Publicacions Matemàtiques, Vol 36 (1992), 229–240.

# SUR LES FEUILLETAGES HOLOMORPHES SINGULIERS DE CODIMENSION 1

Bouchra Gmira

*Abstract*

Let $\mathcal{F}$ be a codimension one holomorphic foliation which singular set $\Sigma$ is contained in a compact leaf $S$ of $\mathcal{F}$.

When $\mathcal{F}$ is of dimension one, $\Sigma$ is a set of isolated points $\{q_1, \dots, q_r\}$, C. Camacho and P. Sad define the index of $\mathcal{F}$ at each point $q_k$ and prove that the sum of these indices equals the Euler class $c_1(E)$ of the fibre bundle $E$ normal to $S$.

Generally when ever $\Sigma$ is of any dimension $m$, we can define a such index $i_\alpha$ along the maximal dimension strates $\{\Sigma_\alpha\}$ of a suitable stratification of the complex variety $\Sigma$. Let $\sigma_\alpha$ be the fondamental cycle of $\overline{\Sigma}_\alpha$, $\sigma$ the $2m$-cycle of $S$ defined by $\sigma = \sum_\alpha i_\alpha \cdot \sigma_\alpha$ and $\sigma^*$ the 2-cocycle dual to $\sigma$ by Poincaré isomorphism $H^2(S) \to H_{2m}(S)$, we prove that the cohomology class $[\sigma^*]$ equals the Euler class $c_1(E)$.

## 1. Introduction.

Soit $S$ une variété analytique complexe compacte de dimension (complexe) $m+1$, plongée dans une variété analytique complexe $M$ de dimension $m+2$.

Notons $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe de codimension 1 de $M$ admettant un ensemble singulier $\Sigma \subset S$ tel que :

(i) $\Sigma$ est un ensemble analytique complexe de codimension 1 dans $S$,
(ii) $S - \Sigma$ est une feuille de $\mathcal{F}$.

Dans le cas $m = 0$, $\Sigma$ est un ensemble de points isolés $\{q_1, \dots, q_r\}$. C. Camacho et P. Sad définissent l'indice de $\mathcal{F}$ en chaque point de $\Sigma$ et montrent que la somme de ces indices est égale à la classe d'Euler du fibré normal à $S$ (ou plutôt à son évaluation sur le cycle fondamental $[S]$) [**4**].

Dans le cas général, nous montrons que l'on peut définir un tel indice $i_\alpha$ le long des strates $\{\Sigma_\alpha\}$ de dimension maximale $m$ d'une stratification convenable de $\Sigma$ en variétés analytiques complexes. Dans une carte locale de $M$, au voisinage d'un point $q$ d'une strate $\Sigma_\alpha$, il est possible de se représenter cet indice comme l'indice de C. Camacho et P. Sad sur la trace de la configuration $(S, \Sigma_\alpha, \mathcal{F})$ par un 2-plan complexe transverse à cette configuration. Notons $\sigma_\alpha$ le cycle fondamental de la variété (singulière) $\overline{\Sigma}_\alpha$ et considérons le $2m$-cycle de $S$ : $\sigma = \sum_\alpha i_\alpha \sigma_\alpha$. Nous montrons le résultat suivant :

**Théorème.** *Soit $E$ le fibré normal à $S$ dans $M$, $c_1(E) \in H^2(S)$ sa classe d'Euler, alors*

$$c_1(E) = [\sigma^*]$$

*où $[\sigma^*]$ est la classe du 2-cocycle dual de $\sigma$ par isomorphisme de Poincaré $H^2(S) \xrightarrow{\cong} H_{2m}(S)$ .*

Ce résultat figurait déjà dans [**5**], avec des hypothèses restrictives portant sur la variété $S$. Puis J.P. Brasselet en a donné une démonstration levant ces hypothèses dans [**3**] et A.L. Néto en a donné une autre démonstration comme cas particulier d'un résulat plus général ([**9**, Théorème 1]). La présente démonstration est plus géométrique et plus proche des idées de Bott sur les feuilletages singuliers. Je remercie vivement J.P. Brasselet pour les remarques et suggestions qu'il m'a faites tout au long de ce travail.

**2. Définition de l'indice $i_\alpha$.**

Considérons une stratification de $\Sigma$ en variétés analytiques complexes, et notons $\Sigma_\alpha$ une strate de dimension maximale $m$. Soit $\Phi: \mathcal{U} \to \mathbf{C}^m \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ une carte locale de $M$ au voisinage d'un point de $\Sigma_\alpha$, telle que $\Phi(\mathcal{U} \cap S) \subset \{z = 0\}$ et $\Phi(\mathcal{U} \cap \Sigma_\alpha) \subset \{y = z = 0\}$. Soit $\eta$ une 1-forme intégrable qui définit $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{U}$, alors $\eta$ s'écrit, dans la carte $(\mathcal{U}, \Phi)$, sous la forme :

$$(1) \qquad \eta = zA(x,y,z)\,dx + zB(x,y,z)\,dy + (zC(x,y,z) + D(x,y))\,dz$$

où $(x,y,z) \in \mathbf{C}^m \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}$, $D(x,y) = a(x)y^n + \cdots$, $n \geq 1$ et $a(0) \neq 0$.

Soit $P$ un 2-plan complexe d'équation $x = constante$, transverse à $S$ et à $\Sigma_\alpha$ dans $\mathcal{U}$, la trace de $\mathcal{F}$ sur $P$ est définie, dans la carte $(\mathcal{U}, \Phi)$, par la forme différentielle :

$$(2) \qquad \eta_x = zB(x,y,z)\,dy + (zC(x,y,z) + D(x,y))\,dz$$

On pose :

$$i(x) = -\operatorname*{Rés}_{y=0} \left( \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{zB(x,y,z)}{zC(x,y,z) + D(x,y)} \right] \Big|_{z=0} \right).$$

Il est facile de voir que

$$i(x) = -\underset{y=0}{\text{Rés}} \frac{B(x,y,0)}{D(x,y)}$$

et que $i(x)$ dépend analytiquement de $x \in \mathbf{C}$, lorsque $a(x) \neq 0$.

**Lemme 1.** *La dérivée $i'(x)$ de la fonction $i(x)$ est nulle.*

La condition d'intégrabilité de $\eta$ donne, pour $z = 0$,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{A}{D}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{B}{D}\right) = 0.$$

En se plaçant sur une courbe convenable $\gamma$, de façon à pouvoir calculer les résidus, on obtient :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{A}{D}\right) dy + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{B}{D}\right) dy = 0$$

d'où :

$$\int_\gamma \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{A}{D}\right) dy + \frac{\partial}{\partial x}\int_\gamma \left(\frac{B}{D}\right) dy = 0$$

et $i'(x) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{A}{D}\right) dy = 0.$

**Lemme 2.** *L'indice $i(x)$ est indépendant du choix de la forme différentielle $\eta$.*

En effet, si $\tilde\eta = z\tilde{A}dx + z\tilde{B}dy + (z\tilde{C} + \tilde{D})dz$ est une autre forme qui définit le feuilletage $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{U}$, alors $\tilde\eta = g\eta$, où $g$ ne s'annule pas, et donc

$$\frac{\tilde{B}(x,y,0)}{\tilde{D}(x,y)} = \frac{B(x,y,0)}{D(x,y)}$$

d'où le lemme.

**Remarque.** On vérifie facilement aussi qu'un changement de coordonnées dans (1) par un difféomorphisme local $x = f(u,v,w), y = vg(u,v,w), z = wh(u,v,w)$ envoyant $\{w = 0\}$ sur $\{z = 0\}$ et $\{v = 0\}$ sur $\{y = 0\}$, ne change pas le résidu.

**Corollaire.** *Soit $x$ un point de $\Sigma_\alpha \cap \mathcal{U}$, l'indice $i(x)$ ne dépend que du feuilletage $\mathcal{F}$ au voisinage de $\Sigma_\alpha$.*

**Notations.** Nous avons vu plus haut que l'indice $i(x)$ est localement constant sur $\Sigma_\alpha$, il est donc constant sur chaque strate connexe, en dehors d'un sous-ensemble analytique de mesure nulle $Q_\alpha$ (non nécessairement connexe). On sous-stratifie alors $\Sigma$ de façon à ce que les strates de dimension maximum $m$ soient maintenant les $\Sigma_\alpha - Q_\alpha$, que l'on se permettra encore d'appeler $\Sigma_\alpha$ dans la suite. La valeur de l'indice $i(x)$ le long de $\Sigma_\alpha$ sera notée $i_\alpha$. Si $\sigma_\alpha$ désigne le cycle fondamental de la variété (singulière) $\overline{\Sigma}_\alpha$, alors $\sigma = \sum_\alpha i_\alpha \sigma_\alpha$ définit un $2m$-cycle de $S$.

### 3. Résidus des connexions à singularités.

Soit $G$ un groupe de Lie, $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie et $\pi: E \to S$ un $G$-fibré principal différentiable. Pour $k$ fixé, on note $I^k(G)$ l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré $k$ sur $\mathcal{G}$ invariants par la représentation adjointe de $G$ sur $\mathcal{G}$ et $A^k_{DR}(S)$ l'espace vectoriel des $k$-formes différentielles sur $S$ à valeurs complexes [Dans la suite, on prendra $G = GL(1, \mathbf{C})$ et on se permettra de noter aussi $\pi: E \to S$ le $GL(1, \mathbf{C})$-fibré principal associé au fibré normal de $S$ dans $M$].

**Définition** ([6, Vol II, Chap. XII pp. 293-294]). Soit $\nabla$ une connexion sur $E$, $\omega$ sa forme de connexion et $\Omega$ sa forme de courbure. Si $P \in I^1(G)$, on définit une 2-forme à valeurs complexes sur $E$, en posant :

$$P(\Omega)(X_1, X_2) = \frac{1}{2}\left[P(\Omega(X_1, X_2)) - P(\Omega(X_2, X_1))\right]$$

Soit $\overline{P}(\Omega)$ l'unique 2-forme fermée sur $S$ telle que :

$$\pi^*(\overline{P}(\Omega)) = P(\Omega),$$

en posant $\lambda_\omega(P) = \overline{P}(\Omega)$, on définit une application :

$$\lambda_\omega: I^1(G) \to A^2_{DR}(S).$$

L'application induite en cohomologie par $\lambda_\omega$ est indépendante de la connexion choisie. C'est l'homomorphisme caractéristique de Chern-Weil, on le note $\lambda: I^1(G) \to H^2_{DR}(S)$.

**Définition** ([1, Paragraphe 5]). Soient $\omega_0$ et $\omega_1$ deux formes de connexion sur $E$, on définit une application :

$$\Delta_{\omega_0,\omega_1}: I^1(G) \to A^1_{DR}(S)$$

de la manière suivante : notons $I = [0,1]$, on définit, sur le fibré $E \times I$, de base $S \times I$, une 1-forme $\tilde{\omega}$ à valeurs dans $\mathcal{G}$, en posant :

$$\begin{cases} \tilde{\omega}|_{E\times\{t\}} = t\omega_0 + (1-t)\omega_1 & \text{pour } t \in I \\ \\ \tilde{\omega}|_{\{x\}\times I} = 0 & \text{pour } x \in E \end{cases}$$

Pour tout polynôme $P \in I^1(G)$, on pose alors :

$$\Delta_{\omega_0,\omega_1}(P) = \int_I \lambda_{\tilde{\omega}}(P)$$

où l'intégrale $\displaystyle\int_I : A^2_{DR}(S \times I) \to A^1_{DR}(S)$ désigne l'intégration le long de la fibre I.

Considérons maintenant une triangulation différentiable $(K)$ de $S$ dont le 1-squelette ne rencontre pas un ensemble fini de points $Q$, et notons $c$ un 2-simplexe de cette triangulation. Soit $s\colon V_c \to E$ une section différentiable de $E$ définie au-dessus d'un voisinage $V_c$ de $c$ dans $S$. On désigne par $\omega_s$ la connexion plate sur $E|_{V_c}$ associée à la trivialisation définie par $s$ (i.e. $s^*(\omega_s) = 0$). Soi $\omega$ une connexion définie sur $E|_{S-Q}$ (connexion à singularités).

**Définition** ([7]). A tout simplexe $c$ de $(K)$, et à tout polynôme $P \in I^1(G)$ on associe le nombre

$$\text{Rés}_c(\omega, P) = \int_{\partial c} \Delta_{\omega_s,\omega}(P)$$

appelé résidu sur $c$ de $\omega$, relativement à $P$. On définit ainsi une application linéaire

$$\text{Rés}(\omega)\colon I^1(G) \to C^2(K, \mathbf{C})$$

en posant $< \text{Rés}(\omega)P, c >= \text{Rés}_c(\omega, P)$ (ici, $C^2(K,\mathbf{C})$ désigne l'ensemble des 2-cochaînes simpliciales sur $(K)$, à coefficients complexes).

Si l'on note maintenant $J\colon A^*_{DR}(S) \to C^*(K,\mathbf{C})$ l'intégration des formes différentielles, on a :

$$< J(\alpha), c >= \int_c \alpha.$$

Rappelons que $J$ induit, en cohomologie, un isomorphisme d'algèbres graduées

$$[J]\colon H^*_{DR}(S) \xrightarrow{\cong} H^*(K,\mathbf{C})$$

**Théorème des résidus.** ([7])

(i) *L'application* $Rés(\omega)$ *prend ses valeurs dans l'espace* $Z^2(K, \mathbf{C})$ *des cocycles de* $C^2(K, \mathbf{C})$,

(ii) *Notant* $[Rés(\omega)]: I^1(G) \to H^2(K, \mathbf{C})$ *l'application induite en cohomologie, la composée* $[J]^{-1} \circ [Rés(\omega)]$ *coïncide avec l'homomorphisme caractéristique de Chern-Weil*

$$\lambda: I^1(G) \to H^2_{DR}(S).$$

## 4. Indice et résidu de connexions à singularités.

On sait que tout 2-cycle de $S$ est réalisable par une sous-variété différentiable $W$ de $S$ ([**10**, Théorème II.27]), que l'on peut supposer transverse à $\Sigma$ (Théorème de transversalité de Thom [**8**]). La variété $W$ ne rencontre donc que les strates de dimension maximale de $\Sigma$, et ceci en des points isolés $Q = \{q_1, \dots, q_r\} = \Sigma \cap W$.

Au voisinage de chaque point $q_k$ de $\Sigma \cap W$, on peut modifier la variété $W$ de façon à obtenir une variété différentiable $W'$ représentant un cycle homologue à $W$ et telle que chaque point $q_k$ admette, dans $W'$, un voisinage $U_k$, disque analytique. Pour cela, on considère, pour tout point $q_k$, un tel disque $U_k$, déformation d'un voisinage $V_k$ de $q_k$ dans $W$. La déformation (supposée différentiable) fournit l'homologie cherchée. De plus, on peut supposer que les disques $U_k$ sont disjoints et que chacun d'eux est contenu dans un ouvert trivialisant du fibré normal à $S$ dans $M$.

Par abus de notation, la variété $W'$ sera encore notée $W$ par la suite.

Soit $T$ un voisinage tubulaire de $S$ dans $M$, identifié à un voisinage de la section nulle du fibré normal de $S$ dans $M$. Le feuilletage $\mathcal{F}$ induit un feuilletage de $T$, encore noté $\mathcal{F}$. En restriction à $L = S - \Sigma$, le fibré normal à $\mathcal{F}$, appelé $\nu$, s'identifie au fibré normal de $S$ dans $M$; soit $p: \nu|_L \to L$ sa projection. Enfin, on notera $\pi: E \to S$ la projection du $GL(1, \mathbf{C})$-fibré principal associé a fibré normal de $S$ dans $M$.

Dans un système de coordonnées locales appropriées, $p^{-1}(U_k)$ s'identifie à un 2-plan complexe de $M$. La trace de $\mathcal{F}$ sur $p^{-1}(U_k)$ est alors définie par une 1-forme holomorphe $\eta_k$ telle que (2), nous la noterons :

$$\eta_k(y, z) = B_k(y, z)dy + C_k(y, z)dz$$

avec $(y, z) \in U_k \times \mathbf{C}^*$, $B_k(0,0) = C_k(0,0) = 0$ et $B_k(y, 0) = 0$.

Soit $\theta_k$ la 1-forme définie sur $U_k - \{q_k\}$ par

$$\theta_k(y) = \frac{\frac{\partial B_k}{\partial z}(y, 0)}{C_k(y, 0)} dy$$

alors $i(q_k) = -\text{Rés}\ \theta_k = -\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\partial \overline{U}_k} \theta_k.$

**Lemme 3.** *Il existe une connexion $\nabla$ sur $E|_{S-\Sigma}$ telle que sa restriction à $U_k - \{q_k\}$ soit définie par la 1-forme $\theta_k$. C'est la restriction à $S - \Sigma$ de la connexion de Bott (qui est parfaitement définie sur $M - \Sigma$ en tant que connexion partielle).*

*Démonstration:* Soit comme ci-dessus, $\mathcal{T}$ un voisinage tubulaire de $S$ dans $M$. Notons encore $\mathcal{F}$ le feuilletage de $M$ restreint à $\mathcal{T}$, $T\mathcal{T}$ le fibré tangent à $\mathcal{T}$, $\tau$ le fibré tangent au feuilletage $\mathcal{F}$ et $\nu$ le fibré normal à $\mathcal{F}$. Nous avons une suite exacte de fibrés au dessus de $\mathcal{T} - \Sigma$ :

$$0 \longrightarrow \tau|_{\mathcal{T}-\Sigma} \longrightarrow T\mathcal{T}|_{\mathcal{T}-\Sigma} \xrightarrow{h} \nu|_{\mathcal{T}-\Sigma} \longrightarrow 0$$

qui induit, au dessus de $L = S - \Sigma$, la suite exacte de fibrés :

$$0 \longrightarrow \tau|_L \longrightarrow T\mathcal{T}|_L \xrightarrow{h} \nu|_L \longrightarrow 0$$

Le fibré $\tau|_L$ n'est autre que le fibré tangent à la feuille $L$, on le note $TL$, $\nu|_L$ est le fibré normal à $L$ et associé au $GL(1, \mathbf{C})$-fibré principal $E|_L$. Si $\mathcal{O}(S)$ désigne l'algèbre des fonctions holomorphes sur $S$, $\Gamma(TL)$ et $\Gamma(\nu|_L)$ désignant respectivement les $\mathcal{O}(S)$-modules des sections de $TL$ et $\nu|_L$, nous définissons une connexion $\nabla$ sur $E|_L$ en posant :

$$\nabla_X(Z) = h[X, Z] \qquad \forall X \in \Gamma(TL) \text{ et } \forall Z \in \Gamma(\nu|_L)$$

([**1**, Paragraphe 6]).

Regardons comment se spécialise cette connexion $\nabla$ lorsqu'on se restreint à l'un des disques épointés $U_k - \{q_k\}$. Notons $\mathcal{T}_k$ la restriction de $\mathcal{T}$ à $U_k - \{q_k\}$, $\mathcal{F}_k$ la trace du feuilletage $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{T}_k$, $T\mathcal{T}_k$ le fibré tangent à $\mathcal{T}_k$, $\tau_k$ le fibré tangent à $\mathcal{F}_k$ et $\nu_k$ le fibré $\nu$ restreint à $\mathcal{T}_k$. Nous avons une suite exacte de fibrés restreints à $U_k - \{q_k\}$ :

$$0 \longrightarrow \tau_k \longrightarrow T\mathcal{T}_k \xrightarrow{h} \nu_k \longrightarrow 0$$

Une base de $\Gamma(\tau_k)$ est donnée par

$$X_k = -C_k(y, 0)\frac{\partial}{\partial y},$$

et le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x}$ constitue une base de $\Gamma(\nu|_{U_k - \{q_k\}})$.

Le champ

$$Y_k = -C_k(y,z)\frac{\partial}{\partial y} + B_k(y,z)\frac{\partial}{\partial z} \qquad (y,z) \in (U_k - \{q_k\}) \times \mathbf{C}$$

est défini dans un voisinage de $U_k - \{q_k\}$ dans $T$ et sa restriction à $L$ est $X_k$.

Soit $\omega$ la 1-forme de connexion qui définit $\nabla$, elle vérifie la relation

$$\nabla_{X_k}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = \omega(X_k)\frac{\partial}{\partial z} \tag{3}$$

or

$$\begin{aligned}\nabla_{Y_k}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) &= h\left(\left[-C_k(y,z)\frac{\partial}{\partial y} + B_k(y,z)\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right]\right)\\ &= h\left(\frac{\partial C_k}{\partial z}(y,z)\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial B_k}{\partial z}(y,z)\frac{\partial}{\partial z}\right) = -\frac{\partial B_k}{\partial z}(y,z)\frac{\partial}{\partial z}\end{aligned}$$

et

$$\nabla_{X_k}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = -\frac{\partial B_k}{\partial z}(y,0)\frac{\partial}{\partial z}. \tag{4}$$

En comparant (3) et (4), il vient, par abus de notation

$$\omega = \frac{\frac{\partial B_k}{\partial z}(y,0)}{C_k(y,0)}dy = \theta_k \qquad \text{sur } U_k - \{q_k\}$$

d'où le lemme. ■

Nous pouvons supposer que $W$ est un sous-complexe de la triangulation $(K)$ de $S$. On note $(K_W)$ la triangulation induite sur la variété $W$. Son 1-squelette ne rencontre pas l'ensemble $\Sigma \cap W = \{q_1, \dots, q_r\}$. On peut aussi supposer que chaque point $q_k$ est situé dans un 2-simplexe $c_k$ de $(K_W)$, lui-même situé dans le disque $U_k$.

**Lemme 4.** *On a*

$$i(q_k) = Rés_{c_k}(\omega, P_1)$$

*où* $P_1 \in I^1(GL(1,\mathbf{C}))$ *est le polynôme caractéristique associé à la classe d'Euler* $c_1(E)$.

En fait, $P_1(u) = \frac{-1}{2i\pi}u$, ([**6**, Chap. XII section 3]).

*Démonstration:* Soit $q_k$ un point de $\Sigma \cap W$ et $c_k$ le 2-simplexe de la triangulation $(K_W)$ contenant ce point $(c_k \subset U_k)$. On note $s_k: V_{c_k} \to E$ une section différentiable de $E$ définie au dessus d'un voisinage $V_{c_k}$ du simplexe $c_k$ dans $U_k$. Désignons par $\omega_k$ la connexion plate sur $E|_{V_{c_k}}$ définie par $s_k$ (elle est caractérisée par $s_k^*(\omega_k) = 0$, de plus $d\omega_k = 0$ puisque la connexion est plate). Notons $\omega$ la 1-forme de connexion de la connexion définie au lemme 3. Soit $\tilde{\omega}$ la 1-forme associée aux 1-formes de connexion $\omega_k$ et $\omega$ comme ci-dessus (§3) et $\tilde{\Omega}$ la 2-forme de courbure définie par $\tilde{\omega}$ (noter que $\tilde{\omega}$ est définie sur $(E \times I)|_{(V_{c_k} - \{q_k\}) \times I}$). Nous avons

$$\tilde{\Omega} = d\tilde{\omega} = d(t\omega_k + (1-t)\omega) = (1-t)d\omega + \omega \wedge dt - \omega_k \wedge dt.$$

Si $p: E \times I \to S \times I$ désigne la projection du fibré $E \times I$ sur sa base, alors $r_k = (s_k,\ \mathrm{id}_I): V_{c_k} \times I \to E \times I$ est une section du fibré $(E \times I)|_{V_{c_k} \times I}$ et

$$\lambda_{\tilde{\omega}}(P_1) = r_k^*\ P_1(\tilde{\Omega}),$$

d'où

$$\begin{aligned}
\Delta_{\omega_k,\omega}(P_1) &= \int_I r_k^*\ P_1(\tilde{\Omega}) \\
&= -\frac{1}{2i\pi}\int_I r_k^*(\tilde{\Omega}) \\
&= -\frac{1}{2i\pi}\int_I (1-t)s_k^*(d\omega) + s_k^*(\omega) \wedge dt - s_k^*(\omega_k) \wedge dt
\end{aligned}$$

Or $s_k^*(\omega_k) = 0$, $\int_I (1-t)s_k^*(d\omega) = 0$ (par définition de l'intégration le long de la fibre) et $s_k^*(\omega) = \theta_k$ (d'après le lemme 3), on a donc

$$\Delta_{\omega_k,\omega}(P_1) = -\frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \theta_k \wedge dt = -\frac{1}{2i\pi}\theta_k$$

et

$$\text{Rés}_{c_k}(\omega, P_1) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial c_k} \theta_k = i(q_k). \quad \blacksquare$$

**5. Démonstration du théorème.**

On se propose de montrer que les cocycles $c_1(E)$ et $[\sigma^*]$ prennent la même valeur sur tout 2-cycle $\mu$ de $S$, ce qui démontrera le théorème.

Comme nous l'avons vu plus haut nous pouvons représenter tout 2-cycle de $S$ par une sous-variété différentiable $W$ de $S$, transverse à

$\Sigma$ et admettant, en tout point $q_k$ de $\Sigma \cap W$, un voisinage analytique $U_k$. Comme précédemment (lemme 4), on considère une triangulation différentiable $K_W$ de $W$, que l'on peut supposer finie, $W$ étant compacte. Notons $c_1, \ldots, c_n$ les 2-simplexes de $K_W$, convenablement orientés, les $r$-premiers $c_1, \ldots c_r$, étant ceux qui contiennent les points $\{q_1, \ldots, q_r\}$ de $\Sigma \cap W$ dans leur intérieur. La classe fondamentale $[W]$ de $W$ est celle du cycle $\mu = \sum_{j=1}^{n} c_j$ dans $H_2(S)$. D'après le lemme 4, on a

$$\sum_{k=1}^{r} i(q_k) = \sum_{k=1}^{r} \text{Rés}_{c_k}(\omega, P_1) = \sum_{j=1}^{n} \text{Rés}_{c_j}(\omega, P_1),$$

puisque, si $c_j$ ne contient pas de point $q_k$, alors $\text{Rés}_{c_j}(\omega, P_1) = 0$. Mais

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \text{Rés}_{c_j}(\omega, P_1) &=< \text{Rés}(\omega)(P_1), \sum_{j=1}^{n} c_j > \\ &=< [\text{Rés}(\omega)](P_1), [W] > \\ &=< [J]^{-1} \circ [\text{Rés}(\omega)](P_1), [W] > \\ &=< \lambda(P_1), [W] > \end{aligned}$$

on a donc, par le lemme 4,

$$\sum_{k=1}^{r} i(q_k) =< \lambda(P_1), [W] >=< c_1(E), \mu > .$$

Calculons maintenant l'évaluation, sur $\mu$, du 2-cocycle $\sigma^*$, dual par isomorphisme de Poincaré du $2m$-cycle $\sigma = \sum_{\alpha} i_\alpha \sigma_\alpha$ .

Pour cela, considérons une triangulation (finie) $(T)$ de $S$, compatible avec la stratification de $\Sigma$ (i.e. tout simplexe ouvert de $(T)$ est situé dans une seule strate). On se donne une décomposition barycentrique $(T')$ de $(T)$ telle que :

(i) les points $q_1, \ldots q_k$ sont barycentres de $2m$-simplexes de $(T)$,
(ii) la subdivision barycentrique $(T')$ triangule $W$ (ce qui est possible car $W$ est transverse à $\Sigma$).

On notera $t_j$ les $2m$-simplexes de $(T)$. Soit $(D)$ la décomposition cellulaire de $S$ duale de $(T)$, construite à l'aide de la décomposition barycentrique $(T')$. La 2-cellule duale du simplexe $t_j$ sera notée $d_j$ et $d_j^*$ désignera la $(D)$-cochaîne duale de la $(D)$-chaîne élémentaire $d_j$, c'est-à-dire telle que

$$< d_j^*, d_i >= \delta_{i,j}$$

(symbole de Kronecker). D'après les hypothèses, $(D)$ définit une décomposition cellulaire sur $W$.

Remarquons que lorsque $t_j$ contient un point $q_k$, alors $t_j$ est situé dans $\Sigma$, son intérieur est entièrement contenu dans une strate régulière $\Sigma_\alpha$, et dans ce cas la cellule duale $d_j$ est située dans $W$, par raison de transversalité. D'autre part, notant $t_{j_\alpha}$ les $2m$-simplexes de $(T)$ contenus dans la strate $\Sigma_\alpha$ et munis de leur orientation canonique (celle de $\Sigma_\alpha$), le cycle fondamental de la variété singulière compacte $\overline{\Sigma}_\alpha$ s'écrit $\sigma_\alpha = \sum_{j_\alpha} t_{j_\alpha}$. Nous obtenons donc, puisque $\sigma = \sum_\alpha i_\alpha \sigma_\alpha$,

$$\sigma^* = \sum_\alpha i_\alpha \left( \sum_{j_\alpha} d^*_{j_\alpha} \right)$$

où la somme $\sum_{j_\alpha} d^*_{j_\alpha}$ porte sur les indices $j_\alpha$ tels que la 2-cellule $d_{j_\alpha}$ est duale d'un $2m$-simplexe $t_{j_\alpha}$ dont le support $t_{j_\alpha}$ est contenu dans $\Sigma_\alpha$ (voir [**2**]). De plus, comme

$$< d^*_j, [W] >= \begin{cases} 1 & \text{si } d_j \subset W \\ \\ 0 & \text{si } d_j \not\subset W \end{cases}$$

seules les cellules $d_{j_\alpha}$ contenant un point $q_k$ (comme centre) interviennent dans l'évaluation $< [\sigma^*], \mu >$ et il vient

$$< [\sigma^*], \mu >= \sum_{k=1}^{r} i(q_k)$$

puisque $i(q_k) = i_\alpha$ chaque fois que le point $q_k$ est dans $\Sigma_\alpha$. On en déduit le théorème. ■

## Bibliographie


1. R. BOTT, "*Lectures on Characteristic Classes and Foliations,*" Lecture Notes in Mathematics **27**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1972.
2. J.P. BRASSELET, Définition combinatoire des homomorphismes de Poincaré, Alexander et Thom, pour une pseudovariété, *Astérisque* **82-83** (1981).

3. J.P. BRASSELET, Conférences à l'IMPA, Rio de Janeiro, Brésil, non publié (cité dans [9]), 1984.
4. C. CAMACHO AND P. SAD, Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields, *Ann. Math.* **115** (1982), 579–595.
5. B. GMIRA, Une généralisation d'un théorème de C. Camacho et P. Sad relatif aux feuilletages holomorphes singuliers, Thèse de IIIème cycle, Lille, 1984.
6. S. KOBAYASHI AND K. NOMIZU, "*Foundations of Differential Geometry*," Vol. II, Intersciences, 1969.
7. D. LEHMANN, Résidus des connexions à singularités e classes caractéristiques, *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **31** (1981), 83–98.
8. J. MILNOR, "*Differentiable Topology*," Lecture notes, Princeton, 1958.
9. A.L. NETO, Complex codimension one foliations leaving a c submanifold invariant. Dynamical System and bifurcation theory, Rio de Janeiro, Pitman Res. Notes Math. Ser. **160**, Longman Sci. Tech. Harlow, 1987 (1985), 295–317.
10. R. THOM, Quelques propriétés globales des variétés différentiables, *Commentarii Math. Helv.* **28** (1954), 17–86.

Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques
B.P. 2121 Tetouan
MAROC

Primera versió rebuda el 19 de Març de 1991,
darrera versió rebuda el 9 de Maig de 1991