

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Θέμα: «Νέα προσεγγιστική μέθοδος για την επίλυση μη γραμμικών προβλημάτων συνοριακών τιμών δύο σημείων και εφαρμογές της στη Μηχανική των Στερεών»**

**Επόπτης Καθηγητής: Δ. Σοφιανόπουλος  
Δρ. Πολ. Μηχανικός**

**Επιμέλεια: Σ. Γούσιου  
Α. Μαυρακάνα**

**Βόλος 2003**



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ**  
**ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 2524/1

Ημερ. Εισ.: 10-03-2004

Δωρεά:

Ταξιδετικός Κωδικός: ΠΤ ΠΜ

2003

ΓΟΥ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000072565

## Περιεχόμενα

σελίδα

<u>Εισαγωγή – Σκοπός και Αντικείμενο της Διπλωματικής Εργασίας</u>	i
<u>Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup></u> : Προβλήματα συνοριακών τιμών δύο σημείων: Συνοπτική αναφορά – αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης και ιδιαίζουσες περιπτώσεις	1
1.1. Μαθηματικές έννοιες και ορισμοί	1
1.2. Ύπαρξη λύσης και μοναδικότητα	2
1.3. Κυριότερες Αριθμητικές Μέθοδοι Επίλυσης ΜΓΠΣΤ	4
1.3.1. Μέθοδοι αρχικών τιμών (Στόχευσης – Shooting)	4
1.3.2. Μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών (finite difference)	5
1.3.3. Μέθοδοι ολοκληρωτικών εξισώσεων (integral equation)	7
1.3.4. Μέθοδοι προσέγγισης συναρτησιακού χώρου (function space approximation)	8
1.4. Γενικευμένα προβλήματα ιδιοτιμών	9
1.5. Προβλήματα συνοριακών τιμών δύο σημείων με ανωμαλία (singular)	11
<u>Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup></u> : Γενικά χαρακτηριστικά και περιγραφή της προτεινόμενης μεθόδου	12
2.1. Ιστορικό και τρέχουσες εξελίξεις : Αριθμητική ανάλυση και Ηλεκτρονικοί Υπολογιστές	12
2.2. Προσεγγιστικές συναρτήσεις και παρεμβολή (interpolation)	14
2.3. Διανύσματα και μητρώα	15
2.4. Αριθμητικός υπολογισμός ριζών εξισώσεων	16
2.5. Αριθμητική ολοκλήρωση διαφορικών εξισώσεων	16
2.6. Αναλυτική Περιγραφή της Μεθόδου	17
<u>Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup></u> : Εφαρμογές της προτεινόμενης μεθόδου	23
3.1. Προβλήματα ου επιδέχονται ακριβείς (αναλυτικές) λύσεις	23
3.2. Λυγισμός ράβδων υποκειμένων σε μεγάλες μετατοπίσεις	29
3.3. Ακριβής μεταλυγισμική συμπεριφορά συνεχούς ελαστικού μη συντηρητικού συστήματος	36
<u>Κεφάλαιο 4<sup>ο</sup></u> : Νέα Ευρήματα – Συμπεράσματα	42
<u>Βιβλιογραφία</u>	43

## Εισαγωγή – Σκοπός και Αντικείμενο

### της Διπλωματικής Εργασίας

Η παρούσα Διπλωματική εργασία πραγματεύεται μια νέα αριθμητική μέθοδο επίλυσης *μη γραμμικών προβλημάτων συνοριακών τιμών δύο σημείων*, δίδοντας ιδιαίτερη έμφαση σε εφαρμογές της Μηχανικής των Στερεών και ιδία της Επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού.

Αναλυτικότερα, κατ' αρχή παρατίθεται στο 1<sup>ο</sup> Κεφάλαιο του πονήματος συνοπτική αναφορά στα ως άνω προβλήματα και περιγράφονται τα βασικότερα χαρακτηριστικά και σημεία των πλέον διαδεδομένων μεθόδων αριθμητικής επίλυσης αυτών.

Στη συνέχεια, στο 2<sup>ο</sup> Κεφάλαιο δίδονται λεπτομερώς τα γενικά χαρακτηριστικά και μιά εμπειριστατωμένη περιγραφή της προτεινόμενης μεθόδου, η οποία βασίζεται σε διαδικασίες παρεμβολής μέσω ευρύτατα διαδεδομένου μαθηματικού λογισμικού (Mathematica), καθώς και η λειτουργία και οι δυνατότητες των επί μέρους ενσωματωμένων εντολών – συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται στο γενικό αλγόριθμο.

Η προτεινόμενη μέθοδος εφαρμόζεται κατόπιν στο 3<sup>ο</sup> Κεφάλαιο της παρούσας σε μη γραμμικά προβλήματα συνοριακών τιμών δύο σημείων με αναλυτικές λύσεις, μέσω των οποίων παρουσιάζονται τα πλεονεκτήματα, η ευκολία και η εφαρμοσιμότητα της μεθόδου, ενώ οι δυνατότητες της καταδεικνύονται μέσω εφαρμογών της που αφορούν:

- προβλήματα λυγισμού ράβδων υποκειμένων σε μεγάλες μετατοπίσεις και
- την ακριβή μεταλυγισμική συμπεριφορά ενός συνεχούς ελαστικού μη συντηρητικού συστήματος

Τέλος, στο 4<sup>ο</sup> Κεφάλαιο, εξάγονται τα σπουδαιότερα νέα ευρήματα – συμπεράσματα, όσον αφορά τις δυνατότητες της μεθόδου, τα πλεονεκτήματα της και την ευκολία χρήσης αυτής στην ευρύτερη επιστημονική περιοχή της Μηχανικής.

Τόσον οι συντάκτριες του παρόντος πονήματος όσο και ο Επιβλέπων αυτής οφείλουν να εκφράσουν τις ευχαριστίες τους στον Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών και Στατιστικής του *Arizona State University* κ. **Bruno Welfert** για την ενθάρρυνση και τις πολύτιμες - εύστοχες συστάσεις και παρατηρήσεις του επί του περιεχομένου της όλης εργασίας.

**Κεφάλαιο 1ο :** Προβλήματα συνοριακών τιμών δύο σημείων:  
Συνοπτική αναφορά - αριθμητικές μέθοδοι  
επίλυσης και ιδιαίζουσες περιπτώσεις

**1.1. Μαθηματικές έννοιες και ορισμοί**

Στα προβλήματα συνοριακών τιμών δύο σημείων, για ένα σύνολο πιθανά μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, κάποιες συνοριακές συνθήκες είναι γνωστές για την αρχική τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής, ενώ οι υπόλοιπες είναι ορισμένες για την τελική τιμή της μεταβλητής αυτής.

Υπό μορφή μητρώων-διανυσμάτων, ένα *μη γραμμικό πρόβλημα συνοριακών τιμών δύο σημείων* γράφεται ως εξής<sup>[3,7,10]</sup>:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad x \in [x_0, x_N] \quad (1\alpha)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}(x_0), \mathbf{y}(x_N)) = \boldsymbol{\eta} \quad (1\beta)$$

όπου  $\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta} \in R^m, \mathbf{f} : [t_0, t_N] \times R^m \rightarrow R^m, \mathbf{g} : R^m \times R^m \rightarrow R^m$

με τις  $\mathbf{f}, \mathbf{g}$  μη γραμμικές διαφορίσιμες συναρτήσεις του  $x$ . Αν η  $\mathbf{g}$  είναι γραμμική, οι συνοριακές συνθήκες (1β) μπορούν να εκφραστούν ως

$$B_0 \mathbf{y}(x_0) + B_1 \mathbf{y}(x_N) = \boldsymbol{\eta} \quad (2)$$

$$B_0, B_1 \in R^{m \times m}$$

Τέτοιου είδους προβλήματα εμφανίζονται κατά κόρον σε ένα ευρύ φάσμα επιστημονικών περιοχών, όπως εφαρμοσμένα μαθηματικά, θεωρητική φυσική, μηχανική (τόσο των στερεών όσο και των ρευστών), θεωρία ελέγχου, θεωρία βελτιστοποίησης κλπ.

Συνηθέστερα, η αρχική μορφή τέτοιων προβλημάτων που καλείται κανείς να επιλύσει δίδεται ως μια μη γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση ανώτερης τάξης, που γενικά γράφεται ως<sup>[14,18]</sup>

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)}) \quad (3\alpha)$$

ορισμένη σε ένα δεδομένο διάστημα  $[a, b]$  ( $-\infty < a < b < \infty$ ), που υπόκειται σε συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} L_i(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)}) \Big|_{x=a} &= A_i & i + j &= n \\ R_j(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)}) \Big|_{x=b} &= A_j \end{aligned} \quad (3\beta)$$

Για την επίλυση προβλημάτων του τύπου που παρουσιάζεται στις εξισώσεις (3α,β) και που μετασχηματίζεται εύκολα στη μορφή των (1α,β), (2), έχουν προταθεί και εφαρμόζονται πολλές ημι-αναλυτικές και αριθμητικές μέθοδοι<sup>[3,4,5,7,9,10,13,14,15,18]</sup>, μερικές εκ των οποίων θα αναφερθούν συνοπτικά κατωτέρω, χωρίς μέχρι στιγμής κάποια από αυτές να έχει αποδειχθεί κατάλληλη για όλους τους τύπους μη γραμμικών προβλημάτων συνοριακών τιμών δύο σημείων.

## 1.2. Ύπαρξη λύσης και μοναδικότητα

Η σπουδαιότερη δυσκολία στην επίλυση Μη Γραμμικών Προβλημάτων Συνοριακών τιμών (ΜΓΠΣΤ) έγκειται στο γεγονός ότι δεν είναι εγγυημένη ούτε η μοναδική επιλυσιμότητα\* τους αλλά αν επιδέχονται λύση αυτή δεν είναι γνωστό αν είναι και η μόνη†.

Ένας απλός τρόπος για την επίλυση ΜΓΠΣΤ γενικής μορφής, όπως

$$y' = f(x, y), \quad \tau(y(a), y(b)) = 0, \quad y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T \quad (4)$$

όπου  $f(x, y)$ ,  $\tau(u, v)$  είναι διανύσματα  $n$  συναρτήσεων, είναι να υπολογιστεί ένα διάνυσμα αρχής (*starting vector*)  $s \in R^n$  για το αντίστοιχο πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = s \quad (5)$$

---

\* *unique solvability*

† *uniqueness of solution*

κατά τέτοιο τρόπο ώστε η λύση  $y(x) = y(x; s)$  ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες εκ της (4), δηλαδή ισχύει ότι

$$\tau(y(a; s), y(b; s)) \equiv \tau(s, y(b; s)) = 0$$

Πρέπει συνεπώς να βρεθεί μια λύση  $s = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}^T$  της εξίσωσης

$$F(s) = 0, \quad F(s) := \tau(s, y(b; s)) \quad (6)$$

Αν υπάρχει μια τέτοια λύση, τότε και μόνο τότε, το πρόβλημα της εξίσωσης (4) είναι ακριβώς επιλύσιμο, πράγμα που συμβαίνει υπό πολύ περιορισμένες συνθήκες. Στη συνέχεια παρατίθεται το λεγόμενο **θεώρημα ύπαρξης λύσης** του ΜΓΠΣΤ (4), για την απόδειξη του οποίου κανείς μπορεί να αποτανθεί στη σχετική βιβλιογραφία.

Για το ΜΓΠΣΤ (4) αν οι ακόλουθες υποθέσεις - συνθήκες ικανοποιούνται, τότε το εν λόγω πρόβλημα έχει ακριβώς μια λύση  $y(x)$ .

Υπόθεση 1: Οι συναρτήσεις  $f$  και  $D_y f$  είναι συνεχείς στο

$$S : \left\{ (x, y) \mid a \leq x \leq b, y \in R^n \right\}$$

Υπόθεση 2: Υπάρχει ένα  $K \in C[a, b]$  με  $\|D_y f(x, y)\| \leq K(x)$  για όλα τα  $(x, y) \in S$

Υπόθεση 3: Το μητρώο  $P(u, v) := D_u \tau(u, v) + D_v \tau(u, v)$  δύναται για όλα  $u, v \in R$  να

γραφτεί υπό την μορφή  $P(u, v) = P_0(I + M(u, v))$  με ένα σταθερό μη ανώμαλο μητρώο

$P_0$  και ένα μητρώο  $M = M(u, v)$  και υπάρχουν επίσης δύο σταθερές  $\mu$  και  $m$  τέτοιες

ώστε και  $\|P_0^{-1} D_v \tau(u, v)\| \leq m$  για όλα τα  $u, v \in R^n$

Υπόθεση 4: Υπάρχει ένας αριθμός  $\lambda > 0$  με  $\lambda + \mu < 1$  τέτοιος ώστε

$$\int_a^b K(t) dt \leq \ell n \left( 1 + \frac{\lambda}{m} \right)$$



Οι συνθήκες-υποθέσεις του ως άνω θεωρήματος είναι μόνο ικανές (*sufficient*) και πολύ περιοριστικές. Η συνθήκη (3) για παράδειγμα, ακόμα και για  $n = 2$ , δεν ικανοποιείται ούτε αν υφίστανται απλές συνοριακές συνθήκες, όπως  $y_1(a) = c_1$ ,  $y_1(b) = c_2$ . Παρόλο που μερικές συνθήκες, όπως η (3), ανάλογα με τον τύπο του ΜΓΠΣΤ μπορούν να αποδυναμωθούν, τα αντίστοιχα θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης που ανάλογα διαμορφώνονται, περιέχουν τελικές συνθήκες που σπάνια ικανοποιούνται στη πράξη.

### **1.3. Κυριότερες Αριθμητικές Μέθοδοι Επίλυσης ΜΓΠΣΤ<sup>[5,7,12,14,15]</sup>**

Στην παρούσα υποπαράγραφο θα αναφερθούν συνοπτικά οι αρχές και τα σπουδαιότερα χαρακτηριστικά των πιο δημοφιλών αριθμητικών μεθόδων επίλυσης (Μη Γραμμικών) Προβλημάτων Συνοριακών Τιμών

#### **1.3.1. Μέθοδοι αρχικών τιμών (Στόχευσης-Shooting)**

Σύμφωνα με τα όσα εκτέθηκαν στην §1.2., η εύρεση λύσης της μορφής (6) του αντίστοιχου προβλήματος αρχικών τιμών να επιτευχθεί είτε μέσω της γενικής μεθόδου του Newton

$$S^{(i+1)} = S^{(i)} - DF(S^{(i)})^{-1} \cdot F(S^{(i)}) \quad (7)$$

είτε της τροποποιημένης μεθόδου Newton. Περιγραφικά, επιλέγεται το αρχικό διάνυσμα  $S$ , επιλύεται αριθμητικά το πρόβλημα αρχικών τιμών και υπολογίζεται μια 1<sup>η</sup> προσέγγιση των συνοριακών τιμών στο απομακρυσμένο άκρο  $b$ . Με βάση αυτές διορθώνονται κατά Newton τα στοιχεία του διανύσματος  $S$ , επαναεπιλύεται το πρόβλημα αρχικών τιμών κλπ., έως ότου επιτευχθεί η επιθυμητή σύγκλιση-ακρίβεια (απλή στόχευση).

Αν υφίστανται δυσκολίες στην αριθμητική επίλυση από το ένα άκρο στο άλλο, η ‘στόχευση’ γίνεται και από τα δύο άκρα  $a$  και  $b$  προς ένα ενδιάμεσο σημείο μέχρις

όπου επιτευχθούν οι απαραίτητες συνθήκες συνέχειας της λύσης στο σημείο αυτό (πολλαπλή στόχευση).

Η μέθοδος γενικά συγκλίνει γρήγορα, με την προϋπόθεση ικανοποιητικής αρχικής επιλογής του διανύσματος  $S$ , και απαιτεί την έκφραση του προβλήματος υπό την μορφή των (1α,β) και (2).

Παραλλαγές της μεθόδου στόχευσης, όπως η παράλληλη στόχευση (η χρήση δυναμοσειρών) βασίζονται στις ίδιες εν γένει αρχές.

### 1.3.2. Μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών (finite difference)

Για την συνοπτική περιγραφή αυτών των μεθόδων, ας θεωρήσουμε ένα γενικό σύστημα  $n$  1<sup>ης</sup> τάξης συνήθων διαφορικών εξισώσεων, που σχετίζεται με γραμμικές συνοριακές συνθήκες δύο σημείων, της μορφής

$$\left. \begin{aligned} Ly = y' - f(x,y) = 0 \\ Ay(a) + By(b) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8\alpha,\beta)$$

Εντός του διαστήματος  $[a,b]$  ορίζονται αρχικά τα ακόλουθα σημεία δικτύου (net points)

$$x_j = a + jh, \quad j = 0,1,2,\dots,J, \quad h = \frac{b-a}{J} \quad (9)$$

Η χρήση μη ομοιόμορφων αποστάσεων μεταξύ σημείων του δικτύου δεν δημιουργεί καμία δυσκολία, αλλά η επιλογή ομοιόμορφου δικτύου γίνεται για ευκολία σήμανσης και μόνο. Στη συνέχεια σημαίνονται ως  $n$ -διάστατα διανύσματα  $\mathbf{u}_j$  οι προσεγγίσεις των αντίστοιχων τιμών της λύσης  $y(x_j)$  της εξίσωσης (8) πάνω στα σημεία του δικτύου. Ένα προφανές σύστημα εξισώσεων διαφορών για τον υπολογισμό των προσεγγίσεων αυτών είναι το

$$L_h \mathbf{u}_j \equiv \frac{\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_{j-1}}{h} - f\left(x_{j-\frac{1}{2}}, \frac{\mathbf{u}_j + \mathbf{u}_{j-1}}{2}\right) = 0, \quad j = 0,1,2,\dots,J \quad (10\alpha)$$

ενώ οι συνοριακές συνθήκες λαμβάνουν την μορφή

$$A\mathbf{u}_0 + B\mathbf{u}_J - \alpha = 0 \quad (10\beta)$$

Η επαναληπτική διαδικασία που περιγράφεται από την εξίσωση (10α) είναι γνωστή σαν μέθοδος *κεντρικών διαφορών* (centered difference). Αν ο μη γραμμικός όρος της εξίσωσης (10α) αντικατασταθεί με  $\frac{1}{2}[f(x_j, \mathbf{u}_j) + f(x_{j-1}, \mathbf{u}_{j-1})]$  ο αλγόριθμος που προκύπτει είναι γνωστός ως *τροποποιημένη μέθοδος Euler*.

Οι εξισώσεις (10α,β), που αποτελούνται από  $j+1$  σύνολα των  $n$  εξισώσεων έκαστο, είναι οι εξισώσεις διαφορών, η λύση των οποίων δίνει τις προσεγγίσεις των (8α,β) πάνω στο δίκτυο (9). Ορίζεται κατόπιν ένα διάστημα  $U$  διάστασης  $(J+1)n$  ως εξής:

$$U = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_J \end{pmatrix} \quad (11)$$

οπότε οι εξισώσεις (10α,β) μπορούν να γραφτούν υπό μορφή συστήματος  $n(J+1)$  εξισώσεων

$$\Phi(U) \equiv \begin{pmatrix} Au_0 + Bu_J - \alpha \\ hL_h u_1 \\ \vdots \\ hL_h u_J \end{pmatrix} = 0 \quad (12)$$

Για τα θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης ΜΓΠΣΤ μέσω της μεθόδου αυτής κανείς μπορεί να ανατρέξει στην πλούσια επί του θέματος βιβλιογραφία, όσον αφορά δε την ακρίβεια των αποτελεσμάτων έχει δειχθεί ότι γενικά είναι της τάξης  $O(h^2)$ , δηλαδή

$$|y(x_j) - u_j| = O(h^2) \quad . \quad j = 0, 1, 2, \dots, J \quad (13)$$

Η ακρίβεια αυτή μπορεί να βελτιωθεί εφαρμόζοντας είτε *διόρθωση διαφορών* είτε *παρέκτασης (extrapolation)*. Οι μεν διορθώσεις διαφορών σχετίζονται με τον υπολογισμό μιας συνάρτησης - διανύσματος  $e(x)$ , τέτοιας ώστε η ακριβής λύση  $y(x)$  και η αριθμητική λύση  $u_j$  να σχετίζονται ως εξής

$$y(x_j) = u_j + h^2 e(x_j) + O(h^4), \quad j = 0, 1, 2, \dots, J \quad (14)$$

ενώ με την πιο εύχρηστη  $h \rightarrow 0$  παρέκταση βρίσκουμε

$$\bar{u}_j = \frac{4}{3} u_{2j} \left( \frac{h}{2} \right) - \frac{1}{3} u_j(h) \quad (15)$$

που ικανοποιεί την σχέση

$$|y(x_j) - \bar{u}_j| = O(h^4), \quad j = 0, 1, 2, \dots, J \quad (16)$$

Με τον τρόπο αυτό με δύο υπολογισμούς με βάση τον αλγόριθμο των (10α,β) χρησιμοποιώντας  $h = [b - a]/J$  και  $h = [b - a]/2J$  αντίστοιχα, επιτυγχάνεται προσεγγιστική λύση με ακρίβεια  $O(h^4)$ .

### 1.3.3. Μέθοδοι ολοκληρωτικών εξισώσεων (integral equation)

Οι εν λόγω μέθοδοι βασίζονται στην μετατροπή των ΜΓΠΣΤ σε ολοκληρωτικές εξισώσεις και την μετέπειτα αριθμητική επίλυση αυτών. Η μετατροπή αυτή επιτυγχάνεται μέσω του υπολογισμού των λεγόμενων συναρτήσεων *Green*. Για ένα ΜΓΠΣΤ της μορφής που δίνεται στις εξισώσεις (3α,β), η συνάρτηση *Green*  $g(x, \xi)$  είναι τέτοια ώστε η λύση  $y(x)$  του ΜΓΠΣΤ να ισούται με

$$y(x) = - \int_a^b g(x, \xi) f(\xi, y(\xi), y'(\xi), \dots, y^{(n-1)}(\xi)) d\xi \quad (17)$$

Υπολογίζονται, ανάλογα με το πρόβλημα, η συνάρτηση *Green*  $g(x, \xi)$  και στη συνέχεια επιλύεται αριθμητικά η ολοκληρωτική εξίσωση, με διάφορες μεθόδους. Όπως π.χ. μέσω των τύπων τετραγωνισμού τύπου Gauss (weighted Gaussian type

quadrature formulae) ή μέσω της μεθόδου αρχικής γραμμικοποίησης του *Newton* και άλλων, περιγραφή δε αυτών βρίσκεται στη σχετική βιβλιογραφία. Περαιτέρω αναφορά στις μεθόδους αυτές είναι εκτός σκοπών της παρούσας.

#### 1.3.4. Μέθοδοι προσέγγισης συναρτησιακού χώρου (function space approximation)

Στις μεθόδους αυτές η λύση του ΜΓΠΣΤ προσεγγίζεται μέσω ενός γραμμικού συνδυασμού γραμμικά ανεξάρτητων συναρτήσεων μέσα σε ένα κατάλληλο συναρτησιακό χώρο.

Θεωρούμε την πιο γενική περίπτωση ΜΓΠΣΤ της μορφής

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}; \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\sigma}) \quad , \quad \alpha < x < b \quad (18\alpha)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b); \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (18\beta)$$

Στις παραπάνω συναρτήσεις  $\mathbf{y}(x)$  και  $\mathbf{f}$  είναι διανύσματα διάστασης  $n$ ,  $\boldsymbol{\lambda}$  διάνυσμα διάστασης  $m$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  διάνυσμα διάστασης  $q$  και  $\mathbf{g}$  διάνυσμα διάστασης  $n+m$ . Για κάποια δεδομένη τιμή της παραμέτρου  $\sigma$  αναζητούμε μία τιμή της «ιδιοτιμής (eigenvalue)»  $\lambda$  και μία συνάρτηση  $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{y}(t; \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\sigma})$  που να ικανοποιούν τις (18α) και (18β). Πρόκειται για το γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών που θα εξετασθεί πιο διεξοδικά στη συνέχεια. Σε ειδικές περιπτώσεις, εφόσον δεν υπάρχει το  $\lambda$ , τότε  $m=0$  και η παράμετρος  $\boldsymbol{\sigma}$  μπορεί να μην εμφανίζεται.

Υπάρχουν τρεις ευρέως αποδεκτοί τύποι μεθόδων προσέγγισης συναρτησιακού χώρου για τα ως άνω προβλήματα: η μέθοδος *Galerkin*, η μέθοδος *επανατοποθέτησης (collocation)* και η γενικευμένη μέθοδος *Ritz*. Για την κατανόηση των αρχών και του τρόπου λειτουργίας των μεθόδων αυτών απαιτούνται ιδιαίτερες γνώσεις Μαθηματικών όπως χώροι Hilbert και Banach, πολυώνυμα Chebyshev ή Legendre κλπ, γεγονός που τις καθιστά εξεζητημένες. Προς τούτο δεν θα απασχολήσουν περαιτέρω το περιεχόμενο της παρούσας.

#### 1.4. Γενικευμένα προβλήματα ιδιοτιμών

Πρόκειται για μη γραμμικά (γενικώς) προβλήματα συνοριακών τιμών (συνηθέστατα δύο σημείων), τα οποία περιέχουν δύο τύπους παραμέτρων (ακριβέστερα συνόλων παραμέτρων). Το πρώτο σύνολο είναι το διάνυσμα  $\lambda$  διάστασης  $m$ :  $\lambda \equiv (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)^T$  των ιδιοτιμών, οι οποίες πρέπει να υπολογιστούν έτσι ώστε το πρόβλημα συνοριακών τιμών να έχει λύση (τετριμμένη ή μη σε περίπτωση μη γραμμικού προβλήματος). Το δεύτερο σύνολο παραμέτρων  $\sigma \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q)^T$ , διάνυσμα διάστασης  $q$ , αντιπροσωπεύει δεδομένα από τα οποία εξαρτώνται τόσο οι λύσεις όσο και οι ιδιοτιμές.

Το πρόβλημα συνοριακών τιμών λαμβάνει συνεπώς τη μορφή

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}; \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\sigma}) \quad , \quad \alpha < x < b \quad (19\alpha)$$

$$E\mathbf{y}(a) + F\mathbf{y}(b) = \boldsymbol{\gamma} \quad (19\beta)$$

όπου  $\mathbf{y}, \mathbf{f}$  :  $n$ -διανύσματα,  $E$  και  $F$  μητρώα με  $(m+n)$  γραμμές και  $n$  στήλες και  $\boldsymbol{\gamma}$  ένα  $(m+n)$ -διάνυσμα. Αν τα  $E, F$  και  $\boldsymbol{\gamma}$  εξαρτώνται από τα  $\boldsymbol{\lambda}$  και  $\boldsymbol{\sigma}$  καταλήγουμε στην πλέον ακριβή έκφραση του γενικευμένου προβλήματος ιδιοτιμών, που έχει ήδη δοθεί στις (18α,β). Αν θεωρήσουμε το αντίστοιχο των (19α,β) πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}; \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\sigma}) \quad (20\alpha)$$

$$\mathbf{u}(\alpha) = \mathbf{s} \quad (20\beta)$$

και υποθέτοντας ότι η λύση  $\mathbf{f}$  είναι επαρκώς λεία ως προς  $x$  και  $\mathbf{u}$  για όλα τα κατάλληλα σύνολα των  $\boldsymbol{\lambda}$  και  $\boldsymbol{\sigma}$ , τότε σίγουρα το εν λόγω πρόβλημα αρχικών τιμών έχει μία μοναδική λύση, έστω την

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{\sigma}, x) \quad (21)$$

Αν αυτή η λύση υπάρχει για  $\alpha < x < b$  ορίζουμε το  $(m+n)$  διάνυσμα-συνάρτηση

$$\varphi(\mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\sigma}) \equiv E\mathbf{u}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\sigma}; \alpha) + F\mathbf{u}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\sigma}; b) - \boldsymbol{\gamma} \quad (22\alpha)$$

και κατόπιν μορφώνουμε το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων

$$\varphi(\mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (22\beta)$$

Για δεδομένη (σταθερή) τιμή του  $\boldsymbol{\sigma}$  η (23) αναπαριστά  $(m+n)$  εξισώσεις με αγνώστους  $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda})$ . Έστω  $(\mathbf{s}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)$  μία λύση που αντιστοιχεί στην δεδομένη τιμή της παραμέτρου  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0$ . Τότε προφανώς η

$$\mathbf{y}_0(x) \equiv \mathbf{u}(\mathbf{s}_0, \boldsymbol{\lambda}_0, \boldsymbol{\sigma}_0; x) \quad (23)$$

είναι μία λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (19α,β) που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_0$  για τιμές της παραμέτρου  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0$ .

Αντίστροφα, αν το πρόβλημα (19α,β) με  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0$  έχει μία ιδιοτιμή και επιδέχεται λύσης, τότε η εξίσωση (22α,β) έχει κάποια ρίζα που την ονομάζουμε  $(\mathbf{s}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)$  αν  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0$ . Αν για παράδειγμα η συνάρτηση  $\mathbf{f}(x, \mathbf{u}; \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\sigma})$  είναι συνεχής ως προς  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\lambda}$  και  $\boldsymbol{\sigma}$ , σε κάποιο ανοιχτό διάστημα διάστασης  $(n+m+q+1)$ , το οποίο περιέχει τα  $\mathbf{y}_0(x)$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_0$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_0$ ,  $\alpha \leq x \leq b$ , τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών των (20α,β) έχει μία μοναδική λύση, που υπάρχει στο διάστημα  $\alpha \leq x \leq b$  για όλα τα αρχικά δεδομένα  $\mathbf{s}$  αρκετά κοντά με το  $\mathbf{s}_0 \equiv \mathbf{y}_0(a)$ , με την προϋπόθεση ότι και τα  $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\sigma})$  είναι στη γειτονιά των  $(\boldsymbol{\lambda}_0, \boldsymbol{\sigma}_0)$ . Συνεπώς, αν κανείς εκτιμήσει μία αρχική προσέγγιση  $(\mathbf{s}^{(0)}, \boldsymbol{\lambda}^{(0)})$  κοντά στα  $(\boldsymbol{\lambda}_0, \boldsymbol{\sigma}_0)$ , τότε μπορεί να εφαρμοστεί μία επαναληπτική διαδικασία στις εξισώσεις (22α,β) (με  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0$ ), η οποία γρήγορα θα συγκλίνει στην επιθυμητή ρίζα. Αυτή η βασική ιδέα εφαρμογής μεθόδων στόχευσης για την αριθμητική επίλυση γενικευμένων προβλημάτων ιδιοτιμών, οι οποίες ουσιαστικά είναι τροποποίηση των μεθόδων της § 1.3.1. Για τα προβλήματα

αυτά υπάρχουν και οι αντίστοιχες τροποποιημένες μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών, ολοκληρωτικών εξισώσεων και διανυσματικών χώρων, που γενικά βασίζονται στις αρχές των μεθόδων των § 1.3.2 , 1.3.3 και 1.3.4 αντίστοιχα.

## **1.5 Προβλήματα συνοριακών τιμών δύο σημείων με ανωμαλία**

### **(singular)**

Ορισμένα, συνήθως γραμμικά, προβλήματα συνοριακών τιμών δύο σημείων, σχετίζονται με κανονική ανωμαλία σε ένα από τα δύο σημεία (regular singularity, περιπτώσεις μη κανονικής ανωμαλίας της μορφής  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$  δεν παρουσιάζεται σε ΠΣΤ δύο σημείων εφόσον τα  $a, b \neq \pm\infty$ ). Τέτοιου είδους προβλήματα, δύνανται να περιγραφούν –υπό αυστηρά μαθηματική διατύπωση- ως εξής:

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{y}'(t) - A(t)\mathbf{y}(t) \quad a < t \leq b \quad (24\alpha)$$

$$\lim_{t \rightarrow a} [B_0(t)\mathbf{y}(t) + B_1\mathbf{y}(b) - \mathbf{R}(t)] = 0 \quad (24\beta)$$

$$A(t) = t^{-1}\mathbf{P} + A_0(t) \quad (24\gamma)$$

όπου  $\mathbf{y}(t)$  ,  $\mathbf{f}(t)$  ,  $\mathbf{R}(t)$  είναι  $n$ -διανύσματα, ενώ  $\mathbf{P}$  ,  $A_0(t)$  ,  $B_0(t)$  ,  $B_1$  είναι  $n \times n$  μητρώα.

Περιγραφικά, η διαδικασία αριθμητικής επίλυσης τέτοιων προβλημάτων βασίζεται σε αναπτύγματα περί το ανώμαλο σημείο, σε λύση ενός μη ανώμαλου (κανονικού) προβλήματος συνοριακών τιμών σε ένα μειωμένο διάστημα (που δεν περιέχει το ανώμαλο σημείο) και προσαρμόζοντας τη λύση αυτή στα αναπτύγματα. Για εις βάθος μελέτη της μεθόδου και ορισμένες εφαρμογές της συνίσταται το δημοσίευμα: *Brabston, D.C and Keller, H.B (1997) : A numerical method for singular two point boundary value problems. On Numerical Analysis , Vol.14, No 5, pp.779-791.*



## Κεφάλαιο 2ο : Γενικά χαρακτηριστικά και περιγραφή της προτεινόμενης μεθόδου

### 2.1. Ιστορικό και τρέχουσες εξελίξεις: Αριθμητική ανάλυση και Ηλεκτρονικοί Υπολογιστές

Όπως άλλωστε γίνεται άμεσα αντιληπτό και από το όνομα της επιστημονικής περιοχής της αριθμητικής ανάλυσης, αυτή είναι αναπόσπαστα συνδεδεμένη με την καθιέρωση, ανάπτυξη και εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Παρόλο που από την εποχή του Newton έχουν διατυπωθεί και τεκμηριωθεί πολλά από τα βασικά θεωρήματα και μεθόδους της αριθμητικής ανάλυσης, η ουσιαστική άνθιση της ξεκίνησε περί το 1970, όταν άρχισαν να εμφανίζονται οι πρώτοι – υποτυπώδεις σταθμοί εργασίας και να κωδικοποιούνται οι μέθοδοι της ανάλυσης σε υπορουτίνες της γλώσσας Fortran IV. Έτσι δημιουργήθηκε μία εκτεταμένη συλλογή - βιβλιοθήκη τέτοιων υπορουτινών, η καλούμενη **IMSL** (αρχικά για **International Mathematical and Statistical Library**), που εξελίχθηκε, εμπλουτίζεται συνέχεια και χρησιμοποιείται ευρύτατα. Η κωδικοποίηση της πλέον αναπτύσσεται τόσο σε γλώσσα **Fortran 77** όσο και σε **C** ή **C<sup>++</sup>** (ακόμα και σε **Java**) και αυτή τη στιγμή – υπό την εμπορική άδεια της εταιρείας **Visual Numerics** – διαθέτει πάνω από 1000 ισχυρότατες υπορουτίνες (βελτιστοποιημένες σε ύψιστο βαθμό), που υποστηρίζονται από περισσότερες των 65 διαφορετικές πλατφόρμες (λειτουργικά συστήματα και παραλλαγές τους). Οι υπορουτίνες αυτές είναι στην ουσία ένα σύνολο από εύκολα κατανοητές και εύκαμπτες συναρτήσεις μαθηματικών και στατιστικής, τις οποίες ο προγραμματιστής μπορεί να εντάξει στις εφαρμογές του λογισμικού που αναπτύσσει. Οι σπουδαιότεροι τομείς – περιοχές εφαρμογής της IMSL είναι : βελτιστοποίηση, ταχείς μετασχηματισμοί Fouries (FFTs), παρεμβολή

και προσαρμογή (interpolation - fitting), διαφορικές εξισώσεις, συσχετίσεις (correlation), παλινδρομήσεις (regression), ανάλυση χρονικών σειρών κλπ.

Πλην όμως και παρόλο το γεγονός ότι ο μηχανικός της καθημερινής πράξης – αλλά και ο θετικός επιστήμονας γενικότερα – μπορεί να είναι κάτοχος Η/Υ με επεξεργαστή μεγάλης ταχύτητας, ιδιαίτερα αυξημένης χωρητικότητας αποθηκευτικά μέσα, και ισχυρά γραφικά, η IMSL παραμένει δύσχρηστη και απευθύνεται περισσότερο σε προγραμματιστές – δημιουργούς εφαρμογών – παρά στο ευρύτερο σύνολο χρηστών, που καλούνται να επιλύσουν αριθμητικά κάποια προβλήματα της μαθηματικής επιστήμης (είτε θεωρητικά είτε σαν αποτελέσματα ανάλυσης προβλημάτων άλλων επιστημών, όπως λ.χ. της Μηχανικής).

Προς τούτο, βασιζόμενοι στις υπορουτίνες της IMSL και το θεωρητικό τους κυρίως υπόβαθρο, αναπτύχθηκαν εν παραλλήλω την τελευταία δεκαετία ορισμένες ολοκληρωμένες λύσεις – προγράμματα μαθηματικής ανάλυσης για προσωπικούς υπολογιστές, οι οποίες προσφέρουν σχεδόν απεριόριστες δυνατότητες, ευκολία χρήσης και ευρύτητα εφαρμογών. Από τα προγράμματα αυτά, τα πιο διαδεδομένα αυτή τη στιγμή (σε προσωπικό και ακαδημαϊκό επίπεδο) είναι το **Maple** (τρέχουσα έκδοση η 9) της εταιρείας Maplesoft, το **MathCAD** της εταιρείας Mathsoft (με τρέχουσα έκδοση την 11) και το **Mathematica** της Wolfram Research Inc (έκδοση 5).

Το Mathematica<sup>[1,2]</sup> ιδιαίτερα, φαίνεται να είναι το πιο διαδεδομένο, χωρίς τα άλλα δύο να υστερούν, και η διδασκαλία της χρήσης του και των εφαρμογών του έχει ενταχθεί στα υποχρεωτικά προπτυχιακά προγράμματα πολλών Ανωτάτων Σχολών θετικής κατεύθυνσης ανά την υφήλιο, ενώ υφίσταται (και συνεχώς παράγεται) ευρύτατη σχετική βιβλιογραφία.

Η προτεινόμενη μέθοδος για την αριθμητική επίλυση μη γραμμικών προβλημάτων συνοριακών τιμών δύο σημείων αποτελεί εφαρμογή του Mathematica και χρησιμοποιεί τις δυνατότητες μερικών ενσωματωμένων εντολών - συναρτήσεων του λογισμικού αυτού. Για την κατανόηση της μεθόδου, πέραν των όσων αναλυτικά παρατίθενται σε επόμενες παραγράφους, κρίνεται στο σημείο αυτό σκόπιμα όπως παρουσιαστεί μια συνοπτική αναφορά στην σύνταξη, δυνατότητες και ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των πιο σπουδαίων από τις ως άνω χρησιμοποιούμενες εντολές-συναρτήσεις.

## **2.2. Προσεγγιστικές συναρτήσεις και παρεμβολή (Interpolation)**

Σε πολλά είδη αριθμητικών υπολογιστών, είναι εύχρηστη και αποτελεσματική η χρήση προσεγγιστικών συναρτήσεων (approximate functions). Αυτές μπορούν να θεωρηθούν ως γενικεύσεις συνήθων προσεγγίσεων πραγματικών αριθμών. Ενώ η προσέγγιση ενός πραγματικού αριθμού είναι κατ' ουσία η τιμή – στην επιθυμητή ακρίβεια – μιας μοναδικής (single) αριθμητικής ποσότητας, μια προσεγγιστική συνάρτηση δίδει την τιμή μιας ποσότητας, η οποία εξαρτάται από μία ή περισσότερες παραμέτρους. Οι σχετικές ενσωματωμένες εντολές παρεμβολής, δηλαδή υπολογισμού προσεγγιστικών συναρτήσεων στο Mathematica έχουν ως εξής:

*Interpolation*[[ $f_1, f_2, \dots$ ]] : δημιουργεί μια προσεγγιστική συνάρτηση με τιμές  $f_i$  σε διαδοχικούς ακέραιους

*Interpolation*[[{ $x_1, f_1$ }, { $x_2, f_2$ }, ...]] : δημιουργεί μια προσεγγιστική συνάρτηση με τιμές  $f_i$  στα σημεία  $x_i$

*ListInterpolation*[[{ $f_{11}, f_{12}, \dots$ }, { $f_{21}, \dots$ }, ...]] : δημιουργεί μία προσεγγιστική συνάρτηση από ένα δυσδιάστατο πλέγμα τιμών σε ακέραια σημεία

$ListInterpolation[list, \{\{x_{min}, x_{max}\}, \{y_{min}, y_{max}\}\}]$  : θεωρείται ότι οι τιμές βρίσκονται σε ένα ομοιόμορφα κατανεμημένο πλέγμα (evenly spaced) εντός της καθορισμένης περιοχής (εύρους τιμών)

$ListInterpolation[list, \{\{x_1, x_2, \dots\}, \{y_1, y_2, \dots\}\}]$  : θεωρείται ότι οι τιμές βρίσκονται στα σημεία τομής των οριζόμενων γραμμών του πλέγματος

Η εντολή *ListInterpolation* εφαρμόζεται για σειρές (arrays) οποιασδήποτε διάστασης, και σε κάθε περίπτωση δημιουργεί μια *InterpolatingFunction*, που χρησιμοποιεί τον κατάλληλο αριθμό δεδομένων εισόδου (arguments). Η προσδιοριζόμενη προσεγγιστική συνάρτηση αναπαράγει τις ακριβείς τιμές που έχουν δοθεί στα συγκεκριμένα σημεία και προσεγγιστικές τιμές ενδιάμεσα.

Αν αναζητηθεί τιμή εκτός της περιοχής προσέγγισης - παρεμβολής, το Mathematica τυπώνει μια προειδοποίηση και κατόπιν εφαρμόζει διαδικασία *Extrapolation* (αναζήτηση προς τα εμπρός ή πίσω μέσω παρέκτασης) για να βρει αποτέλεσμα.

### 2.3 Διανύσματα και Μητρώα

Στην προτεινόμενη μέθοδο γίνεται χρήση της εντολής *Table* που είναι ενσωματωμένη στο Mathematica, για την πινακοποίηση των αποτελεσμάτων της παρεμβολής. Αναλυτικότερα, η εντολή  $Table[f, \{i, m\}, \{j, n\}]$  δημιουργεί ένα μητρώο  $m \times n$  υπολογίζοντας την συνάρτηση  $f$  για  $1 \leq i \leq m$  και  $1 \leq j \leq n$ . Η σύνταξη της και οι σχετικές δυνατότητες της έχουν ως ακολούθως:

$Table[f, \{i, i_{max}\}]$  : δίδει μία λίστα  $i_{max}$  τιμών της  $f$

$Table[f, \{i, i_{max}\}]$  : δίδει μία λίστα της  $f$  καθώς το  $i$  διατρέχει το διάστημα από  $1$  έως  $i_{max}$

$Table[f, \{i, i_{min}, i_{max}\}]$  : δίδει μία λίστα τιμών για  $i_{min} \leq i \leq i_{max}$

$Table[f, \{i, i_{min}, i_{max}, d_i\}]$  : ως άνω με βήμα  $d_i$

$Table[f, \{i, i_{min}, i_{max}\}, \{j, j_{min}, j_{max}\}, \dots]$  : δημιουργεί έναν πολυδιάστατο πίνακα

## 2.4 Αριθμητικός υπολογισμός ριζών εξισώσεων

Η μέθοδος χρησιμοποιεί κατά κόρον την ενσωματωμένη συνάρτηση - εντολή *FindRoot* του Mathematica, η οποία υπολογίζει αριθμητικά τις λύσεις μιας ή συστημάτων μη γραμμικών εν γένει αλγεβρικών εξισώσεων:

$FindRoot[lhs == rhs, \{x, x_0\}]$  : αναζητά αριθμητική λύση της εξίσωσης  $lhs == rhs$ , ξεκινώντας από  $x = x_0$

$FindRoot[lhs == rhs, \{x, \{x_0, x_1\}\}]$  : αναζητά λύση χρησιμοποιώντας τα  $x_0, x_1$  σαν τις δύο πρώτες τιμές του  $x$  (η μορφή αυτή πρέπει να χρησιμοποιείται σε περίπτωση που το Mathematica δεν μπορεί να βρει συμβολικές εκφράσεις των παραγώγων της εξίσωσης)

$FindRoot[lhs == rhs, \{x, x_{start}, x_{min}, x_{max}\}]$  : αναζητά λύση, σταματώντας τους υπολογισμούς αν το  $x$  βρεθεί εκτός του διαστήματος  $[x_{min}, x_{max}]$

$FindRoot[\{equ_1, equ_2, \dots\}, \{x, x_0\}, \{y, y_0\}, \dots]$  : αναζητά για αριθμητικές λύσεις του συστήματος των εξισώσεων  $equ_i$

## 2.5 Αριθμητική ολοκλήρωση διαφορικών εξισώσεων

Γίνεται επίσης ευρύτατη χρήση της εντολής *NDSolve*, η οποία επλύει αριθμητικά διαφορικές εξισώσεις και συστήματα και είναι ιδεώδης για προβλήματα κυρίως αρχικών τιμών διαθέτοντας αυτόματο προσδιορισμό βήματος, διορθώσεων και επιλογής αριθμητικής μεθόδου:

$NDSolve[equs, \{y_1, y_2, \dots\}, \{x, x_{min}, x_{max}\}, \dots \{αρχικές\ συνθήκες\} \dots]$

Οι αρχικές συνθήκες μπορούν να δοθούν ως οποιουδήποτε είδους εξισώσεις, σε περιπτώσεις δε πολλαπλών λύσεων, η *NDSolve* θα τις υπολογίσει αυτόματα όλες.

Υπάρχει επίσης δυνατότητα γραμμικών συνδυασμών τιμών των προς υπολογισμό συναρτήσεων και των παραγώγων τους ως συνοριακές συνθήκες, ενώ σε περίπτωση ύπαρξης ανωμαλίας ο υπολογισμός σταματά και παράγεται σχετική προειδοποίηση με την πιθανή τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής για την οποία οι συναρτήσεις καθίστανται ανώμαλες. Για περισσότερες λεπτομέρειες κανείς μπορεί να ανατρέξει στο αρχείο Βοήθειας (Help Menu) του Mathematica.

## 2.6 Αναλυτική Περιγραφή της Μεθόδου<sup>[17]</sup>

Θεωρούμε εκ νέου την πιο γενική μορφή μη γραμμικού προβλήματος συνοριακών τιμών δύο σημείων, η οποία δύναται να περιγραφεί από την ακόλουθη διαφορική εξίσωση τάξης  $n$ :

$$\left. \begin{aligned} y^{(n)} &= f(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y'', y', y, x) \\ f : [x_0, x_N] \times R^n &\rightarrow R^n, \quad f \text{ διαφορίσιμη} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

η οποία σχετίζεται με  $n$  – γενικά επίσης μη γραμμικές – συνοριακές συνθήκες:

$$L_i(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y'', y', y, x) \Big|_{x=x_0} = 0, \quad 1 \leq i \leq r \quad (26\alpha)$$

$$R_j(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y'', y', y, x) \Big|_{x=x_N} = 0, \quad r+1 \leq j \leq n, \quad i+j=n \quad (26\beta)$$

Η βασική ιδέα της προτεινόμενης μεθόδου έγκειται στον αριθμητικό προσδιορισμό των άγνωστων συνοριακών συνθηκών σε ένα από τα δύο άκρα (σημεία), ούτως ώστε κατόπιν μέσω της εντολής NDSolve (όπως αυτή προηγούμενα περιγράφηκε) να υφίσταται άμεσα η δυνατότητα επίλυσης του αντίστοιχου μη γραμμικού προβλήματος αρχικών τιμών. Υποθέτουμε ότι τούτο πρόκειται να λάβει χώραν στο αριστερό άκρο  $x_0$ , όπου πρέπει να υπολογιστούν  $j$  τον αριθμό αρχικές συνθήκες, οι οποίες έστω ότι ισούνται με:

$$L_j(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y'', y', y, x) \Big|_{x=x_0} = A_j \quad (27)$$



Αν οι τιμές των  $A_j$  θεωρηθούν ως άγνωστοι, πρέπει να οριστούν – ευρεθούν  $j$  περιοχές  $[A_j^{\ell}, A_j^r]$  εντός των οποίων κάθε  $A_j$  προϋποτίθεται ότι βρίσκεται. Χωρίζεται στη συνέχεια κάθε μια τέτοια περιοχή σε  $N$  ίσα μέρη και στη συνέχεια με βήμα ίσο με  $A_j^s = \frac{A_j^r - A_j^{\ell}}{N}$  μπορεί κανείς να υπολογίσει μέσω της NDSolve τις τιμές των  $R_j$  για κάθε δυνατό συνδυασμό τιμών των ως άνω αγνώστων. Οι τιμές αυτές κατόπιν αποθηκεύονται υπό τη μορφή ενός πολυδιάστατου πίνακα (με χρήση της εντολής Table), και υιοθετώντας σαν επόμενο βήμα την εντολή ListInterpolation δημιουργούνται προσεγγιστικές συναρτήσεις όλων των  $A_j$ , έστω  $F(A_j)$ . Αν η επιλογή των περιοχών που προαναφέρθηκαν είναι επιτυχής, τότε εντός αυτών βρίσκονται εκείνες οι ακριβείς τιμές των  $A_j$ , οι οποίες ικανοποιούν όλες τις συνοριακές συνθήκες στο απομακρυσμένο (δεξί) άκρο. Οι τιμές αυτές υπολογίζονται προσεγγιστικά με μηδενισμό των προσεγγιστικών συναρτήσεων  $F(A_j)$ , ο οποίος επιτυγχάνεται με εφαρμογή της εντολής FindRoot, έτσι ώστε  $F(A_j) = 0$  εντός των περιοχών  $[A_j^{\ell}, A_j^r]$ .

Προφανώς, το ευαίσθητο σημείο της μεθόδου είναι ο αρχικός προσδιορισμός των περιοχών  $[A_j^{\ell}, A_j^r]$ , καθόσον αν αυτός δεν είναι επιτυχής θα οδηγηθεί η εφαρμογή της σε μη σύγκλιση. Όμως, σε περίπτωση που κάποια από τα ακριβή  $A_j$  είναι εκτός των περιοχών αυτών, το Mathematica αυτόματα θα τυπώσει μια προειδοποίηση περί αυτού και στη συνέχεια θα εφαρμόσει Extrapolation (η οποία στις πλείστες των περιπτώσεων έχει σαν αποτέλεσμα τον υπολογισμό μιας αρκετά ακριβούς προσέγγισης της τιμής των  $A_j$ ), διαδικασία η οποία θα οδηγήσει σε επαναπροσδιορισμό των μη αρχικά κατάλληλα επιλεγισών περιοχών. Επίσης, αν η διαφορική εξίσωση (25) σχετίζεται με κάποια ανωμαλία, το Mathematica διαθέτει τη δυνατότητα να ειδοποιήσει για τη πιθανή ύπαρξή της, με αποτέλεσμα να δίνεται και πάλι η δυνατότητα στον χρήστη της μεθόδου να την προσαρμόσει κατάλληλα.

Η μέθοδος αποτελεί ουσιαστικά ένα συνδυασμό των γενικών αρχών στόχευσης και της ανάλυσης πεπερασμένων διαφορών, χωρίς την παραμικρή ανάγκη επέμβασης στην αρχική διαφορική εξίσωση και τις συνοριακές συνθήκες (επανασύνταξη σε σύστημα Δ.Ε. 1<sup>ης</sup> τάξης) και με ενσωματωμένες τις δυνατότητες του μαθηματικού λογισμικού, όσον αφορά την ευκαμψία αναπροσαρμογής και την πρόβλεψη – διόρθωση οποιωνδήποτε μη επιτυχών αρχικών προβλέψεων.

Πέραν τούτων η μέθοδος βασίζεται σε θεμελιώδεις αρχές και έννοιες της Αριθμητικής Ανάλυσης και τόσον η κατανόηση της όσο και η εφαρμογή της επ' ουδενί απαιτεί ιδιαίτερες γνώσεις Ανωτέρων Μαθηματικών, αλλά κυρίως διατηρεί συνεχώς την επαφή αυτού που την χρησιμοποιεί με το κατ' εξοχή πρόβλημα, γεγονός που αποτελεί και το σπουδαιότερο πλεονέκτημα της, σε αντίθεση με τις ήδη περιγραφείσες γενικές μεθόδους. Το πιθανώς φερόμενο ως μειονέκτημα – η επιτυχής αρχική πρόβλεψη των περιοχών προσαρμογής – πέραν του ότι είναι κοινό σε όλες τις σχετικές μεθόδους, δύναται κάλλιστα να αμβλυνθεί είτε μέσω επιμελημένης εκμετάλλευσης των εκάστοτε προειδοποιητικών μηνυμάτων του Mathematica είτε μέσω άντλησης πληροφοριών από τα αντίστοιχα γραμμικοποιημένα προβλήματα, όπως χαρακτηριστικά αναφέρθηκε και σε προηγούμενα σημεία της παρούσας.

Μια γενική εικόνα ενός προγράμματος Mathematica, που περιγράφει τις γενικές αρχές και τα βήματα της προτεινόμενης μεθόδου φαίνονται στο Σχήμα 1 που ακολουθεί.



(\*Μηδενισμός των αρχικών τιμών (εκκίνησης) των παραμέτρων, μεταβλητών και συναρτήσεων του προβλήματος\*)  
 ClearAll[x<sub>0</sub>, x<sub>N</sub>, f, y, x, y<sub>1</sub>, y<sub>2</sub>, ..., y<sub>n</sub>, P<sub>0</sub>, P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, ..., P<sub>n</sub>, sol, i, j, L<sub>1</sub>, L<sub>2</sub>, ..., L<sub>i</sub>, R<sub>i+1</sub>, R<sub>i+2</sub>, ..., R<sub>j</sub>, A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, ..., A<sub>j</sub>, A'<sub>1</sub>, A'<sub>2</sub>, ..., A'<sub>j</sub>, A'<sub>1</sub>, A'<sub>2</sub>, ..., A'<sub>j</sub>, A'<sub>1</sub>, A'<sub>2</sub>, ..., A'<sub>j</sub>, F, Φ, ...]

(\*Εισαγωγή των συγκεκριμένων εξωτερικών παραμέτρων – σταθερών του προβλήματος\*)

.

.

.

(\*Ορισμός των παραγώγων της συνάρτησης y, η οποία σχετίζεται με το πρόβλημα.\*)

$$y_1 = \partial_x y[x]$$

$$y_2 = \partial_x y_1$$

.

.

(\*Καθορισμός της διαφορικής εξίσωσης n τάξης του υπό επίλυση προβλήματος\*)

$$f = \dots$$

(\*καταγραφή – έκφραση των γνωστών συνοριακών συνθηκών αριστερά ως συναρτήσεων των x, y, y<sub>1</sub>, y<sub>2</sub>, ..., y<sub>n</sub> για x=x<sub>0</sub>\*)

$$L_1 = \dots$$

$$L_2 = \dots$$

.

.

$$L_i = \dots$$

Σχήμα 1 (συνεχίζεται)

(\*Εφαρμογή της εντολής NDSolve \*)

`sol = NDSolve[{f == 0, L1 == 0, L2 == 0, ..., Li == 0, Li+1 == Ai, Li+2 == A2, ..., Ln == An}, y, {x, x0, xN}]`

(\*Υπολογισμός των τιμών της y και των παραγώγων της στο δεξί (απομακρυσμένο) άκρο\*)

`P0 = y[xN] / sol.`

`P1 = y1[xN] / sol.`

.

.

`Pn-1 = yn-1[xN] / sol.`

(\*Υπολογισμός των τιμών των συνοριακών συνθηκών δεξιά με χρήση των τιμών των  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$  ως συναρτήσεων των  $A_1,$

$A_2, \dots, A_j, *$ )

`Ri+1[A1_, A2_, ..., Aj_] := ...`

`Ri+2[A1_, A2_, ..., Aj_] := ...`

.

.

.

`Rj[A1_, A2_, ..., Aj_] := ...`

Σχήμα 1 (συνεχίζεται)

(\*Δημιουργία πολυδιάστατου πίνακα μέσω της εντολής Table\*)  
 $\text{Table}[\{A_1, A_2, \dots, A_j, R_{i+1}[A_1, A_2, \dots, A_j], R_{i+2}[A_1, A_2, \dots, A_j], \dots, R_j[A_1, A_2, \dots, A_j]\}, \{A_1, A'_1, A''_1, A^s_1\}, \{A_2, A'_2, A''_2, A^s_2\}$   
 $\{A_i, A'_i, A''_i, A^s_i\}]$

(\*Προσέγγιση μέσω προσαρμογής των τιμών του πίνακα και ορισμός τους ως συναρτήσεως των  $(A_1, A_2, \dots, A_j)^*$ )  
 $F = \text{ListInterpolation}[\%]$   
 $F[A_1, A_2, \dots, A_j]$

(\*Εφαρμογή της εντολής FindRoot για τον υπολογισμό των  $A_1, A_2, \dots, A_j$ \*)  
 $\text{FindRoot}[F[A_1, A_2, \dots, A_j] == 0, \{A_1, A_2, \dots, A_j, \{A'_1, A''_1\}, \{A'_2, A''_2\}, \dots, \{A'_j, A''_j\}\}]$

Σχήμα 1. Γενική μορφή προγράμματος Mathematica για την εφαρμογή της προτεινόμενης μεθόδου

## Κεφάλαιο 3ο : Εφαρμογές της προτεινόμενης μεθόδου

### 3.1. Προβλήματα που επιδέχονται ακριβείς (αναλυτικές) λύσεις<sup>[5]</sup>

Πριν την οποιαδήποτε εφαρμογή της προτεινόμενης μεθόδου για την αριθμητική επίλυση ΜΓΠΣΤ δύο σημείων της Μηχανικής των Στερεών και μάλιστα της επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού, κρίνεται σκόπιμο όπως η απλότητα, αποτελεσματικότητα και ακρίβεια της μεθόδου να καταδειχθούν κατ' αρχή, μέσω επίλυσης προβλημάτων που επιδέχονται ακριβείς (αναλυτικές) λύσεις. Προς τούτο επιλέγονται τρία (3) παραδείγματα, καθαρά μαθηματικής φύσης και προέλευσης.

$$\alpha. \text{ Παράδειγμα } 1_0 : \begin{cases} y''(x) = y^2(x) + 2\pi^2 \cos(2\pi x) - \sin^4(\pi x) \\ 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \end{cases} \quad (28)$$

Το ανωτέρω πρόβλημα διαθέτει την ακριβή λύση  $y(x) = \sin^2 \pi x$ , ισχύει δε ότι  $y'(1) = 0$ , καθόσον  $y'(x) = 2\pi \cos(\pi x) \sin \pi(x)$ .

$$\beta. \text{ Παράδειγμα } 2_0 : \begin{cases} y''(x) = \frac{1}{8} \{32 + 2x^3 - y(x)y'(x)\} \\ 1 \leq x \leq 3 \\ y(1) = 17, \quad y(3) = \frac{43}{3} \end{cases} \quad (29)$$

Εδώ η ακριβής λύση ισούται με  $y(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ , οπότε  $y'(x) = 2x - \frac{16}{x^2}$

$$\Rightarrow y'(1) = -14$$

$$\gamma. \text{ Παράδειγμα } 3_0 : \begin{cases} y'''(x) = y^{12}(x) - y(x)y''(x) - 4x^2 + e^x(1 + x^2 - 4x) \\ 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y(1) = 1 + e, \quad y'(1) = 2 + e \end{cases} \quad (30)$$

Το πρόβλημα αυτό επιδέχεται την ακριβή λύση  $y(x) = x^2 + e^x$  και συνεπώς  $y'(x) = 2x + e^x$ ,  $y''(x) = e^x + 2$ ,  $y'''(x) = e^x$ , οπότε  $y''(0) = 3$  και  $y'''(0) = 1$ .

Η μέθοδος που προτείνεται στην παρούσα εργασία εύκολα και αξιόπιστα αντιμετωπίζει τα ως άνω προβλήματα και παράγει λύσεις εξαιρετικής ακρίβειας, όπως φαίνεται στα σχήματα (2α,β), (3α,β) και (4α,β) αντίστοιχα, όπου παρατίθενται οι σχετικές λύσεις του Mathematica και τα αποτελέσματα της μεθόδου.

```
ClearAll[f, x, y, A, Al, Ar, As, F1, F2, equ, ww, a1, a2]
(*Η διαφορική εξίσωση του μη γραμμικού προβλήματος συνοριακών τιμών του 1 ου παραδείγματος*)
equ = f'[x] - f[x]^2 - 2 π^2 Cos[2 π x] + Sin[π x]^4
(*... η οποία διαθέτει την ακόλουθη ακριβή λύση*)
y[x_] = Sin[π x]^2
Al = -0.01;
Ar = 0.01;
As = N[ $\frac{Ar - Al}{10000}$ ];
F1[A_] := f[1] /. NDSolve[{equ == 0, f[0] == 0, f'[0] == A}, f, {x, 0, 1}];
Table[{A, F1[A]}, {A, Al, Ar, As}];
F2 = Interpolation[%];
F2[A];
FindRoot[F2[A] == 0, {A, {Al, Ar}}];
ww = NDSolve[{equ == 0, f[0] == 0, f'[0] == A /. %}, f, {x, 0, 1}];
(*Η τιμή της 1 ης παραγώγου της προσεγγιστικής λύσης για x=0*)
s = f'[0] /. ww
a1 = Plot[Evaluate[f[x] /. ww], {x, 0, 1}, PlotLabel -> Προσεγγιστική Λύση, AxesLabel -> {"x", "f(x)"},
TextStyle -> {FontSlant -> "Italic", FontSize -> 16, FontFamily -> "Times"}, Background -> RGBColor[1, 1, 0]]
a2 = Plot[y[x], {x, 0, 1}, AxesLabel -> {"x", "y(x)=sin^2(πx)"}, PlotLabel -> Ακριβής Λύση, Background -> RGBColor[0, 1, 0],
TextStyle -> {FontSlant -> "Italic", FontSize -> 16, FontFamily -> "Times"}]

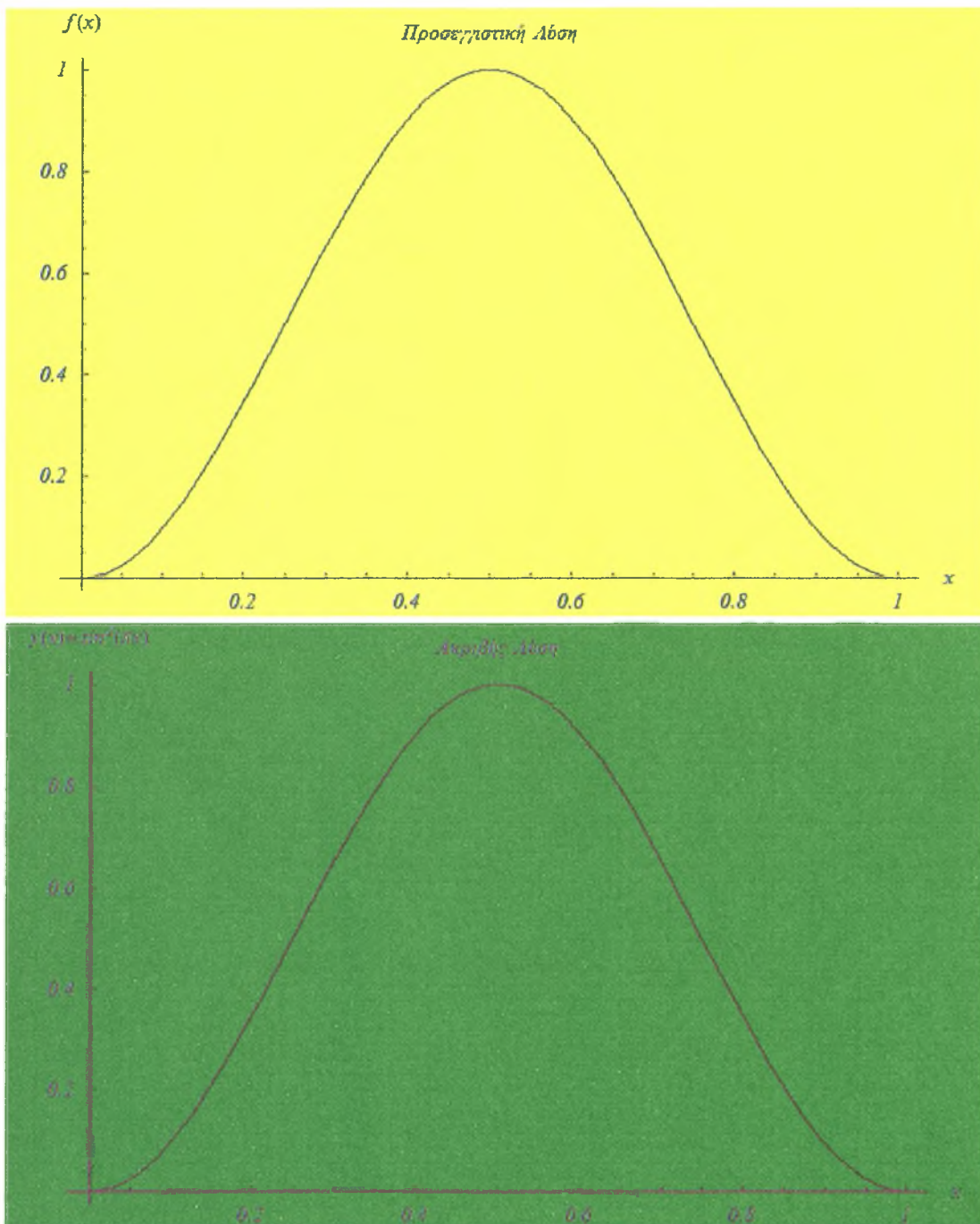
-2 π^2 Cos[2 π x] - f[x]^2 + Sin[π x]^4 + f'[x]

Sin[π x]^2

{1.166111 x 10^-6} (~ 0)
```

(α)

Σχήμα 2 (συνεχίζεται)



(β)

Σχήμα 2. Κώδικας Mathematica και αποτελέσματα της προτεινόμενης μεθόδου για το 1<sup>ο</sup> παράδειγμα.

```

ClearAll[f, x, y, A, Al, Ar, As, F1, F2, equ, ww, a1, a2]
(*Η διαφορική εξίσωση του μη γραμμικού προβλήματος συνοριακών τιμών του 2 ου παραδείγματος*)
equ = f''[x] -  $\frac{1}{8}$  (32 + 2 x3 - f[x] f'[x])
(*.. η οποία διαθέτει την ακόλουθη ακριβή λύση*)
y[x_] = x2 +  $\frac{16}{x}$ 
Al = -15;
Ar = -13;
As = N[ $\frac{Ar - Al}{10000}$ ];
F1[A_] := f[3] /. NDSolve[{equ == 0, f[1] == 17, f'[1] == A}, f, {x, 1, 3}];
Table[{A, F1[A]}, {A, Al, Ar, As}];
F2 = Interpolation[%];
F2[A];
FindRoot[F2[A] ==  $\frac{43}{3}$ , {A, {Al, Ar}}];
ww = NDSolve[{equ == 0, f[1] == 17, f'[1] == A /. %}, f, {x, 1, 3}];
(*Η τιμή της 1 ης παραγώγου της προσεγγιστικής λύσης για x=1*)
s = f'[1] /. ww
a1 = Plot[Evaluate[f[x] /. ww], {x, 1, 3}, PlotLabel -> Προσεγγιστική Λύση, AxesLabel -> {"x", "f(x)"},
TextStyle -> {FontSlant -> "Italic", FontSize -> 16, FontFamily -> "Times"}, Background -> RGBColor[1, 1, 0]]
a2 = Plot[y[x], {x, 1, 3}, AxesLabel -> {"x", "y(x)=x2+ $\frac{16}{x}$ "}, PlotLabel -> Ακριβής Λύση,
Background -> RGBColor[0, 1, 0], TextStyle -> {FontSlant -> "Italic", FontSize -> 16, FontFamily -> "Times"}]

```

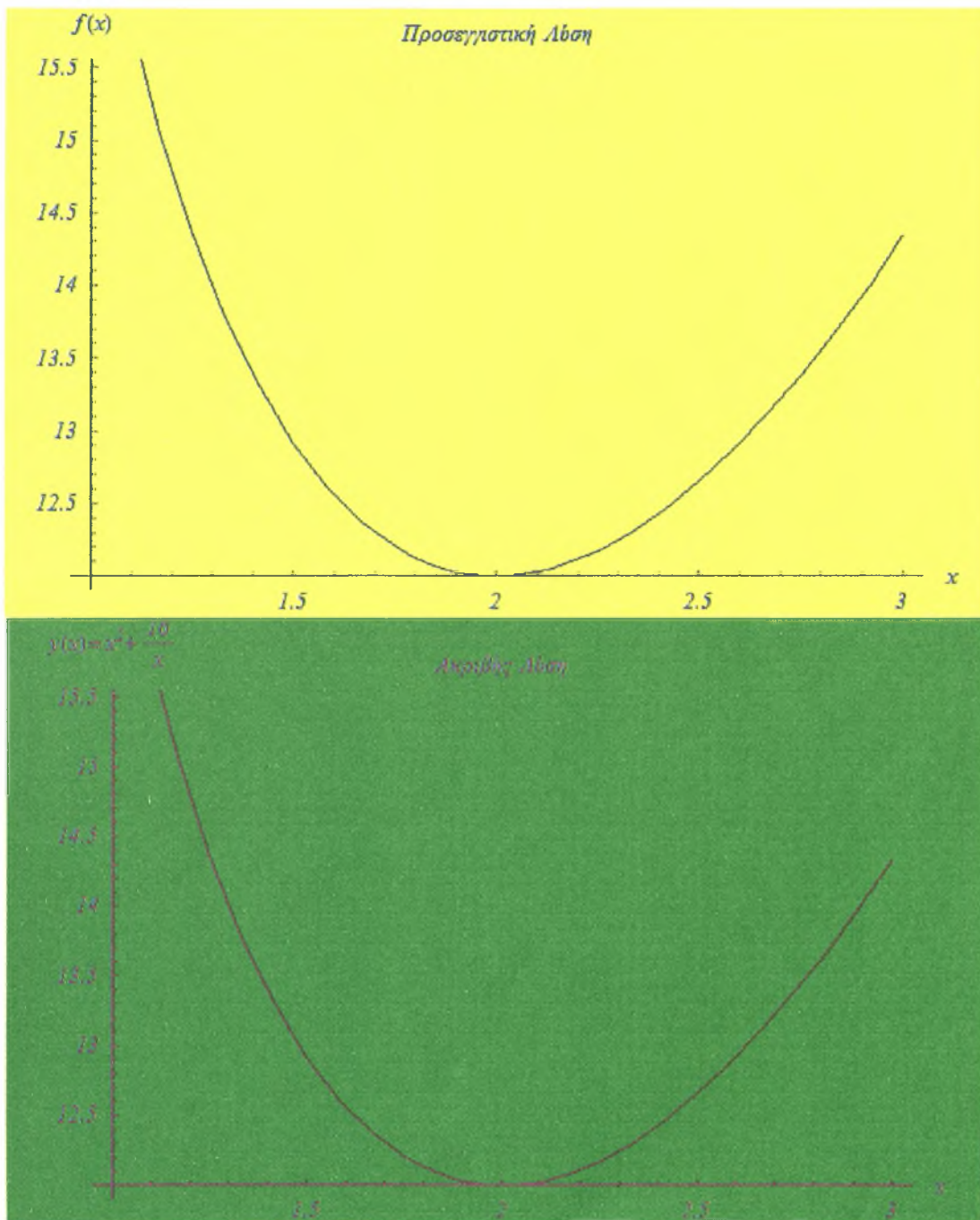
$$\frac{1}{8} (-32 - 2x^3 + f[x]f'[x]) + f''[x]$$

$$\frac{16}{x} + x^2$$

{-14}

(α)

Σχήμα 3 (συνεχίζεται)



(β)

Σχήμα 3. Κώδικας Mathematica και αποτελέσματα της προτεινόμενης μεθόδου για το 2<sup>ο</sup> παράδειγμα.



```

ClearAll[eqn, f, x, y, A1, A2, A3, B1, B2, B3, F1, F2, A, B, FF, π]
Print["Η μη γραμμική διαφορική εξίσωση 4ου βαθμού του 3ου παραδείγματος"]
eqn = f''''[x] - f'[x]^2 + f[x]f''''[x] + 4 x^2 - e^x (1 + x^2 - 4 x)
Print["Διαθέτει την ακόλουθη ακριβή λύση"]
y[x_] = x^2 + e^x
A1 = 2.9;
A2 = 3.1;
A3 = N[A2 - A1 / 50] // N;
B1 = 0.95;
B2 = 1.05;
B3 = N[B2 - B1 / 50] // N;
F1[A_ B_] := (f[1] - 1 - e) /. NDSolve[{eqn == 0, f[0] == 1, f'[0] == 1, f''[0] == A, f'''[0] == B}, f, {x, 0, 1}]
F2[A_ B_] := (f[1] - 2 - e) /. NDSolve[{eqn == 0, f[0] == 1, f'[0] == 1, f''[0] == A, f'''[0] == B}, f, {x, 0, 1}]
Table[{A, B, F1[A, B], F2[A, B]}, {A, A1, A2, A3}, {B, B1, B2, B3}];
FF = ListInterpolation[{}];
FF[A, B];
FindRoot[F[A, B] == 0, {A, {A1, A2}}, {B, {B1, B2}}]
ss = NDSolve[{eqn == 0, f[0] == 1, f'[0] == 1, f''[0] == A /. %, f'''[0] == B /. %}, f, {x, 0, 1}]
a1 = Plot[Evaluate[f[x] /. ss], {x, 0, 1}, PlotLabel -> Προσεγγιστική Λύση, AxesLabel -> {"x", "f(x)"},
  TextStyle -> {FontSlant -> "Italic", FontSize -> 16, FontFamily -> "Times"}, Background -> RGBColor[1, 1, 0]];
a2 = Plot[y[x], {x, 0, 1}, AxesLabel -> {"x", "y(x)=x^2+e^x"}, PlotLabel -> Ακριβής Λύση, Background -> RGBColor[0, 1, 0],
  TextStyle -> {FontSlant -> "Italic", FontSize -> 16, FontFamily -> "Times"}]
Show[GraphicsArray[{a1, a2}], Frame -> True];

```

(α)

Η μη γραμμική διαφορική εξίσωση 4ου βαθμού του 3ου παραδείγματος:

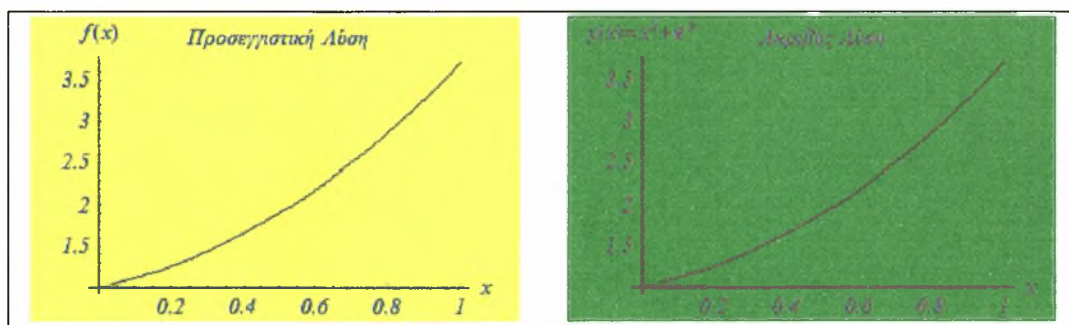
$$4x^2 - e^x(1 - 4x + x^2) - f'[x]^2 + f[x]f^{(4)}[x] + f^{(4)}[x]$$

Διαθέτει την ακόλουθη ακριβή λύση

$$e^x + x^2$$

{A → 3, B → 1}

{{f → InterpolatingFunction[{{0., 1.}}, <>]}}



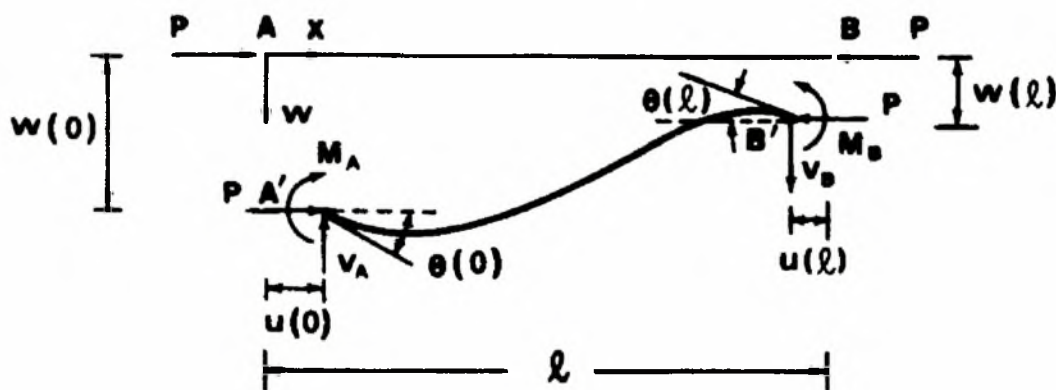
(β)

Σχήμα 4. Κώδικας Mathematica και αποτελέσματα της προτεινόμενης μεθόδου για το 3<sup>ο</sup> παράδειγμα.

### 3.2. Λυγισμός ράβδων υποκείμενων σε μεγάλες μετατοπίσεις

Θεωρούμε μία αρχικά απαραμόρφωτη (ευθύγραμμη) ράβδο, η οποία υπόκειται σε καμπτικό λυγισμό λόγω αξονικής θλίψης. Αμελώντας την επιρροή της διατμητικής παραμόρφωσης (ράβδος Euler-Bernoulli) και εφαρμόζοντας Μη Γραμμική Θεωρία Ευστάθειας Μεγάλων Μετατοπίσεων (με τις αντίστοιχες παραδοχές της) υποθέτουμε ότι η προαναφερθείσα θλιβόμενη ράβδος, έχοντας αποχωριστεί από κάποιο ελαστικό σύστημα, ισορροπεί σε μία ελαφρά παραμορφωμένη μορφή, υπό την επίδραση των δεδομένων (σταθερών) ροπών και δυνάμεων στα άκρα  $M_A$ ,  $M_B$  και  $V_A$ ,  $V_B$  αντίστοιχα καθώς και της αξονικής θλιπτικής δύναμης  $P$ , σύμφωνα με την γεωμετρία και την σύμβαση προσήμων, που απεικονίζονται στο Σχήμα 5. Τότε, σε μία τυχούσα διατομή της ράβδου αναπτύσσονται τα εντατικά μεγέθη

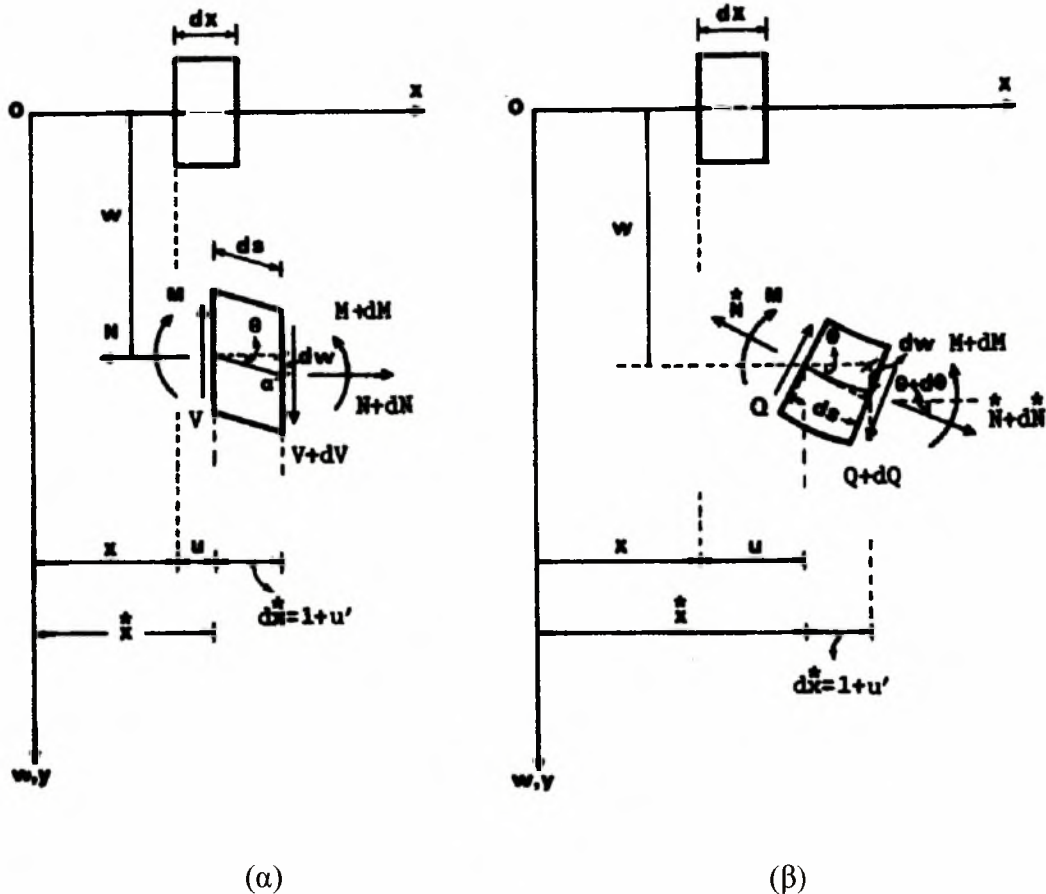
$$M = \int_A \sigma y dA, \quad N = \int_A \sigma dA \quad \text{και} \quad Q = \int_A \tau dA \quad (31)$$



Σχήμα 5. Ισορροπία λυγισμένης ράβδου υπό την επίδραση δεδομένων δυνάμεων και ροπών

Στις εκφράσεις αυτές  $A$  είναι το εμβαδόν της διατομής της ράβδου,  $\sigma$  και  $\tau$  η ορθή και η διατμητική τάση αντίστοιχα, οι οποίες αναπτύσσονται σε ένα γραμμικό στοιχείο εμβαδού  $dA$ , που απέχει κατά  $y$  από τον ουδέτερο άξονα της διατομής, όπως

χαρακτηριστικά φαίνεται στο Σχήμα 6. Επίσης, η μεν αξονική δύναμη  $N^*$  είναι κάθετη στην διατομή της παραμορφωμένης ράβδου, οπότε εφάπτεται της ελαστικής γραμμής, ενώ η τέμνουσα  $Q$  είναι κάθετη στον απαραμόρφωτο άξονα της ράβδου και στην συγγραμμική σε αυτόν αξονική δύναμη  $N$ .



Σχήμα 6. Ισορροπία στοιχείου λυγισμένης ράβδου με παρείς κάθετες: (α) στον απαραμόρφωτο και (β) στο παραμορφωμένο άξονα αυτής.

Η ορθή τάση  $\sigma$  δίνεται από την σχέση  $\sigma = E\varepsilon_y$  (32)

$$\text{όπου } \varepsilon_y = \varepsilon - \frac{d\vartheta}{dx} y, \quad \varepsilon = \left\{ \left( 1 + \frac{du}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - 1 \quad (33)$$

Σύμφωνα με τη μη γραμμική θεωρία ελαστικότητας, το μέτρο της ανηγμένης

παραμόρφωσης  $\varepsilon$ , ισούται εξ ορισμού με τη διαφορά  $ds^2 - dx^2$ , δηλαδή ισχύει ότι

$$ds^2 - dx^2 = 2\varepsilon dx^2 \text{ οπότε}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{ds}{dx} \right)^2 - 1 \right] \Leftrightarrow \frac{ds - dx}{dx} = \sqrt{1 + 2\varepsilon} - 1 \quad (34)$$

Κατά συνέπεια, η λυγισμένη μορφή της ράβδου μπορεί να καθοριστεί μέσω των μεγεθών  $\vartheta(x)$  και  $\varepsilon(x)$  τυχόντος σημείου του άξονα της.

Επιπρόσθετα, χωρίς ιδιαίτερη απώλεια γενικότητας, θεωρούμε ότι η υπό εξέταση ράβδος διαθέτει πρακτικά ανυποχώρητα άκρα και ένα σταθερό άκρο, δηλαδή  $w(0) = w(l) = u(0) = 0$  ενώ υφίσταται δυνατότητα στροφής των άκρων της<sup>‡</sup>, που εκφράζεται μέσω των ακόλουθων συνοριακών συνθηκών:

$$EI \frac{d\vartheta(0)}{dx} = C_A \vartheta(0), \quad EI \frac{d\vartheta(l)}{dx} = -C_B \vartheta(l) \quad (35)$$

όπου  $C_A, C_B$  στροφικές δυσκαμψίες ( $0 \leq C_A, C_B \leq +\infty$ )

Η διαφορική εξίσωση ισορροπίας της ράβδου, χωρίς περιορισμούς ούτε για το μέγεθος της γωνίας  $\theta$  ούτε της ανηγμένης παραμόρφωσης, η οποία εύκολα προκύπτει είτε με εφαρμογή της μεθόδου ισορροπίας του Euler είτε της ενεργειακής μεθόδου, είναι η ακόλουθη:

$$EI \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} + P \sqrt{1 - \frac{2P \cos \vartheta}{EA}} \sin \vartheta = 0 \quad (36)$$

εφόσον δεχόμαστε ότι η ράβδος έχει σταθερή διατομή.

Το ΜΓΠΣΤ δύο σημείων των εξισώσεων (35) και (36) αποτελεί το αντικείμενο της 1<sup>ης</sup> εφαρμογής της προτεινόμενης μεθόδου. Αξίζει να σημειωθεί ότι μετά τον υπολογισμό της  $\vartheta(x)$  η παραμορφωμένη μορφή της ράβδου προκύπτει άμεσα μέσω των σχέσεων

$$u(x) = \int_0^x \left(1 - \frac{P \cos \vartheta}{EA}\right) \cos \vartheta(z) dz - x$$

$$w(x) = \int_0^x \left(1 - \frac{P \cos \vartheta}{EA}\right) \sin \vartheta(z) dz \quad (37\alpha, \beta)$$

συναρτήσεις που υπολογίζονται με χρήση προσεγγιστικών μεθόδων ολοκλήρωσης (πχ τραπεζίου, Romberg, Simpson, κλπ).

Εισάγοντας τους αδιάστατους παράγοντες

$$\text{Αδιάστατο φορτίο } k^2 = \frac{Pl^2}{EI}, \quad \bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \bar{\vartheta}(\bar{x}) = \vartheta(x)$$

$$\text{Λυγηρότητα } \lambda^2 = \frac{A}{I} l^2, \quad C_1 = \frac{C_A l}{EI}, \quad C_3 = \frac{C_B l}{EI}$$

το μη γραμμικό πρόβλημα συνοριακών τιμών δύο σημείων που μας απασχολεί γράφεται υπό την ακόλουθη αδιαστατοποιημένη μορφή:

$$\bar{\vartheta}'' + k^2 \sqrt{1 - 2 \frac{k^2}{\lambda^2} \cos \bar{\vartheta} \sin \bar{\vartheta}} = 0$$

$$\bar{\vartheta}'(0) - C_1 \vartheta(0) = 0 \quad (38 \alpha-\gamma)$$

$$\bar{\vartheta}'(1) + C_3 \vartheta(1) = 0$$

όπου ο τόνος υποδηλώνει πλέον παραγωγή ως προς  $\bar{x}$ .

Για την αριθμητική επίλυση του ανωτέρω μη γραμμικού προβλήματος, προς αποφυγή τετριμμένων προλυγισμικών λύσεων ( $\bar{\vartheta}(\bar{x}) = 0, \forall x \in [0,1]$ ) αντλούμε την τιμή του κρίσιμου φορτίου  $P_{cr}$  από το αντίστοιχο γραμμικό πρόβλημα ελαστικής ευστάθειας, που σχετίζεται με την εξίσωση ισοροπίας

$$EIw''''(x) + Pw''(x) = 0 \quad (39)$$

με συνοριακές συνθήκες

‡ τέτοιες ράβδοι είναι τα ζυγώματα επίπεδων χαλύβδινων πλαισίων, ευρύτατα διαδεδομένων στη καθημερινή πράξη του Πολιτικού Μηχανικού

$$w(0) = 0, w(l) = 0$$

$$-EIw''(0) = -C_A w'(0), -EIw''(l) = C_B w'(l) \quad (40 \text{ α-δ})$$

Οι παραπάνω μετά την εισαγωγή του επιπρόσθετου αδιάστατου παράγοντα

$\bar{w}(\bar{x}) = \frac{w(x)}{l}$  λαμβάνουν την αδιάστατη μορφή που ακολουθεί:

$$\bar{w}''''(\bar{x}) + k^2 \bar{w}''(\bar{x}) = 0 \quad (41)$$

$$\bar{w}(0) = \bar{w}(1) = 0$$

$$\bar{w}''(0) = C_1 \bar{w}'(0), \bar{w}''(1) = -C_3 \bar{w}'(1) \quad (42 \text{ α-δ})$$

Το εν λόγω γραμμικό πρόβλημα ιδιοτιμών οδηγεί στην λεγόμενη εξίσωση λυγισμού, που υπολογίζεται κατά τα γνωστά, και βρίσκεται ίση με

$$2(\cos k - 1) + k^2 \cos k \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3} \right) - k \sin k \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3} \right) + k \left( 1 - \frac{k^2}{C_1 C_3} \right) \sin k = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-2C_1 C_3 + (2C_1 C_3 + (C_1 + C_3)k^2) \cos k - k(C_1 + C_3 - C_1 C_3 + k^2) \sin k}{C_1 C_3} = 0 \quad (43)$$

Η μικρότερη ρίζα της (43)  $k_{cr}$  αποτελεί ουσιαστικά την αφετηρία του μεταλυγισμικού δρόμου ισορροπίας της ράβδου, καθόσον εξ' ορισμού για  $k \leq k_{cr}$  υπάρχει μόνο η τετριμμένη κατάσταση ισορροπίας  $(\mathcal{G}(x) = 0)^{\S}$ , το δε σημείο  $(0, k_{cr})$  είναι διακλαδικό. Σημειωτέον ότι προβλήματα του τύπου που περιγράφονται από την εξίσωση (36) επιδέχονται αναλυτικών λύσεων μέσω ελλειπτικών ολοκληρωμάτων, πλην όμως η προσέγγιση αυτή αδυνατεί να υπολογίσει την μεταλυγισμική συμπεριφορά του εκάστοτε εξεταζόμενου συστήματος<sup>[8,11]</sup>. Για το λόγο αυτό έχουν προταθεί κατά καιρούς διάφορες αριθμητικές τεχνικές για την επίλυση τους.

Η προτεινόμενη μέθοδος μπορεί αξιόπιστα και με πολύ ικανοποιητική ακρίβεια να επιλύσει το ΜΓΠΣΤ δύο σημείων (38). Επιλέγοντας ως αριθμητική εφαρμογή μία ράβδο με  $\lambda=30$ ,  $C_1=0.30$  και  $C_3=0.50$ , το κρίσιμο φορτίο  $k_{cr}$

βρίσκεται ίσο με  $k_{cr}=3,37631$  και στη συνέχεια για οποιαδήποτε τιμή του  $k > k_{cr}$  υπολογίζεται η παραμορφωμένη μορφή της ράβδου όπως εποπτικά καταδεικνύεται στα Σχήματα 7α και 7β, στα οποία απεικονίζονται ο μαθηματικός κώδικας και τα αποτελέσματα της επίλυσης για  $k=1,1k_{cr}$ .

```

ClearAll[c1, c3, β, lbe, ks, k, θ, x, λ, equ, A1, Ar, As, sol, A, F1, F2, ww, s1, s2, rig, z1, z2, dd, lef, a1, a2]
Print["Δεδομένα προβλήματος"]
c1 = 0.3
c3 = 0.5
λ = 30
(*Εξίσωση λυγισμού – γραμμική θεωρία ελαστικής ευστάθειας*)
Print["Εξίσωση λυγισμού – γραμμική θεωρία"]
lbe = 2 * (Cos[β] - 1) - (1/c1 + 1/c3) * β * Sin[β] + β^2 * Cos[β] * (1/c1 + 1/c3) + β * (1 - β^2/(c1 * c3)) * Sin[β]
(*Ανίχνευση ριζών – υπολογισμός κρίσιμου φορτίου*)
Plot[lbe, {β, 0, 2 π}]
Print["Κρίσιμο φορτίο"]
FindRoot[lbe == 0, {β, 3}]
(*Η 1 η ρίζα της εξίσωσης λυγισμού χρησιμοποιείται σαν κάτω φράγμα τιμών του αδιάστατου
φορτίου k του μη γραμμικού προβλήματος*)
ks = β /. %
(*Μόρφωση μη γραμμικού προβλήματος συνοριακών τιμών δύο σημείων και εφαρμογή της μεθόδου*)
k = 1.1 * ks
Print["Η μη γραμμική διαφορική εξίσωση που διέπει το πρόβλημα"]
equ = θ''[x] + k^2 * Sqrt[1 - 2 * k^2/λ^2 * Cos[θ[x]] * Sin[θ[x]]]
A1 = 1;
Ar = 1.2;
As = N[Ar - A1/10000];
F1[A_] := (θ'[1] + c3 * θ[1]) /. NDSolve[{equ == 0, θ[0] == A, θ'[0] - c1 * θ[0] == 0}, θ, {x, 0, 1}];
Table[{A, F1[A]}, {A, A1, Ar, As}];
F2 = Interpolation[%];
F2[A];
FindRoot[F2[A] == 0, {A, {A1, Ar}}]
ww = NDSolve[{equ == 0, θ[0] == A /. %, θ'[0] - c1 * θ[0] == 0}, θ, {x, 0, 1}];
s1 = θ[1] /. ww
s2 = θ'[1] /. ww
Print["Επαλήθευση ισχύος συνοριακής συνθήκης δεξιά"]
rig = s2 + c3 s1
dd = NDSolve[{equ == 0, θ[1] == -1.1454274641407267, θ'[1] == 0.5727137324275117}, θ, {x, 1, 0}];
z1 = θ[0] /. dd
z2 = θ'[0] /. dd
Print["Επαλήθευση ισχύος συνοριακής συνθήκης αριστερά"]
lef = z2 - c1 z1
a1 = Plot[Evaluate[θ[x] /. ww], {x, 0, 1}, AxesLabel -> {"x", "θ(x) από αριστερά"},
TextStyle -> {FontSlant -> "Italic", FontSize -> 16, FontFamily -> "Times"}]
a2 = Plot[Evaluate[θ[x] /. dd], {x, 0, 1}, AxesLabel -> {"x", "θ(x) από δεξιά"},
TextStyle -> {FontSlant -> "Italic", FontSize -> 16, FontFamily -> "Times"}]
Show[GraphicsArray[{a1, a2}], Frame -> True];

```

<sup>§</sup> η δοκός ισορροπεί στην αρχικά απαραμόρφωτη (ευθύγραμμη) κατάσταση

(α)

Σχήμα 7 (συνεχίζεται)

Δεδομένα προβλήματος

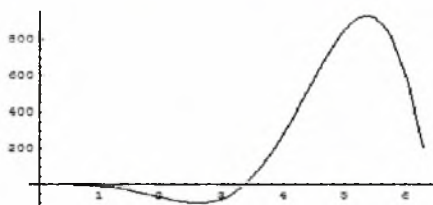
0.3

0.5

30

Εξίσωση λητισμού – γραμμική θεωρία

$$2(-1 + \text{Cos}[\beta]) + 5.33333 \beta^2 \text{Cos}[\beta] - 5.33333 \beta \text{Sin}[\beta] + \beta(1 - 6.66667 \beta^2) \text{Sin}[\beta]$$



Κρίσιμο φορτίο

$$\{\beta \rightarrow 3.37631\}$$

3.37631

3.71394

Η μη γραμμική διαφορική εξίσωση που διέπει το πρόβλημα

$$13.7933 \sqrt{1 - 0.0306518 \text{Cos}[\theta[x]]} \text{Sin}[\theta[x]] + \theta''[x]$$

$$\{A \rightarrow 1.15375\}$$

{-1.14543}

{0.572714}

Επαλήθευση ισχύος συνοριακής συνθήκης δεξιά

$$\{3.57148 \times 10^{-10}\}$$

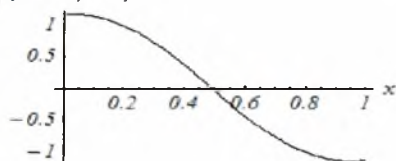
{1.15375}

{0.346145}

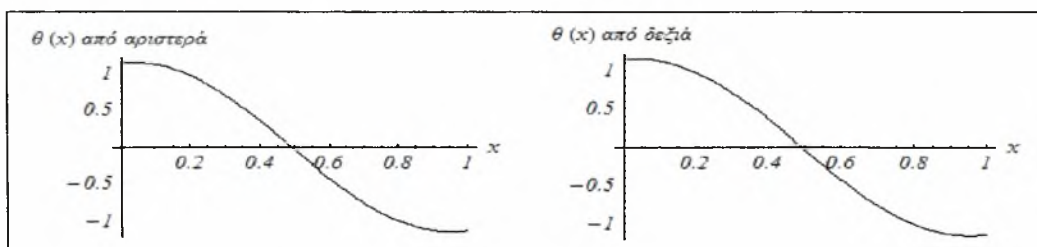
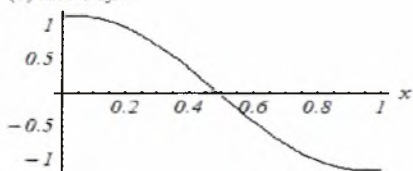
Επαλήθευση ισχύος συνοριακής συνθήκης αριστερά

$$\{0.0000190515\}$$

$\theta(x)$  από αριστερά



$\theta(x)$  από δεξιά

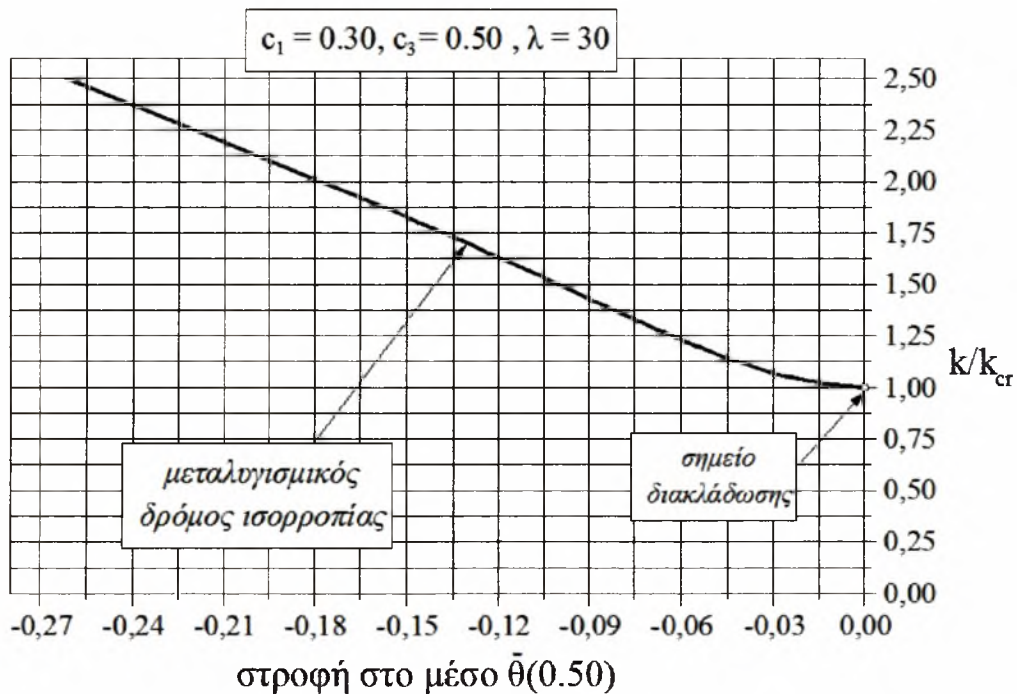


(β)



Σχήμα 7. Κώδικας Mathematica και αποτελέσματα της προτεινόμενης μεθόδου για μια εφαρμογή που σχετίζεται με το λυγισμό ελαστικά στηριζόμενης ράβδου που υπόκειται σε μεγάλες μετατοπίσεις

Τέλος, για την συγκεκριμένη εφαρμογή χαράσσεται και ο μεταλυγισμικός δρόμος ισορροπίας της ράβδου, υπό μορφή διαγράμματος  $(\bar{\vartheta}(0.5), k/k_{cr})$  και παρατίθεται γραφικά στο Σχήμα 8.



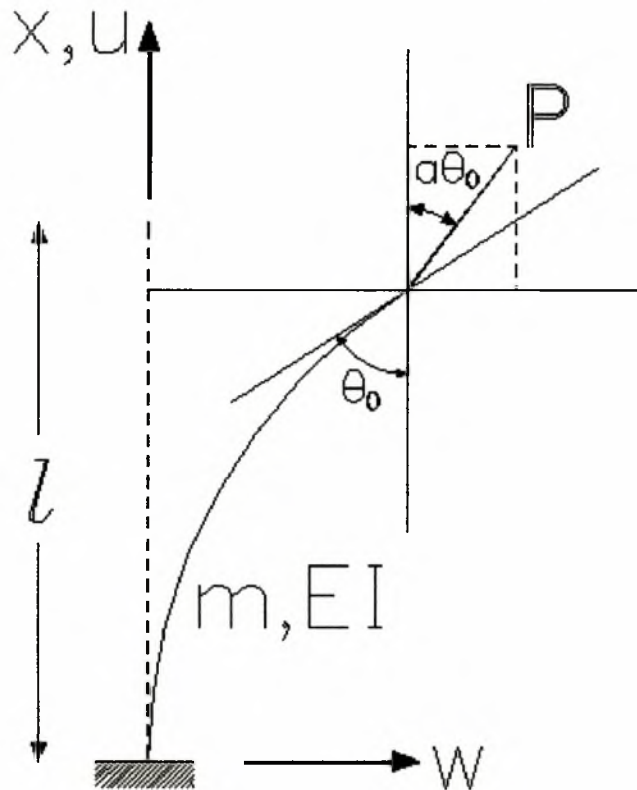
Σχήμα 8. Μεταλυγισμικός δρόμος ισορροπίας της δοκού της εφαρμογής της παραγράφου 3.2., όπως προκύπτει από τη προτεινόμενη μέθοδο.

### **3.3. Ακριβής μεταλυγισμική συμπεριφορά συνεχούς ελαστικού**

#### **μη συντηρητικού συστήματος**<sup>[6,11,16,17]</sup>

Η τελευταία εφαρμογή της μεθόδου, στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, σχετίζεται με την επίλυση του μη γραμμικού προβλήματος συνοριακών τιμών δύο σημείων, το οποίο ανακύπτει κατά τη μελέτη της μεταλυγισμικής συμπεριφοράς ενός προβόλου υπό μερικά εφαπτομενική θλιπτική δύναμη στο ελεύθερο άκρο (κορυφή) του. Η γεωμετρία και η σύμβαση προσήμων του προβόλου

φαίνεται στο Σχήμα 9, ενώ η δύναμη στη κορυφή σχετίζεται με μια παράμετρο μη συντηρητικότητας  $\alpha$ .



Σχήμα 9. Γεωμετρία και σύμβαση προσήμων προβόλου υπό μερικά εφαπτομενική (συντηρητική) δύναμη

Η ακριβής μεγάλων παραμορφώσεων (exact Elastica) συμπεριφορά του ανωτέρω μη συντηρητικού συνεχούς συστήματος (που είναι γνωστό ως πρόβολος του Beck) περιγράφεται από την ακόλουθη διαφορική εξίσωση σε αδιάστατη μορφή:

$$\left. \begin{aligned} \theta'' + k^2 \cos(\alpha\theta_0) \left[ 1 - \frac{k^2}{\lambda^2} \cos(\alpha\theta_0) \cos\theta \right] \sin\theta - k^2 \sin(\alpha\theta_0) \cos\theta = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ k^2 = \frac{P\ell^2}{EI}, \quad \theta_0 = \theta(1) \end{aligned} \right\} (44)$$

όπου  $k$  το αδιάστατο φορτίο στη κορυφή,  $\theta = \theta(x)$  η στροφή της εφαπτομένης στο σημείο  $x$  του άξονα της δοκού (η οποία θεωρείται ασυμπίεστη), όπου η αξονική συντεταγμένη αντιστοιχεί στην απαραμόρφωτη κατάσταση, ενώ  $\lambda$  είναι η λυγηρότητα

της ράβδου. Η παραπάνω διαφορική εξίσωση σχετίζεται με τις παρακάτω συνοριακές συνθήκες:

$$\theta(0) = \theta'(1) = 0 \quad (45)$$

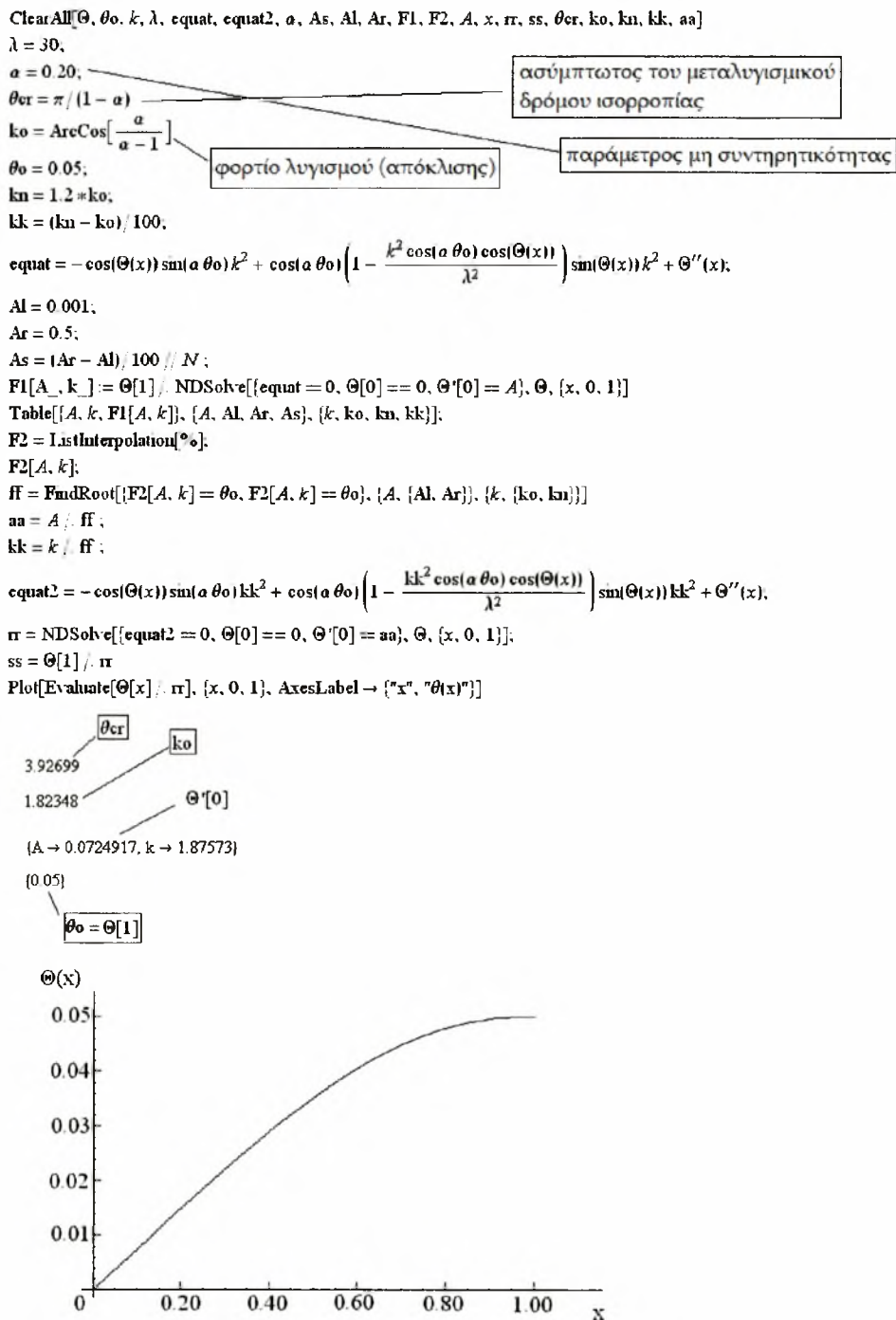
Το ΜΓΠΣΤ δύο σημείων που περιγράφεται από τις (44) και (45), όπως και αυτό των (40α-γ) μπορεί να προσεγγιστεί μέσω ελλειπτικών ολοκληρωμάτων, που όπως ήδη προαναφέρθηκε δεν οδηγούν σε μεταλυγισμικούς δρόμους ισορροπίας. Πέραν τούτων, έχει αποδειχτεί ότι τα σημεία έναρξης των μεταλυγισμικών δρόμων ισορροπίας (που είναι τα λεγόμενα φορτία λυγισμού τύπου απόκλισης) αποτελούν τις λύσεις της γραμμικής εξίσωσης λυγισμού

$$\cos k = \frac{\alpha}{\alpha - 1}, \quad \alpha < 0.5 \quad (46)$$

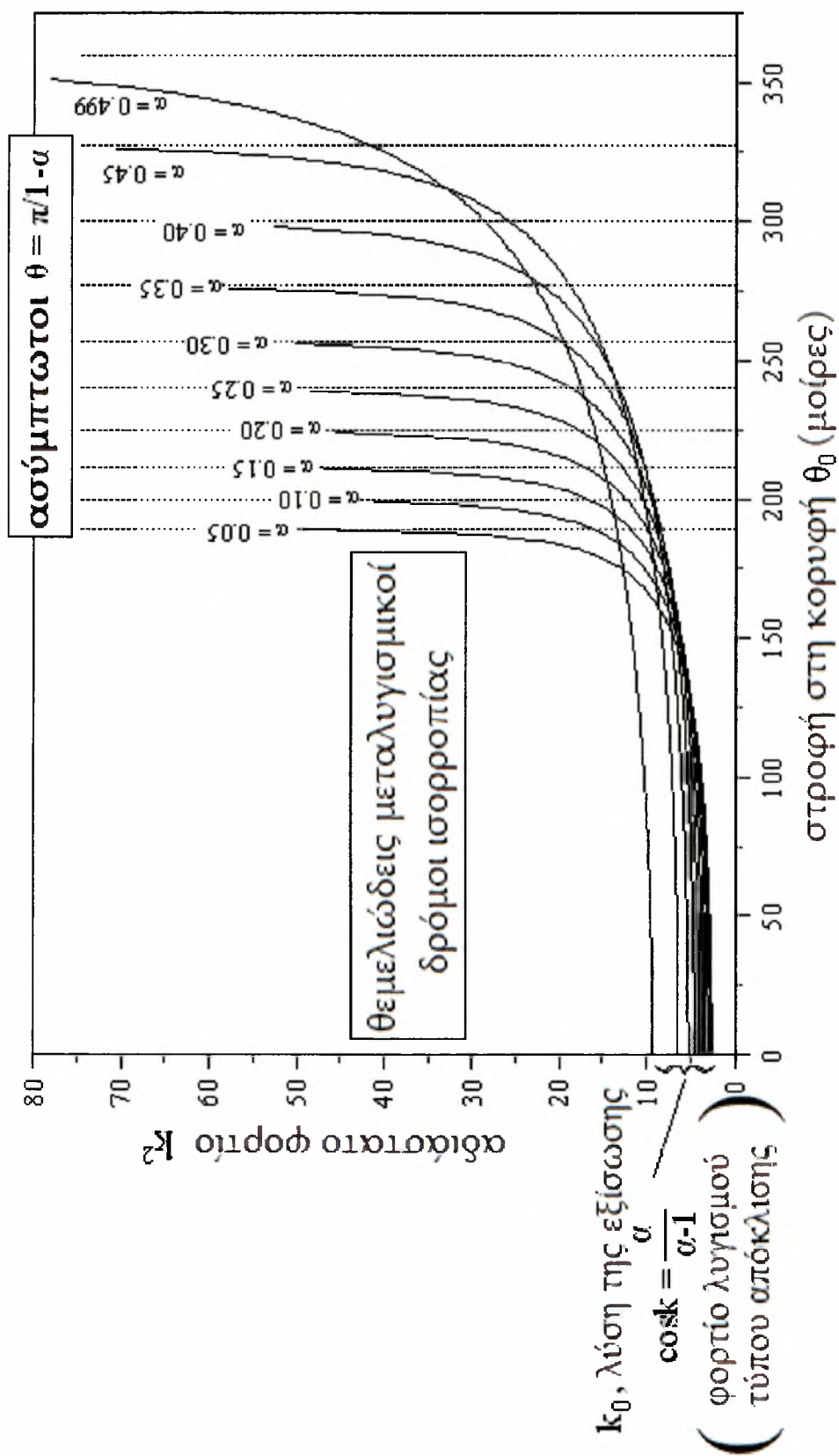
καθώς και ότι όλοι οι μεταλυγισμικοί δρόμοι διαθέτουν ασύμπτωτο στο σημείο

$$\theta = \theta_{cr} = \pi / (1 - \alpha) \quad (47)$$

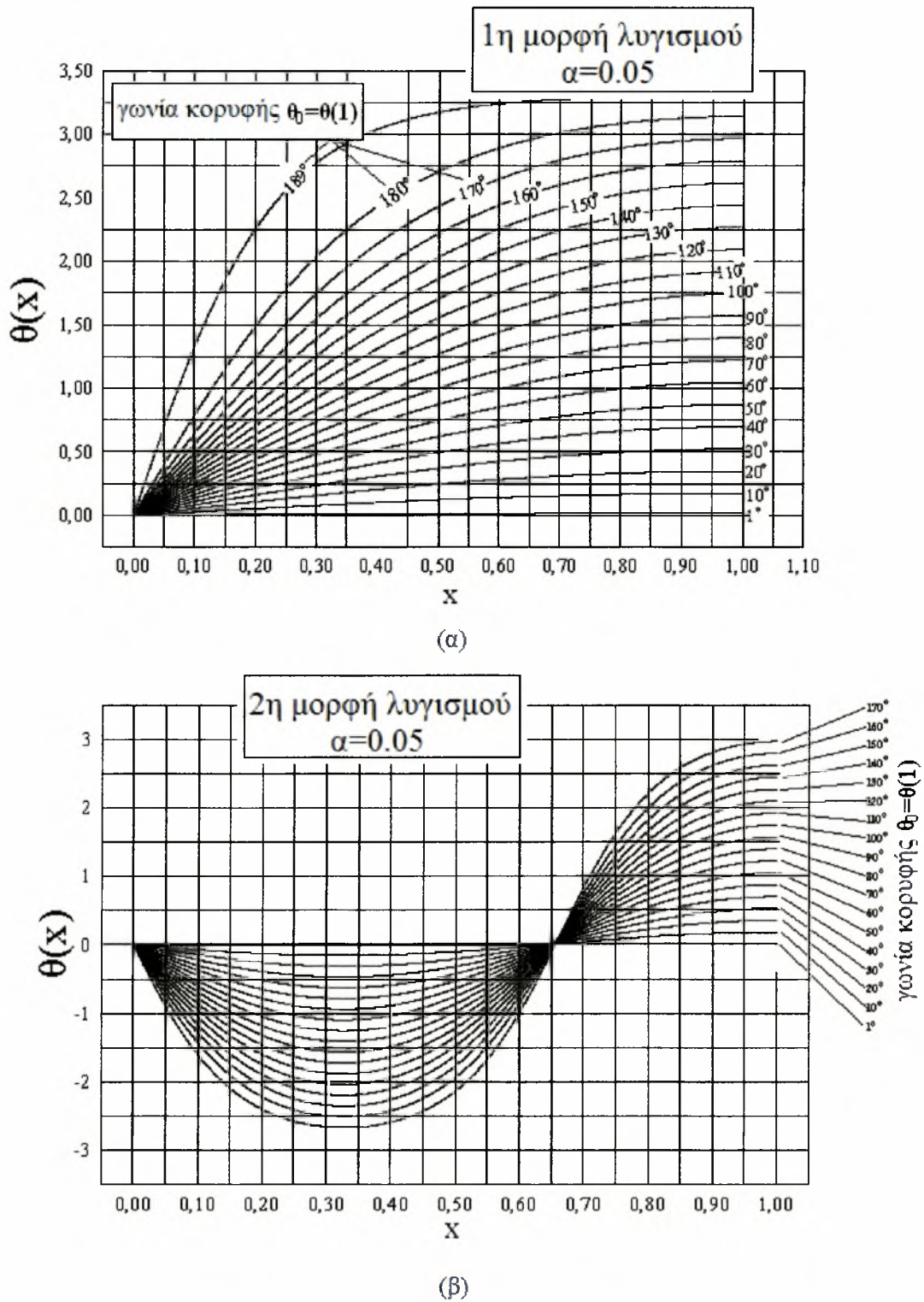
Ο προτεινόμενος αλγόριθμος δύναται απ' ευθείας και αξιόπιστα να επιλύσει το εν λόγω πρόβλημα, όπως ενδεικτικά φαίνεται στο σχετικό πρόγραμμα Mathematica, που συντάχθηκε προς τούτο, και φαίνεται στο Σχήμα 10. Μέσω της όλης διαδικασίας δύναται κανείς να υπολογίσει όλους τους μεταλυγισμικούς δρόμους ισορροπίας για οποιαδήποτε επιθυμητή τιμή της παραμέτρου  $\alpha$ , καθώς και τη παραμορφωμένη μορφή του προβόλου για μια συγκεκριμένη τιμή του  $\alpha$  και διάφορες τιμές της γωνίας κορυφής  $\theta_0$ . Τυπικά τέτοια γραφήματα παρατίθενται στα Σχήματα 11 και 12, ευρισκόμενα σε εξαιρετική συμφωνία με παρόμοια αποτελέσματα της σχετικής βιβλιογραφίας.



Σχήμα 10. Πρόγραμμα Mathematica και αποτελέσματα της μεθόδου για την επίλυση του ΜΓΠΣΤ δύο σημείων ενός μη συντηρητικού συνεχούς συστήματος



Σχήμα 11. Θεμελιώδεις δρόμοι ισορροπίας του προβόλου του Beck για διάφορες τιμές της παραμέτρου μη συντηρητικότητας  $\alpha$



Σχήμα 12. Πρώτη (α) και δεύτερη (β) μορφή λυγισμού του προβόλου του Beck για  $\alpha=0.05$  και διάφορες τιμές της γωνίας κορυφής

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάζεται ένας απλός και αποτελεσματικός αλγόριθμος για την λύση μη γραμμικών προβλημάτων συνοριακών τιμών δύο σημείων. Η προτεινόμενη προσέγγιση, που βασίζεται στις δυνατότητες των συναρτήσεων που περιέχονται στο εμπορικό μαθηματικό λογισμικό και σε βασικές διαδικασίες παρεμβολής, δεν απαιτεί εξειδικευμένες γνώσεις υπολογιστών και μπορεί να παρέχεται ικανοποιητικά από μία ποικιλία κυρίως αριθμητικών μεθόδων σε ένα ευρύ φάσμα επιστημών. Τα αριθμητικά αποτελέσματα που προκύπτουν βρίσκονται σε πλήρη συμφωνία με τα υπάρχοντα τα οποία παρέχονται από την αντίστοιχη βιβλιογραφία και αποτελούν προϊόντα περισσότερο επιστημονικών και μερικές φορές όχι απολύτως κατανοητών μεθόδων.

## **Βιβλιογραφία**

- [1] Abel, M.A., Braselton, J.P. *Differential Equations with Mathematica, 2nd Edition*, Academic Press, New York, 1995.
- [2] Bahder, T.B. *Mathematica for Scientists and Engineers*, Addison-Wesley, 1995.
- [3] Cash, J.R. A comparison of some global methods for solving two-point boundary value problems, *Appl. Math. Comput.*, **31** (1989): 449 – 462.
- [4] Cole, J.D. *Perturbation Methods in Applied Mathematics*, Blaisdell, Waltham, MA, 1968.
- [5] Ha, S.N. A Nonlinear Shooting Method for Two-Point Boundary Value Problems, *Computers and Mathematics with Applications*, **42**(10-11) (2001): 1411 – 1420.
- [6] Kandakis, G., Kounadis, A.N. On the large postbuckling response of nonlinear continuous systems, *Archive of Applied Mechanics*, **62** (1992): 256 – 265.
- [7] Keller, H.B. *Numerical Methods for Two-Point Boundary Value Problems*, Dover Publications Inc., New York, 1992.
- [8] Kounadis, A.N. An efficient and simple approximate technique for solving nonlinear initial and boundary-value problems, *Computational Mechanics*, **9** (1992): 221 – 231.
- [9] Ling, R. Singular Perturbation for Non-Linear Boundary Value Problems, *Int. J. Math & Math. Sci.*, **2** (1979): 61 – 68.
- [10] Mazzia, F., Sgura, I. Numerical Approximations of Nonlinear BVPs by means of BVMS, *Applied Numerical Mathematics*, **42**(1-3) (2002): 337 –352.
- [11] Plaut, R.H. Post-Buckling Behavior of Continuous Nonconservative Elastic Systems, *Acta Mechanica*, **30** (1978): 51 – 64.



- [12] Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T. *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, New York, 1986.
- [13] Ramachandra, L.S., Roy, F. A New Method for Nonlinear Two-Point Boundary Value Problems in Solid Mechanics, *Journal of Applied Mechanics (ASME)*, **68** (2001): 776 – 786.
- [14] Ronto, M., Samoilenko, A.M. *Numerical – Analytical Methods in the Theory of Boundary Value Problems*, World Scientific Publishing Co., 1997.
- [15] Sharidharan, R., Agarwal, R.P. General Iterative Methods for Nonlinear Boundary Value Problems, *Journal of the Australian Mathematical Society, Ser.B* **37** (1995): 58 – 85.
- [16] Sophianopoulos, D.S., Kokkinis, V. Static and dynamic stability of Beck's column under partial follower loading, *4<sup>th</sup> European Conference on Structural Dynamics, EURODYN '99*, Czech Republic, 1999.
- [17] Sophianopoulos, D.S., Konstantakopoulos, T.G. A Root-Finding Approach for the Solution of Two-Point Nonlinear Boundary Value Problems Arising in Engineering Applications, *5<sup>th</sup> World Congress on Computational Mechanics, WCCM V*, Austria, 2002.
- [18] Stoer, J., Burlisch, R. *Introduction to Numerical Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1980.



