



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**  
**ΣΤΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ**

**Φίλτρο Λαϊνιώτη,**  
**Fibonacci ακολουθία και χρυσή τομή**  
**Ειρήνη Καρβουντζή Κοντακιώτου**

**ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Υπεύθυνη**

**Μαρία Αδάμ**

**Επίκουρος Καθηγήτρια**

**Λαμία**

**Σεπτέμβριος 2014**





**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ**  
**ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ**

**Φίλτρο Λαϊνιώτη, Fibonacci ακολουθία και χρυσή τομή**

**Καρβουντζή Κοντακιώτου Ειρήνη**

**ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Επιβλέπουσα**

**Μαρία Αδάμ**

**Επίκουρος Καθηγήτρια**

**Λαμία, 2014**



## **Καρβουντζή Κοντακιώτου Ειρήνη**

### **Τριμελής Επιτροπή:**

Αδάμ Μαρία, Επίκουρος Καθηγήτρια του τμήματος Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, (επιβλέπουσα),

Ασημάκης Νικόλαος, Καθηγητής του τμήματος Ηλεκτρονικής, ΤΕΙ Στερεάς Ελλάδας,

Πλαγιανάκος Βασίλειος, Αναπληρωτής Καθηγητής του τμήματος Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας.



*«Πάντα κατ' αριθμόν γίνονται».*

*Πυθαγόρας, 580-490 π.Χ.*





## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την επίκουρο καθηγήτρια και επιβλέπουσα την εργασία αυτή κα Αδάμ Μαρία τόσο για την ανάθεση του θέματος, όσο και για τη συνεχή κοπιαστική βοήθειά της κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας, τον καθηγητή κ. Ασημάκη Νικόλαο και τον αναπληρωτή καθηγητή κ. Πλαγιανάκο Βασίλειο για την οξυδερκή καθοδήγησή τους και την ηθική τους συμπαράσταση. Επιπλέον θα ήθελα να απευθύνω ευχαριστίες στους υποψήφιους διδάκτορες Καρβουντζή Απόστολο και Μεσεμανώλη Θανάση για τις εύστοχες παρατηρήσεις και τη βοήθεια στην επιμέλεια της εργασίας. Θα ήταν παράλειψή μου, αν δεν ευχαριστούσα θερμά τους γονείς μου και τους συμφοιτητές και φίλους μου Σιγάλα Ευάγγελο, Μουσμούτη Ιωάννη, Γιαννακούλα Ελευθερία, Καλιβιανάκη Στέλιο, Ηλιόπουλο Παναγιώτη, Ευθυμία Αρβανίτη, για την υποστήριξη και τις συμβουλές τους.



## Περίληψη

Σε αυτήν την πτυχιακή εργασία διερευνάται η σχέση μεταξύ του διακριτού χρόνου φίλτρου Λαϊνιώτη και της ακολουθίας Fibonacci, θεωρώντας συγκεκριμένες τιμές για τις παραμέτρους του φίλτρου. Επεκτείνοντας την παραπάνω σχέση για ένα  $n \times n$  σύστημα διατυπώνονται και αποδεικνύονται οι σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ του αριθμού της χρυσής τομής και του φίλτρου Λαϊνιώτη στη μόνιμη κατάσταση, παρουσιάζοντας ταυτόχρονα τις αναγκαίες συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι παράμετροι του φίλτρου. Εφαρμογές της θεωρίας δίνονται σε βαθμωτό σύστημα και σε αυτήν την περίπτωση αποδεικνύονται σχέσεις μεταξύ φίλτρου Λαϊνιώτη, χρυσής τομής και αριθμών ακολουθίας Fibonacci. Επίσης δίνονται πορίσματα για την περιγραφή της ίδιας σχέσης σε σύστημα τυχαίου περιπάτου.

## Λέξεις Κλειδιά

Φίλτρο Λαϊνιώτη; Fibonacci; χρυσή τομή; βαθμωτό σύστημα; μη βαθμωτό σύστημα; θεωρία εκτίμησης; διακριτός χρόνος; λάθος εκτίμησης; μόνιμη κατάσταση



## **Abstract**

In this thesis the connection between the discrete time Lainiotis filter and the Fibonacci sequence, in a system with specific parameters of the Lainiotis filter, is presented. Expanding the above statement provided that the Lainiotis filter and the golden ratio are clearly connected in a system, a connection between the before mentioned parameters is proved. We present, on one hand, the appliance of the connection in a scalar system between the Lainiotis filter and the Fibonacci sequence and on the other hand the relationship between the filter and the golden ratio. Furthermore, propositions for the description of these connections in a scalar random walk system, and a random walk system are given.

## **Key Words**

Lainiotis filter; Fibonacci; golden ratio; scalar system; time invariant system; estimation theory; discrete time; estimation error; steady state



## Περιεχόμενα

Εισαγωγή.....	2
1. ΦΙΛΤΡΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗ.....	6
1.1. Εισαγωγή για τα φίλτρα εκτίμησης.....	8
1.2. Θεωρία εκτίμησης και μοντέλο.....	9
1.2.1. Το πρόβλημα της θεωρίας εκτίμησης.....	9
1.2.2. Μοντέλο εκτίμησης.....	10
1.3. Φίλτρο Λαϊνιώτη - Φίλτρο Kalman.....	12
1.3.1 Φίλτρο Λαϊνιώτη.....	12
1.3.2. Φίλτρο Kalman.....	14
1.4. Μόνιμη κατάσταση.....	15
1.4.1. Μόνιμη κατάσταση φίλτρου Λαϊνιώτη.....	15
1.4.2. Μόνιμη κατάσταση φίλτρου Kalman.....	17
2. ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ FIBONACCI ΚΑΙ ΦΙΛΤΡΟ ΛΑΙΝΙΩΤΗ.....	20
2.1. Ορισμός και ιδιότητες της ακολουθίας Fibonacci.....	22
2.2. Αναδρομικός τύπος στο φίλτρο Λαϊνιώτη.....	26
2.3. Κλειστός τύπος στο φίλτρο Λαϊνιώτη.....	33
3. ΧΡΥΣΗ ΤΟΜΗ ΚΑΙ ΦΙΛΤΡΟ ΛΑΙΝΙΩΤΗ.....	41
3.1. Ορισμός και ιδιότητες της χρυσής τομής.....	43
3.2. Κλειστός τύπος φίλτρου Λαϊνιώτη στη μόνιμη κατάσταση.....	46
3.3. Σχέση με χρυσής τομής στο βαθμωτό φίλτρο Λαϊνιώτη.....	50
Συμπεράσματα.....	57
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	59
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι: ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΛΑΪΝΙΩΤΗΣ.....	63
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ: Η ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ FIBONACCI.....	65
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙΙ: Η ΧΡΥΣΗ ΤΟΜΗ.....	69
ΛΕΞΙΚΟ ΑΓΓΛΙΚΩΝ-ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΟΡΩΝ.....	73





## Εισαγωγή

Ο C. Gauss, πριν από περίπου 200 χρόνια, επινόησε πρώτος την τεχνική των ελαχίστων τετραγώνων, που την εφάρμοσε για τον προσδιορισμό έξι αναγκαίων παραμέτρων κατάστασης, ώστε να περιγραφεί η κίνηση σε ένα ουράνιο σώμα. Αργότερα ο R. Fisher εκμεταλλεύτηκε την ίδια τεχνική δουλεύοντας με συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας, [11, 36]. Μετά το 1960, όταν έχουμε το πρώτο φίλτρο Kalman [20], το οποίο αποτελεί το έναυσμα για τα φίλτρα εκτίμησης, παρατηρείται ραγδαία εξέλιξη στο χώρο των φίλτρων αυτών. Οι N. Wiener και A. Kolmogorov ασχολήθηκαν με προβλήματα εκτίμησης τυχαίων σημάτων, ενώ οι R. Kalman και K. Bucy έλυσαν το αντίστοιχο πρόβλημα συνεχούς χρόνου. Στη συνέχεια, διάφοροι ερευνητές κατέληξαν ουσιαστικά στον ίδιο αλγόριθμο<sup>1</sup>, ο καθένας όμως ξεκινώντας από διαφορετική βάση, [11, 36]. Διατυπώθηκαν νέοι αλγόριθμοι εκτίμησης την περίοδο 1971-1983 από το Δ. Λαϊνιώτη (βλέπε ορισμένες συνοπτικές σημειώσεις για την έρευνά του στο Παράρτημα II), ο οποίος χρησιμοποιώντας το «θεώρημα διαμελισμού», διατύπωσε νέους αλγορίθμους γραμμικού φιλτραρίσματος, που ονομάζονται Αλγόριθμοι Διαμελισμού ή φίλτρα Λαϊνιώτη, [7, 21, 23-28, 33, 37-36].

Όπως θα περιγραφεί αναλυτικά στο Κεφαλαίο 1 (βλ. Παράγραφο 1.3.2), τα φίλτρα Λαϊνιώτη επιτυγχάνουν φιλτράρισμα ημετέρου χρόνου και λείανση (βλ. Παράγραφο 1.3.1), ενώ τα φίλτρα Kalman φιλτράρισμα ημετέρου χρόνου και πρόβλεψη. Οι εν λόγω αλγόριθμοι αποτελούν μία οικογένεια πραγματοποίησης του βέλτιστου γραμμικού φίλτρου. Το φίλτρο Kalman μέχρι σήμερα αποτελεί το πιο διαδεδομένο φίλτρο εκτίμησης και αυτό που χρησιμοποιείται συχνότερα στις εφαρμογές, [36]. Τα φίλτρα εκτίμησης μελετήθηκαν εκτενώς ως προς τις ιδιότητες και τις ιδιομορφίες τους και δοκιμάστηκαν σε ποικίλες εφαρμογές όλων των επιστημονικών κλάδων. Ωστόσο, όπως αποδείχθηκαν στη [3], τα φίλτρα Kalman και Λαϊνιώτη έχουν αποδειχτεί ισοδύναμα (βλ. Παράγραφο 1.4.2), [38].

Η ακολουθία Fibonacci εμφανίζεται πρώτα στα Μαθηματικά των Ινδών, ενώ στη Δύση, οι αριθμοί Fibonacci εμφανίζονται για πρώτη φορά το 1202 μ.Χ. στο βιβλίο Liber Abaci του Fibonacci. Ο E. Lucas μελέτησε ακολουθίες ακεραίων, και την απλούστερη ακολουθία 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13... την ονόμασε ακολουθία Fibonacci. Η

---

<sup>1</sup> Ο διαχωρισμός φίλτρου και αλγορίθμου δεν έχει κάποια φυσική σημασία στην εργασία αυτή, γιατί τα φίλτρα Kalman και Λαϊνιώτη μελετώνται θεωρητικά.

ακολουθία Fibonacci εμπλέκεται σε κάθε τομέα της επιστήμης, ακόμα και στην ίδια τη φύση, [16, 18, 32].

Ο αριθμός της χρυσής τομής αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης για πάνω από 2.400 χρόνια, στα μαθηματικά και στις επιστήμες, ενώ συσχετίστηκε περισσότερο ή λιγότερο άμεσα με πλήθος φυσικών μεγεθών και φαινομένων. Λόγω της αρχαίας καταβολής του, στη βιβλιογραφία, συναντώνται αντικρουόμενες απόψεις για το ποιος πρωτομελέτησε τον αριθμό, κάποιοι ιστορικοί αμφισβητούν την Πυθαγόρεια προέλευσή του, [3]. Ο Ευκλείδης υπήρξε ο οργανωτής που συστηματοποίησε τα συμπεράσματα γύρω από τη χρυσή τομή. Από το Ευκλείδειο κείμενο «Στοιχεία» αντλούνται σήμερα οι πρώτες γραπτές πηγές σχετικά με τον αριθμό  $\phi$  που αναφερόταν ως «ο χωρισμός τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο» [30, 48]. Η ακολουθία Fibonacci συνδέεται με τη χρυσή τομή έτσι όπως παρατήρησε ο J. Kepler το 1630. Εάν κανείς διαιρέσει τον κάθε αριθμό της σειράς με τον αμέσως επόμενο του, το πηλίκο της διαίρεσης προσεγγίζει σταδιακά όλο και περισσότερο τον αριθμό 0,618.. που είναι γνωστός ως χρυσή τομή.

Το κυρίως μέρος της πτυχιακής αναφέρεται στις σύγχρονες θεωρίες, για τη σχέση που μπορεί να υπάρξει μεταξύ της ακολουθίας Fibonacci, της χρυσής τομής και των φίλτρων Λαϊνιώτη και Kalman. Σχέσεις μεταξύ της ακολουθίας Fibonacci, της χρυσής τομής και του φίλτρου Kalman διατυπώθηκαν το 2009 από τους Benavoli, Chisci και Farina στην [9], και πρόσφατα αποδείχθηκαν νέες σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των παραμέτρων των φίλτρων Kalman και της χρυσής τομής και έγινε επέκταση των αποτελεσμάτων στο φίλτρο Λαϊνιώτη, [1]. Πρώτη φορά παρουσιάζεται η σχέση που υπάρχει μεταξύ των αριθμών Fibonacci και του φίλτρου Λαϊνιώτη στην [6]. Το νέο για την εργασία αυτή εγχείρημα είναι, να επεκτείνει σε ένα  $n \times n$  σύστημα τα θεωρήματα που είχαν μελετηθεί μόνο για βαθμωτό σύστημα.

Η ύλη χωρίζεται σε τρία κεφάλαια. Κάθε κεφάλαιο αριθμείται και υποδιαιρείται σε ενότητες οι οποίες αριθμούνται με δύο αριθμούς, ενώ οι ενότητες υποδιαιρούνται σε παραγράφους που αριθμούνται με τρεις αριθμούς. Ο πρώτος αριθμός αναφέρεται στο κεφάλαιο, ο δεύτερος στην ενότητα και ο τρίτος, όπου υπάρχει, στην υποδιαίρεσή της. Επίσης οι προτάσεις, τα πορίσματα και τα λήμματα αριθμούνται με δύο αριθμούς από τους οποίους ο πρώτος αντιστοιχεί στο κεφάλαιο και ο δεύτερος στη σειρά εμφάνισής τους. Οι πίνακες και οι εικόνες αριθμούνται με σειρά εμφάνισης.

Στο *Κεφάλαιο 1* μοντελοποιείται το πρόβλημα που απασχολεί την παρούσα πτυχιακή εργασία και στη συνέχεια ορίζονται οι αλγόριθμοι για τα φίλτρα Λαϊνιώτη

και Kalman. Επιπλέον παρουσιάζεται η θεωρία της εκτίμησης, προκειμένου να γίνει κατανοητός ο τρόπος ανάπτυξης κάθε φίλτρου και η μεθοδολογία που ακολουθείται στις εκάστοτε εφαρμογές του.

Στο *Κεφάλαιο 2* ορίζεται η ακολουθία Fibonacci και μελετώνται δύο διαφορετικοί τύποι (αναδρομικός και κλειστός) για την εκτίμηση και τη συνδιακύμανση του αναδρομικού φίλτρου Λαϊνιώτη. Αποδεικνύεται ότι ο κλειστός τύπος του φίλτρου σχετίζεται με τους όρους της ακολουθίας Fibonacci, όταν οι αρχικές τιμές των παραμέτρων του φίλτρου είναι αυτές του τυχαίου περιπάτου και γίνεται σύγκριση κλειστού και αναδρομικού τύπου.

Στο *Κεφάλαιο 3* ορίζεται η χρυσή τομή και διατυπώνονται οι σημαντικότερες ιδιότητές της, που θα φανούν χρήσιμες στις αποδείξεις της θεωρίας του κεφαλαίου. Στη συνέχεια αποδεικνύεται η σχέση που συνδέει τη χρυσή τομή με το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Λαϊνιώτη στη μόνιμη κατάσταση, όταν οι αρχικές τιμές των παραμέτρων του φίλτρου είναι αυτές του τυχαίου περιπάτου. Επιπλέον, διατυπώνονται ικανές και αναγκαίες συνθήκες για τις παραμέτρους του βαθμωτού χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Λαϊνιώτη ώστε η συνδιακύμανση του φίλτρου στη μόνιμη κατάσταση να είναι ανάλογη της χρυσής τομής.

Στο τέλος της πτυχιακής εργασίας εκτός από τον κατάλογο με την ξενόγλωσση και ελληνική βιβλιογραφία παρατίθενται και παράρτημα, όπου ο αναγνώστης μπορεί να βρει ορισμένες βιβλιογραφικές πληροφορίες για το Λαϊνιώτη, καθώς και πληροφορίες για την ακολουθία Fibonacci και τον αριθμό της χρυσής τομής. Τέλος, δίνεται και ένα σύντομο λεξικό με την ορολογία των ελληνικών-αγγλικών όρων που χρησιμοποιήθηκαν.



## Κεφάλαιο 1

### ΦΙΛΤΡΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗ



## 1.1. Εισαγωγή για τα φίλτρα εκτίμησης

Στο χώρο των ψηφιακών σημάτων μελετώνται φίλτρα με χαρακτηριστικά που διαφοροποιούνται από τα κλασικά φίλτρα εισόδου-εξόδου, τα οποία προσεγγίζουν το πρόβλημα του φιλτραρίσματος βάσει ενός στοιχειώδους μετασχηματισμού, τα οποία ονομάζονται *φίλτρα εκτίμησης*. Στα φίλτρα εκτίμησης το κεντρικό πρόβλημα επικεντρώνεται στην ελαχιστοποίηση σφάλματος φιλτραρίσματος, που επιτυγχάνεται με τη χρήση μαθηματικών μεθόδων. Σημαντικό πλεονέκτημα των φίλτρων εκτίμησης είναι ότι οι παράμετροι που μοντελοποιούν το πρόβλημα μπορούν να οριστούν ώστε να προσεγγιστεί το πρόβλημα με μεγαλύτερης τάξης ακρίβεια. Αποτέλεσμα αυτού είναι η άμεση και ακριβής περιγραφή των σημάτων μέσω των διαφόρων χαρακτηριστικών τους (παράμετροι), τα οποία δεν μπορούν να προσεγγιστούν από τις κλασικές μεθόδους φιλτραρίσματος. Επιπλέον, οι παράμετροι μπορούν να επαναπροσδιοριστούν την ακόλουθη χρονική στιγμή, αν και εφόσον μεταβάλλονται χρονικά, με ελάχιστο υπολογιστικό κόστος. Η *θεωρία εκτίμησης* (estimation theory) ασχολείται με τον ορισμό όλων των παραμέτρων, των μαθηματικών εργαλείων και την πλήρη περιγραφή των φίλτρων, [11].

Τα φίλτρα Λαϊνιώτη και Kalman είναι εργαλεία για τον έλεγχο πολύπλοκων δυναμικών συστημάτων. Παρέχουν στατιστικό χαρακτηρισμό ενός δυναμικού προβλήματος, δηλαδή, λαμβάνουν υπόψη την κατανομή των πιθανοτήτων (probability distributions) για όλες τις μεταβλητές που επιφορτίζονται να υπολογίσουν. Γίνεται η εκτίμηση της δυναμικής κατάστασης ενός συστήματος, λαμβάνοντας υπόψη την επίδραση όλων των προηγούμενων παρατηρήσεων. Η βασική ιδέα της μεθόδου, που χρησιμοποιούν τα φίλτρα, συνοψίζεται στο σχήμα εκτίμηση-μέτρηση-διόρθωση-ανανέωση, [39].

Τα φίλτρα εκτίμησης παίζουν σημαντικό ρόλο σε αρκετά πεδία της επιστήμης της Πληροφορικής, των Μαθηματικών, αλλά και των Τηλεπικοινωνιών. Βρίσκουν εφαρμογές σε GPS και Mapping [29, 42, 45-47], σε οχήματα, πλοία, αεροσκάφη, δορυφόρους, σε ανάπτυξη συστήματος ελέγχου πτήσης μη επανδρωμένου αεροσκάφους, στην πλοήγηση πλοίων, στη δειγματοληψία σημάτων σε ανομοιόμορφα χρονικά διαστήματα [8, 15, 33, 37-39, 43, 49], στον έλεγχο των τιμών χρηματιστηριακών μετοχών, στην πρόβλεψη πλημμυρών και ροής υδάτων ποταμού [33], στην παρακολούθηση δορυφόρων κ.α..

## 1.2. Θεωρία εκτίμησης και μοντέλο

### 1.2.1. Το πρόβλημα της θεωρίας εκτίμησης

Η θεωρία εκτίμησης (estimation theory) αντιμετωπίζει το ακόλουθο βασικό πρόβλημα: δίνονται δύο στοχαστικές διαδικασίες  $\{x(k)\}$  και  $\{z(k)\}$ , από τις οποίες η πρώτη  $\{x(k)\}$  δεν είναι μετρήσιμη, ενώ η δεύτερη  $\{z(k)\}$  είναι μετρήσιμη, έχοντας δεδομένο (γνωστό) το σύνολο μετρήσεων (παρατηρήσεων),  $\{z(1), z(2), \dots, z(k)\}$ , όπου  $k$  φυσικός αριθμός. Το πρόβλημα είναι να εκτιμηθεί με βέλτιστο τρόπο, σύμφωνα με ένα προκαθορισμένο κριτήριο, η πρώτη στοχαστική διαδικασία.

Για διακριτό χρόνο<sup>2</sup>,  $k = 1, 2, \dots$ , ορίζονται οι ακόλουθες έννοιες:

- **κατάσταση (state)** είναι η τιμή  $x(k)$  της στοχαστικής διαδικασίας  $\{x(k)\}$  κατά τη χρονική στιγμή  $k$ ,
- **μέτρηση (measurment)** είναι η τιμή  $z(k)$  της στοχαστικής διαδικασίας  $\{z(k)\}$  κατά τη χρονική στιγμή  $k$ ,
- **εκτίμηση (estimation)**  $x(\ell / k)$  της κατάστασης τη χρονική στιγμή  $\ell$  δοθέντων όλων των μετρήσεων  $\{z(1), z(2), \dots, z(k)\}$  μέχρι και τη χρονική στιγμή  $k$ .

Σύμφωνα με τις παραπάνω έννοιες προκύπτουν τρεις κατηγορίες προβλημάτων εκτίμησης, που προσδιορίζονται από τη σχέση μεταξύ των χρονικών στιγμών  $\ell, k$ . Συγκεκριμένα, για  $\ell = k$  χαρακτηρίζουμε το πρόβλημα ως **φιλτράρισμα ημετέρου χρόνου (filtering)**, για  $\ell < k$  ως **λείανση (smoothing)** και για  $\ell > k$  ως **πρόβλεψη (prediction)**, [11, 36-38].

Οι μέθοδοι εκτίμησης διαφοροποιούνται ανάλογα με το **κριτήριο βελτιστότητας** ή **προκαθορισμένο κριτήριο**, όπως αναφέρθηκε παραπάνω. Το κριτήριο αναφέρεται στη μαθηματική μέθοδο που χρησιμοποιείται για την ελαχιστοποίηση του σφάλματος εκτίμησης. Κάποιες από αυτές τις μεθόδους είναι: **εκτίμηση κατά Bayes** ή Bayes Least Squared Error (BLSE)<sup>3</sup>, γνωστή και ως Minimum Mean Squared Error (MMSE), **εκτίμηση μέγιστης πιθανότητας εκ των υστέρων** ή Maximum A Posteriori (MAP)<sup>4</sup> και **εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας** ή Maximum-Likelihood Estimation (MLE)<sup>5</sup>. Τα

<sup>2</sup> Η μεταβλητή  $k$  είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή του συστήματος, που συνηθίζεται να ονομάζεται *χρόνος*, ενώ δεν αντιστοιχεί πάντα σε χρόνο.

<sup>3</sup> Η BLSE ελαχιστοποιεί κάποιο κόστος που ορίζεται για το πρόβλημα.

<sup>4</sup> Η MAP μεγιστοποιεί την υπό συνθήκη πιθανότητα να έχει το υπό εκτίμηση μέγεθος κάποια τιμή.

<sup>5</sup> Η MLE δεν λαμβάνει υπόψη την εκ των προτέρων πυκνότητα κατανομής πιθανότητας του



φίλτρα Kalman και Λαϊνιώτη χρησιμοποιούν το κριτήριο της ελαχιστοποίησης της μεταβλητότητας του λάθους ή Least Mean Square Equation Error (LMSEE). Με τη μέθοδο αυτή προσεγγίζεται το υπό εκτίμηση μέγεθος από μία γραμμική συνάρτηση των δεδομένων και στη συνέχεια ελαχιστοποιείται η μεταβλητότητα του λάθους εκτίμησης, [44].

### 1.2.2. Μοντέλο εκτίμησης

Το μοντέλο που δημιουργείται αποτελείται από εξισώσεις διαφορών<sup>6</sup> πρώτης τάξης και δεν ακολουθεί το σύστημα εισόδου-εξόδου, όπως άλλα μοντέλα. Προκειμένου να αναλυθεί ένα δυναμικό σύστημα και να προκύψουν συμπεράσματα για αυτό, απαιτείται η υλοποίηση ενός μοντέλου, που αποτελείται από δύο εξισώσεις:

- τη δυναμική εξίσωση κατάστασης, που περιγράφει τη δυναμική εξέλιξη της κατάστασης με το χρόνο, και
- την εξίσωση μέτρησης, που σχετίζει τις θορυβώδεις μετρήσεις με την κατάσταση.

Δηλαδή, το μοντέλο προσομοιώνει το φυσικό πρόβλημα με μαθηματικές σχέσεις, δείχνοντας πώς συνδέονται οι μετρήσιμες παρατηρήσεις με το ζητούμενο και την εξέλιξη στο χρόνο, [38]. Το μοντέλο διατυπώνεται ως ακολούθως

$$x(k+1) = F(k+1, k)x(k) + w(k) \quad (1.1)$$

$$z(k+1) = H(k+1)x(k+1) + v(k+1). \quad (1.2)$$

Τα μεγέθη  $x(k)$  και  $z(k)$  είναι διανύσματα διαστάσεων  $n \times 1$  και  $m \times 1$ , αντίστοιχα. Στο  $x(k)$  περιέχεται το σύνολο των παραμέτρων που ενδιαφέρει να εκτιμηθούν, ενώ επηρεάζει και την επόμενη κατάσταση  $x(k+1)$ , και στο  $z(k)$  περιέχονται οι διαθέσιμες πληροφορίες που καταγράφηκαν από το περιβάλλον, είτε από μετρήσεις, είτε από παρατηρήσεις.

Ο  $n \times n$  πίνακας  $F(k+1, k)$  αποτελεί τη γνώση της μετατόπισης της κατάστασης μεταξύ δύο διαδοχικών χρονικών στιγμών  $k$  και  $k+1$  και ο  $m \times n$  πίνακας  $H(k+1)$  σχετίζει την κατάσταση με τη μέτρηση σε μία καθορισμένη χρονική στιγμή  $k+1$ . Τα  $n \times 1$  και  $m \times 1$  διανύσματα  $w(k)$  και  $v(k+1)$  είναι τα διανύσματα θορύβου της μεταβολής της κατάστασης  $x(k+1)$  και της μέτρησης  $z(k+1)$ , αντίστοιχα.

---

εκτιμώμενου μεγέθους και μεγιστοποιεί τη συνάρτηση πιθανοφάνειας των δεδομένων.

<sup>6</sup> Εξίσωση διαφορών είναι μία αναδρομική μαθηματική σχέση μεταξύ κάποιων όρων μίας ακολουθίας.

Για να διατυπωθεί το μοντέλο και να οριστεί μαθηματικά το φυσικό πρόβλημα, δεν αρκεί η μαθηματική περιγραφή του μοντέλου, απαιτούνται αφενός μεν ο προσδιορισμός όλων των υποθέσεων και παραδοχών, που έχουν γίνει για τη μοντελοποίηση του συστήματος, και αφετέρου η διατύπωση της φύσης των μεγεθών κατάστασης και μετρήσεων, καθώς και η θεώρηση των θορύβων ως λευκών, [38, 44].

Οι παράμετροι του μοντέλου εκτίμησης  $F(k+1, k)$ ,  $H(k+1)$ ,  $w(k)$ ,  $v(k+1)$  μεταβάλλονται κάθε διακριτή χρονική στιγμή, χωρίς να είναι γνωστές συναρτήσεις, που εξαρτώνται από το χρόνο. Αν οι παράμετροι είναι σταθερές, δηλαδή, δεν μεταβάλλονται σε σχέση με το χρόνο, τότε το **μοντέλο** ονομάζεται **χρονικά αμετάβλητο**, οι παράμετροι θα συμβολίζονται  $F$ ,  $H$  και το μοντέλο (1.1)-(1.2) μπορεί να γραφεί

$$x(k+1) = F x(k) + w(k) \quad (1.3)$$

$$z(k+1) = H x(k+1) + v(k+1). \quad (1.4)$$

Όταν  $n=m=1$ , τα διανύσματα  $w(k)$ ,  $v(k+1)$  όπως και οι πίνακες  $F$ ,  $H$  εκφυλίζονται σε αριθμούς, και στη συνέχεια συμβολίζονται  $f$ ,  $h$ . Στην περίπτωση αυτή το **μοντέλο** ονομάζεται **βαθμωτό χρονικά αμετάβλητο** με εξισώσεις που προκύπτουν από τις (1.3)-(1.4) ως ακολούθως

$$x(k+1) = f x(k) + w(k) \quad (1.5)$$

$$z(k+1) = h x(k+1) + v(k+1). \quad (1.6)$$

Το φίλτρο Λαϊνιώτη (βλ. Παράγραφο 1.3.1) πραγματοποιεί την εκτίμηση μίας κατάστασης τη χρονική στιγμή  $\ell = k$ , δηλαδή υλοποιεί φιλτράρισμα. Συγκεκριμένα, αναζητείται ο προσδιορισμός της εκτίμησης  $x(k+1/k+1)$  τη στιγμή  $k+1$  δεδομένων όλων των μετρήσεων μέχρι τη στιγμή  $k+1$ , που στη συνέχεια συμβολίζεται  $x_{k+1/k+1}$ . Απαραίτητη προϋπόθεση για τη θεώρηση του φίλτρου είναι η μοντελοποίηση του συστήματος και ο προσδιορισμός των  $F(k+1, k)$ ,  $H(k+1)$ ,  $w(k)$ ,  $v(k+1)$ . Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τα διανύσματα  $w(k)$ ,  $v(k)$  όπως διαμορφώνονται στο μοντέλο (1.1)-(1.2) ορίζονται οι πίνακες συνδιακύμανσης (covariance) θορύβου  $Q(k)$ ,  $R(k)$  ως ακολούθως:

$$Q(k) = E[w(k)w^T(k)] \quad (1.7)$$

$$R(k) = E[v(k)v^T(k)] \quad (1.8)$$

### 1.3. Φίλτρο Λαϊνιώτη - Φίλτρο Kalman

#### 1.3.1 Φίλτρο Λαϊνιώτη

Το μαθηματικό μοντέλο του *χρονικά μεταβαλλόμενου* φίλτρου Λαϊνιώτη, το οποίο ακολουθεί, έχοντας ως δεδομένα εισαγωγής στο φίλτρο τις μετρήσεις  $z(k+1)$  της χρονικής στιγμής  $k+1$ , και τους πίνακες  $F(k+1,k)$ ,  $H(k+1)$ ,  $Q(k)$ ,  $R(k+1)$  που στη συνέχεια της εργασίας συμβολίζονται  $F_{k+1/k}$ ,  $H_{k+1}$ ,  $Q_k$ ,  $R_{k+1}$ , σκοπό έχει να υπολογίσει τη βέλτιστη εκτίμηση  $x_{k+1/k+1}$ , [36, 38].

Για  $k = 0, 1, 2, \dots$  το *χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Λαϊνιώτη* ορίζεται να είναι:

$$P_{k/k+1} = [P_{k/k} O_{n,k+1} + I]^{-1} P_{k/k} \quad (1.9)$$

$$P_{k+1/k+1} = P_{n,k+1,k} + F_{n,k+1/k} P_{k/k+1} F_{n,k+1,k}^T \quad (1.10)$$

$$x_{k+1/k+1} = K_{n,k+1} z_{k+1} + F_{n,k+1,k} [I + P_{k/k} O_{n,k+1}]^{-1} (P_{k/k} K_{m,k+1} z_{k+1} + x_{k/k}) \quad (1.11)$$

με παραμέτρους:

$$A_{k+1} = [H_{k+1} Q_k H_{k+1}^T + R_{k+1}]^{-1} \quad (1.12)$$

$$K_{n,k+1} = Q_k H_{k+1}^T A_{k+1} \quad (1.13)$$

$$K_{m,k+1} = F_{k+1,k}^T H_{k+1}^T A_{k+1} \quad (1.14)$$

$$P_{n,k+1,k} = (I - K_{n,k+1} H_{k+1}) Q_k \quad (1.15)$$

$$F_{n,k+1,k} = (I - K_{n,k+1} H_{k+1}) F_{k+1,k} \quad (1.16)$$

$$O_{n,k+1} = F_{k+1,k}^T H_{k+1}^T A_{k+1} H_{k+1} F_{k+1,k} \quad (1.17)$$

και με αρχικές συνθήκες  $x_{0/0} = x_0$  και  $P_{0/0} = P_0$ .

Από την (1.9)-(1.10) προκύπτει η σχέση της *συνδιακύμανσης λάθους εκτίμησης*<sup>7</sup> μίας χρονικής στιγμής με την αμέσως προηγούμενη χρονική στιγμή

$$P_{k+1/k+1} = P_{n,k+1,k} + F_{n,k+1/k} [P_{k/k} O_{n,k+1} + I]^{-1} P_{k/k} F_{n,k+1,k}^T \quad (1.18)$$

Όταν οι πίνακες  $F_{k+1/k}$ ,  $H_{k+1}$ ,  $Q_k$  και  $R_{k+1}$  είναι ανεξάρτητοι από το χρόνο, προκύπτει το *χρονικά αμετάβλητο* φίλτρο Λαϊνιώτη [36, 38]. Τότε οι αντίστοιχοι πίνακες συμβολίζονται  $F$ ,  $H$ ,  $Q$ ,  $R$ , δηλαδή, θεωρούνται σταθεροί και σε αυτήν

<sup>7</sup> Συνδιακύμανση λάθους εκτίμησης ονομάζεται η συνδιακύμανση λάθους  $P_{\ell/k}$  για  $\ell = k$ .

την περίπτωση ο υπολογισμός των παραμέτρων προκύπτει από τις σχέσεις (1.12)-(1.17) και πραγματοποιείται μία φορά. Έτσι από το χρονικά μεταβαλλόμενο φίλτρο Λαϊνιώτη (1.9)-(1.17) παράγεται το **χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Λαϊνιώτη**, που για  $k = 0, 1, 2, \dots$  είναι:

$$P_{k/k+1} = [P_{k/k} O_n + I]^{-1} P_{k/k} \quad (1.19)$$

$$P_{k+1/k+1} = P_n + F_n P_{k/k+1} F_n^T \quad (1.20)$$

$$x_{k+1/k+1} = K_n z_{k+1} + F_n [I + P_{k/k} O_n]^{-1} (P_{k/k} K_m z_{k+1} + x_{k/k}) \quad (1.21)$$

με παραμέτρους:

$$A = [HQH^T + R]^{-1} \quad (1.22)$$

$$K_n = QH^T A \quad (1.23)$$

$$K_m = F^T H^T A \quad (1.24)$$

$$P_n = (I - K_n H) Q \quad (1.25)$$

$$F_n = (I - K_n H) F \quad (1.26)$$

$$O_n = F^T H^T A H F \quad (1.27)$$

με αρχικές συνθήκες  $x_{0/0} = x_0$  και  $P_{0/0} = P_0$ .

Σε αυτήν την περίπτωση η (1.18) γράφεται:

$$P_{k+1/k+1} = P_n + F_n [P_{k/k} O_n + I]^{-1} P_{k/k} F_n^T \quad (1.28)$$

**Βαθμωτό** χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Λαϊνιώτη ονομάζεται το φίλτρο, που προκύπτει από το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Λαϊνιώτη για  $m = n = 1$ , και τότε οι αριθμοί  $F, H, Q, R$  συμβολίζονται  $f, h, q, r$ , αντίστοιχα. Το **βαθμωτό χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Λαϊνιώτη** είναι:

$$P_{k/k+1} = [P_{k/k} O_n + I]^{-1} P_{k/k} \quad (1.29)$$

$$P_{k+1/k+1} = P_n + F_n P_{k/k+1} F_n^T \quad (1.30)$$

$$x_{k+1/k+1} = K_n z_{(k+1)} + F_n [I + P_{k/k} O_n]^{-1} (P_{k/k} K_m z_{(k+1)} + x_{k/k}) \quad (1.31)$$

με παραμέτρους:

$$A = \frac{1}{qh^2 + r} \quad (1.32)$$

$$K_n = \frac{qh}{qh^2 + r} \quad (1.33)$$

$$K_m = \frac{fh}{qh^2 + r} \quad (1.34)$$

$$P_n = [1 - K_n h]q = \frac{qr}{qh^2 + r} \quad (1.35)$$

$$F_n = [1 - K_n h]f = \frac{rf}{qh^2 + r} \quad (1.36)$$

$$O_n = \frac{f^2 h^2}{qh^2 + r} \quad (1.37)$$

### 1.3.2. Φίλτρο Kalman

Όπως διατυπώνεται στην [38], θεωρώντας τον  $n \times n$  πίνακα  $F$ , τον  $m \times n$  πίνακα  $H$  και τους πίνακες συνδιακύμανσης  $Q$ ,  $R$  διαστάσεων  $n \times n$  και  $m \times m$ , αντίστοιχα, προκύπτει το ακόλουθο **χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman**:

$$x_{k+1/k} = Fx_{k/k} \quad (1.38)$$

$$P_{k+1/k} = FP_{k/k}F^T + Q \quad (1.39)$$

$$K_{k+1} = P_{k+1/k}H^T[HP_{k+1/k}H^T + R]^{-1} \quad (1.40)$$

$$x_{k+1/k+1} = [I - K_{k+1}H]x_{k+1/k} + K_{k+1}z_{k+1} \quad (1.41)$$

$$P_{k+1/k+1} = [I - K_{k+1}H]P_{k+1/k} \quad (1.42)$$

Για  $n = m = 1$ , οι πίνακες  $F$ ,  $H$ ,  $Q$ ,  $R$  εκφυλίζονται σε αριθμούς, οι οποίοι συμβολίζονται  $f$ ,  $h$ ,  $q$ ,  $r$ , αντίστοιχα και σε αυτήν την περίπτωση οι (1.38)-(1.42) παράγουν το **βαθμωτό χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Kalman**, το οποίο γράφεται:

$$x_{k+1/k} = f x_{k/k} \quad (1.43)$$

$$P_{k+1/k} = f^2 P_{k/k} + q \quad (1.44)$$

$$K_{k+1} = \frac{h P_{k+1/k}}{h^2 P_{k+1/k} + r} \quad (1.45)$$

$$x_{k+1/k+1} = (1 - hK_{k+1})x_{k+1/k} + K_{k+1}z_{k+1} \quad (1.46)$$

$$P_{k+1/k+1} = (1 - hK_{k+1})P_{k+1/k} \quad (1.47)$$

## 1.4. Μόνιμη κατάσταση

### 1.4.1. Μόνιμη κατάσταση φίλτρου Λαϊνιώτη

Αν το χρονικά αμετάβλητο μοντέλο στην (1.3)-(1.4) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, δηλαδή, οι ιδιοτιμές του πίνακα  $F$  βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, τότε το φίλτρο Λαϊνιώτη τείνει στη **μόνιμη κατάσταση**<sup>8</sup>, οπότε και οι πίνακες συνδιακόμανσης  $P_{k/k+1}$ ,  $P_{k+1/k+1}$  τείνουν να έχουν σταθερή τιμή ανεξάρτητη από το  $k$ , [38]. Η **συνδιακόμανση λάθους λείανσης στη μόνιμη κατάσταση** συμβολίζεται με  $P_s$  και ισούται με

$$P_s = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{k/k+1}. \quad (1.48)$$

Η **συνδιακόμανση λάθους εκτίμησης στη μόνιμη κατάσταση** συμβολίζεται με  $P_e$  και ισούται με

$$P_e = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{k/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{k+1/k+1}. \quad (1.49)$$

Συνδυάζοντας την (1.28) με την (1.49) καταλήγουμε στην

$$P_e = P_n + F_n [P_e O_n + I]^{-1} P_e F_n^T, \quad (1.50)$$

που είναι γνωστή ως **εξίσωση Riccati** προερχόμενη από το φίλτρο Λαϊνιώτη, όταν το φίλτρο τείνει στη μόνιμη κατάσταση, [38].

Επιπλέον συνδυάζοντας την (1.19) με την (1.48) καταλήγουμε στην επόμενη εξίσωση:

$$P_s = [P_e O_n + I]^{-1} P_e. \quad (1.51)$$

Αν το βαθμωτό χρονικά αμετάβλητο μοντέλο (1.5)-(1.6) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, δηλαδή  $|f| < 1$ , τότε το φίλτρο Λαϊνιώτη τείνει στη μόνιμη κατάσταση, οπότε και οι πίνακες συνδιακόμανσης λάθους λείανσης  $P_{k/k+1}$  και εκτίμησης  $P_{k+1/k+1}$  τείνουν να έχουν σταθερή τιμή ανεξάρτητη από το  $k$  και σημειώνονται όπως στην (1.48)-(1.49)  $P_s$  και  $P_e$ , αντίστοιχα.

---

<sup>8</sup> Η **μόνιμη κατάσταση** (steady state) αναφέρεται επίσης στη βιβλιογραφία και ως **σταθερή κατάσταση**. Σε ορισμένες περιπτώσεις το φίλτρο τείνει στη μόνιμη κατάσταση ακόμα και αν δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

### Πρόταση 1.1

Σε βαθμωτό χρονικά αμετάβλητο μοντέλο οι συνδιακυμάνσεις λάθους λείανσης στη μόνιμη κατάσταση  $P_s$  και εκτίμησης στη μόνιμη κατάσταση  $P_e$  δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$P_s = \frac{(qh^2 + r)P_e}{f^2h^2P_e + qh^2 + r} \quad (1.52)$$

$$P_e = \frac{-(qh^2 + r - rf^2) + \sqrt{(qh^2 + r - rf^2)^2 + 4qrf^2h^2}}{2f^2h^2} \quad (1.53)$$

### Απόδειξη

Αντικαθιστώντας τις τιμές των παραμέτρων από (1.32)-(1.37) στην (1.50) προκύπτει η εξίσωση

$$P_e = \frac{qr}{qh^2 + r} + \frac{r^2f^2}{(qh^2 + r)^2} \frac{P_e}{P_e \frac{f^2h^2}{qh^2 + r} + 1} = \frac{qr}{qh^2 + r} + \frac{r^2f^2P_e}{(qh^2 + r)(f^2h^2P_e + qh^2 + r)}.$$

Από την παραπάνω ισότητα, μετά από αλγεβρικές πράξεις, παράγεται η εξίσωση

$$f^2h^2P_e^2 + (qh^2 + r - rf^2)P_e - qr = 0, \quad (1.54)$$

η οποία είναι τριωνύμο ως προς  $P_e$ . Η διακρίνουσα του τριωνύμου στην (1.54) είναι

$$\Delta = (qh^2 + r - rf^2)^2 + 4qrf^2h^2,$$

η οποία είναι θετική ως άθροισμα θετικών αριθμών. Οι ρίζες του τριωνύμου είναι

$$P_{e,1} = \frac{-(qh^2 + r - rf^2) - \sqrt{(qh^2 + r - rf^2)^2 + 4qrf^2h^2}}{2f^2h^2}, \text{ και}$$

$$P_{e,2} = \frac{-(qh^2 + r - rf^2) + \sqrt{(qh^2 + r - rf^2)^2 + 4qrf^2h^2}}{2f^2h^2}.$$

Επειδή οι τιμές των  $P_e$  πρέπει να είναι θετικές<sup>9</sup>, εξετάζουμε το πρόσημο των  $P_{e,1}$  και  $P_{e,2}$  ως ακολούθως:

- Υποθέτοντας  $qh^2 + r - rf^2 < 0$ , τότε προφανώς ο αριθμητής της  $P_{e,2}$  είναι θετικός αριθμός ως άθροισμα θετικών αριθμών. Άρα  $P_{e,2}$  αποτελεί αποδεκτή λύση του τριωνύμου στην (1.54).

---

<sup>9</sup> Υπενθυμίζεται ότι  $P_e$  πρέπει να είναι θετικός αριθμός, επειδή είναι βαθμωτό μέγεθος που αντιστοιχεί σε πίνακα συνδιακύμανσης.

Με απλούς υπολογισμούς μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο αριθμητής της  $P_{e,1}$  είναι αρνητικός αριθμός στην περίπτωση  $qh^2 + r - rf^2 < 0$ , οπότε  $P_{e,1}$  απορρίπτεται.

- Υποθέτοντας  $qh^2 + r - rf^2 > 0$ , τότε ο αριθμητής της  $P_{e,1}$  είναι αρνητικός αριθμός, οπότε η  $P_{e,1}$  απορρίπτεται.

Επιπλέον, για τον αριθμητή της  $P_{e,2}$  μπορούμε να γράψουμε:

$$-(qh^2 + r - rf^2) + \sqrt{(qh^2 + r - rf^2)^2 + 4qrf^2h^2} > 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{(qh^2 + r - rf^2)^2 + 4qrf^2h^2} > qh^2 + r - rf^2 \Rightarrow$$

$$(qh^2 + r - rf^2)^2 + 4qrf^2h^2 > (qh^2 + r - rf^2)^2 \Rightarrow 4qrf^2h^2 > 0,$$

απ' όπου είναι φανερό ότι  $P_{e,2}$  είναι θετικός αριθμός. Άρα, η  $P_{e,2}$  αποτελεί λύση του τριωνύμου στην (1.54) και για την περίπτωση  $qh^2 + r - rf^2 > 0$ .

Συνεπώς για οποιαδήποτε τιμή της ποσότητας  $qh^2 + r - rf^2$  η  $P_{e,2}$  είναι θετική, άρα είναι δεκτή λύση του προβλήματος και έτσι αποδεικνύεται η (1.53). Αντικαθιστώντας την τιμή της παραμέτρου  $O_n$  από την (1.37) στην (1.51) προκύπτει η εξίσωση

$$P_s = \frac{P_e}{P_e \frac{f^2 h^2}{qh^2 + r} + 1} = \frac{(qh^2 + r)P_e}{f^2 h^2 P_e + qh^2 + r},$$

η οποία αποδεικνύει την (1.52). □

#### 1.4.2. Μόνιμη κατάσταση φίλτρου Kalman

Όπως και στο φίλτρο Λαϊνιάτη, αν το χρονικά αμετάβλητο μοντέλο στην (1.3)-(1.4) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, το φίλτρο Kalman τείνει στη μόνιμη κατάσταση, δηλαδή οι πίνακες συνδιακύμανσης  $P_{k+1/k}$ ,  $P_{k+1/k+1}$  έχουν τιμές ανεξάρτητες του  $k$ , [38]. Η *συνδιακύμανση λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση* συμβολίζεται με  $P_p$  και ισούται με

$$P_p = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{k+1/k}. \quad (1.55)$$

Συνδυάζοντας την (1.39), (1.40), (1.42) με την (1.55) καταλήγουμε στην

$$P_p = FP_p F^T + Q - FP_p H^T [HP_p H^T + R]^{-1} HP_p F^T, \quad (1.56)$$



που είναι γνωστή ως *εξίσωση Riccati* προερχόμενη από το *φίλτρο Kalman*, όταν το φίλτρο τείνει στη μόνιμη κατάσταση.

Όμοια με τη μόνιμη κατάσταση του φίλτρου Λαϊνιώτη που περιγράψαμε στην Παράγραφο 1.4.1., σε ορισμένες περιπτώσεις, το φίλτρο μπορεί να τείνει σε μόνιμη κατάσταση, ακόμη και αν δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Έχει αποδειχθεί [5, 38] ότι, αν οι εκτιμήσεις και οι συνδιακυμάνσεις λάθους εκτίμησης, που υπολογίζουν τα φίλτρα Kalman και Λαϊνιώτη τη χρονική στιγμή  $k$  είναι ίσες, τότε αναμένεται να είναι ίσες και οι εκτιμήσεις και οι συνδιακυμάνσεις λάθους εκτίμησης τη χρονική στιγμή  $k+1$ , συνεπώς τα δύο φίλτρα είναι θεωρητικά ισοδύναμα. Το ίδιο συμβαίνει και στη μόνιμη κατάσταση, δηλαδή, η συνδιακύμανση λάθους εκτίμησης  $P_e$  στη μόνιμη κατάσταση, όπως στην (1.49) του φίλτρου Λαϊνιώτη ταυτίζεται με την αντίστοιχη συνδιακύμανση του φίλτρου Kalman.

Επιπλέον, από τις (1.49) και (1.55) καθώς και τα παραπάνω σχόλια για την ισοδυναμία των δύο φίλτρων, χρησιμοποιώντας την (1.39) μπορούμε να γράψουμε

$$P_p = f^2 P_e + q, \quad (1.57)$$

όπου η συνδιακύμανση λάθους εκτίμησης  $P_e$ , μπορεί να προέρχεται είτε από το φίλτρο Kalman στη μόνιμη κατάσταση, είτε από το Λαϊνιώτη στη μόνιμη κατάσταση.



## Κεφάλαιο 2

# ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ FIBONACCI ΚΑΙ ΦΙΛΤΡΟ ΛΑΙΝΙΩΤΗ



## 2.1. Ορισμός και ιδιότητες της ακολουθίας Fibonacci

### Ορισμός 2.1

*Ακολουθία Fibonacci* είναι η ακολουθία των θετικών ακέραιων αριθμών, που προκύπτει από την αναδρομική σχέση

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \text{ για κάθε } n = 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

με αρχικές συνθήκες

$$f_0 = 0, f_1 = 1. \quad (2.2)$$

Δηλαδή, η ακολουθία Fibonacci ξεκινά με τους δύο πρώτους αριθμούς Fibonacci να είναι το 0 και το 1 και κάθε επόμενος αριθμός να είναι το άθροισμα των δύο προηγούμενων, [31]. Στον Πίνακα 2.1 αναγράφονται οι 18 πρώτοι αριθμοί της ακολουθίας Fibonacci. Παρατηρούμε ότι μετά τη 13<sup>η</sup>-14<sup>η</sup> τιμή οι όροι της ακολουθίας λαμβάνουν πολύ μεγάλες τιμές.

Πίνακας 2.1

$f_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$f_8$
0	1	1	2	3	5	8	13	21
<hr/>								
$f_9$	$f_{10}$	$f_{11}$	$f_{12}$	$f_{13}$	$f_{14}$	$f_{15}$	$f_{16}$	$f_{17}$
34	55	89	144	233	377	610	987	1597

### Τύπος του Binet

Η ακολουθία Fibonacci έχει και έκφραση κλειστής μορφής. Αυτή είναι γνωστή ως *τύπος του Binet*, από τον Abraham de Moivre, [13] και για κάθε  $n = 0, 1, 2, \dots$  κάθε όρος,  $f_n$ , της ακολουθίας Fibonacci δίνεται από τον τύπο

$$f^n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}},$$

$$\text{όπου } \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \text{ και } \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Ο αριθμός  $\varphi$  ονομάζεται *χρυσός λόγος*, στον οποίο θα αναφερθούμε εκτενέστερα στο Κεφάλαιο 3.

### Πρόταση 2.1

Ορισμένες χαρακτηριστικές ιδιότητες μεταξύ των όρων  $f_n$ ,  $n=1,2,\dots$  της ακολουθίας Fibonacci είναι οι ακόλουθες:

$$(i) \quad f_{n+3} - f_n = 2f_{n+1} \quad (2.3)$$

$$(ii) \quad f_{n+2} + f_{n-2} = 3f_n \quad (2.4)$$

$$(iii) \quad \sum_{i=0}^n f_i = f_{n+2} - 1 \quad (2.5)$$

$$(iv) \quad \sum_{i=0}^n f_{2i} = f_{2n+1} - 1 \quad (2.6)$$

$$(v) \quad \sum_{i=0}^n f_{2i+1} = f_{2n+2} \quad (2.7)$$

$$(vi) \quad \sum_{i=0}^n f_i^2 = f_n f_{n+1} \quad (2.8)$$

### Απόδειξη

(i) Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1 και τη (2.1) μπορούμε να γράψουμε

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad \text{και} \quad f_{n+3} = f_{n+2} + f_{n+1}. \quad (2.9)$$

Χρησιμοποιώντας τη (2.9) έχουμε:

$$f_{n+3} - f_n = f_{n+2} + f_{n+1} - f_n = f_{n+1} + f_n + f_{n+1} - f_n = 2f_{n+1}.$$

(ii) Η  $f_{n-2}$  από τον Ορισμό 2.1 γράφεται  $f_{n-2} = f_n - f_{n-1}$ , οπότε χρησιμοποιώντας την (2.1) για τις  $f_{n+1}$  και  $f_{n+2}$  έχουμε:

$$\begin{aligned} f_{n+2} - f_{n-2} &= f_{n+1} + f_n + f_n - f_{n-1} \\ &= f_n + f_{n-1} + 2f_n - f_{n-1} \\ &= 3f_n. \end{aligned}$$

(iii) Στη (2.5) υπολογίζεται το άθροισμα των  $n+1$  πρώτων όρων της ακολουθίας Fibonacci. Σύμφωνα με τη (2.2) ισχύει  $f_0 = 0$ , οπότε η (2.5) γράφεται ως ακολούθως:

$$\sum_{i=0}^n f_i = \sum_{i=1}^n f_i = f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_{n-1} + f_n. \quad (2.10)$$

Επίσης από τη (2.1), για κάθε όρο της ακολουθίας Fibonacci μπορούμε να γράψουμε:

$$f_n = f_{n+2} - f_{n+1} \quad (2.11)$$

Επομένως από τη (2.11) και για κάθε τιμή του  $n$  μπορούμε να έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} f_2 &= f_4 - f_3 \\ f_3 &= f_5 - f_4 \\ f_4 &= f_6 - f_5 \\ &\vdots \\ f_{n-1} &= f_{n+1} - f_n \\ f_n &= f_{n+2} - f_{n+1} \end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες και αντικαθιστώντας από τη (2.10) έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n f_i &= f_{n+2} - f_3 \Rightarrow f_3 + \sum_{i=2}^n f_i = f_{n+2} \\ \Rightarrow f_1 + f_2 + \sum_{i=2}^n f_i &= f_{n+2} \Rightarrow f_0 + f_1 + (f_0 + f_1) + \sum_{i=2}^n f_i = f_{n+2} \Rightarrow 1 + \sum_{i=1}^n f_i = f_{n+2}, \end{aligned}$$

απ' όπου είναι προφανής η ιδιότητα στη (2.5).

(iv) Στη (2.6) υπολογίζεται το άθροισμα των  $n+1$  πρώτων όρων της ακολουθίας Fibonacci με άρτιο δείκτη.

Επειδή  $f_0 = 0$  η (2.6) γράφεται ως εξής:

$$f_2 + f_4 + \dots + f_{2n-2} + f_{2n}, \quad (2.12)$$

όπου σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1 μπορούμε να γράψουμε τον  $f_{2n}$  ως

$$f_{2n} = f_{2n+1} - f_{2n-1}. \quad (2.13)$$

Επομένως από τη (2.13) έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} f_2 &= f_3 - f_1 \\ f_4 &= f_5 - f_3 \\ &\vdots \\ f_{2n-2} &= f_{2n-1} - f_{2n-3} \\ f_{2n} &= f_{2n+1} - f_{2n-1} \end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες και αντικαθιστώντας στη (2.12) έχουμε

$$\sum_{i=0}^n f_{2i} = f_{2n+1} - f_1 = f_{2n+1} - 1.$$

(v) Στη (2.7) υπολογίζεται το άθροισμα των  $n+1$  πρώτων όρων της ακολουθίας Fibonacci με περιττό δείκτη, επειδή η (2.7) γράφεται ως εξής:

$$f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{2n-1} + f_{2n+1}, \quad (2.14)$$

όπου σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1 μπορούμε να γράψουμε τον  $f_n$  ως

$$f_n = f_{n+1} - f_{n-1}. \quad (2.15)$$

Επομένως από τη (2.15) μπορούμε να γράψουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_2 - f_0 \\ f_3 &= f_4 - f_2 \\ f_5 &= f_6 - f_4 \\ &\vdots \\ f_{2n-1} &= f_{2n} - f_{2n-2} \\ f_{2n+1} &= f_{2n+2} - f_{2n} \end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες και αντικαθιστώντας στη (2.14)

έχουμε  $\sum_{i=0}^n f_{2i+1} = f_{2n+2}$ , το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

(vi) Στη (2.8) υπολογίζεται το άθροισμα των τετραγώνων των  $n+1$  πρώτων όρων της ακολουθίας Fibonacci, επειδή η (2.8) γράφεται ως εξής:

$$\sum_{i=0}^n f_i^2 = f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_{n-1}^2 + f_n^2 = f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 \quad (2.16)$$

όπου σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1 μπορούμε να γράψουμε το  $f_n^2$  ως:

$$f_n^2 = f_n f_n = f_n (f_{n+1} - f_{n-1}) = f_n f_{n+1} - f_n f_{n-1} \quad (2.17)$$

Επομένως από τη (2.17) έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} f_1^2 &= f_1 f_2 - f_1 f_0 \\ f_2^2 &= f_2 f_3 - f_2 f_1 \\ f_3^2 &= f_3 f_4 - f_3 f_2 \\ &\vdots \\ f_{n-1}^2 &= f_{n-1} f_n - f_{n-1} f_{n-2} \\ f_n^2 &= f_n f_{n+1} - f_n f_{n-1} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες στη (2.18) και αντικαθιστώντας στη

(2.16) υπολογίζεται  $\sum_{i=0}^n f_i^2 = f_n f_{n+1}$ , επειδή  $f_0 = 0$ . Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη

της (2.8). □



## 2.2. Αναδρομικός τύπος στο φίλτρο Λαϊνιώτη

Στην παρούσα παράγραφο αναπτύσσουμε τη θεωρία όπως στις [1, 6]. Έτσι από (1.19)-(1.27) θεωρούμε το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Λαϊνιώτη με  $n = m$  και τους πίνακες  $F = H = I$ ,  $Q = R = \Sigma$ , όπου  $\Sigma$  ένας θετικά ορισμένος πίνακας<sup>10</sup>, ο οποίος στη συνέχεια σημειώνεται  $\Sigma > 0$ . Οι παράμετροι του φίλτρου Λαϊνιώτη υπολογίζονται από τις (1.22)-(1.27) και ισούται με

$$A = K_m = O_n = \frac{1}{2}\Sigma^{-1} \quad (2.19)$$

$$K_n = F_n = \frac{1}{2}I \quad (2.20)$$

$$P_n = \frac{1}{2}\Sigma. \quad (2.21)$$

Όταν  $F = H = I$  το μοντέλο (1.3)-(1.4) έχει φυσικό νόημα και σημαίνει, ότι η  $z(k+1)$  μέτρηση είναι το ίδιο φυσικό μέγεθος με την κατάσταση  $x(k+1)$ , και δεν έχουμε πληροφορίες για την επόμενη θέση της κατάστασης, δηλαδή, είτε είναι τυχαία είτε εξαρτάται μόνο από ένα σφάλμα, που είναι ίσο για την εξίσωση κατάστασης (1.3) και την εξίσωση της μέτρησης (1.4).

Χρησιμοποιώντας τις τιμές των παραμέτρων από τις (2.19)-(2.21), το φίλτρο Λαϊνιώτη (1.19)-(1.21) γράφεται:

$$P_{k/k+1} = \left[ \frac{1}{2}P_{k/k}\Sigma^{-1} + I \right]^{-1} P_{k/k} \quad (2.22)$$

$$P_{k+1/k+1} = \frac{1}{2}\Sigma + \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2}P_{k/k}\Sigma^{-1} + I \right]^{-1} P_{k/k} \quad (2.23)$$

$$x_{k+1/k+1} = \frac{1}{2}z_{k+1} + \frac{1}{2} \left[ I + \frac{1}{2}P_{k/k}\Sigma^{-1} \right]^{-1} \left[ \frac{1}{2}P_{k/k}\Sigma^{-1}z_{k+1} + x_{k/k} \right] \quad (2.24)$$

Στη συνέχεια αναφέρουμε ένα Λήμμα που είναι χρήσιμο στις αποδείξεις των επόμενων προτάσεων.

### Λήμμα 2.1 [19]

Αν  $A$  θετικά ορισμένος πίνακας και  $B$  θετικά ημιορισμένος, τότε  $A+B$  είναι θετικά ορισμένος και αντιστρέψιμος πίνακας.

<sup>10</sup> Υπενθυμίζεται ότι ένας συμμετρικός πίνακας είναι θετικά ορισμένος όταν έχει όλες τις ιδιοτιμές του θετικούς πραγματικούς αριθμούς. Είναι γνωστό ότι ένας πίνακας με τις προηγούμενες ιδιότητες είναι αντιστρέψιμος.

Η επόμενη πρόταση παρουσιάζεται και στην [1, Proposition 5.1] και δίνει μία αναδρομική έκφραση του φίλτρου Λαϊνιώτη, ως συνάρτηση ενός θετικά ορισμένου πίνακα  $\Sigma$ .

### Πρόταση 2.1

Έστω  $n = m$  και  $F = H = I$ ,  $Q = R = \Sigma$ , όπου  $\Sigma > 0$ . Τότε για  $k = 0, 1, 2, \dots$  το φίλτρο Λαϊνιώτη (1.19)-(1.21) δίνεται από τις αναδρομικές σχέσεις

$$P_{k+1/k+1} = [P_{k/k} \Sigma^{-1} + 2I]^{-1} (P_{k/k} + \Sigma) \quad (2.25)$$

$$x_{k+1/k+1} = [P_{k/k} \Sigma^{-1} + 2I]^{-1} \left( (P_{k/k} \Sigma^{-1} + I) z_{k+1} + x_{k/k} \right). \quad (2.26)$$

### Απόδειξη

Σύμφωνα με το Λήμμα 2.1 ο πίνακας  $\frac{1}{2} P_{k/k} \Sigma^{-1} + I$  είναι αντιστρέψιμος ως άθροισμα θετικά ορισμένων πινάκων, το οποίο μας επιτρέπει να γράψουμε για τη συνδιακύμανση λάθους εκτίμησης  $P_{k+1/k+1}$  στη (2.23) τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} P_{k+1/k+1} &= \frac{1}{2} \Sigma + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} P_{k/k} \Sigma^{-1} + I \right]^{-1} \frac{1}{2} P_{k/k} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} P_{k/k} \Sigma^{-1} + I \right]^{-1} \left( \frac{1}{2} P_{k/k} \Sigma^{-1} + I \right) \Sigma + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} P_{k/k} \Sigma^{-1} + I \right]^{-1} \frac{1}{2} P_{k/k} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} P_{k/k} \Sigma^{-1} + I \right]^{-1} \left( \left( \frac{1}{2} P_{k/k} \Sigma^{-1} + I \right) \Sigma + \frac{1}{2} P_{k/k} \right) \\ &= [P_{k/k} \Sigma^{-1} + 2I]^{-1} \left( \frac{1}{2} P_{k/k} + \Sigma + \frac{1}{2} P_{k/k} \right) \\ &= [P_{k/k} \Sigma^{-1} + 2I]^{-1} (P_{k/k} + \Sigma) \end{aligned}$$

Επειδή ο πίνακας  $\frac{1}{2} P_{k/k} \Sigma^{-1} + I$  είναι αντιστρέψιμος η εκτίμηση  $x_{k+1/k+1}$  στη (2.24) γράφεται:

$$\begin{aligned} x_{k+1/k+1} &= \frac{1}{2} z_{k+1} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} P_{k/k} \Sigma^{-1} + I \right]^{-1} \left( \frac{1}{2} P_{k/k} \Sigma^{-1} z_{k+1} + x_{k/k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} P_{k/k} \Sigma^{-1} + I \right]^{-1} \left( \frac{1}{2} P_{k/k} \Sigma^{-1} + I \right) z_{k+1} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} P_{k/k} \Sigma^{-1} + I \right]^{-1} \left( \frac{1}{2} P_{k/k} \Sigma^{-1} z_{k+1} + x_{k/k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} P_{k/k} \Sigma^{-1} + I \right]^{-1} \left( \left( I + \frac{1}{2} P_{k/k} \Sigma^{-1} \right) z_{k+1} + \frac{1}{2} P_{k/k} \Sigma^{-1} z_{k+1} + x_{k/k} \right) \\ &= [P_{k/k} \Sigma^{-1} + 2I]^{-1} \left( z_{k+1} + \frac{1}{2} P_{k/k} \Sigma^{-1} z_{k+1} + \frac{1}{2} P_{k/k} \Sigma^{-1} z_{k+1} + x_{k/k} \right) \\ &= [P_{k/k} \Sigma^{-1} + 2I]^{-1} \left( z_{k+1} + P_{k/k} \Sigma^{-1} z_{k+1} + x_{k/k} \right) \\ &= [P_{k/k} \Sigma^{-1} + 2I]^{-1} \left( (P_{k/k} \Sigma^{-1} + I) z_{k+1} + x_{k/k} \right), \end{aligned}$$

με το οποίο ολοκληρώνεται η απόδειξη των (2.25) και (2.26). □

Στον Πίνακα 2.2 παρατίθεται ο υπολογιστικός φόρτος των πράξεων μεταξύ πινάκων, ο οποίος εξαρτάται από τις διαστάσεις των πινάκων καθώς και από το είδος των πινάκων (συμμετρικός ή τυχαίος πίνακας).

Πίνακας 2.2 : Υπολογιστικός φόρτος πράξεων πινάκων

Πράξεις Πινάκων	Διαστάσεις Πινάκων	Φόρτος	$D$	$n \times n$ διαγώνιος πίνακας
$S_1 + S_2$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{n^2 + n}{2}$	$S_1, S_2$	$n \times n$ συμμετρικοί πίνακες
$L_1 + L_2$	$(n \times n) + (n \times n)$	$n^2$	$q_1, q_2$	$n \times 1$ διανύσματα
$D + L_1$	$(n \times n) + (n \times n)$	$n$	$L_1, L_2$	$n \times n$ τυχαίοι πίνακες
$q_1 + q_2$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$n$	$c$	Σταθερά
$L_1 L_2$ <sup>†1</sup>	$(n \times n)(n \times n)$	$n^3 + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$		
$L_1 L_2$	$(n \times n)(n \times n)$	$2n^2 - n^2$		
$L_1 q_1$	$(n \times n)(n \times 1)$	$2n^2 - n$		
$cS_1$	$(1 \times 1)(n \times n)$	$\frac{n^2 + n}{2}$		
$cL_1$	$(1 \times 1)(n \times n)$	$n^2$		
$cD$	$(1 \times 1)(n \times n)$	$n$		
$L_1^{-1}$	$(n \times n)^{-1}$	$\frac{16n^3 - 3n^2 - n}{6}$		

<sup>†1</sup> Πολλαπλασιασμός 2 πινάκων με γινόμενο συμμετρικό πίνακα.

Εφαρμόζοντας τον υπολογιστικό φόρτο από τον Πίνακα 2.2 για τις πράξεις που παρουσιάζονται στις σχέσεις (2.25) και (2.26) του χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Λαϊνιώτη, μπορούμε να υπολογίσουμε τον υπολογιστικό φόρτο του φίλτρου, ο οποίος παρατίθεται αναλυτικά στον Πίνακα 2.3. Υπενθυμίζεται ότι οι πίνακες  $I$ ,  $\Sigma$ ,  $2\Sigma$  και  $\Sigma^{-1}$  θεωρούνται σταθεροί πίνακες, δηλαδή, είναι ανεξάρτητοι από το χρόνο  $k$ .

**Πίνακας 2.3: Υπολογιστικός φόρτος για το φίλτρο Λαϊνιώτη στις (2.25)-(2.26)**

Πράξη Πινάκων	Διαστάσεις Πινάκων	Υπολογιστικός Φόρτος
$A = P_{k/k} \Sigma^{-1}$	$(n \times n)(n \times n)$	$(2n^3 - n^2)k$
$B = A + 2I = P_{k/k} \Sigma^{-1} + 2I$	$(n \times n) + (n \times n)$	$nk$
$\Gamma = B^{-1} = [P_{k/k} \Sigma^{-1} + 2I]^{-1}$	$(n \times n)^{-1}$	$\frac{1}{6}(16n^3 - 3n^2 - n)k$
$\Delta = P_{k/k} + \Sigma$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{1}{2}(n^2 + n)k$
$P_{k+1/k+1}^{[*]} = \Gamma \Delta = [P_{k/k} \Sigma^{-1} + 2I]^{-1} (P_{k/k} + \Sigma)$	$(n \times n)(n \times n)$	$(n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n)k$
$\Theta = A + I = P_{k/k} \Sigma^{-1} + I$	$(n \times n) + (n \times n)$	$nk$
$\Lambda = \Theta z_{k+1} = (P_{k/k} \Sigma^{-1} + I)z_{k+1}$	$(n \times n)(n \times 1)$	$(2n^2 - n)k$
$M = \Lambda + x_{k/k} = (P_{k/k} \Sigma^{-1} + I)z_{k+1} + x_{k/k}$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$nk$
$x_{k+1/k+1} = [P_{k/k} \Sigma^{-1} + 2I]^{-1} ((P_{k/k} \Sigma^{-1} + I)z_{k+1} + x_{k/k})$	$(n \times n)(n \times n)$	$(2n^2 - n)k$
<b>Σύνολο</b>		$t.b_1 = (\frac{17}{3}n^3 + \frac{7}{2}n^2 + \frac{5}{6}n)k$

[\*] Γινόμενο συμμετρικός πίνακας.

Συνεπώς από τους παραπάνω υπολογισμούς είναι φανερό ότι ο συνολικός υπολογιστικός φόρτος του αναδρομικού τύπου του φίλτρου Λαϊνιώτη, που δίνεται από τις (2.25) και (2.26) εξαρτάται από τη διάσταση  $n$  των πινάκων  $P_{k+1/k+1}$ ,  $x_{k+1/k+1}$  καθώς και από το  $k$  και ισούται με

$$t.b_1 = (\frac{17}{3}n^3 + \frac{7}{2}n^2 + \frac{5}{6}n)k . \quad (2.27)$$

## Πρόταση 2.2

Έστω  $n = m$ ,  $F = H = I$  και  $Q = R = \Sigma$ , όπου  $\Sigma > 0$ . Τότε για  $k = 0, 1, 2, \dots$  οι πίνακες συνδιακύμανσης λάθους λείανσης  $P_{k/k+1}$  και πρόβλεψης  $P_{k+1/k}$  δίνονται από τις αναδρομικές σχέσεις:

$$P_{k/k+1} = 2[P_{k/k}\Sigma^{-1} + 2I]^{-1}P_{k/k} \quad (2.28)$$

$$P_{k+1/k} = [P_{k-1/k-1}\Sigma^{-1} + 2I]^{-1}(2P_{k-1/k-1} + 3\Sigma) \quad (2.29)$$

## Απόδειξη

Προφανώς η συνδιακύμανση λάθους λείανσης  $P_{k/k+1}$  από τη (2.22) γράφεται

$$P_{k/k+1} = [\frac{1}{2}P_{k/k}\Sigma^{-1} + I]^{-1}P_{k/k} = 2[P_{k/k}\Sigma^{-1} + 2I]^{-1}P_{k/k},$$

το οποίο αποδεικνύει την (2.28).

Η συνδιακύμανση λάθους πρόβλεψης  $P_{k+1/k}$  στην (1.39) του χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Kalman, μετά την αντικατάσταση της συνδιακύμανσης λάθους εκτίμησης  $P_{k/k}$  από την (2.25) της Πρότασης 2.1 και λαμβάνοντας υπόψη την αντιστρεψιμότητα του πίνακα  $P_{k/k}\Sigma^{-1} + 2I$ , γράφεται ως ακολούθως

$$\begin{aligned} P_{k+1/k} &= P_{k/k} + Q \\ &= [P_{k-1/k-1}\Sigma^{-1} + 2I]^{-1}(P_{k-1/k-1} + \Sigma) + \Sigma \\ &= [P_{k-1/k-1}\Sigma^{-1} + 2I]^{-1}(P_{k-1/k-1} + \Sigma) + [P_{k-1/k-1}\Sigma^{-1} + 2I]^{-1}(P_{k-1/k-1}\Sigma^{-1} + 2I)\Sigma \\ &= [P_{k-1/k-1}\Sigma^{-1} + 2I]^{-1}(P_{k-1/k-1} + \Sigma + (P_{k-1/k-1}\Sigma^{-1} + 2I)\Sigma) \\ &= [P_{k-1/k-1}\Sigma^{-1} + 2I]^{-1}(2P_{k-1/k-1} + 3\Sigma), \end{aligned}$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Όπως αποδείχθηκε στην [6], ή όπως μπορούμε να συμπεράνουμε άμεσα από τις Προτάσεις 2.1 και 2.2, οι συνδιακυμάνσεις λάθους εκτίμησης  $P_{k+1/k+1}$ , πρόβλεψης  $P_{k+1/k}$ , λείανσης  $P_{k/k+1}$  και η εκτίμηση  $x_{k+1/k+1}$  προσδιορίζονται στην περίπτωση του βαθμωτού μοντέλου, το οποίο δίνεται από τις (1.5)-(1.6), αρκεί να θεωρήσουμε  $f = h = 1$  και  $\sigma$  θετικό πραγματικό αριθμό.

## Πόρισμα 2.1

Έστω  $n=m=1$ ,  $f=h=1$  και  $q=r=\sigma$ , με  $\sigma>0$ . Τότε, οι πίνακες συνδιακύμανσης λάθους εκτίμησης  $P_{k+1/k+1}$ , λειάνσης  $P_{k/k+1}$ , και πρόβλεψης  $P_{k+1/k}$ , καθώς και η εκτίμηση  $x_{k+1/k+1}$  στο φίλτρο Λαϊνιώτη δίνονται ως ακολούθως:

$$P_{k+1/k+1} = \frac{\sigma(P_{k/k} + \sigma)}{P_{k/k} + 2\sigma} \quad (2.30)$$

$$P_{k/k+1} = \frac{2\sigma P_{k/k}}{P_{k/k} + 2\sigma} \quad (2.31)$$

$$P_{k+1/k} = \frac{\sigma(2P_{k-1/k-1} + 3\sigma)}{P_{k-1/k-1} + 2\sigma} \quad (2.32)$$

$$x_{k+1/k+1} = \frac{(P_{k/k} + \sigma)z_{k+1} + \sigma x_{k/k}}{P_{k/k} + 2\sigma} \quad (2.33)$$

Ο *τυχαίος περίπατος* (*random walk system*) είναι η μοντελοποίηση μίας διαδρομής, που αποτελείται από μία διαδοχή τυχαίων βημάτων, για παράδειγμα η διαδρομή που διαγράφεται από ένα μόριο που ταξιδεύει σε ένα υγρό ή ένα αέριο. Ο όρος του τυχαίου περιπάτου εισήχθη για πρώτη φορά από τον Karl Pearson το 1905. Για  $F=H=I$  το *μοντέλο εκτίμησης του τυχαίου περιπάτου* δίνεται από το χρονικά αμετάβλητο μοντέλο (1.3) και (1.4) ως ακολούθως:

$$x(k+1) = x(k) + w(k) \quad (2.34)$$

$$z(k+1) = x(k+1) + v(k+1) \quad (2.35)$$

όπου από τις (1.7)-(1.8) υπολογίζονται οι πίνακες  $Q$ ,  $R$  έτσι ώστε να ισχύει

$$Q = R = E[w(k)w^T(k)] = E[v(k)v^T(k)] = I.$$

Έτσι για το μοντέλο εκτίμησης του τυχαίου περιπάτου (2.34)-(2.35) ακολουθώντας τα ίδια βήματα όπως στις αποδείξεις των Προτάσεων 2.1 και 2.2 μπορούμε να αποδείξουμε τους αντίστοιχους τύπους για τις συνδιακυμάνσεις λάθους εκτίμησης, λειάνσης και πρόβλεψης από (2.25), (2.28) και (2.29) καθώς και για την εκτίμηση  $x_{k+1/k+1}$  από (2.26), λαμβάνοντας υπόψη ότι  $F=H=Q=R=I$ .

## Πόρισμα 2.2

Έστω το μοντέλο εκτίμησης του τυχαίου περιπάτου με  $F = H = Q = R = I$ . Τότε, για  $k = 0, 1, 2, \dots$ , οι πίνακες συνδιακύμανσης λάθους εκτίμησης  $P_{k+1/k+1}$ , λείανσης  $P_{k/k+1}$ , πρόβλεψης  $P_{k+1/k}$  και η εκτίμηση  $x_{k+1/k+1}$  δίνονται από τις αναδρομικές σχέσεις:

$$P_{k+1/k+1} = [P_{k/k} + 2I]^{-1}(P_{k/k} + I) \quad (2.36)$$

$$P_{k/k+1} = 2[P_{k/k} + 2I]^{-1}P_{k/k} \quad (2.37)$$

$$P_{k+1/k} = [P_{k-1/k-1} + 2I]^{-1}(2P_{k-1/k-1} + 3I) \quad (2.38)$$

$$x_{k+1/k+1} = [P_{k/k} + 2I]^{-1}([P_{k/k} + I]z_{k+1} + x_{k/k}) \quad (2.39)$$

Τα Πορίσματα 2.1 και 2.2 για  $n=m=1$  υπολογίζουν τις συνδιακυμάνσεις λάθους εκτίμησης, λείανσης και πρόβλεψης καθώς και την εκτίμηση για το βαθμωτό σύστημα τυχαίου περιπάτου (2.34) και (2.35).

## Πόρισμα 2.3

Έστω το βαθμωτό μοντέλο τυχαίου περιπάτου με  $f = h = q = r = 1$ . Τότε, για  $k = 0, 1, 2, \dots$  οι πίνακες συνδιακύμανσης λάθους εκτίμησης  $P_{k+1/k+1}$ , λείανσης  $P_{k/k+1}$ , πρόβλεψης  $P_{k+1/k}$  και η εκτίμηση  $x_{k+1/k+1}$  δίνονται από τις αναδρομικές σχέσεις:

$$P_{k+1/k+1} = \frac{P_{k/k} + 1}{P_{k/k} + 2} \quad (2.40)$$

$$P_{k/k+1} = \frac{2P_{k/k}}{P_{k/k} + 2} \quad (2.41)$$

$$P_{k+1/k} = \frac{2P_{k-1/k-1} + 3}{P_{k-1/k-1} + 2} \quad (2.42)$$

$$x_{k+1/k+1} = \frac{P_{k/k}z_{k+1} + z_{k+1} + x_{k/k}}{P_{k/k} + 2} \quad (2.43)$$

### 2.3. Κλειστός τύπος στο φίλτρο Λαϊνιώτη

Στη συνέχεια, αναζητάμε μία μη αναδρομική έκφραση του Φίλτρου Λαϊνιώτη όπως αυτή διατυπώθηκε στις (2.25)-(2.26). Θεωρούμε ότι για τους  $n \times n$  πίνακες  $F$ ,  $H$  ισχύει  $F = H = I$  και  $Q = R = \Sigma$ . Ακολουθώντας τη μεθοδολογία που ακολουθήθηκε [1, Theorem 5.2] μπορούμε να καταλήξουμε σε «κλειστή» μορφή του φίλτρου, όπως διατυπώνεται στην επόμενη πρόταση.

Πριν προχωρήσουμε στην επόμενη πρόταση χρειάζεται να υπενθυμίσουμε ότι οι πίνακες  $f_{2\rho+i}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\rho+j}I$  για  $i, j = 1, 2, 3, \dots$  είναι αντιστρέψιμοι, επειδή  $f_{2\rho+i}$ ,  $f_{2\rho+j}$  είναι θετικοί αριθμοί και  $P_0\Sigma^{-1}$ ,  $I$  είναι θετικά ορισμένοι πίνακες, οπότε σύμφωνα με το Λήμμα 2.1 και  $f_{2\rho+i}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\rho+j}I$  είναι θετικά ορισμένος πίνακας.

#### Πρόταση 2.3

Έστω  $F = H = I$ , και  $Q = R = \Sigma$ , όπου  $\Sigma > 0$ . Για  $k = 0, 1, 2, \dots$  το χρονικά αμετάβλητο φίλτρο Λαϊνιώτη δίνεται από τον κλειστό τύπο

$$P_{k+1/k+1} = [f_{2k+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2k+3}I]^{-1}(f_{2k+1}P_0 + f_{2k+2}\Sigma) \quad (2.44)$$

$$x_{k+1/k+1} = [f_{2k+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2k+3}I]^{-1} \left( x_0 + \sum_{\rho=1}^{k+1} (f_{2\rho-1}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\rho}I)z_\rho \right), \quad (2.45)$$

όπου  $P_{0/0} = P_0$ ,  $x_{0/0} = x_0$  είναι οι αρχικές συνθήκες του φίλτρου και  $f_i$  είναι οι όροι της ακολουθίας Fibonacci που δίνονται από τον Ορισμό 2.1.

#### Απόδειξη

Η απόδειξη στηρίζεται στη μέθοδο της επαγωγής.

Θέτοντας  $k = 0$  στην (2.25) έχουμε  $P_{1/1} = [P_0\Sigma^{-1} + 2I]^{-1}(P_0 + \Sigma)$ .

Εφαρμόζοντας τον Ορισμό 2.1 και ιδιαίτερα τη (2.1) στην τελευταία ισότητα έχουμε

$$P_{1/1} = [P_0\Sigma^{-1} + 2I]^{-1}(P_0 + \Sigma) = [f_2P_0\Sigma^{-1} + f_3I]^{-1}(f_1P_0 + f_2\Sigma),$$

το οποίο προφανώς επαληθεύει τη (2.44).

Έστω ότι η (2.44) ισχύει για κάποιο φυσικό αριθμό  $k = \nu$ , δηλαδή ισχύει

$$P_{\nu+1/\nu+1} = [f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+3}I]^{-1}(f_{2\nu+1}P_0 + f_{2\nu+2}\Sigma). \quad (2.46)$$

Πρέπει να εξετάσουμε την ισχύ της (2.44) και για  $k = \nu + 1$ .



Αντικαθιστώντας στη (2.25) τον πίνακα συνδιακύμανσης λάθους εκτίμησης  $P_{\nu+1/\nu+1}$  από τη (2.46), εφαρμόζοντας τον Ορισμό 2.1 και την αντιστρεψιμότητα του πίνακα  $f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+3}I$ , έχουμε:

$$\begin{aligned}
P_{\nu+2/\nu+2} &= [P_{\nu+1/\nu+1}\Sigma^{-1} + 2I]^{-1}(P_{\nu+1/\nu+1} + \Sigma) \\
&= \left[ [f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+3}I]^{-1}(f_{2\nu+1}P_0 + f_{2\nu+2}\Sigma)\Sigma^{-1} + 2I \right]^{-1} \\
&\quad \left( [f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+3}I]^{-1}(f_{2\nu+1}P_0 + f_{2\nu+2}\Sigma) + \Sigma \right) \\
&= \left[ [f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+3}I]^{-1}(f_{2\nu+1}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+2}I) \right. \\
&\quad \left. + 2[f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+3}I]^{-1}(f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+3}I) \right]^{-1} \\
&\quad \left[ [f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+3}I]^{-1}(f_{2\nu+1}P_0 + f_{2\nu+2}\Sigma) \right. \\
&\quad \left. + [f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+3}I]^{-1}(f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+3}I)\Sigma \right] \\
&= \left[ [f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+3}I]^{-1} \left( (f_{2\nu+1}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+2}I) + 2(f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+3}I) \right) \right]^{-1} \\
&\quad [f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+3}I]^{-1} \left( (f_{2\nu+1}P_0 + f_{2\nu+2}\Sigma) + (f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+3}I)\Sigma \right) \\
&= \left[ (f_{2\nu+1}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+2}I) + 2(f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+3}I) \right]^{-1} \left( (f_{2\nu+1}P_0 + f_{2\nu+2}\Sigma) + (f_{2\nu+2}P_0 + f_{2\nu+3}\Sigma) \right) \\
&= \left[ (f_{2\nu+1} + f_{2\nu+2} + f_{2\nu+2})P_0\Sigma^{-1} + (f_{2\nu+2} + f_{2\nu+3} + f_{2\nu+3})I \right]^{-1} \\
&\quad \left( (f_{2\nu+1} + f_{2\nu+2})P_0 + (f_{2\nu+2} + f_{2\nu+3})\Sigma \right) \\
&= [f_{2\nu+4}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+5}I]^{-1}(f_{2\nu+3}P_0 + f_{2\nu+4}\Sigma) \\
&= [f_{2(\nu+1)+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2(\nu+1)+3}I]^{-1}(f_{2(\nu+1)+1}P_0 + f_{2(\nu+1)+2}\Sigma).
\end{aligned}$$

Επομένως η (2.44) επαληθεύεται για  $k = \nu + 1$ . Άρα η (2.44) επαληθεύεται για κάθε φυσικό αριθμό  $k$ .

Όμοια αποδεικνύεται και η (2.45). Θέτοντας  $k = 0$  στη (2.26) έχουμε

$$x_{1/1} = [P_0\Sigma^{-1} + 2I]^{-1} \left( (P_0\Sigma^{-1} + I)z_1 + x_0 \right).$$

Εφαρμόζοντας τον Ορισμό 2.1 και ιδιαίτερα τη (2.1) στην τελευταία ισότητα έχουμε

$$x_{1/1} = [P_0\Sigma^{-1} + 2I]^{-1} \left( (P_0\Sigma^{-1} + I)z_1 + x_0 \right) = [f_2P_0\Sigma^{-1} + f_3I]^{-1} \left( (f_1P_0\Sigma^{-1} + f_2I)z_1 + x_0 \right),$$

το οποίο προφανώς επαληθεύει τη (2.45), επειδή η αντιμεταθετική ιδιότητα ισχύει στην πρόσθεση πινάκων.

Έστω ότι η (2.45) ισχύει για κάποιο  $k = \nu$ , δηλαδή, ισχύει

$$x_{\nu+1/\nu+1} = [f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+3}I]^{-1} \left( x_0 + \sum_{\rho=1}^{\nu+1} (f_{2\rho-1}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\rho}I)z_\rho \right). \quad (2.47)$$

Πρέπει να εξετάζουμε την ισχύ της (2.45) για  $k = \nu + 1$ . Αντικαθιστώντας στη (2.26) τους πίνακες  $P_{\nu+1/\nu+1}$  και  $x_{\nu+1/\nu+1}$  από τις (2.46) και (2.47) αντίστοιχα, εφαρμόζοντας τον Ορισμό 2.1 και την αντιστρεψιμότητα του πίνακα  $f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+3}I$ , έχουμε:

$$\begin{aligned}
x_{\nu+2/\nu+2} &= [P_{\nu+1/\nu+1}\Sigma^{-1} + 2I]^{-1} \left( (P_{\nu+1/\nu+1}\Sigma^{-1} + I)z_{\nu+2} + x_{\nu+1/\nu+1} \right) \\
&= \left[ [f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+3}I]^{-1} (f_{2\nu+1}P_0 + f_{2\nu+2}\Sigma)\Sigma^{-1} + 2I \right]^{-1} \\
&\quad \left( ([f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+3}I]^{-1} (f_{2\nu+1}P_0 + f_{2\nu+2}\Sigma)\Sigma^{-1} + I)z_{\nu+2} + \right. \\
&\quad \left. + [f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+3}I]^{-1} \left( x_0 + \sum_{\rho=1}^{\nu+1} (f_{2\rho-1}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\rho}I)z_{\rho} \right) \right) \\
&= \left[ [f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+3}I]^{-1} (f_{2\nu+1}P_0 + f_{2\nu+2}\Sigma)\Sigma^{-1} \right. \\
&\quad \left. + 2[f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+3}I]^{-1} (f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+3}I) \right]^{-1} \\
&\quad \left( [f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+3}I]^{-1} (f_{2\nu+1}P_0 + f_{2\nu+2}\Sigma)\Sigma^{-1}z_{\nu+2} + z_{\nu+2} \right. \\
&\quad \left. + [f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+3}I]^{-1} \left( x_0 + \sum_{\rho=1}^{\nu+1} (f_{2\rho-1}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\rho}I)z_{\rho} \right) \right) \\
&= \left[ [f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+3}I]^{-1} \left( (f_{2\nu+1}P_0 + f_{2\nu+2}\Sigma)\Sigma^{-1} + 2(f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+3}I) \right) \right]^{-1} \\
&\quad \left( [f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+3}I]^{-1} (f_{2\nu+1}P_0 + f_{2\nu+2}\Sigma)\Sigma^{-1}z_{\nu+2} + \right. \\
&\quad \left. + [f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+3}I]^{-1} (f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+3}I)z_{\nu+2} + \right. \\
&\quad \left. + [f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+3}I]^{-1} \left( x_0 + \sum_{\rho=1}^{\nu+1} (f_{2\rho-1}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\rho}I)z_{\rho} \right) \right) \\
&= \left[ (f_{2\nu+1}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+2}I + 2f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + 2f_{2\nu+3}I) \right]^{-1} (f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+3}I) \\
&\quad [f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+3}I]^{-1} \left( (f_{2\nu+1}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+2}I + f_{2\nu+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+3}I)z_{\nu+2} + \right. \\
&\quad \left. + x_0 + \sum_{\rho=1}^{\nu+1} (f_{2\rho-1}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\rho}I)z_{\rho} \right) \\
&= \left[ (f_{2\nu+1} + f_{2\nu+2} + f_{2\nu+2})P_0\Sigma^{-1} + (f_{2\nu+2} + f_{2\nu+3} + f_{2\nu+3})I \right]^{-1} \\
&\quad \left( (f_{2\nu+1} + f_{2\nu+2})P_0\Sigma^{-1} + (f_{2\nu+2} + f_{2\nu+3})I \right) z_{\nu+2} + x_0 + \sum_{\rho=1}^{\nu+1} (f_{2\rho-1}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\rho}I)z_{\rho} \\
&= \left[ f_{2\nu+4}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+5}I \right]^{-1} \left( (f_{2\nu+3}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+4}I)z_{\nu+2} + x_0 + \sum_{\rho=1}^{\nu+1} (f_{2\rho-1}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\rho}I)z_{\rho} \right) \\
&= \left[ f_{2\nu+4}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\nu+5}I \right]^{-1} \left( x_0 + \sum_{\rho=1}^{\nu+2} (f_{2\rho-1}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\rho}I)z_{\rho} \right) \\
&= [f_{2(\nu+1)+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2(\nu+1)+3}I]^{-1} \left( x_0 + \sum_{\rho=1}^{\nu+2} (f_{2\rho-1}P_0\Sigma^{-1} + f_{2\rho}I)z_{\rho} \right).
\end{aligned}$$

Επομένως, η (2.45) επαληθεύεται για  $k = \nu + 1$ . Άρα η (2.45) επαληθεύεται για κάθε φυσικό αριθμό, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

Πίνακας 2.4: Υπολογιστικός φόρτος για το φίλτρο Λαϊνιώτη στις (2.44)-(2.45)

Πράξη Πινάκων	Διαστάσεις Πινάκων	Υπολογιστικός Φόρτος
$f_0, f_1, f_2, \dots, f_{2k+1}, f_{2k+2}, f_{2k+3}$	$(1 \times 1) + (1 \times 1)$	$2k + 2$
$A = f_{2k+2} P_0 \Sigma^{-1}$	$(1 \times 1)(n \times n)$	$n^2$
$B = f_{2k+3} I$	$(1 \times 1)(n \times n)$	$n$
$\Gamma = A + B = f_{2k+2} P_0 \Sigma^{-1} + f_{2k+3} I$	$(n \times n) + (n \times n)$	$n$
$\Delta = \Gamma^{-1} = [f_{2k+2} P_0 \Sigma^{-1} + f_{2k+3} I]^{-1}$	$(n \times n)^{-1}$	$\frac{1}{6}(16n^3 - 3n^2 - n)$
$E_\rho = f_{2\rho-1} P_0 \Sigma^{-1}$	$(1 \times 1)(n \times n)$	$n^2 \rho$
$Z_\rho = f_{2\rho} I$	$(1 \times 1)(n \times n)$	$n\rho$
$\Theta_\rho = E_\rho + Z_\rho = f_{2\rho-1} P_0 \Sigma^{-1} + f_{2\rho} I$	$(n \times n) + (n \times n)$	$n\rho$
$K_\rho = \Theta_\rho z_\rho = (f_{2\rho-1} P_0 \Sigma^{-1} + f_{2\rho} I) z_\rho$	$(n \times n)(n \times 1)$	$(2n^2 - n)\rho,$ $\rho = k+1$
$\Lambda = \sum_{\rho=1}^{k+1} K_\rho = \sum_{\rho=1}^{k+1} (f_{2\rho-1} P_0 \Sigma^{-1} + f_{2\rho} I) z_\rho$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$nk$
$M = x_0 + \Lambda = x_0 + \sum_{\rho=1}^{k+1} (f_{2\rho-1} P_0 \Sigma^{-1} + f_{2\rho} I) z_\rho$	$(n \times 1) + (n \times 1)$	$n$
$x_{k+1/k+1} = \Delta M$ $= [f_{2k+2} P_0 \Sigma^{-1} + f_{2k+3} I]^{-1}$ $(x_0 + \sum_{\rho=1}^{k+1} (f_{2\rho-1} P_0 \Sigma^{-1} + f_{2\rho} I) z_\rho)$	$(n \times n)(n \times 1)$	$2n^2 - n$
$\Xi^{[*]} = f_{2k+1} P_0$	$(1 \times 1)(n \times n)$	$\frac{n^2 + n}{2}$
$\Pi^{[*]} = f_{2k+2} \Sigma$	$(1 \times 1)(n \times n)$	$\frac{n^2 + n}{2}$
$T^{[**]} = \Xi + \Pi = f_{2k+1} P_0 + f_{2k+2} \Sigma$	$(n \times n) + (n \times n)$	$\frac{n^2 + n}{2}$
$P_{k+1/k+1}^{[*]} = [f_{2k+2} P_0 \Sigma^{-1} + f_{2k+3} I]^{-1} (f_{2k+1} P_0 + f_{2k+2} \Sigma)$	$(n \times n)(n \times n)$	$n^3 + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$
<b>Σύνολο</b>		$(3n^2 + 2n + 2)k + \frac{11}{3}n^3 + \frac{15}{2}n^2 + \frac{23}{6}n + 2$

[\*] Γινόμενο συμμετρικός πίνακας,

[\*\*] Άθροισμα συμμετρικών πίνακίων

Συγκρίνοντας τον αναδρομικό τύπο του φίλτρου Λαϊνιώτη όπως παρουσιάστηκε στην Πρόταση 2.1 στις σχέσεις (2.25) και (2.26) με τον κλειστό τύπο του φίλτρου όπως παρουσιάστηκε στην Πρόταση 2.3 στις σχέσεις (2.44) και (2.45) έχουμε να σχολιάσουμε ότι ο κλειστός τύπος εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες που θεωρούμε στο φίλτρο και από τη χρονική στιγμή  $k$ , η οποία σχετίζεται με συγκεκριμένο τρόπο, αυτόν που καθορίζει ο όρος της ακολουθίας Fibonacci. Αυτό μας οδηγεί στην αναζήτηση του αντίστοιχου υπολογιστικού φόρτου στον κλειστό τύπο του φίλτρου και αναμένουμε να υπάρξει μείωση αυτού.

Στον Πίνακα 2.4 παρατίθενται αναλυτικά ο υπολογιστικός φόρτος του «κλειστού» τύπου του φίλτρου Λαϊνιώτη όπως αυτό παρουσιάστηκε στις (2.44) (2.45). Υπενθυμίζεται ότι οι πίνακες  $I$ ,  $P_0 \Sigma^{-1}$  και  $\Sigma$  θεωρούνται σταθεροί πίνακες και δεν εξαρτώνται από το  $k$ . Επίσης, στον υπολογιστικό φόρτο συνυπολογίζονται και οι  $2k + 4$  πρώτοι όροι της ακολουθίας Fibonacci.

Συνεπώς από τους παραπάνω υπολογισμούς είναι φανερό ότι ο συνολικό υπολογιστικό φόρτος του κλειστού τύπου του φίλτρου Λαϊνιώτη, που δίνεται από τη (2.44) και (2.45) εξαρτάται από τη διάσταση των πινάκων  $P_{k+1/k+1}$ ,  $x_{k+1/k+1}$  και από το  $k$  και όχι από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος  $P_0$ ,  $x_0$  και ισούται με

$$t.b_2 = (3n^2 + 2n + 2)k + \frac{11}{3}n^3 + \frac{15}{2}n^2 + \frac{23}{6}n + 2. \quad (2.48)$$

Στον Πίνακα 2.5 παρουσιάζεται ο υπολογιστικός φόρτος, που διατυπώθηκε για το φίλτρο Λαϊνιώτη, όταν  $F = H = I$  και  $Q = R = \Sigma$  με  $\Sigma > 0$ , με τις δύο μορφές του, αναδρομικός τύπος φίλτρου που δόθηκε στις (2.25)-(2.26) με φόρτο όπως στη (2.27) και κλειστός τύπος φίλτρου, που δόθηκε στις (2.44)-(2.45) με φόρτο όπως στη (2.48).

**Πίνακας 2.5: Αποτελέσματα υπολογιστικού φόρτου του φίλτρου Λαϊνιώτη**

Φίλτρο	Υπολογιστικός Φόρτος
Κλειστός τύπος φίλτρου Λαϊνιώτη	$t.b_2 = (3n^2 + 2n + 2)k + \frac{11}{3}n^3 + \frac{15}{2}n^2 + \frac{23}{6}n + 2$
Αναδρομικός τύπος φίλτρου Λαϊνιώτη	$t.b_1 = (\frac{17}{3}n^3 + \frac{7}{2}n^2 + \frac{5}{6}n)k$

Συγκρίνοντας το φόρτο του φίλτρου Λαϊνιώτη από τους τύπους στη (2.27) και (2.48) έχουμε να σχολιάσουμε ότι ο κλειστός τύπος του φίλτρου είναι τάξη μεγέθους  $n^3 + n^2k$ , ενώ ο αναδρομικός είναι  $n^3k$ , από όπου συμπεραίνουμε ότι, αν  $n \geq 2$ , ο κλειστός έχει μικρότερο υπολογιστικό φόρτο από τον αναδρομικό.

Στη συνέχεια αναζητούμε έναν κλειστό τύπο για τις συνδιακυμάνσεις λάθους λείανσης και πρόβλεψης προκειμένου να υπάρχει ένας πλήρης υπολογισμός του φίλτρου Λαϊνιώτη για την περίπτωση όπου  $F = H = I$  και  $Q = R = \Sigma$ .

#### Πρόταση 2.4

Έστω  $n = m$ ,  $F = H = I$  και  $Q = R = \Sigma$ , όπου  $\Sigma > 0$ . Τότε, για  $k = 0, 1, 2, \dots$  οι πίνακες συνδιακύμανσης λάθους λείανσης  $P_{k/k+1}$  και πρόβλεψης  $P_{k+1/k}$  δίνονται από τους ακόλουθους κλειστούς (μη αναδρομικούς) τύπους:

$$P_{k/k+1} = 2[f_{2k+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2k+3}I]^{-1}(f_{2k-1}P_0 + f_{2k}\Sigma) \quad (2.49)$$

$$P_{k+1/k} = [f_{2k}P_0\Sigma^{-1} + f_{2k+1}I]^{-1}(f_{2k+1}P_0 + f_{2k+2}\Sigma). \quad (2.50)$$

#### Απόδειξη

Αντικαθιστώντας στον αναδρομικό τύπο της (2.28) τη συνδιακύμανση λάθους εκτίμησης  $P_{k/k}$  της οποίας η κλειστή μορφή δίνεται από τη (2.44) και είναι

$$P_{k/k} = [f_{2k}P_0\Sigma^{-1} + f_{2k+1}I]^{-1}(f_{2k-1}P_0 + f_{2k}\Sigma), \quad (2.51)$$

Εφαρμόζοντας και τον Ορισμό 2.1 μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} P_{k/k+1} &= 2[P_{k/k}\Sigma^{-1} + 2I]^{-1}P_{k/k} \\ &= 2\left[[f_{2k}P_0\Sigma^{-1} + f_{2k+1}I]^{-1}(f_{2k-1}P_0 + f_{2k}\Sigma)\Sigma^{-1} + 2I\right]^{-1} \\ &\quad [f_{2k}P_0\Sigma^{-1} + f_{2k+1}I]^{-1}(f_{2k-1}P_0 + f_{2k}\Sigma) \\ &= 2\left[[f_{2k}P_0\Sigma^{-1} + f_{2k+1}I]^{-1}(f_{2k-1}P_0\Sigma^{-1} + f_{2k}I) + 2[f_{2k}P_0\Sigma^{-1} + f_{2k+1}I]^{-1}(f_{2k}P_0\Sigma^{-1} + f_{2k+1}I)\right]^{-1} \\ &\quad [f_{2k}P_0\Sigma^{-1} + f_{2k+1}I]^{-1}(f_{2k-1}P_0 + f_{2k}\Sigma) \\ &= 2[f_{2k-1}P_0\Sigma^{-1} + f_{2k}I + 2f_{2k}P_0\Sigma^{-1} + 2f_{2k+1}I]^{-1} \\ &\quad (f_{2k}P_0\Sigma^{-1} + f_{2k+1}I)[f_{2k}P_0\Sigma^{-1} + f_{2k+1}I]^{-1}(f_{2k-1}P_0 + f_{2k}\Sigma) \\ &= 2[(f_{2k-1} + f_{2k} + f_{2k})P_0\Sigma^{-1} + (f_{2k} + f_{2k+1} + f_{2k+1})I]^{-1}(f_{2k-1}P_0 + f_{2k}\Sigma) \\ &= 2[f_{2k+2}P_0\Sigma^{-1} + f_{2k+3}I]^{-1}(f_{2k-1}P_0 + f_{2k}\Sigma), \end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει τη ζητούμενη σχέση (2.49).

Αντικαθιστώντας στον αναδρομικό τύπο της (1.39) τη συνδιακύμανση λάθους εκτίμησης  $P_{k/k}$  από τη (2.51) και για  $F = I$ ,  $Q = \Sigma$ , έχουμε:

$$\begin{aligned}
P_{k+1/k} &= FP_{k/k}F^T + Q \\
&= [f_{2k}P_0\Sigma^{-1} + f_{2k+1}I]^{-1}(f_{2k-1}P_0 + f_{2k}\Sigma) + \Sigma \\
&= [f_{2k}P_0\Sigma^{-1} + f_{2k+1}I]^{-1}(f_{2k-1}P_0 + f_{2k}\Sigma) + [f_{2k}P_0\Sigma^{-1} + f_{2k+1}I]^{-1}(f_{2k}P_0\Sigma^{-1} + f_{2k+1}I)\Sigma \\
&= [f_{2k}P_0\Sigma^{-1} + f_{2k+1}I]^{-1}(f_{2k-1}P_0 + f_{2k}\Sigma + f_{2k}P_0 + f_{2k+1}\Sigma) \\
&= [f_{2k}P_0\Sigma^{-1} + f_{2k+1}I]^{-1}(f_{2k+1}P_0 + f_{2k+2}\Sigma),
\end{aligned}$$

Το οποίο αποδεικνύει τη (2.50), ολοκληρώνοντας την απόδειξη.  $\square$

Προφανώς οι κλειστοί τύποι στις (2.44)-(2.45) και (2.49)-(2.50) ισχύουν και για την περίπτωση του τυχαίου περιπάτου αρκεί να θεωρήσουμε  $F = H = Q = R = I$  και τότε καταλήγουμε στην ακόλουθη πρόταση.

#### Πόρισμα 2.4

Έστω το μοντέλο του τυχαίου περιπάτου με παραμέτρους  $F = H = Q = R = I$ . Για  $k = 0, 1, 2, \dots$  οι κλειστοί τύποι της εκτίμησης και των συνδιακυμάνσεων λάθους εκτίμησης, λείανσης και πρόβλεψης δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$x_{k+1/k+1} = [f_{2k+2}P_0 + f_{2k+3}I]^{-1}(x_0 + \sum_{\rho=1}^{k+1}(f_{2\rho-1}P_0 + f_{2\rho}I)z_\rho) \quad (2.52)$$

$$P_{k+1/k+1} = [f_{2k+2}P_0 + f_{2k+3}I]^{-1}(f_{2k+1}P_0 + f_{2k+2}I) \quad (2.53)$$

$$P_{k/k+1} = 2[f_{2k+2}P_0 + f_{2k+3}I]^{-1}(f_{2k-1}P_0 + f_{2k}I) \quad (2.54)$$

$$P_{k+1/k} = [f_{2k}P_0 + f_{2k+1}I]^{-1}(f_{2k+1}P_0 + f_{2k+2}I). \quad (2.55)$$

Ειδική περίπτωση ενός  $n \times n$  συστήματος είναι το βαθμωτό οπότε οι κλειστοί τύποι που διατυπώθηκαν και αποδείχθηκαν στις Προτάσεις 2.3 και 2.4 μπορούν να διατυπωθούν και για το βαθμωτό μοντέλο, γεγονός που παρουσιάζεται στα δύο επόμενα πορίσματα και έχει παρουσιαστεί στην [6, 9].

## Πόρισμα 2.5

Έστω  $n=m=1$  και οι παράμετροι του βαθμωτού χρονικά αμετάβλητου μοντέλου (1.5)-(1.6) είναι  $f=h=1$ , και  $q=r=\sigma$ , όπου  $\sigma > 0$ . Τότε, για  $k=0,1,2,\dots$  οι κλειστοί τύποι της εκτίμησης και οι συνδιακυμάνσεις λάθους εκτίμησης, λείανσης, και πρόβλεψης δίνονται από τις σχέσεις:

$$x_{k/k} = \frac{x_0\sigma + \sum_{\rho=1}^k (f_{2\rho-1}P_0 + f_{2\rho}\sigma)z_\rho}{f_{2k}P_0 + f_{2k+1}\sigma} \quad (2.56)$$

$$P_{k/k} = \sigma \frac{f_{2k-1}P_0 + f_{2k}\sigma}{f_{2k}P_0 + f_{2k+1}\sigma} \quad (2.57)$$

$$P_{k/k+1} = 2\sigma \frac{f_{2k-1}P_0 + f_{2k}\sigma}{f_{2k+2}P_0 + f_{2k+3}\sigma} \quad (2.58)$$

$$P_{k+1/k} = \sigma \frac{f_{2k+1}P_0 + f_{2k+2}\sigma}{f_{2k}P_0 + f_{2k+1}\sigma} \quad (2.59)$$

Προφανώς οι κλειστοί τύποι που παρουσιάστηκαν στο Πόρισμα 2.5 ισχύουν και στην ειδική περίπτωση του τυχαίου περιπάτου, όπου όλοι οι παράμετροι ταυτίζονται με τη μονάδα, δηλαδή  $f=h=q=r=1$ , και τότε με αντικατάσταση των παραπάνω τιμών στις (2.56)-(2.59) άμεσα προκύπτει η ακόλουθη πρόταση.

## Πόρισμα 2.6

Έστω το μοντέλο του τυχαίου περιπάτου με παραμέτρους  $f=h=q=r=1$ . Οι κλειστοί τύποι της εκτίμησης για  $k=0,1,2,\dots$  και των συνδιακυμάνσεων λάθους εκτίμησης, λείανσης και πρόβλεψης, δίνονται από τις σχέσεις:

$$x_{k/k} = \frac{x_0 + \sum_{\rho=1}^k (f_{2\rho-1}P_0 + f_{2\rho})z_\rho}{f_{2k}P_0 + f_{2k+1}} \quad (2.60)$$

$$P_{k/k} = \frac{f_{2k-1}P_0 + f_{2k}}{f_{2k}P_0 + f_{2k+1}} \quad (2.61)$$

$$P_{k/k+1} = 2 \frac{f_{2k-1}P_0 + f_{2k}}{f_{2k+2}P_0 + f_{2k+3}} \quad (2.62)$$

$$P_{k+1/k} = \frac{f_{2k+1}P_0 + f_{2k+2}}{f_{2k}P_0 + f_{2k+1}} \quad (2.63)$$

## Κεφάλαιο 3

# ΧΡΥΣΗ ΤΟΜΗ ΚΑΙ ΦΙΛΤΡΟ ΛΑΙΝΙΩΤΗ





### 3.1. Ορισμός και ιδιότητες της χρυσής τομής

#### Ορισμός 3.1

Θεωρείται ότι δύο θετικές ποσότητες  $x, y$  με  $x > y$  έχουν την αναλογία της **χρυσής τομής**  $\alpha$ , αν ο λόγος της μεγαλύτερης ποσότητας προς το άθροισμα τους είναι ίσος με το λόγο της μικρότερης ποσότητας προς τη μεγαλύτερη, δηλαδή όταν ισχύει

$$\frac{x}{x+y} = \frac{y}{x} = \alpha, \quad (3.1)$$

όπου  $x$  η μικρότερη και  $y$  η μεγαλύτερη ποσότητα.

Ο αντίστροφος θετικός αριθμός της χρυσής τομής ονομάζεται **χρυσός λόγος** και συμβολίζεται με το γράμμα  $\varphi$ ,

$$\varphi = \frac{1}{\alpha} \quad (3.2)$$

#### Σχέσεις και βασικές ιδιότητες

Χρησιμοποιώντας την (3.1) μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{x}{x+y} = \alpha \Leftrightarrow \frac{x+y}{x} = \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow 1 + \frac{y}{x} = \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow 1 + \alpha = \frac{1}{\alpha}. \quad (3.3)$$

Συνδυάζοντας (3.2) με (3.3) έχουμε

$$\varphi = \alpha + 1$$

ή διαφορετικά μπορούμε να γράψουμε:

$$\alpha = \varphi - 1.$$

Πολλαπλασιάζοντας την (3.3) επί  $\alpha$  προκύπτει:

$$\alpha^2 + \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \quad (3.4)$$

Οι ρίζες του τριώνυμου (3.4) είναι:

$$\alpha_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ και } \alpha_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Απορρίπτουμε την  $\alpha_2$  γιατί η χρυσή τομή είναι αναλογία μεταξύ θετικών ποσοτήτων.

Επομένως:

$$\alpha = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) = 0,6180339887..$$

Αντίστοιχα ο χρυσός λόγος υπολογίζεται από την (3.2) ότι είναι ίσος με:

$$\varphi = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887..$$

Στη συνέχεια μπορούμε άμεσα από την (3.4) να αποδείξουμε ορισμένες δυνάμεις της χρυσής τομής.

Αρχικά, από την (3.4) γράφουμε  $\alpha^2 = 1 - \alpha$  και ακόμη από την (3.3) μπορούμε να παράγουμε  $\alpha + 2 = \alpha + 1 + 1 = \frac{1}{\alpha} + 1 = \frac{\alpha + 1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha^2}$ . Άρα  $\alpha^2 = \frac{1}{\alpha + 2}$ . Οπότε τελικά από τα παραπάνω έχουμε τις σχέσεις:

$$\alpha^2 = 1 - \alpha = \frac{1}{\alpha + 2}. \quad (3.5)$$

Επίσης χρησιμοποιώντας την (3.5) έχουμε:

$$\alpha^3 = \alpha^2 \alpha = (1 - \alpha) \alpha = \alpha - \alpha^2 = \alpha - (1 - \alpha), \text{ οπότε καταλήγουμε στην } \alpha^3 = 2\alpha - 1.$$

$$\text{Επιπλέον, από την άλλη σχέση της (3.5) μπορούμε να γράψουμε } \alpha^3 = \alpha \alpha^2 = \frac{\alpha}{\alpha + 2}.$$

Οπότε τελικά έχουμε τις σχέσεις

$$\alpha^3 = 2\alpha - 1 = \frac{\alpha}{\alpha + 2}. \quad (3.6)$$

Ακόμη συνδυάζοντας την (3.4) με την (3.5) έχουμε:

$$\alpha^4 = \alpha^2 \alpha^2 = (1 - \alpha)(1 - \alpha) = \alpha^2 - 2\alpha + 1 = (1 - \alpha) - 2\alpha + 1, \text{ οπότε αποδεικνύεται:}$$

$$\alpha^4 = 2 - 3\alpha. \quad (3.7)$$

### Χρυσή τομή και Fibonacci

Το πηλίκο δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας Fibonacci σχετίζεται με τη χρυσή τομή, όπως παρατηρούμε από τους ακόλουθους απλούς υπολογισμούς<sup>11</sup>

$$f_4 / f_5 = 3 / 5 = 0.666..$$

$$f_5 / f_6 = 5 / 8 = 0.60,$$

$$f_6 / f_7 = 8 / 13 = 0.625$$

$$f_7 / f_8 = 13 / 21 = 0.615..$$

$$f_{16} / f_{17} = 987 / 1597 = 0.61803$$

και όπως έχει αναφερθεί, [6, 12], ισχύει

<sup>11</sup> Εδώ χρησιμοποιείται ο συμβολισμός του Ορισμού 2.1 και τιμές της ακολουθίας όπως φαίνονταν στον Πίνακα 2.1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} = \alpha. \quad (3.8)$$

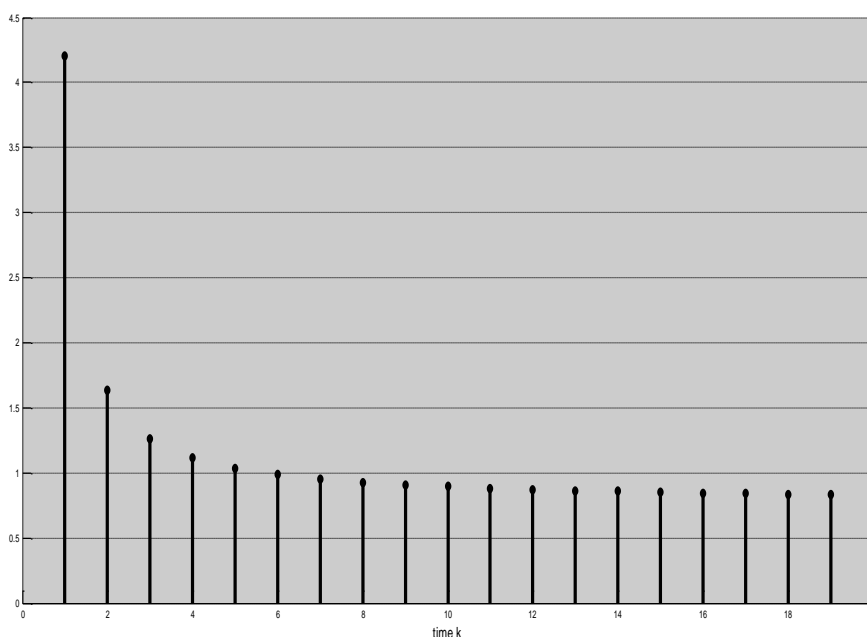
Τέλος, όπως αναφέρεται, [13] η σχέση που συνδέει οποιονδήποτε όρο της ακολουθίας Fibonacci με τη χρυσή τομή είναι  $f_n = \frac{1 - (-\alpha^2)^n}{2\alpha^n + \alpha^{n-1}}$ .

### 3.2. Κλειστός τύπος φίλτρου Λαϊνιώτη στη μόνιμη κατάσταση

Όταν οι ιδιοτιμές του πίνακα  $F$  βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, όπως αναφέρθηκε και στην Παράγραφο 1.4.1, το φίλτρο Λαϊνιώτη γνωρίζουμε ότι τείνει στη μόνιμη κατάσταση. Εξετάζουμε τι συμβαίνει στην περίπτωση που  $F = I$ , όταν δηλαδή οι ιδιοτιμές είναι ίσες με 1. Όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.1, για το κλειστό τύπο του φίλτρου Λαϊνιώτη (2.44)-(2.45), παρατηρούμε ότι η συνδιακύμανση λάθους εκτίμησης  $P_{k+1/k+1}$  με το πέρασμα του διακριτού χρόνου  $k$  τείνει να σταθεροποιηθεί σε μια τιμή, δηλαδή, όσο περνάει ο χρόνος η  $P_{k+1/k+1}$  τείνει σε μία σταθερή τιμή, και μάλιστα εντελώς διαφορετική από την αρχική της τιμή. Για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων του φίλτρου Λαϊνιώτη στις (1.19)-(1.21), όπως μελετήθηκε και στην [1, Theorem 3.1], οι συνδιακυμάνσεις λάθους εκτίμησης, πρόβλεψης και λείανσης του φίλτρου στη μόνιμη κατάσταση σχετίζονται με τη χρυσή τομή και ένα θετικά ορισμένο πίνακα, σχέσεις που διατυπώνονται και αποδεικνύονται στην επόμενη πρόταση.

Εικόνα 3.1

Σχέση  $P_{k+1/k+1}$  ως προς  $k$



### Πρόταση 3.1

Έστω  $n = m$ ,  $F = H = I$  και  $Q = R = \Sigma$ , με  $\Sigma > 0$ . Τότε, οι συνδιακυμάνσεις λάθους εκτίμησης, πρόβλεψης και λείανσης στη μόνιμη κατάσταση δίνονται ως ακολούθως:

$$P_e = \alpha \Sigma \quad (3.9)$$

$$P_p = \frac{1}{\alpha} \Sigma \quad (3.10)$$

$$P_s = 2\alpha^3 \Sigma. \quad (3.11)$$

### Απόδειξη

Επειδή οι παράμετροι στο φίλτρο Λαϊνιώτη είναι αυτές της Πρότασης 2.3 χρησιμοποιώντας τη συνδιακύμανση λάθους εκτίμησης  $P_{k+1/k+1}$  από την (2.44), την (1.49) και την (3.8) μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} P_e &= \lim_{k \rightarrow \infty} P_{k+1/k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( [f_{2k+2} P_0 \Sigma^{-1} + f_{2k+3} I]^{-1} (f_{2k+1} P_0 + f_{2k+2} \Sigma) \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \left[ \frac{f_{2k+2}}{f_{2k+2}} P_0 \Sigma^{-1} + \frac{f_{2k+3}}{f_{2k+2}} I \right]^{-1} \left( \frac{f_{2k+1}}{f_{2k+2}} P_0 + \frac{f_{2k+2}}{f_{2k+2}} \Sigma \right) \right) \\ &= [P_0 \Sigma^{-1} + \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{f_{2k+3}}{f_{2k+2}} \right) I]^{-1} \left( \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{f_{2k+1}}{f_{2k+2}} \right) P_0 + \Sigma \right) \\ &= [P_0 \Sigma^{-1} + \varphi I]^{-1} (\alpha P_0 + \Sigma) \\ &= \alpha [\alpha P_0 \Sigma^{-1} + I]^{-1} (\alpha P_0 + \Sigma) \\ &= \alpha \Sigma. \end{aligned}$$

Για  $F = I$  και  $Q = \Sigma$  η (1.39) γράφεται  $P_{k+1/k} = P_{k/k} + \Sigma$ , από όπου συνδυάζοντας την (1.55) με την (1.49) προκύπτει

$$P_p = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{k+1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{k/k} + \Sigma = P_e + \Sigma.$$

Αντικαθιστώντας την  $P_e$  από την (3.9) στη παραπάνω σχέση παίρνουμε

$$P_p = \alpha \Sigma + \Sigma = (\alpha + 1) \Sigma,$$

και εφαρμόζοντας την (3.3) αποδεικνύεται το ζητούμενο.

Αντικαθιστώντας τον πίνακα  $O_n = \frac{1}{2} \Sigma^{-1}$  από τη (2.19) και τον πίνακα  $P_e$  από την (3.9) στη σχέση (1.51) της συνδιακύμανσης λάθους λείανσης στη μόνιμη κατάσταση και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την (3.6) μπορούμε να έχουμε:

$$P_s = [P_e O_n + I]^{-1} P_e = [\alpha \Sigma [2\Sigma]^{-1} + I]^{-1} \alpha \Sigma = \left[ \frac{1}{2} \alpha I + I \right]^{-1} \alpha \Sigma = \frac{2\alpha}{\alpha + 2} \Sigma = 2\alpha^3 \Sigma. \quad \square$$

Εδώ μπορούμε να σχολιάσουμε ότι τα αποτελέσματα της Πρότασης 3.1 επαληθεύουν την υποσημείωση 8 της Παραγράφου 1.4.1, ότι δηλαδή, ένα χρονικά αμετάβλητο μοντέλο μπορεί να συγκλίνει στη μόνιμη κατάσταση χωρίς να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Πράγματι, το μοντέλο που παρήγαγε το φίλτρο Λαϊνιώτη, με παραμέτρους  $F = H = I$  και  $Q = R = \Sigma$ , αποδείξαμε ότι συγκλίνει στη μόνιμη κατάσταση<sup>12</sup> με όλες τις ιδιοτιμές του πίνακα  $F$  να ανήκουν πάνω στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου.

Όπως αποδείχθηκε στην [6] και μπορούμε να συμπεράνουμε άμεσα από την Πρόταση 3.1, οι συνδιακυμάνσεις λάθους εκτίμησης, πρόβλεψης, λείανσης στη μόνιμη κατάσταση προσδιορίζονται για το βαθμωτό μοντέλο, το οποίο δίνεται στις (1.5) και (1.6), αρκεί να θεωρήσουμε  $f = h = 1$  και  $\sigma$  θετικό πραγματικό αριθμό, αποτέλεσμα που διατυπώνεται στη συνέχεια.

### Πόρισμα 3.1

Έστω  $n = m = 1$ ,  $f = h = 1$  και  $q = r = \sigma$ , με  $\sigma > 0$ . Τότε, το βαθμωτό φίλτρο Λαϊνιώτη (1.29)-(1.37) τείνει στη μόνιμη κατάσταση με τις συνδιακυμάνσεις λάθους εκτίμησης, πρόβλεψης και λείανσης στη μόνιμη κατάσταση να δίνονται ως ακολούθως:

$$P_e = \alpha \sigma \quad (3.12)$$

$$P_p = \frac{1}{\alpha} \sigma \quad (3.13)$$

$$P_s = 2\alpha^3 \sigma. \quad (3.14)$$

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα της Πρότασης 3.1 και του Πορίσματος 3.1 εύκολα συμπεραίνουμε το Πόρισμα που ακολουθεί και αναφέρεται στο μοντέλο εκτίμησης τυχαίου περιπάτου, όπως αυτό διατυπώθηκε στις (2.34)-(2.35), όπου λαμβάνεται υπόψη ότι ισχύει  $F = H = Q = R = I$ .

<sup>12</sup> Επειδή οι συνδιακυμάνσεις στις (3.9)-(3.11) είναι όλες σταθερές και εξαρτώνται από τον θετικά ορισμένο πίνακα  $\Sigma$  και τη χρυσή τομή.

### Πόρισμα 3.2

Έστω το μοντέλο εκτίμησης τυχαίου περιπάτου για  $n = m$  και  $F = H = Q = R = I$ . Τότε, οι συνδιακυμάνσεις λάθους εκτίμησης, πρόβλεψης και λείανσης στη μόνιμη κατάσταση δίνονται ως ακολούθως:

$$P_e = \alpha I \quad (3.15)$$

$$P_p = \frac{1}{\alpha} I \quad (3.16)$$

$$P_s = 2\alpha^3 I. \quad (3.17)$$



### 3.3. Σχέση με χρυσή τομή στο βαθμωτό φίλτρο Λαϊνιώτη

Στην παρούσα ενότητα, θεωρώντας το βαθμωτό χρονικά αμετάβλητο μοντέλο, όπως δίνεται στην (1.5)-(1.6), εξετάζεται η περίπτωση η συνδιακύμανση λάθους εκτίμησης στη μόνιμη κατάσταση του φίλτρου Λαϊνιώτη είναι ανάλογη με τη χρυσή τομή και διατυπώνονται ικανές και αναγκαίες συνθήκες για τις παραμέτρους του φίλτρου, ώστε να ισχύει αυτή η αναλογία.

Στις αποδείξεις στη συνέχεια είναι χρήσιμο το ακόλουθο λήμμα.

#### Λήμμα 3.1

Έστω  $q, r$  θετικοί πραγματικοί αριθμοί και  $h$  πραγματικός αριθμός, έτσι ώστε  $\alpha q h^2 < r$ . Τότε, οι τιμές του  $f^2 = \frac{r - \alpha q h^2}{r \alpha^2}$  είναι θετικές, όπου  $\alpha$  είναι η χρυσή τομή και δίνεται στον Ορισμό 3.1.

#### Πρόταση 3.2 [6]

Έστω το βαθμωτό φίλτρο Λαϊνιώτη (1.29)-(1.37), που ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος 3.1. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

$$(i) P_e = \frac{r}{h^2} \alpha \quad (3.18)$$

$$(ii) f^2 = \frac{r - \alpha q h^2}{r \alpha^2} \quad (3.19)$$

όπου  $\alpha$  δίνεται από τη σχέση (3.1).

#### Απόδειξη

(i)  $\Rightarrow$  (ii)

Σύμφωνα με την (1.53) στην Πρόταση 1.1 η συνδιακύμανση λάθους εκτίμησης στη μόνιμη κατάσταση δίνεται από τη σχέση

$$P_e = \frac{-(q h^2 + r - r f^2) + \sqrt{(q h^2 + r - r f^2)^2 + 4 q r f^2 h^2}}{2 f^2 h^2}$$

Επομένως αντικαθιστώντας τη  $P_e$  από την υπόθεση και μετά από στοιχειώδεις πράξεις καταλήγουμε:

$$2 f^2 r \alpha + h^2 q + r - f^2 r = (2 \alpha - 1) f^2 r + h^2 q + r = \sqrt{(h^2 q + r - f^2 r)^2 + 4 f^2 h^2 q r} \quad (3.20)$$

Επειδή  $2\alpha - 1$  είναι θετικός αριθμός είναι φανερό ότι  $(2\alpha - 1)f^2r + h^2q + r > 0$ ,  
το οποίο μας επιτρέπει να γράψουμε στην (3.20)

$$(2f^2r\alpha + h^2q + r - rf^2)^2 = (h^2q + r - f^2r)^2 + 4f^2h^2qr.$$

Μετά από στοιχειώδεις υπολογισμούς στην παραπάνω ισότητα καταλήγουμε

$$4f^2r(f^2r(\alpha^2 - \alpha) + h^2q(a-1) + \alpha r) = 0. \quad (3.21)$$

Επειδή,  $r > 0$ ,  $\alpha^2 - \alpha \neq 0$ , από την υπόθεση του Λήμματος 3.1 ισχύει  $r - \alpha q h^2 > 0$ ,  
και από την (3.5) ισχύει  $\alpha^2 = 1 - \alpha$ , η ισότητα στην (3.21) γράφεται

$$f^2 = \frac{h^2q(1-\alpha) - \alpha r}{r(\alpha^2 - \alpha)} = \frac{h^2q\alpha^2 - \alpha r}{r\alpha(\alpha - 1)} = \frac{r - \alpha h^2q}{\alpha^2 r}.$$

Προφανώς από τις υποθέσεις του Λήμματος 3.1 είναι φανερό ότι  $f^2 = \frac{r - \alpha h^2q}{\alpha^2 r}$

είναι θετική ποσότητα.

(ii)  $\Rightarrow$  (i)

Αντικαθιστώντας στη συνδιακύμανσης λάθους εκτίμησης στη μόνιμη κατάσταση τη  
θετική ποσότητα  $f^2$ , από την υπόθεση (3.19), και χρησιμοποιώντας τις (3.4) και  
(3.5), έχουμε:

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{-(h^2q + r - r\frac{r - \alpha h^2q}{r\alpha^2}) + \sqrt{(qh^2 + r - r\frac{r - \alpha h^2q}{r\alpha^2})^2 + 4qr\frac{r - \alpha h^2q}{r\alpha^2}h^2}}{2h^2\frac{r - \alpha h^2q}{r\alpha^2}} \\ &= \frac{-\frac{\alpha^2 h^2q + \alpha^2 r - r + \alpha h^2q}{\alpha^2} + \sqrt{\frac{1}{\alpha^4}(\alpha^2 h^2q + \alpha^2 r - r + \alpha h^2q)^2 + \frac{4h^2q(r - \alpha h^2q)}{\alpha^2}}}{\frac{2h^2(r - \alpha q h^2)}{r\alpha^2}} \\ &= \frac{-\frac{(\alpha^2 + \alpha)h^2q + (\alpha^2 - 1)r}{\alpha^2} + \sqrt{\frac{((\alpha^2 + \alpha)h^2q + (\alpha^2 - 1)r)^2 + 4\alpha^2 h^2q(r - \alpha q h^2)}{\alpha^4}}}{\frac{2h^2(r - \alpha q h^2)}{r\alpha^2}} \\ &= \frac{-[(\alpha^2 + \alpha)h^2q + (\alpha^2 - 1)r] + \sqrt{((\alpha^2 + \alpha)h^2q + (\alpha^2 - 1)r)^2 + 4\alpha^2 h^2q(r - \alpha q h^2)}}{\frac{2}{r}h^2(r - \alpha q h^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{r}{2h^2} \frac{-h^2q + \alpha r + \sqrt{h^4q^2 - 2\alpha h^2qr + \alpha^2r^2 + 4\alpha^2h^2qr - 4\alpha^3h^4q^2}}{r - \alpha qh^2} \\
&= \frac{r}{2h^2} \frac{-h^2q + \alpha r + \sqrt{(1-4\alpha^3)h^4q^2 + (4\alpha-2)h^2q\alpha r + \alpha^2r^2}}{r - \alpha qh^2} \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας την  $\alpha^2 = 1 - \alpha$  από την (3.5) με την  $\alpha^3 = 2\alpha - 1$  από την (3.6), μπορούμε να αποδείξουμε ότι ισχύει

$$1 - 4\alpha^3 = (2\alpha - 1)^2. \tag{3.23}$$

Αντικαθιστώντας την (3.23) στην (3.22) έχουμε

$$\begin{aligned}
P_e &= \frac{r}{2h^2} \frac{-h^2q + \alpha r + \sqrt{(2\alpha-1)^2(h^2q)^2 + 2(2\alpha-1)(h^2q)(\alpha r) + (\alpha r)^2}}{r - \alpha qh^2} \\
&= \frac{r}{2h^2} \frac{-h^2q + \alpha r + \sqrt{((2\alpha-1)h^2q + \alpha r)^2}}{r - \alpha qh^2} = \frac{r}{2h^2} \frac{-h^2q + \alpha r + (2\alpha-1)h^2q + \alpha r}{r - \alpha qh^2} \\
&= \frac{r}{h^2} \frac{(2\alpha-2)h^2q + 2\alpha r}{2(r - \alpha qh^2)} = \frac{-\alpha^2h^2qr + \alpha r^2}{h^2(r - \alpha qh^2)} = \frac{\alpha r(r - \alpha h^2q)}{h^2(r - \alpha h^2q)}.
\end{aligned}$$

Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι  $r - \alpha h^2q > 0$ , οπότε έχουμε αποδείξει τη ζητούμενη σχέση  $P_e = \frac{\alpha r}{h^2}$ , ολοκληρώνοντας την απόδειξη.  $\square$

Χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία των φίλτρων Kalman και Λαϊνιώτη [4] και τη συνδιακύμανση λάθους εκτίμησης στη μόνιμη κατάσταση του φίλτρου Λαϊνιώτη, μπορούν να υπολογιστούν οι συνδιακυμάνσεις λάθους πρόβλεψης και λείανσης στη μόνιμη κατάσταση από τις σχέσεις (1.52) και (1.56), αποτέλεσμα που διατυπώνεται στην επόμενη πρόταση.

### Πρόταση 3.3

Έστω  $q, r > 0$  και  $h$  πραγματικός αριθμός με  $\alpha qh^2 < r$  και  $f \in \square$  έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση στην (3.19). Τότε, οι πίνακες συνδιακύμανσης λάθους πρόβλεψης  $P_p$  και λείανσης  $P_s$  στη μόνιμη κατάσταση δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$P_p = \frac{r}{\alpha h^2} \tag{3.24}$$

$$P_s = \frac{\alpha^3(h^2q+r)}{h^2} \quad (3.25)$$

### Απόδειξη

Αντικαθιστώντας τη  $P_e$  από την (3.18) και την  $f^2$  από την (3.19) στη συνδιακύμανση λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση, που δίνεται στην (1.57), προκύπτει:

$$P_p = f^2 P_e + q = f^2 \frac{\alpha r}{h^2} + q = \frac{r - \alpha q h^2}{\alpha h^2} + q = \frac{r - \alpha q h^2 + \alpha q h^2}{\alpha h^2}.$$

Στη συνέχεια αντικαθιστώντας την  $P_e$  από την (3.18) και την  $f^2$  από την (3.19) στη συνδιακύμανση λάθους λείανσης στη μόνιμη κατάσταση, που δίνεται στην (1.52), προκύπτει

$$\begin{aligned} P_s &= \frac{(qh^2+r)P_e}{f^2 h^2 P_e + qh^2 + r} = \frac{(qh^2+r)\frac{r}{h^2}\alpha}{f^2 h^2 \frac{r}{h^2}\alpha + qh^2 + r} \\ &= \frac{\alpha r(qh^2+r)}{h^2(\alpha r f^2 + qh^2 + r)} = \frac{\alpha r(qh^2+r)}{h^2\left(\alpha r \frac{r - \alpha q h^2}{r\alpha^2} + qh^2 + r\right)} \\ &= \frac{\alpha^2 r(qh^2+r)}{h^2(r + \alpha r)} = \frac{\alpha^2 r(qh^2+r)}{(1+\alpha)h^2} = \frac{\alpha^3(qh^2+r)}{h^2}, \end{aligned}$$

επειδή από την (3.3) ισχύει  $\frac{1}{1+\alpha} = \alpha$ . Έτσι ολοκληρώνεται και η απόδειξη της (3.25). □

Προσπαθώντας να βρούμε και άλλη σχέση αναλογίας της χρυσής τομής με τη συνδιακύμανση λάθους εκτίμησης τη μόνιμη κατάσταση εκτός από αυτήν που περιγράφεται στην Πρόταση 3.2, χρειάζεται να αναζητήσουμε συνθήκες ώστε η ποσότητα  $\frac{qh - \alpha q h^2 - \alpha r}{\alpha r(\alpha h - 1)}$  να είναι θετική. Τότε καταλήγουμε στην διατύπωση του ακόλουθου λήμματος.

### Λήμμα 3.2 [12, Proposition 2]

Έστω

$$f^2 = \frac{qh - \alpha q h^2 - \alpha r}{\alpha r(\alpha h - 1)} \quad (3.26)$$

για κατάλληλες τιμές των παραμέτρων  $q, r, h$  έτσι ώστε να ισχύει<sup>13</sup>

$$\frac{q}{r} < \frac{\alpha}{h(1-\alpha h)} \quad (3.27)$$

Τότε, η συνδιακύμανση λάθους πρόβλεψης στη μόνιμη κατάσταση δίνεται από

$$P_p = \frac{\alpha r}{h(1-\alpha h)} \quad (3.28)$$

### Πρόταση 3.4

Έστω το βαθμωτό φίλτρο Λαϊνιώτη (1.29)-(1.37) με τις θετικές πραγματικές παράμετρους  $q, r, h$  να επαληθεύουν την (3.27), όταν  $h \in \left[\frac{1+\alpha}{2}, 1+\alpha\right)$ . Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

$$(i) P_e = \frac{r}{h} \alpha \quad (3.29)$$

$$(ii) f^2 = \frac{\alpha q h^2 - q h + \alpha r}{\alpha r(1-\alpha h)} \quad (3.30)$$

### Απόδειξη

(i)  $\Rightarrow$  (ii)

Αντικαθιστώντας στην (1.53) της Πρότασης 1.1 τη συνδιακύμανση λάθους εκτίμησης στη μόνιμη κατάσταση  $P_e$  από την υπόθεση και μετά από πράξεις έχουμε:

$$P_e = \frac{-(qh^2 + r - rf^2) + \sqrt{(qh^2 + rf^2)^2 + 4qrf^2h^2}}{2f^2h^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha r}{h} = \frac{-(qh^2 + r - rf^2) + \sqrt{(qh^2 + r - rf^2)^2 + 4qrf^2h^2}}{2f^2h^2} \Rightarrow$$

$$2\alpha r f^2 h + qh^2 + r - rf^2 = (2\alpha h - 1)rf^2 + qh^2 + r = \sqrt{(qh^2 + r - rf^2)^2 + 4qrf^2h^2} \quad (3.31)$$

Επειδή  $\frac{1}{2\alpha} \geq \frac{1+\alpha}{2}$ , χρησιμοποιώντας την υπόθεση  $h > \frac{1}{2\alpha}$  είναι φανερό ότι

$(2\alpha h - 1)rf^2 + qh^2 + r > 0$ , το οποίο μας επιτρέπει να γράψουμε στην (3.31)

$$\left[ (2\alpha h - 1)rf^2 + qh^2 + r \right]^2 = (qh^2 + r - rf^2)^2 + 4qrf^2h^2 \Rightarrow$$

$$(2\alpha h - 1)^2 r^2 f^4 + q^2 h^4 + r^2 + 2(2\alpha h - 1)rf^2 qh^2 + 2(2\alpha h - 1)r^2 f^2 + 2qrh^2$$

$$= q^2 h^4 + r^2 + r^2 f^4 + 2qrh^2 - 2qrf^2 h^2 - 2r^2 f^2 + 4qrf^2 h^2 \Rightarrow$$

<sup>13</sup> Η σχέση (3.27) προκύπτει ως περιορισμός για την αναγκαιότητα  $f^2 > 0$  στη (3.26)

$$\begin{aligned}
& (4\alpha^2 h^2 - 4\alpha h + 1)r^2 f^4 + 2(2\alpha h - 1)qrf^2 h^2 + 2(2\alpha h - 1)r^2 f^2 = \\
& \quad + r^2 f^4 - 2r^2 f^2 + 2qrf^2 h^2 \Rightarrow \\
& (4\alpha^2 h^2 - 4\alpha h)r^2 f^4 + 4\alpha qrf^2 h^3 - 2r^2 qf^2 h^2 + 4\alpha r^2 h f^2 - 2r^2 f^2 \\
& \quad = -2r^2 f^2 + 2qrf^2 h^2 \Rightarrow \\
& 4(\alpha^2 h - \alpha)r^2 f^4 h + 4\alpha qrf^2 h^3 + 4\alpha r^2 f^2 h = 4qrf^2 h^2 \tag{3.32}
\end{aligned}$$

Επειδή από την υπόθεση της Πρότασης έχουμε  $r > 0$  και  $\frac{1+\alpha}{2} \leq h < 1+\alpha$ , η ισότητα στην (3.32) γράφεται:

$$(\alpha^2 h - \alpha)rf^2 + \alpha qh^2 + \alpha r = qh \Rightarrow f^2 = \frac{\alpha qh^2 + \alpha r - qh}{r\alpha(1 - \alpha h)}.$$

Προφανώς από τις υποθέσεις στην (3.27) και  $h < 1+\alpha \Rightarrow \alpha h < 1$ , η  $f^2$  είναι θετικός αριθμός.

**(ii)  $\Rightarrow$  (i)**

Αντικαθιστώντας την (3.30) και την (3.28) στην (1.57) προκύπτει

$$\begin{aligned}
P_p & = f^2 P_e + q \Rightarrow \\
\frac{\alpha r}{h(1 - \alpha h)} & = \frac{\alpha qh^2 + \alpha r - qh}{\alpha r(1 - \alpha h)} P_e + q \Rightarrow \\
\frac{\alpha r}{h(1 - \alpha h)} - q & = \frac{\alpha qh^2 + \alpha r - qh}{\alpha r(1 - \alpha h)} P_e \Rightarrow \\
\frac{\alpha r - qh + \alpha qh^2}{h(1 - \alpha h)} & = \frac{\alpha qh^2 + \alpha r - qh}{\alpha r(1 - \alpha h)} P_e \Rightarrow \\
\frac{1}{h} & = \frac{1}{\alpha r} P_e,
\end{aligned}$$

απ όπου προκύπτει άμεσα η (3.29). □



## Συμπεράσματα

Η εργασία αυτή μελετά τις σχέσεις του χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Λαϊνιώτη είτε με τους όρους τις ακολουθίας Fibonacci είτε με τη χρυσή τομή. Πιο συγκεκριμένα η σχέση της ακολουθίας Fibonacci στο φίλτρο Λαϊνιώτη επεκτείνεται και σε σύστημα  $n \times n$ . Επιπλέον χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία των φίλτρων Kalman και Λαϊνιώτη διατυπώνονται καινούριες προτάσεις για τη σχέση της μόνιμης κατάστασης φίλτρου Λαϊνιώτη και της χρυσής τομής.

Στο Κεφάλαιο 2 για συγκεκριμένες τιμές των  $n \times n$  πινάκων-παραμέτρων του χρονικά αμετάβλητου φίλτρου Λαϊνιώτη διατυπώθηκαν δύο τύποι: ο αναδρομικός και ο κλειστός. Έπειτα πραγματοποιήθηκε υπολογιστικά η σύγκριση του κλειστού με τον αναδρομικού τύπο του φίλτρου Λαϊνιώτη, τα αποτελέσματα της οποίας αναδεικνύουν την κλειστή μορφή ως πάντα την καλύτερη λύση για την εύρεση της  $k$ -οστής τιμής της κατάστασης και της συνδιακύμανσης.

Αποδείχθηκε ότι ο κλειστός τύπος του φίλτρου Λαϊνιώτη είναι γινόμενο πινάκων που κάθε παράγοντάς του είναι γραμμικός συνδυασμός του μοναδιαίου πίνακα και του πίνακα των αρχικών τιμών του προβλήματος με συντελεστές συγκεκριμένους όρους από την ακολουθία Fibonacci.

Στο Κεφάλαιο 3, εκμεταλλευόμενοι τη σχέση της ακολουθίας Fibonacci και του φίλτρου Λαϊνιώτη από το Κεφάλαιο 2, προσδιορίσαμε τη σχέση της χρυσής τομής με το φίλτρο Λαϊνιώτη όταν το φίλτρο τείνει στη μόνιμη κατάσταση.





## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

### Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

- [1] Adam M., Assimakis N., Farina A., Fibonacci Sequence and the Time Invariant Kalman and Lainiotis Filters, *Applied Mathematics and Computation, Golden Section*, 3(250), 2015, 817-831.
- [2] Andres N., Philippou G., *Fibonacci Numbers and their Application*, D. Reidel Publishing Company, Holland, 2001.
- [3] Asimov I., Boyer C., *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, Canada 1991.
- [4] Assimakis N., Adam M., Discrete Time Kalman and Lainiotis Filters, *Int. Journal of Math Analysis*, 1(13), 2007, 635-659.
- [5] Assimakis N., Adam M., Steady State Kalman Filter for Periodic Models A New Approach, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 4(5), 2009, 201-218.
- [6] Assimakis N., Adam M., Triantafillou C., Lainiotis filter golden section and Fibonacci sequence, *Signal Processing*, 93, 2013, 721-730.
- [7] Baras J., Lainiotis D., Chandrasekhar Algorithms for Linear Time Varying Distributed Systems, *Information Sciences*, 17, 1979, 153-167.
- [8] Barbosa J., Gomes B., *An Overview on Target Tracking Using Multiple Model*, Dissertation Master, Electrical and Computer Engineering, 2008.
- [9] Benavoli A., Chisci L., Farina A., Fibonacci sequence Golden section Kalman filter and Optimal Control, *Signal Processing*, 89, 2009, 1483-1488.
- [10] Benjamin A., Brown E., *Biscuits of Number Theory*, Mathematical Association of America, 2009.
- [11] Brian O., Aderson J., Moore B., *Optimal Filtering*, Dover Publications INC, Mineola, New York, 2005.
- [12] Capponi A., Farina A., Pilotto C., Expressing Stochastic Filters via Number Sequence, *Signal Processing*, 90, 2010, 2124-2132.
- [13] Corbalan F., *The Golden Ratio The beautiful language of mathematics*, Rba Coleccionables, 2012.
- [14] Dickson L., Divisibility and Primality, *History of the Theory of Numbers*, 1, 1919.
- [15] Donoghue J., State estimation and control of the Fibonacci system, *Signal Processing*, 91, 2011, 1190-1193.
- [16] Flanigan J., Generalize Two-Pile Fibonacci Nim, *Fibonacci Quarterly*, 1978, 459-469.
- [17] Gardner M., *Mathematical Circus*, The Mathematical Association of America, 1992.

- [18] Hoggatt V., Bicknell-Johnson M., Reflections Across two and three Glass Plates, *Fibonacci Quarterly*, 1979, 118-142.
- [19] Horn R., Johnson C., *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1990.
- [20] Kalman R., Emil R., A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, *Transactions of the ASNE Journal of Basic Engineering*, 82, 1960, 35-45.
- [21] Katsikas S., Likothanassis S., Lainiotis D., On the parallel implementations of the linear Kalman and Lainiotis filters and their efficiency, *Signal Processing*, 25, 1991, 289-305.
- [22] Klarner D., Pollack J., Domino tilings of rectangles with fixed width, *Discrete Mathematics*, 32( 1), 1980, 45-52.
- [23] Lainiotis D., Partitioning Fibers, *Information Sciences*, 17, 1979, 177- 193.
- [24] Lainiotis D., Estimation: A Brief Survey, *Information Sciences*, 7, 1974, 191-202.
- [25] Lainiotis D., Katsikas S., Likothanassis S., Optimal Seismic Deconvolution, *Signal Prossesing*, 15, 1983, 375-404.
- [26] Lainiotis D., Papaparaskeva P., A New Class of Efficient Adaptive Nonlinear Filters (ANLF), *IEEE Transactions on Signal Processing*, 46(6), 1998.
- [27] Lainiotis D., Papaparaskeva P., Efficient Algorithms of Clustering Adaptive Nonlinear Filters, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(7), 1999, 1454-1459.
- [28] Lainiotis D., Partitioned Estimation Algorithms, II: Linear Estimation, *Information Sciences*, 7, 1974, 317-340.
- [29] Lesniak A., Danek T., Wojdyla M., Application of Kalman Filter to Noise Reduction in Multichannel Data, *Schedae Informaticae*, 17/18, 2009, 64-73.
- [30] Loria G., *History of Mathematics*, Birkhauser, Berlin, 2002.
- [31] Narain R., Vaishali D., The So-called Fibonacci Numbers in Acient and Medieval India, *Historia Mathematica*, 12, 1985, 229-244.
- [32] Ogilvy, Aderson, *Excursions in Number Theory*, Dover Publications INC New York, 1988.
- [33] Plataniotis K., Katsikas S., Lainiotis D., Venetsanopoulos A., Optimal Seismic Deconvolution: Distributed Algorithms, *IEEE Transactions on Geoscience and remote sensing*, 36(3), 1998, 779-792.
- [34] Posamentier A., Ingmar Lehmann, *The Glorious Golden Ratio*, Prometheus, 2011.
- [35] Sigler L., *Fibonacci's Liber Abaci Leonardo Pisano Book of Calculation*, Springer, 2002.

## Ελληνική Βιβλιογραφία

- [36] Αναγνώστου Κ., *Αλγόριθμοι Διαμελισμού Γραμμικής Εκτίμησης Συγκριτική Υπολογιστική Ανάλυση*, διδακτορική διατριβή, Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών, 1985.
- [37] Ασημάκης Ν., *Αλγόριθμοι για την Επίλυση της Εξίσωσης Riccati*, διδακτορική διατριβή, Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών, 1993.
- [38] Ασημάκης Ν., *Φίλτρα Kalman και Λαινώτη*, Αράκυνθος, Αθήνα, 2009.
- [39] Αφιοντζή Ε., Πορίτσα Σ., *Υλοποίηση landmark based SLAM με Χρήση Kalman και Particle filters*, διπλωματική εργασία, Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, Α.Π.Θ., 2011.
- [40] Γεωργιάκης Ν., *Ταυτόχρονη Κατάρτιση Χάρτη και Εκτίμηση Θέσης Κάμερας με Παράλληλη Αναγνώριση Αντικειμένων και Εισαγωγής τους στον Χάρτη σε Πραγματικό Χρόνο*, διπλωματική εργασία, Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, Α.Π.Θ., 2008.
- [41] Δημητρακόπουλος Χ., *Πρόβλεψη Πρωτεϊνικών Αλληλεπιδράσεων με την Χρήση Αλγορίθμων Υπολογιστικής Νοημοσύνης*, διπλωματική εργασία, Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών, 2010.
- [42] Θεοδώρου Ε., *Επισκόπηση Μεθόδων Εύρεσης Θέσης Ρομπότ ή Ομάδας Ρομπότ σε Αρχικά Άγνωστο ή Γνωστό Περιβάλλον*, μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία, Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης, Πολυτεχνείο Κρήτης, 2003.
- [43] Λάζαρος Μ., *Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου*, μεταπτυχιακή εργασία, Τμήμα Μαθηματικών, Α.Π.Θ., 2012.
- [44] Μπαλής Σ., *Χρυσή τομή Ακολουθία Fibonacci ο αριθμός φ*, *Το φ*, 5, 2008, 67-77.
- [45] Ξουρής Β., *Σύστημα Προσδιορισμού Θέσης με την Χρήση Τεχνικής Στίγματος εξ Αναμετρήσεως*, πτυχιακή εργασία, Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, Ε.Κ.ΠΑ., 2009.
- [46] Παγανιά Δ., *Ανάλυση Σημάτων για τον Υπολογισμό της Φρακτάλ Διάστασης σε Συνδυασμό με  $\max$  Μοντέλα*, μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία, Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής, Πάτρα, 2012.
- [47] Παπαγεωργίου Δ., *Έλεγχος Οπτικής Οδήγησης Ρομποτικού Βραχίονα με Χρήση Φίλτρου Kalman και Φίλτρου Σωματιδίων για Παρακολούθηση Κινούμενου Στόχου*, διπλωματική εργασία, Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών Τομέας Σημάτων Ελέγχου Ρομποτικής, Ε.Κ.ΠΑ., 2011.

- [48] Σπανδάγος Β., *Η Χρυσή τομή στην Αρχαία Ελλάδα*, Αίθρα, 2004.
- [49] Τριανταφύλλου Θ., *Το Φίλτρο Kalman σε Ανομοιόμορφη δειγματοληψία*, διπλωματική εργασία, Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών, Πανεπιστήμιο Πατρών, 2010.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι: ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΛΑΪΝΙΩΤΗΣ

Καθηγητής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών ο Δημήτριος Λαϊνιώτης (1936 - 2006) ανέπτυξε το ομώνυμο φίλτρο. Αυτό το multi-model φίλτρο, που φέρει το όνομά του, είναι μια ακριβής πραγματοποίηση του βέλτιστου εκτιμητή χρήσης για τα γραμμικά gaussian πρότυπα. Ο καθηγητής Λαϊνιώτης ήταν ο υπεύθυνος για την ανάπτυξη και καινοτόμος της multi-model θεωρίας και της τεχνολογίας που απορρέει και είναι μέγιστης επιστημονικής σημασίας και βρίσκει εφαρμογή σε διάφορους τομείς.

Η multi-model μεθοδολογία αποτελεί ένα ισχυρό πλαίσιο ενοποίησης για την επεξεργασία σήματος (φιλτράρισμα, πρόβλεψη), την απόφαση (ανίχνευση, αναγνώριση σχεδίων) και τον έλεγχο. Ενσωματώνει τις στατιστικές και νευρικές προσεγγίσεις δικτύων, καθώς επίσης και τη συγκεχυμένη καθορισμένη μεθοδολογία. Με βάση την multi-model μεθοδολογία, οι πολύ αποδοτικοί και υπερταχείς αλγόριθμοι έχουν δημιουργηθεί για το φιλτράρισμα σήματος επεξεργασίας (μη γραμμικά, γραμμικά προσαρμοστικού), για την αναγνώριση σχεδίων και τον έλεγχο.

Πηγή: <http://www.epoxi.gr/persons13.htm>



## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ: Η ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ FIBONACCI

### Ιστορία

Η ακολουθία Fibonacci εμφανίζεται στα Μαθηματικά των Ινδών και συγκεκριμένα σε Σανσκριτικές προσωδιές. Στη Σανσκριτική προφορική παράδοση, δινόταν μεγάλη έμφαση κατά πόσο οι μακρόσυρτες συλλαβές «|» συνέπιπταν με τις σύντομες «S» και μετρούσαν τα διαφορετικά πρότυπα των «M» και των «Σ» μέσα σε ένα προκαθορισμένο διάστημα, κάτι που οδήγησε στους αριθμούς Fibonacci, [31].

Η ανάπτυξη της ακολουθίας αποδίδεται στον Pingala (200 π.Χ.), αλλά η πρώτη αναφορά στην ακολουθία γίνεται στα έργα του Virahanka (700 μ.Χ.), τα οποία δεν σώζονται, αλλά μεταφέρθηκαν αυτούσια στα έργα του Gopala (1153 μ.Χ.), [14, 31]. Στη Δύση, οι αριθμοί Fibonacci εμφανίζονται για πρώτη φορά στο βιβλίο Liber Abaci (1202 μ.Χ.) του Fibonacci, όπου αναφέρεται το παρακάτω πρόβλημα: *«Ας υποτεθεί ότι ένα ζευγάρι ενήλικα κουνέλια τοποθετείται μέσα σε περιφραγμένο χώρο για να αναπαραχθεί. Τα κουνέλια αρχίζουν να γεννούν τα νεογνά τους δύο μήνες μετά τη δική τους γένεση παράγοντας ένα ζευγάρι στο τέλος κάθε επόμενου μήνα. Αν δεν πεθάνει κανένα κουνέλι, πόσα ζευγάρια κουνέλια θα βρίσκονται στο τέλος ενός έτους;»* Η απάντηση του προβλήματος βρίσκεται στην ακολουθία 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., που όπως επεσήμανε ο Fibonacci κάθε αριθμός της ακολουθίας είναι το άθροισμα των δύο προηγούμενων όρων της. Έτσι, στο τέλος του 12ου μήνα υπάρχουν 377 ζευγάρια κουνέλια, [35].

Ακόμα στα Μαθηματικά των Ινδών, όπως και στο Liber Abaci, οι πρώτοι όροι της ακολουθίας είναι 1, 1. Μερικοί ερευνητές ορίζουν τους δύο πρώτους όρους ως 0 και 1.

### Leonardo Pisano (και η Ιστορία της Ακολουθίας)

Ο Leonardo Pisano (~1170-1230 μ.Χ.), ευρύτερα γνωστός ως Fibonacci, που σημαίνει «γιος του Bonaccio», γεννήθηκε στην Πίζα, αλλά μεγάλωσε στην πόλη Bugia (σημερινή Bougie) της Αλγερίας, όπου ο πατέρας του ήταν ανώτερος υπάλληλος και τελώνης ενός ιταλικού εμπορικού εργοστασίου. Εκεί ο νεαρός Leonardo πρωτομυήθηκε στα Μαθηματικά από μουσουλμάνους παιδαγωγούς. Γρήγορα επισήμανε την τεράστια υπεροχή του ινδοαραβικού δεκαδικού συστήματος, με το θεσιακό συμβολισμό του και το ειδικό σύμβολο για το 0, έναντι του αδέξιου



ρωμαϊκού συστήματος, που χρησιμοποιούσαν ακόμη και στην ίδια την πατρίδα του [13-14, 17].

Στο έργο του *Liber Abaci* (κατά γράμμα Βιβλίο του Άβακα, αλλά στην πραγματικότητα Εμπορικό Εγχειρίδιο Αριθμητικής και Άλγεβρας), ο Fibonacci υπεραμυνόταν των πλεονεκτημάτων του «ινδοαραβικού» συμβολισμού. Οι συλλογισμοί και η επιχειρηματολογία του έκαναν μικρή εντύπωση στους Ιταλούς εμπόρους της εποχής, αλλά το βιβλίο απέβη τελικά το σημαντικότερο σε επιρροή έργο για την εισαγωγή του «ινδοαραβικού» αριθμητικού συστήματος στη Δύση. Μολονότι το *Liber Abaci* συμπληρώθηκε στην Πίζα το 1202, διασώθηκε μόνο σε μία αναθεωρημένη έκδοση του 1228, αφιερωμένη σε ένα περίφημο αυλικό αστρολόγο της περιόδου εκείνης, [35].

Τον Leonardo Pisano τον θυμούνται σήμερα κυρίως, γιατί ένας Γάλλος αριθμοθεωρητικός ο Eduard Lucas που εξέδωσε ένα κλασικό τετράτομο έργο για τα Ψυχαγωγικά Μαθηματικά, [30], προσάρτησε το όνομα Fibonacci σε μία ακολουθία αριθμών η οποία εμφανίζεται στο τετριμμένο *πρόβλημα των κουνελιών* του *Liber Abaci*, [35]. Ο Fibonacci δεν ασχολήθηκε την ομώνυμή του ακολουθία, ούτε έγινε σοβαρή μελέτη της ως τις αρχές του 19<sup>ου</sup> αι., οπότε, όπως το διατύπωσε κάποτε ένας μαθηματικός: “οι εργασίες για την εν λόγω ακολουθία άρχισαν να πολλαπλασιάζονται σχεδόν τόσο γρήγορα, όσο και τα κουνέλια του Fibonacci”. Ο Lucas διερεύνησε τις ακολουθίες, που σήμερα ονομάζονται «γενικευμένες ακολουθίες Fibonacci». Οι συγκεκριμένες ακολουθίες αρχίζουν με δύο οποιουσδήποτε θετικούς ακέραιους ενώ κάθε όρος ισούται με το άθροισμα των δύο προηγούμενων του. Την απλούστερη ακολουθία αυτού του είδους που είναι η 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13..., την ονόμασε ακολουθία Fibonacci. Η ακολουθία 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18,.. ονομάζεται ακολουθία Lucas, [17]. Η ακολουθία με όρους:  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ , όπου  $c_n = \lambda c_{n-1} + \mu c_{n-2} + \kappa c_{n-3}$ , με  $\lambda, \mu, \kappa$  θετικούς αριθμούς, αποτελεί μία γενίκευση της ακολουθίας Fibonacci και ονομάζεται tribonacci ακολουθία, [17].

## Το τρίγωνο του Pascal

Το τρίγωνο του Pascal (βλ. Εικόνα 1) πρόκειται αναμφίβολα για μία απ’ τις πιο διάσημες αριθμητικές παραστάσεις, όπου ο Γάλλος μαθηματικός το χρησιμοποίησε στην ανακάλυψη του γενικού τύπου της δύναμης του διωνύμου. Αυτή η διάταξη των αριθμών ήταν ήδη γνωστή στους κινέζους επιστήμονες καθώς και στον Πέρση

μαθηματικό Omar Khayyam το 12<sup>ο</sup> αι., [13]. Αν αθροιστούν τα διαγώνια στοιχεία του τριγώνου Pascal προκύπτει η ακολουθία Fibonacci.

**Εικόνα 1**

				1				
			1	1				
		1	2	1				
	1	3	3	1				
	1	4	6	4	1			
	1	5	10	10	5	1		
	1	6	15	20	15	6	1	
	1	7	21	35	35	21	7	1
1	8	28	56	70	56	28	8	1

## Εφαρμογές και παρατηρήσεις

Η ακολουθία Fibonacci συνεπήρε τους μαθηματικούς για αιώνες, με αποτέλεσμα να βρίσκει εφαρμογές σε ποικίλα ερευνητικά πεδία. Από το 1963 η Fibonacci Association εκδίδει το περιοδικό Fibonacci Quarterly όπου δημοσιεύονται άρθρα σχετικά με τις ιδιότητες της ακολουθίας, αριθμούς tribonacci, γενικευμένους αριθμούς Fibonacci κ.α., [16, 18].

Πρόσφατες εφαρμογές σε υπολογιστικούς αλγορίθμους ανανέωσαν το ενδιαφέρον για την ακολουθία Fibonacci, όπως για παράδειγμα, η τεχνική αναζήτησης Fibonacci, η «σωρός Fibonacci» κ.α.. Χρήσιμες εφαρμογές της ακολουθίας Fibonacci συναντώνται επίσης στην ταξινόμηση δεδομένων, στη γένεση τυχαίων αριθμών, στις μεθόδους προσέγγισης μεγίστων και ελαχίστων τιμών πολύπλοκων συναρτήσεων. Επιπλέον υπάρχουν γραφικές παραστάσεις, οι οποίες ονομάζονται «κύβοι Fibonacci», που χρησιμοποιούνται στις παράλληλες διασυνδέσεις και στα κατανεμημένα συστήματα, [2, 17].

Ο David Klarner έδειξε το πλήθος των τρόπων, που οι αριθμοί Fibonacci μπορούν να καλύψουν τα dominos ορθογώνια, [22]. Στη Φυσική ο Leo Moser διατύπωσε ότι η ακολουθία Fibonacci εμπίπτει στις τροχιές κεκλιμένων φωτεινών ακτίνων, [18], ακόμα και στις Πιθανότητες και σε παιχνίδια τύχης, όπως το

Fibonacci-Nim, [16]. Οι αριθμοί Fibonacci εμφανίζονται στη Βιολογία, όπως για παράδειγμα στη διακλάδωση των δέντρων, στη διάταξη των φύλλων σε ένα στέλεχος, στα στόμια του καρπού ενός ανανά, στην ανάπτυξη της αγκινάρας κ.α., [13].

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙΙ: Η ΧΡΥΣΗ ΤΟΜΗ

### Για τη χρυσή τομή

Ανά τους αιώνες οι όροι *χρυσή τομή* και *χρυσός λόγος* γνώρισαν διάφορες ονομασίες: χρυσός αριθμός, ιδανική αναλογία, θεία αναλογία και ούτω καθεξής. Η χρυσή τομή και ο χρυσός λόγος, όροι μεταξύ τους αντίστροφοι, αναφέρονται σχεδόν χωρίς καμία διάκριση ακόμα και από μαθηματικούς, ίσως διότι περιγράφουν αντίστροφα την ίδια αναλογία. Ο χρυσός αυτός αριθμός καλύπτει έναν ευρύτατο χώρο απίστευτων αριθμητικών σχέσεων και ιδιοτήτων, καθώς και συσχετισμών ανάμεσα στη φύση και τους ανθρώπους.

Ο αριθμός του χρυσού λόγου έχει αποτελέσει αντικείμενο μελέτης για πάνω από 2.400 χρόνια και έχει παίξει θεμελιώδη ρόλο στα μαθηματικά και τις επιστήμες, ενώ έχει συσχετιστεί περισσότερο ή λιγότερο άμεσα, με πλήθος φυσικών μεγεθών και φαινομένων. Λόγω της αρχαίας καταβολής του, στη βιβλιογραφία, μέρος της οποίας είναι διαστρεβλωμένο, συναντώνται αντικρουόμενες απόψεις, όσον αναφορά την πορεία του αριθμού αυτού και κάποιοι ιστορικοί αμφισβητούν την *Πυθαγόρεια* προέλευσή του, [3]. Τον τελευταίο αιώνα έχει επικρατήσει να χρησιμοποιείται το «μικρό» γράμμα  $\phi$  για το συμβολισμό του χρυσού λόγου και το κεφαλαίο  $\Phi$  για τη χρυσή τομή, ενώ στη σύγχρονη βιβλιογραφία συνήθως απαντώνται με  $\phi$  και  $\alpha$  αντίστοιχα.

### Ιστορία

Δεν αμφισβητείται ότι τον 6ο π.Χ. αιώνα η αναλογία της χρυσής τομής, που τότε ονόμαζαν ως «ο χωρισμός τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο», ήταν γνωστή στους *Πυθαγόρειους*. Ο άρρητος αυτός αριθμός εικάζεται ότι προσεγγίστηκε πρώτα από τον ίδιο τον *Πυθαγόρα το Σάμιο* (580-572 π.Χ.), ο οποίος χρησιμοποίησε δύο ευθύγραμμα τμήματα (βλ. Εικόνα 2) για την απόδειξη, [30, 48]. Σε άλλες μελέτες επικρατεί η άποψη ότι ο Πυθαγόρας γνώριζε την αναλογία από τους Βαβυλώνιους, κάτι που είναι πιθανό, αλλά όχι βέβαιο, [30]. Πιο πρόσφατες έρευνες αποδίδουν γνώση του χρυσού λόγου στους Αιγυπτίους το 2.580 π.Χ. για τη χρήση της αναλογίας αυτής στην πυραμίδα της Γκίζας, [34].

## Εικόνα 2



Ο *Ευκλείδης* αργότερα (325 - 265 π. Χ.) με τα «*Στοιχεία*», που επηρέασαν καθοριστικά την πρόοδο των παγκόσμιων μαθηματικών σε όλα τα επίπεδα, υπήρξε ο οργανωτής που συστηματοποίησε και έθεσε σε στέρεες θεωρητικές βάσεις τα συμπεράσματα γύρω από τη χρυσή τομή. Από το Ευκλείδειο κείμενο αντλούνται σήμερα οι πρώτες γραπτές πηγές σχετικά με τον αριθμό φ, όπως καταγράφονται στο βιβλίο του «*Στοιχεία*», όπου ανασυντάχτηκαν οι αποδείξεις των θεωρημάτων σε σύντομους αυστηρούς όρους, [30, 48].

Είναι ευρέως γνωστό πως τα «*Στοιχεία*» του Ευκλείδη δεν γράφτηκαν εξ ολοκλήρου από τον ίδιο. Ορισμένοι ιστορικοί αποδίδουν τη συγγραφή του ορισμού, που σχετίζεται με το χρυσό λόγο, καθώς και άλλες δύο προτάσεις των «*Στοιχείων*» στον *Εύδοξο τον Κνίδιο* (408-355 π.Χ., Ακαδημία του Πλάτωνα). Γι' αυτό υποστηρίζουν ότι ο Εύδοξος είναι εκείνος που ανακάλυψε το πρόβλημα της χρυσής τομής, [34]. Σε κάθε περίπτωση στο βιβλίο VI των «*Στοιχείων*» ως τρίτος ορισμός εμφανίζεται το κείμενο από το οποίο ξεκίνησαν όλα: «*Μια ευθεία λέγεται ότι έχει τμηθεί σε άκρο και μέσο λόγο, όταν, όπως έχει ολόκληρη ευθεία προς το μεγαλύτερο τμήμα, έχει το μεγαλύτερο τμήμα προς το μικρότερο*», και όπως αναφέρεται, [44] «*Το όλο είναι του τμήματος ότι το όλο για το υπόλοιπο*», [44]. Αυτός ο άκρος και μέσος λόγος που παρουσιάζεται είναι ο αριθμός που αργότερα θα ονομαστεί χρυσός και στον οποίο το 1509 ο *Luca Pacholi* θα αφιερώσει μία ολόκληρη πραγματεία δίνοντάς της το όνομα ***Θεία Αναλογία***.

Οι αρχαίοι Έλληνες ήταν μάλλον οι πρώτοι που ερεύνησαν τον αριθμό φ, όμως έκτοτε οι έρευνες δεν σταμάτησαν ποτέ. Πολλοί σπουδαίοι μαθηματικοί και επιστήμονες ασχολήθηκαν με τον αριθμό φ από τον Μεσαίωνα μέχρι και σήμερα. Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο αντίστροφος του χρυσού λόγου. Η πρώτη γνωστή προσέγγιση της χρυσής τομής από δεκαδικό κλάσμα γίνεται από τον *Michael Maestlin* το 1597. Σταθμός στην ιστορία της χρυσής τομής υπήρξε η παρατήρηση του *Johannes Kepler* (1571–1630), Γερμανού αστρονόμου, ότι η αναλογία συνεχόμενων αριθμών Fibonacci συγκλίνει και κατέληξε ότι το όριο του λόγου δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας τείνει στη χρυσή αναλογία φ.

Το σύμβολο  $\Phi$ , με το οποίο είναι σήμερα γνωστός ο χρυσός αριθμός, δόθηκε μεταγενέστερα στις αρχές του 20ού αιώνα, όταν ο Αμερικανός μαθηματικός *Mark Bar* πρότεινε την σύνδεση του αριθμού με το Φειδία, αρχιτέκτονα του Παρθενώνα, και δανείστηκε το αρχικό του ονόματός του.

## Εφαρμογές και ιδιότητες

Υπάρχουν στα Μαθηματικά κάποιες γεωμετρικές σχέσεις κάποιες ακολουθίες και κάποιοι αριθμοί που ξεκινούν από διαφορετικές αφετηρίες, από διαφορετικούς κλάδους των Μαθηματικών και φτάνουν στο ίδιο αποτέλεσμα. Το αποτέλεσμα αυτό μάλιστα μπορεί να μην είναι μόνο ένα μαθηματικό συμπέρασμα, αλλά να έχει αντίκρισμα στη φύση, στην τέχνη, στη φιλοσοφία, να έχει ιδιαίτερη ομορφιά και να είναι αισθητικό κριτήριο στις τέχνες και τα γράμματα. Στην αναπάντεχη ιστορία των Μαθηματικών ο χρυσός αριθμός έσμιξε αιώνες αργότερα με κλάσματα που προέκυψαν από την ακολουθία Fibonacci. Έτσι όπως παρατήρησε ο Johannes Kepler (βλ. Παράγραφος 3.1.1) η πιο αξιοθαύμαστη ιδιότητα της ακολουθίας Fibonacci προκύπτει, εάν κανείς διαιρέσει τον κάθε αριθμό της σειράς με τον αμέσως επόμενό του, οπότε το πηλίκο της διαίρεσης προσεγγίζει σταδιακά όλο και περισσότερο τη χρυσή τομή, κάτι που αναφέρθηκε στην παρούσα πτυχιακή στην Ενότητα 3.1

Η χρυσή τομή βρίσκει εφαρμογές όχι μόνο στα Μαθηματικά, αλλά και στη Βιολογία, στην Ιατρική και στο Χρηματιστήριο, ακόμη και στα κλαστικά αντικείμενα ή fractal, [2, 34], πρόσφατες αφίξεις στο χώρο της επιστήμης, τα οποία διαθέτουν ιδιότητες που τα συνδέουν με το χρυσό αριθμό. Επίσης λόγω της άμεσης σύνδεσης του με τους Fibonacci, ο αριθμός αυτός τείνει να έχει εφαρμογές εκεί που εμφανίζεται εφαρμογές η ακολουθία Fibonacci και αντίστροφα (βλ. Παράγραφο 2.1.2). Οι αριθμοί  $\varphi$  και  $\alpha$  απαντώνται στη Γεωμετρία σε διάφορα γεωμετρικά σχήματα, όπως το χρυσό ορθογώνιο, διάφορα χρυσά τρίγωνα, το κανονικό εγγεγραμμένο πολύγωνο η χρυσή υπερβολή, η χρυσή έλλειψη, η χρυσή σπείρα κ.α. τα οποία μπορούν να σχεδιαστούν με κανόνα και διαβήτη και παρουσιάζουν πλήθος ιδιοτήτων γύρω από τη χρυσή τομή και τον αντίστροφό της αριθμό, [44].

Αυτό που όμως προκαλεί κατάπληξη είναι η σχέση του θείου αριθμού με τόσο πολύπλοκες σημαντικές αλλά και αμφιλεγόμενες έννοιες, όπως είναι η ομορφιά και η τελειότητα. Η χρυσή τομή εμφανίζεται ανά τους αιώνες στις τέχνες, όπως στη ζωγραφική, τη γλυπτική και την αρχιτεκτονική από τον Leonardo da Vinci και τον

Michelangelo μέχρι το Φειδία και τον Le Corbusier. Αν απομακρύνουμε το βλέμμα μας από τα ανθρώπινα έργα και το στρέψουμε στη φύση που μας περιβάλλει, θα συναντήσουμε και εκεί τη χρυσή αναλογία. Συγκεκριμένα η εξέλιξη πολλών έμβιων όντων ακολουθεί τα ίχνη της, όπως φαίνεται από τις αναλογίες του ανθρώπινου σώματος, τη φυλλοταξία, το σχήμα του ναυτίλου κ.ά.

## ΛΕΞΙΚΟ ΑΓΓΛΙΚΩΝ-ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΟΡΩΝ

---

covariance	συνδιακύμανση
estimation	εκτίμηση
estimation error	σφάλμα εκτίμησης
Estimation error covariance	συνδιακύμανση λάθους εκτίμησης
estimation theory	θεωρία εκτίμησης
Fibonacci sequence	ακολουθία Fibonacci
filtering	φιλτράρισμα ημετέρου χρόνου
gaussian distribution	κανονική κατανομή
golden ratio	χρυσός λόγος
golden section	χρυσή τομή
Kalman filter	φίλτρο Kalman
Lainiotis filter	φίλτρο Λαϊνιώτη
mean square error	μέσο τετραγωνικό σφάλμα
measurement	μέτρηση
optimal filter	βέλτιστο φίλτρο
prediction	πρόβλεψη
random walk system	τυχαίος περίπατος
Riccati equation	εξίσωση Riccati
scalar system	βαθμωτό σύστημα
smoothing	λείανση
state	κατάσταση
steady state	μόνιμη κατάσταση
variance	διακύμανση

---





