [\alpha_1, \alpha_2[$, il suffit de découper la première somme du second membre de 3.53 de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
\sum_{w\in W_i} |f_i(w - \epsilon n_w) - \varphi_i(w)| \le & \sum_{w\in W_i, \epsilon<\lambda_1^i} |f_i(w - \epsilon n_w) - \varphi_i(w)| \\
& + \sum_{w\in W_i, \epsilon\in[\lambda_1^i \lambda_2^i[} |f_i(w - \epsilon n_w) - \varphi_i(w)| \\
& + \sum_{w\in W_i, \epsilon\ge\lambda_2^i} |f_i(w - \epsilon n_w)| \\
& + \sum_{w\in W_i, \epsilon\ge\lambda_2^i} |\varphi_i(w)|.
\end{aligned}$$

En effet, si $\epsilon \leq \lambda_1^i$, $|f_i(w - \epsilon n_w) - \varphi_i(w)| < \alpha/N$, si $\epsilon \geq \lambda_2^i$, $|f_i(w - \epsilon n_w)| < \alpha/N$, si $\lambda_1^i \leq \epsilon < \lambda_2^i$, $|f_i(w - \epsilon n_w) - \varphi_i(w)| < |\varphi_i(w)| + \alpha/N$, et la propriété (II)(ii) résulte du fait que $|\varphi| = \sum_{i=1}^{N} |\varphi_i|$.

Supposons enfin $\epsilon \in [\alpha_2, r_2[$.

Pour tout $w \in \partial\Omega$, on a $w - \epsilon n_w \in \overline{\Omega}\backslash\{w' - \epsilon' n_{w'},\ w' \in \partial\Omega,\ \epsilon' < \alpha_2\}$ ce qui, par définition de α_2, donne, pour tout i, $w - \epsilon n_w \in \overline{\Omega}\backslash\{w' - \epsilon' n_{w'},\ w' \in \partial\Omega,\ \epsilon' < \lambda_2^i\}$ et donc $|f_i(w - \epsilon n_w)| < \alpha/N$, ce qui démontre (II)(iii). ■

S étant un ouvert de $\partial\Omega$, le corollaire suivant résulte de la régularité de la mesure σ:

Corollaire 3.3. *Pour tous réels α, $\beta \in]0, 1[$, $\lambda > 0$, toute fonction φ continue sur $\partial\Omega$ et tout ordre de croissance non borné θ, il existe une fonction $F \in A(\Omega)$ un ensemble $W \subset S$ vérifiant $\sigma(W) > (1-\beta)\sigma(S)$ et deux réels α_1 et α_2, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \lambda$, tels que les propriétés (I) et (II) du théorème 2.3 soient satisfaites.*

3.3. Fin de la démonstration du théorème.

Pour achever la démonstration du théorème 1.2. Il suffit, en utilisant le corollaire 3.3, de reprendre stricto-sensus le dernier paragraphe de [**3**].

References

1. BAGEMILH F. AND SEIDEL W., Some boundary properties of analytic functions, *Math. Z.* **61** (1954), 186–199.
2. DUPAIN Y., Limites radiales de fonctions holomorphes dans la boule unité de $\mathbb{C}^n$, *Journal d'Analyse Mathématiques* **52** (1989).
3. DUPAIN Y., Extension à la dimension n d'un théorème d'Ortel et Shneider, *Math. Z.* **206** (1990), 71–80.
4. HAKIM M. ET SIBONY N., Boundary properties of analytic functions in the unit ball of $\mathbb{C}^n$, *Math. Ann.* **276** (1987), 549–555.
5. IORDAN A., On the radial cluster set for holomorphic functions in the unit ball of $\mathbb{C}^n$, prépublication Orsay, 1988.
6. KAHANE J. P. ET KATZNELSON Y., Sur le comportement radial des fonctions analytiques, *C.R.A.S. Paris* **372** (1971), 718–719.
7. KOHN J. J., Global regularity for $\overline{\partial}$ on weakly peudo-convex manifolds, *Trans. of the Amer. Math. Soc.* **181** (1973), 273–292.

8. ORTEL M. AND SCHNEIDER W., Radials limits of holomorphic functions of slow growth in the unit disk, *Math. Scand.* **56** (1985), 287–310.

Ph. Charpentier:
CeReMab URA 226
Université de Bordeaux I
351, cours de la libération
F 33405 Talence Cedex
FRANCE

Y. Dupain:
CeReMab URA 226
Université de Bordeaux I
351, cours de la libération
F 33405 Talence Cedex
FRANCE

M. Mounkaila:
Université de Niamey
B.P. 10662
RÉPUBLIQUE DU NIGER

Primera versió rebuda el 19 d'Octubre de 1993,
darrera versió rebuda el 16 de Març de 1994