SOBRE LA FORMACION DE LOS CONCEPTOS GEOMETRICOS Y SOBRE EL LEXICO GEOMETRICO(1)

MEDICI, D., SPERANZA, F., VIGHI, P.
Del «Centro di Sperimentazione e Documentazione dei mezzi didattici della Matematica» (Centro de Experimentación y Documentación de los medios didácticos de la Matemática) de la Universidad de Parma (Italia)
Versión castellana de Mª Jesús Salvador Jiménez

(1) Investigación realizada en el ámbito de las actividades financiadas por el «Ministerio della Pubblica Istruzione» (fondos 40% Comité Ciencias Matemáticas, Proyecto «Enseñanza y aprendizaje de la Matemática»).

Trabajo presentado en el Primer Congreso Internacional sobre investigación en la didáctica de las Ciencias y de las Matemáticas.

SUMMARY

Geometric lexicon is related to an equivalence criterion between figures —normally given by a transformation group (Klein)—. There can be a conflict between ordinary language, traditional geometric lexicon and the equivalence criterion that a given specific situation may suggest. In this paper we analyze the results of a set of questions aiming at discovering the equivalence criteria chosen by pupils between 9 and 11, and the influence of their lexicon. We have noted a considerable influence of the criteria based on the group of translations, and on the group of homoteties and translations. We have also observed the influence of «standard models» (i.e., figures appearing normally in their books), and some difficulties of conceptualization.

1. PREMISAS

Este trabajo forma parte de una serie de investigaciones sobre el estudio de la Geometría.

Pensamos que la investigación didáctica se debe desarrollar junto a la investigación epistemológica: ésta da a aquella las bases teóricas, y viceversa, la primera puede proporcionar importantes indicaciones y motivaciones a la segunda. Cuando hablamos de epistemología, entendemos, más que la investigación de justificaciones lógicas de las teorías matemáticas (de tipo «problema de los fundamentos»), la investigación del origen psicológico de los conceptos y de las teorías (Enriques 1901); y nos referimos también a teorías rudimentarias, que no alcanzan —o no han alcanzado todavía— una fase lógicamente satisfactoria (1). Por consiguiente es esencial analizar cómo las personas —particularmente aquellas en edad evolutiva— afrontan algunos problemas importantes de «sistematización» de conceptos (en esta investigación no nos interesamos por la construcción de afirmaciones, las que en el planteamiento deductivo serán axiomas o teoremas, sino por el modo en que se organiza el proceso de abstracción, por el modo en que acontece la clasificación de los «individuos»). Las respuestas podrán ser útiles para la preparación de estrategias didácticas, e incluso para comprender los orígenes de las teorías matemáticas.

Pensamos que «cada observación y cada experiencia tiene valor científico sólo en cuanto se apoye en un razonamiento» (Enriques 1906), que la «teoría domina el trabajo experimental, desde su planificación inicial a los toques finales» (Popper 1959). Precisamos pues, desde ahora, los principios matemáticos y epistemológicos que están en la base de nuestras investigaciones.

1.1. En su primer acercamiento, la Geometría forma parte de la Física (Enriques), y por tanto debe ser tratada con método experimental.

1.2. Los individuos de la Geometría son figuras (y transformaciones) geométricas: entendemos con esto imágenes mentales, sacadas de la experiencia, que asumen en sí las «características espaciales» de la experiencia misma (a menudo simplificando algunas de las mismas propiedades de carácter espacial). La geometría, como todas las ciencias, sacada de especie (Aristóteles), es decir de conjuntos de figuras (o de transformaciones), de conceptos colectivos; pero para un acercamiento correcto es necesario conocer a los individuos, saber operar sobre ellos.

1.3. En efecto, el desarrollo del pensamiento acontece según algunas «fases», indicadas por J. Piaget: en particular, en la edad que nos interesa, los niños están en la «fase de las operaciones concretas», es como decir que están en condiciones de actuar según esquemas lógicos, pero siempre en situaciones concretas.

1.4. No existe una sola, sino muchas Geometrías, cada una de las cuales se caracteriza por el grupo *G* de las transformaciones que dan el criterio de equivalencia de las figuras (la figura A es «*G*-equivalente» a la figura B si existe un elemento de *G* que transforma A en B: F. Klein).

1.5. El lenguaje se desarrolla junto al pensamiento, pero no es un instrumento neutro: de su uso depende el modo en que se forman los conceptos. En otras palabras, el lenguaje mismo contiene en sí los gérmenes de algunas teorías cognoscitivas.

2. CONCEPTOS GEOMETRICOS Y GRUPOS DE TRANSFORMACIONES

La Geometría pasa de la fase de observación y manipulación de las figuras a la transformación de los conceptos colectivos sobre todo a través del uso de un léxico adecuado. Tal paso es especialmente delicado, a causa de la gran variedad de las posibles figuras geométricas: hasta la introducción del método de las coordenadas, no existe un modo sistemático para darles un «nombre propio». La verbalización se desarrolla sustancialmente por dos vías:

a) La descripción en palabras de una figura (piensen en las indicaciones que hay que dar para dibujarla).

b) La introducción de nombres comunes —en parte tomados del lenguaje corriente, en parte «inventados» por los matemáticos— aplicables a todas las figuras de clases particularmente significativas.

Obviamente existen superposiciones entre el léxico geométrico y el corriente, y ni siquiera son del todo seguros los límites entre éstos (por ejemplo, la palabra «trapecio» ¿forma parte del léxico común?. Pero aquí nos planteamos una pregunta más comprometida: ¿el léxico geométrico tradicional es adecuado al «hablar de hechos geométricos»?

Reabsorbida la «revolución» de las Geometrías no euclideanas, F. Klein ha dado un esquema general para encuadrar cada Geometría como estudio de las propiedades invariables para un determinado grupo de transformaciones: la investigación matemática y la psicológica han puesto de relieve el interés concreto también de muchas Geometrías, evidenciando la importancia tanto teórica como en relación con diversos tipos de experiencias. Así, las manipulaciones de objetos sólidos (las sensaciones táctiles unidas a la mano, asumida como instrumento de comparación, para Enriques) conducen a la Geometría euclidea, la visión y la perspectiva a la Geometría proyectiva, el estudio de las sombras solares y la axonometría a la Geometría afín.

Nos hemos preguntado en qué modo y en qué medida la «revolución kleiniana» puede ayudar a entender cómo acontece la formulación de los conceptos geométricos. Desde un punto de vista riguroso, fijado un grupo *G* de transformaciones, sólo tienen sentido aquellos conceptos que corresponden a clases (de figuras) invariables para las transformaciones de *G*. Sin embargo no creemos que sea necesario explicitar el grupo *G*: la distinción entre los diferentes tipos de Geometría puede funcionar también como distinción intuitiva entre diversos «criterios de equivalencia» entre figuras. Una vez que se haya aceptado un criterio de equivalencia (en otras palabras: una vez imersos en un cierto tipo de experiencias), el modo de reagrupar en clases las figuras puede estar influenciado por tal criterio (Speranza 1981).

También los nombres comunes aplicables a clases de figuras son por tanto válidos, en líneas generales, sólo en relación con una cierta Geometría. El léxico geométrico tradicional se ha desarrollado en cambio en el ámbito de la geometría de Euclides: hasta hace 150 años se pensaba en *la* Geometría, y por tanto es obvio que haya influido profundamente en la nomeclatura. Más precisamente, esta última está modelada en la Geometría de las similitudes: si a una figura es aplicable un nombre común tradicional, ese es aplicable a cada figura parecida a aquella.

Para las Geometrías en cuyo grupo está contenido el de las semejanzas (por ejemplo, para la topología, para la Geometría afín, en gran medida también para la Geometría proyectiva) no existen, en líneas generales, grandes problemas de nomenclatura: podríamos limitarnos a «filtrar» el léxico tradicional, conservando los nombres de las clases que son invariables para el grupo respectivo. El léxico tradicional en cambio es inadecuado para las Geometrías cuyo grupo no contiene el grupo semejante: piensen en el grupo de las traslaciones y en el de las homotecias y de las traslaciones. En estos casos hay que recurrir a giros de palabras, a veces nada simples.

¿Es posible superar el salto entre situaciones concretas (y tipos de geometrías) por una parte, y léxico geométrico por otra? ¿Cuáles son las dificultades con que se encuentran los alumnos? ¿Cuáles son los tipos de Geometría (cuáles son los criterios de equivalencia) que se presentan como más naturales?

3. ALGUNAS OBSERVACIONES SOBRE LA PRACTICA DIDACTICA

En la práctica escolar se observan frecuentemente algunos errores de tipo conceptual. Por ejemplo: Considerar «figuras geométricas» sólo aquellas a las que se puede dar un nombre común «oficial»; confundir conceptos colectivos y conceptos individuales: en principio, éste está ya presente en la costumbre de hablar de «el cuadrado» o «el círculo», como si no existieran las figuras individuales sino solamente un arquetipo (podríamos hablar de «platonismo ingenuo»).

Desgraciadamente se usa todavía la palabra «equivalentes» por «equisuperficiales» (malgastando así un término general por un significado particular); sin embargo está desapareciendo el uso de «iguales» por «congruentes».

A los errores conceptuales se acompañan algunas costumbres que habría que evitar como: forzar los tiempos de la conceptualización y trabajar demasiado pronto conceptos abstractos, sin referencia a casos concretos: esto puede ser consecuencia de un uso demasiado precoz de la nomenclatura definitiva; insistir demasiado en la nomenclatura tradicional (a causa de los límites a los que hemos aludido en el párrafo precedente).

4. FINES DE LA INVESTIGACION

En esta investigación nos hemos propuesto estudiar la formación de conceptos geométricos (incluso de los que están o estarán desprovistos de una compensación lexical precisa) y la influencia de algunos factores: en particular qué características geométricas son elegidas preferentemente para efectuar los procedimientos de abstracción y cuál es el papel del léxico geométrico. Además hemos intentado verificar las capacidades de verbalización. Hemos preparado un cuestionario, que ha sido distribuido en algunas clases de alumnos de 9-10 años.

Téngase presente que, por su misma naturaleza, un cuestionario normal puede apelar solamente a algunas experiencias espaciales, casi siempre las unidas al dibujo y a la observación de figuras dibujadas; en particular, se trata de experiencias en el ámbito «micro» (Brousseau 1984).

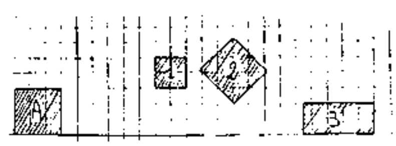
Dos cuestiones (4 y 7) se proponen probar la habilidad de describir con palabras una figura. Las otras preguntas corresponden a problemas de construcción de conceptos. En muchos casos se pide asociar a una o más figuras dadas una figura, a elegir en un conjunto determinado, para comprender el criterio de equivalencia, el tipo de características que prevalecen en la elección. La 1 y la 2 piden elegir la figura que «se parece más» a una figura dada (se elige preferentemente una figura directamente isométrica, o una homotética, o una simétrica a la dada. En otros casos la analogía se realiza en la pertenencia a un conjunto (cuestiones 3 y 5: ¿es importante la presencia de un ángulo recto en un triángulo? ¿Es considerada más significativa la presencia de ángulos rectos o de segmentos paralelos?). En las cuestiones 10 y 11 la elección de la analogía es controlada inventando un nombre común atribuido a algunas figuras, y preguntando a qué figuras se daría el mismo nombre. Naturalmente no está precisada la definición: el significado debe ser intuido por extensión, y con las preguntas tratamos de entender sustancialmente qué significado atribuye el entrevistado al nombre, qué característica retiene como más importante. Las preguntas 6 y 8 piden que se de un nombre a determinadas figuras, por tanto encuadrarlas en un concepto conocido (la orientación de la figura, en la pregunta 6, ¿influye sobre la respuesta? ¿Qué nivel de generalidad es elegido para responder a la 8, en la que las figuras son muchas?). Por último, la cuestión 9 pide la composición de una figura a partir de figuras dadas: se sobrepasa así el «esquema del dibujo», ya que las figuras componentes pueden ser asociadas a cualquier isometría.

Algunas observaciones. Dadas dos figuras X e Y, en rigor no se determina un grupo de transformaciones en el que sean equivalentes: pero por regla hay un grupo «más significativo» al que es razonable referirse. Por ejemplo, para las figuras A de la cuestión 1, es el grupo de las homotecias y de las traslaciones; para las figuras A y 3 de la pregunta 2, es el grupo de las isometrías directas. El «criterio de semejanza» tiene que ser obviamente una relación de equivalencia en el conjunto de las figuras: sin embargo no siempre ésta es expresable como la equivalencia por efecto de un grupo de transformaciones (piensen en el caso que en un conjunto de polígonos se toma como criterio el número de lados).

5. CUESTIONARIO

1) ¿Cuál de estas figuras se asemeja más a la figura A? ¿Por qué?

Figura 1



2) ¿Cuál (o cuáles) de estas figuras se parece más a la figura A? ¿Por qué?

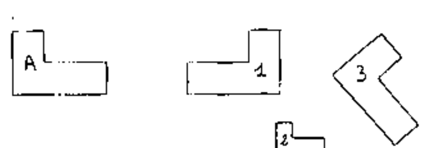


Figura 2

3) ¿Pondrías la figura 1 en A o en B?

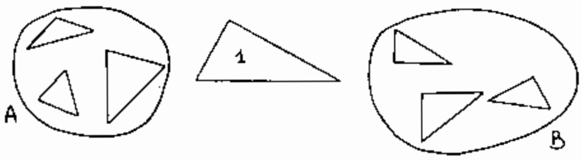


Figura 3

4) Describe la figura siguiente de manera que, siguiendo tus intrucciones, un compañero pueda dibujarla sin verla.

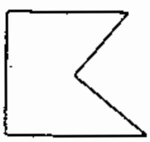


Figura 4

5) ¿Pondrías la figura 2 en A o en B? ¿Por qué?

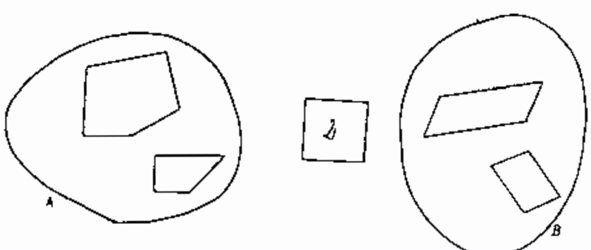


Figura 5

6) ¿Cómo llamarías a esta figura?

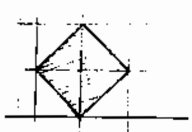


Figura 6

7) Describe la siguiente figura de manera que, siguiendo tus instrucciones, un compañero pueda dibujarla sin verla.

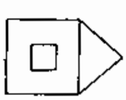


Figura 7

8) ¿Cómo llamarías a estas figuras? (Utiliza la misma manera de expresarlo para todas).

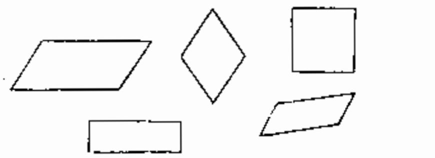


Figura 8

9) Recorta dos trozos de papel como éstos.

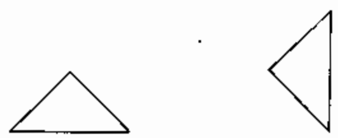


Figura 9

Júntalos de todas las formas que puedas y dibuja aquí abajo las figuras que encuentras. ¿Sabes nombrar las figuras que has encontrado?

10) Si llamas «zippi» a las figuras A y B, a cuáles de las siguientes llamas también «zippi».

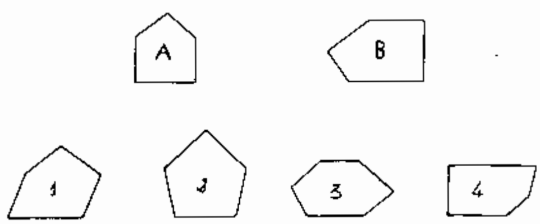


Figura 10

11) Si llamas «petlenghe» a las figuras A y B, ¿a cuáles de las numeradas llamas también «petlenghe»? ¿Por qué?

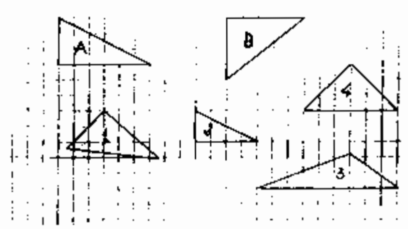


Figura 11

6. ANALISIS DE LAS RESPUESTAS

Del cuestionario hemos sacado algunas indicaciones y algunas hipótesis de trabajo para sucesivas investigaciones a fondo.

Han sido examinados 388 cuestionarios (más algunos incompletos). Señalamos algunos datos significativos que hemos obtenido.

Cuestión 1

figura 1	29%	figuras 1 y 2	5%
figura 2	58%	varias	6%
figura 3	2%		

El criterio de «semejanza» que ha llevado a la elección de la figura 2 es la congruencia; los que han optado por la figura 1 han creído predominante el criterio ofrecido por el grupo de las homotecias y de las traslaciones (¡a menudo el único modo en que un cuadrado es representado en los libros de texto o por los profesores es el de la figura 1!).

Pocos niños, utilizando la cuadrícula, afirman que la figura 3 se parece a A porque es la única que tiene la misma extensión.

En base a las motivaciones aportadas podemos observar que la palabra «cuadrado», que es aplicable tanto a la A como a las figuras 1 y 2, lleva a la elección de ambas.

Cuestión 2

figura 1	32%	figuras 1 y 3	13%
figura 2	8%	todas las figuras	4%
figura 3	2%	varias	8%

Se trata de descubrir las «semejanzas» como en el caso precedente, pero aquí se propone la comparación de figuras de las que la geometría tradicional no se ocupa; esto requiere del niño una búsqueda más atenta y menos ligada a condicionamientos verbales. Muchas elecciones recaen sobre la figura 1 que es congruente no directamente a la A, sino, simetría aparte, está orientada como la A respecto al folio (queriendo indicar un grupo, podemos citar el formado por las traslaciones y las simetrías con deslizamiento, $x' = \pm x + p$; $y' = y + q$). Sólo ligeramente preferida es la 3 que es directamente isométrica a A.

Interesante es la tendencia (sobre todo para los alumnos de la escuela elemental) a dar un nombre a la figura A (bota, pie, etc) para buscar luego una figura a la que atribuye el mismo nombre.

Cuestión 3

conjunto A	9%	conjunto A y B	3%
conjunto B	83%	ninguno de los dos conjuntos	3%
varios	2%		

No esperábamos que la casi totalidad de los niños decidiese colocar la figura 1 en B: tal vez la actividad desarrollada en clase les ha acostumbrado a reconocer un ángulo recto incluso cuando no está dibujado con los datos paralelos a los bordes del folio. También hay quien no ve ningún motivo para colocar la figura en uno de los dos conjuntos (falta de reconocimiento de un ángulo recto).

Cuestión 4 y 7

Los resultados denotan notables dificultades para describir las figuras asignadas.

Para la del 7 existe sin embargo la posibilidad de «apoyarse» en la nomenclatura clásica y son bastante frecuentes descripciones de este tipo: «Dibuja un cuadrado, en el centro dibuja un cuadrado más pequeño (algunos precisan que la distancia entre los lados paralelos es de 0,8 cms.) y apoya en el lado derecho (algunos dicen «al Este») del cuadrado grande un triángulo isósceles».

Sin embargo para la cuestión 4 los vocablos de la geometría no son adecuados, algunos recurren a expresiones del tipo «es una eme al revés y cerrada». Es muy difícil encontrar una descripción que efectivamente pueda conducir al trazado de la figura (a pesar de que es más simple que la de la cuestión 7).

Cuestión 5

conjunto A	7%	ni A ni B	9%
conjunto B	80%	varios	4%

Nos esperábamos una alternativa entre el paralelismo de lados opuestos y la presencia de un ángulo recto, como característica para insertar la figura 2 en B o en A; sin embargo la mayor parte de los niños, para justificar la selección del conjunto B, ha indicado el criterio del número de los lados. Sólo algunos reconocen en los elementos de B paralelogramos. Entresacamos algunas respuestas significativas: «En todas las figuras que están en B y en la figura 2 el área se calcula del mismo modo», «El cuadrado asemeja más a la figura de B porque deformándolo puede convertirse en un romboide», «En B hay una figura igual a la 2, pero puesta de lado».

Los resultados nos han sugerido una revisión de la pregunta y subdividirla en varias cuestiones.

Cuestión 6

cuadrado	38%	cuadrado torcido	2%
rombo	50%	varios	2%
cuadrilátero o paralelogramo 9%			

El alto porcentaje de los que responden «rombo» indica que es fuerte la influencia del grupo de las traslaciones como criterio de comparación de las figuras.

La respuesta a la cuestión varía notablemente de clase en clase: obviamente la respuesta va unida al trabajo desarrollado. Particularmente, hemos notado que en las Escuelas Básicas en las que se han tratado las transformaciones geométricas la respuesta ha sido casi siempre «cuadrado».

Nos esperábamos una correlación neta entre las respuestas a las preguntas 1 y 6: precisamente la figura 1 con «cuadrado» y la figura 2 con «rombo». Esta está pero no es notable; es más, en las respuestas ocurre que el mismo estudiante llama «cuadrado» a la figura 2 de la cuestión 1 y responde «rombo» a la cuestión 6.

Cuestión 8

cuadriláteros	35%	un nombre para cada figura	29%
polígono	3%	paralelogramos	10%
otros	15%	figuras geométricas	8%

Las figuras presentadas no son equivalentes respecto a un grupo de transformaciones (salvo el topológico), pero se pide elegir unas características geométricas comunes. Los porcentajes denotan mucha confusión al dar privilegio a tales características: pensábamos que una podía ser «tener un par de lados paralelos», pero muy pocos la han elegido. Tal vez ni siquiera ha existido la preocupación de buscar las propiedades geométricas de los «zippi», salvo la más evidente concerniente al número de lados (17%).

El 50% llama «zippi» a dos figuras de las que una (generalmente la 2) va asociada con A, la otra (la 1 o la 3) con B: evidentemente los alumnos se han encontrado con dificultades por la presencia de *dos* figuras con las que las demás deben ser comparadas (hecho que por otra parte es significativo para la individualización de propiedades comunes). Nos parece que esto revela dificultades de conceptualización análogas a las verifidas en las respuestas de la pregunta 8.

Cuestión 11

figura 2	18%	figura 1	5%	figuras 1-2-3-4	7%
figuras 1-2	18%	figuras 1-4	3%	otras respuestas	6%
figuras 2-4	26%	figuras 1-2-4	7%	no hace el ejercicio	10%

Han sido dadas todas las respuestas posibles, pero de manera menos homogénea respecto a la cuestión precedente. Muchas opciones van a las figuras 2 y 4 o bien a la 1 y a la 2, pero mientras los triángulos 2 y 4 son rectángulos, con una atenta observación resulta que 1 no lo es.

Habíamos asignado un nombre ficticio a A y a B para dejar la posibilidad de relacionar solamente con los triángulos de lados paralelos a la cuadrícula. Por el número relativamente alto de estudiantes que, además de la figura 2, indica también 1 y 4, nos parece poder llegar a la conclusión que los niños han sido llevados a reconocer como criterio de clasificación de triángulos la presencia de un ángulo recto, en cualquiera de las maneras en que el triángulo esté orientado (véase para los triángulos la cuestión n.3) mientras que para otros polígonos tal criterio es mucho menos importante (cfr. la pregunta n. 10).

Señalamos algunas justificaciones:

«la 2 porque poniéndolas de pie o tumbadas dan las mismas figuras».
«la A es un triángulo rectángulo y la 2 la equivale, y la A que es triángulo es lo mismo que la B».
«la 1 y la 2 si se invierten».

7. CONSIDERACIONES FINALES

Las respuestas al cuestionario revelan cómo la presencia de un «nombre común oficial», que se puede atribuir a una figura geométrica, influye a menudo en el criterio con el que los niños agrupan o asocian figuras. Sin embargo se notan dificultades al describir las figuras cuando no se pueden avalar por nombres conocidos. Otras respuestas indican que frecuentemente (para las figuras dibujadas) el criterio elegido es el dado por el grupo de las traslaciones (o por el de las homotecias y de las traslaciones).

Este resultado nos induce a algunas reflexiones sobre la práctica didáctica. Mientras es obvia la importancia práctica que tienen las figuras dibujadas (las ilustraciones de los libros, los dibujos en la pizarra, los mismos dibujos de los niños,...). A menudo se nota que los libros, para cada tipo de figura, presentan *un solo* ejemplo gráfico. Esto es ya por sí mismo una impropiedad de tipo lógico: un concepto colectivo se forma viendo *varios* ejemplos de individuos que a ello se refieren: entre otras cosas cada individuo se refiere a varios conceptos. *Esa* figura acaba por tomarse como *modelo standard* del concepto (Gallo, 1985).

Pero ahora podemos observar una ulterior consecuencia negativa de la mencionada práctica. Los dibujos representan figuras en una posición especial (normalmente, un triángulo rectángulo con los catetos paralelos a los lados del folio, un rombo con las diagonales paralelas a los lados del folio,...).

Nadie dice que la nomenclatura se extiende a otras figuras (concretamente a todas las figuras semejantes). Los niños, como hemos visto, sin embargo son llevados a aplicar al modelo standard una traslación o una homotecia. Así se explica cómo el 50 % de los entrevistados ha respondido «rombo» a la cuestión 6. Se explica también cómo algunos niños sienten la necesidad de enriquecer el léxico con expresiones como «cuadrado torcido» y «poniendo la figura en pie» (véase también Gallo, 1985).

Sin embargo no parece claro cómo se diferencian los tres métodos usados para probar la formación de conceptos —el de la semejanza, el de pertenecer a un conjunto, el de un nombre común inventado—. Queda también aclarar mejor el relieve que se da a las diferentes características geométricas en la formación de los conceptos. Obviamente, quedan por examinar las diferentes situaciones de tipo «figuras dibujadas». Por todos estos motivos, nos proponemos profundizar en nuestra investigación.

Nota

(1) «... es de desear vivamente que las adquisiciones experimentales promuevan un desarrollo adecuado de la representación intuitiva, por la que los nuevos hechos se unan a la gran masa de los conocimientos instintivos más antiguos, mediante conceptos extendidos mayormente...» (Enriques 1906, p. 373).

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

BROUSSEAU, G., La situation fondamentale pour la Geometrie Elementaire en tant que modèle de l'espace. *Atti Conv. «La ricerca in didattica della Matematica: suoi contenuti e finalità»*, Trento 1984.

ENRIQUES, F., 1901, Sulla spiegazione psicologica dei postulati della geometria, *Rivista filosofica*, vol. 4, pp. 171-195.

ENRIQUES, F., 1906, *Problemi della scienza*, (Zanichelli: Bologna).

GALLO, E., 1985, Geometria, percezione, linguaggio, *L'educazione matematica*, vol. 6, pp. 61-104.

KLEIN, F., 1872, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, *Ges. Werke*, B. 1, pp.460-497 (Springer: Berlin).

M. PELLEREY, 1984, Geometria e immagini mentali, *L'Educazione matematica*, vol. 5, suppl. 1, pp. 112.

PIAGET, J., INHELDER, B., 1967, *La genèse des structures logiques élémentaires* (Delachaux et Niestlé: Paris-Neuchatel).

POPPER, K.R., 1959, The Logic of Scientific Discovery (Hutchinson: London).

SPERANZA, F., 1981, La geometria nella scuola elementare, *L'educazione matematica*, vol. 2, suppl. 2 pp. 1-23.

SPERANZA, F., 1984, Le trasformazioni geometriche, come e perchè: *L'educazione matematica*, vol. 5, suppl. 1, pp. 113-131.

TORRETTI, R., 1978, *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré* (D. Reidel: Dordrecht).