

SOBRE EL MOVIMIENTO DE UN CONDUCTOR EN UN CAMPO MAGNETICO

ARANDA i OLIVERAS, J.

I.B. «Juan de Austria» de Barcelona

SUMMARY

The classical example of a conductor that moves on metal rails linked at one end in the presence of a uniform magnetic field is explained in many Physics books. An *implied* simplification, view can lead to misleading conclusions, is generally made whenever the problem is studied from the point of view of the Lorentz force even in many famous Physics books. The conventional explanation is fully commented on in this article and the phenomenon is analysed from a dynamic and energetic point of view.

1. INTRODUCCION

Es habitual en los libros de texto presentar el caso de un conductor rectilíneo que se mueve en un campo magnético uniforme y perpendicular al plano barrido por el conductor en su movimiento a fin de ilustrar la producción de una f.e.m. inducida. El valor de ésta puede deducirse a partir de la fuerza de Lorentz y el resultado, cuando el conductor se mueve sobre guías metálicas paralelas conectadas por un extremo, coincide con el obtenido al aplicar la ley de Faraday al circuito determinado por el conductor y las guías.

Desde la circunstancia que en muchos de los textos que se usan habitualmente, algunos de ellos de reconocido prestigio (Feynman 1982), (Lorrain y Corson 1972), (Alonso y Finn 1970), (Sears y Zemansky 1966), (Tipler 1977), (Catala 1977), se analiza el problema mediante una simplificación *implícita* relativa al movimiento de los portadores de carga (responsables de la corriente inducida). Cuando esta simplificación se extiende al cálculo de la f.e.m. inducida mediante consideraciones energéticas puede conducir al lector a la errónea conclusión de que la fuerza de Lorentz es la que suministra energía a las cargas lo cual es imposible ya que dicha fuerza es siempre perpendicular al movimiento de éstas.

Si bien un análisis exacto del problema se encuentra en el conocido texto de Halliday y Resnick (1974) creemos que adolece de poca claridad tanto por las figuras que acompañan al texto como por la introducción de la fuerza normal cuyo origen queda oscuro.

El objetivo de este artículo consiste en realizar una crítica de la exposición usual del problema y presentar un estudio detallado del fenómeno desde el punto de vis-

ta dinámico y energético. Creemos que puede ser de utilidad para los profesores de cursos universitarios de Física General y quizá también para los profesores de COU y BUP.

2. CRITICA DE LA EXPOSICIÓN CONVENCIONAL DEL PROBLEMA

La fig. 1 muestra el ejemplo típico de un conductor moviéndose a velocidad \vec{v} sobre dos guías metálicas horizontales y paralelas conectadas por un extremo. El sistema está sometido a un campo magnético uniforme \vec{B} perpendicular al plano determinado por las guías.

Sobre cada una de las cargas del conductor aparece una fuerza magnética de Lorentz. Sea q un portador, esto es, una carga, supuesta positiva en nuestro razonamiento, que puede moverse con relativa facilidad dentro del conductor. La expresión que usualmente se da para la fuerza magnética que actúa sobre q es:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \quad (1)$$

cuya dirección y sentido se muestran en la fig. 1.

En algunos textos, además, de un modo más o menos explícito, se atribuye a dicha fuerza el trabajo necesario para llevar la carga del extremo inferior al superior del conductor (en la figura 1). Esto es, la fuerza de Lorentz aparece como causa del campo electromotor que determina la f.e.m. inducida. Se llega así al conocido resultado:

$$E = B l v \quad (2)$$

En realidad la expresión (1) sólo es correcta en el supuesto de que los portadores se muevan con la misma velocidad \bar{v} que el conjunto del conductor. Y ello sólo es cierto *aproximadamente* pues los portadores se mueven respecto al conductor con cierta velocidad \bar{u} (si no fuera así no existiría la corriente inducida). Por supuesto que, en los casos de aplicación práctica, $\bar{u} \ll \bar{v}$ y ello hace de (1) una muy buena aproximación de la expresión exacta:

$$\bar{F} = q \bar{V} \times \bar{B} \quad (3)$$

Donde $\bar{V} = \bar{v} + \bar{u}$ es la velocidad de los portadores respecto al sistema de referencia del laboratorio. La dirección de la fuerza de Lorentz según la expresión (3) se muestra en la fig. 2 y es, naturalmente, distinta de la representada en la fig. 1.

Se plantea ahora la siguiente cuestión: ¿es también (2), deducida de (1), una expresión aproximada? La respuesta es: *no*; la expresión (2) es exacta. Ello se debe, como veremos con detalle más adelante, a que la fuerza dada por (1) es en realidad una de las componentes de la fuerza de Lorentz, exactamente dada por (3), y es esta componente la que realiza un trabajo positivo sobre los portadores pudiendo ser considerada, ella sí, como la causa del campo electromotor. Sin embargo cuando se tiene en cuenta el trabajo realizado por la otra componente de la fuerza magnética resulta, como debe ser, que el trabajo total de la fuerza de Lorentz sobre los portadores es nulo.

Así, pues, si como es habitual, se mantiene *implícita* la aproximación contenida en (1) se conduce al alumno a la grave conclusión de que la fuerza de Lorentz realiza trabajo. Si, por el contrario, y como debería ser, se hace *explícita* dicha aproximación, puede llevarse al estudiante a creer que la expresión que da f.e.m. es aproximada

3. ANALISIS EXACTO Y DETALLADO DEL FENOMENO

Un análisis detallado del fenómeno que estudiamos exige distinguir entre la situación en que el conductor *comienza* a moverse y aquella otra en que *ya* se mueve a velocidad constante (estado estacionario). Por otra parte se gana en claridad si se comienza estudiando el movimiento de un conductor sin la presencia de las guías.

3.1 Movimiento de un conductor en un campo magnético

La fig. 3 muestra un conductor al que, en un instante dado, se comunica una velocidad \bar{v} . El conductor se mueve perpendicularmente a un campo magnético uniforme \bar{B} . El movimiento tiene lugar sobre un plano horizontal sin rozamiento. No existen, pues, aquí las guías y no hay, por lo tanto ningún circuito.

Supongamos que en la situación indicada en la fig. 3 *todas* las cargas *comienzan* a moverse a la velocidad \bar{v} . Sea q a la carga, supuesta positiva, de un portador.

Sobre él actúa una fuerza magnética:

$$\bar{f}_m = q \bar{v} \times \bar{B}$$

La carga q bajo la acción de \bar{f}_m , y si no existiera interacción con otras cargas, comenzaría a realizar un movimiento circular. Debido a ello aparecen dos componentes V_x y V_y en la velocidad de q . Por otra parte el módulo de la velocidad no puede cambiar por ser la fuerza de Lorentz perpendicular al movimiento. Así, pues, $V_x < v$. Esto significa que la velocidad de la carga q según el sentido OX se hace inferior a la del conjunto del conductor formado por cargas fijas. En consecuencia dicha carga es «atrapada» por la pared izquierda del conductor. De un modo más preciso: aparece una densidad de carga positiva en la pared opuesta. Dentro del conductor, pues, se crea un campo eléctrico que llamaremos campo eléctrico transversal \bar{E}_t (fig. 4)

Este campo eléctrico realiza sobre un portador q del conductor una fuerza $\bar{f}_t = q \bar{E}_t$ la cual determina una aceleración de modo que la componente V_x de dicha carga aumenta. Por supuesto (principio de acción y reacción) sobre las paredes del conductor aparece una fuerza \bar{f}_t que tiende a frenarlo. Ello implica, si se quiere mantener la velocidad \bar{v} constante, la acción de una fuerza externa igual a \bar{f}_t sobre el conductor por cada portador que circula en su interior.

La situación estacionaria se conseguirá cuando $V_x = u$. Entonces cesará la acumulación de carga en las paredes laterales y la densidad superficial de carga en ellas se mantendrá constante en el tiempo. La fig. 4 muestra las fuerzas que actúan en esta situación sobre un portador cuya velocidad \bar{V} tiene como componentes $V_x = v$ y $V_y = u$. Observemos la dirección de la fuerza magnética \bar{f}_m . Debe cumplirse, obviamente:

$$f_m \sin \alpha = f_t = q B u \quad (4)$$

La resultante de las fuerzas que actúan sobre la carga q es, pues, una fuerza dirigida en el sentido OY cuyo módulo es:

$$f_m \cos \alpha = q B v \quad (5)$$

Esta fuerza acelera la carga según OY de modo que la componente u aumentaría con el tiempo. A ello se opone en primer lugar la interacción del portador con las cargas fijas del conductor (efecto Joule). Por otra parte el hecho de ser el conductor finito determina una acumulación de carga positiva en su extremo superior y de negativa en el inferior y, por tanto, un campo eléctrico longitudinal \bar{E}_l que tiende a frenar el movimiento de la carga q hacia el extremo superior del conductor.

En la fig. 5 se representan todas las fuerzas que actúan sobre q . La fuerza debida al campo eléctrico longitudinal es $\bar{f}_l = q \bar{E}_l$; \bar{f}_l puede considerarse como una fuerza de rozamiento que da cuenta del efecto Joule. A medida que va acumulándose carga en los extremos del conductor va aumentando \bar{E}_l . Así, pues, llega un momento (estado estacionario) en que la componente u

se anula con lo cual cesa el movimiento de las cargas respecto al conductor. Todas las cargas se mueven ahora con velocidad \bar{v} por lo que, según (4) la fuerza \bar{f}_t debe ser nula. Ello indica que ha desaparecido la densidad de carga en las paredes del conductor. Su desaparición se comprende recorriendo a la inversa el proceso que ha conducido a su creación. La nueva situación dinámica se representa en la fig. 6.

Obsevemos que, *ahora sí*, la fuerza magnética es perpendicular a la velocidad del conductor y que la fuerza total sobre los portadores del mismo es nula:

$$f_m = f_l$$

$$q B v = q E_l$$

Así, pues, en el estado estacionario, existe un campo eléctrico permanente en el conductor cuya existencia, por otra parte, ha sido confirmada experimentalmente (Halliday y Resnick 1974)

El hecho de que $\bar{f}_t = 0$ trae como consecuencia que, en ausencia de rozamiento, no sea ya preciso aplicar una fuerza externa al conductor a fin de mantener constante su velocidad. Sin embargo, como hemos visto, mientras no se ha llegado al estado estacionario ha estado actuando, por cada portador, una fuerza externa, según (4), igual a:

$$f_t = q B u$$

Esta fuerza es la única que puede comunicar energía a las cargas si el conductor debe moverse a velocidad constante. La potencia p correspondiente es:

$$p = f_t v = q B u v$$

El trabajo realizado por \bar{f}_t hasta llegar al estado estacionario se invierte en energía interna (efecto Joule), energía electrostática (campo \bar{E}_l) y energía electromagnética (aceleración de las cargas)

3.2 Movimiento de un conductor sobre guías

Deseamos ahora estudiar la situación que se produce cuando el conductor anterior, moviéndose estacionariamente, toma contacto con dos guías metálicas paralelas unidas por un extremo.

Como hemos visto existe en el conductor un campo eléctrico \bar{E}_l y por tanto una d.d.p. entre sus extremos superior e inferior. Si dichos extremos se ponen en contacto con las citadas guías (que cierran un circuito) se producirá una corriente eléctrica, esto es, un movimiento de portadores. Por supuesto ello supone que se rompe el equilibrio en el interior del conductor. Aparece de nuevo una componente u en la velocidad de los portadores del conductor y se repetirá la situación de la fig. 5. En particular esto significa que vuelve a actuar otra vez el campo eléctrico transversal \bar{E}_t y que se precisa una fuerza externa para mantener la velocidad \bar{v} del conductor. La fig. 7 representa la nueva situación para un portador q en el conductor. Si la situación es estacionaria debe verificarse:

$$f_t = q B u = f_m \sin \alpha \quad (6)$$

$$f_l + f_j = q B v = f_m \cos \alpha \quad (7)$$

De todas las fuerzas que actúan sobre q sólo realizan trabajo \bar{f}_t , \bar{f}_l , y \bar{f}_j . La primera realiza un trabajo positivo y las otras dos negativo. Esto es, la única fuerza que comunica energía a la carga q es \bar{f}_t . Naturalmente es la fuerza externa aplicada al conductor y no dibujada en la fig. 7 la que aporta desde el exterior dicha energía. De otro modo el conductor no mantendría su velocidad constante. La fuerza externa es igual a \bar{f}_t por el número de portadores que se mueven en el conductor.

Desde el punto de vista de las componentes la fuerza que *directamente* comunica energía a las cargas es, como ya hemos citado en el apartado 2, una de las componentes de la fuerza magnética: $f_m \cos \alpha$. El trabajo que esta componente realiza por unidad de carga que se mueve en el conductor es justamente la f.e.m. inducida E cuyo valor es, teniendo en cuenta (7):

$$E = \frac{f_m \cos \alpha l}{q} = B v l \quad (8)$$

Llegamos, pues, al mismo resultado que (2) deducido ahora rigurosamente. Observemos, sin embargo, que la fuerza magnética f_m no realiza trabajo. En efecto es inmediato comprobar, teniendo en cuenta su sentido y la expresión (6), que el trabajo correspondiente a la componente $f_m \sin \alpha$ es igual y de signo opuesto al de la componente $f_m \cos \alpha$. La única fuente de energía es en realidad, el trabajo de la fuerza externa cuyo valor es, por unidad de carga que se mueve en el conductor:

$$f_t v \Delta t / q$$

donde $\Delta t = l/v$ es el tiempo durante el que actúa f_t sobre cada carga libre que recorre el circuito. Puede verse, teniendo en cuenta (6), que la expresión anterior coincide con la f.e.m. dada por (8) lo cual confirma que es efectivamente el trabajo de la fuerza externa el origen de la energía asociada a la f.e.m. inducida.

4. CONCLUSION

Se ha mostrado cómo el uso implícito de una aproximación en el análisis del movimiento de los portadores en el problema de un conductor que se mueve sobre guías metálicas en presencia de un campo magnético puede conducir a consideraciones erróneas relativas al papel de la fuerza de Lorentz en el balance energético del fenómeno. Y que incluso poniendo de manifiesto la aproximación, lo cual siempre debería hacerse, la explicación convencional puede llevar a dudar de la exactitud de la expresión de la f.e.m. obtenida.

Se ha visto cómo el riguroso análisis del problema exige, para un conductor bidimensional, la consideración de dos campos eléctricos: uno longitudinal y otro transversal. El primero determina una d.d.p. entre los extremos del conductor y el segundo actúa sobre los por-

tadores permitiendo que sigan al conductor en su movimiento de traslación. Este campo transversal se relaciona con el efecto Hall.

Hemos probado que la f.e.m. inducida puede calcularse a partir de una componente de la fuerza de Lorentz y que el trabajo realizado por esta componente es igual al efectuado por la fuerza externa pero que el trabajo total correspondiente a las dos componentes de la fuerza magnética es cero.

Creemos que, si bien es conveniente que los profesores conozcan el análisis detallado del fenómeno tal como aquí se ha presentado su carácter prolijo lo hace inadecuado para fines didácticos con alumnos principiantes. Por otra parte hemos puesto de manifiesto los inconvenientes de la exposición convencional. Por todo ello opinamos que, en los primeros cursos es aconsejable deducir la expresión de la f.e.m. inducida a par-

tir de la ley de Faraday y emplear la fuerza de Lorentz, a lo sumo, para justificar *cualitativamente* la aparición de corriente inducida. El estudio cuantitativo mediante la fuerza de Lorentz debería realizarse en cursos superiores o con alumnos avanzados. En este caso puede optarse, si se desea, por una exposición también correcta pero menos detallada que la de este artículo partiendo directamente de la situación estacionaria sobre las guías (fig. 7) y, prescindiendo de su naturaleza eléctrica, presentar la fuerza \vec{f}_1 como una fuerza normal realizada por las paredes del conductor; éste es el método empleado por Halliday y Resnick en el texto citado en la Introducción

AGRADECIMIENTO

Agradezco al Dr. F. Senent, de la Universidad de Valencia, su interés y sus múltiples sugerencias y observaciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- ALONSO, M., FINN, E.J., 1970, *Física* (Fondo Educativo Interamericano: E.E.U.U., Vol. II).
 CATALÁ, J., 1977, *Física General* (7ª edición: Valencia)
 FEYNMAN, R.P., 1972, *Física*, (Fondo Educativo Interamericano: E.E.U.U., Vol II)

- HALLIDAY, D., RESNICK, R., 1974, *Física* (CECSA: México).
 LORRAIN, P., CORSON, D.R., 1972, *Campos y Ondas Electromagnéticas* (Selecciones Científicas, Madrid).
 TIPLER, P.A., 1977, *Física* (Reverté, Barcelona, Vol. II)
 SEARS, F.W., ZEMANSKY, M.W., 1966, *Física* (Aguilar: Madrid).

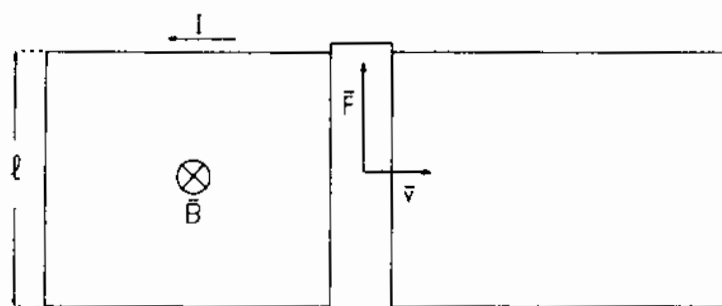


Figura 1

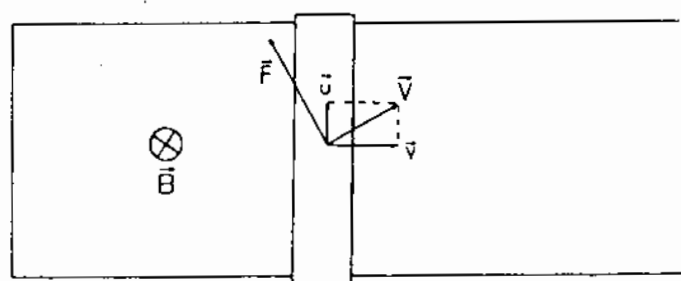


Figura 2

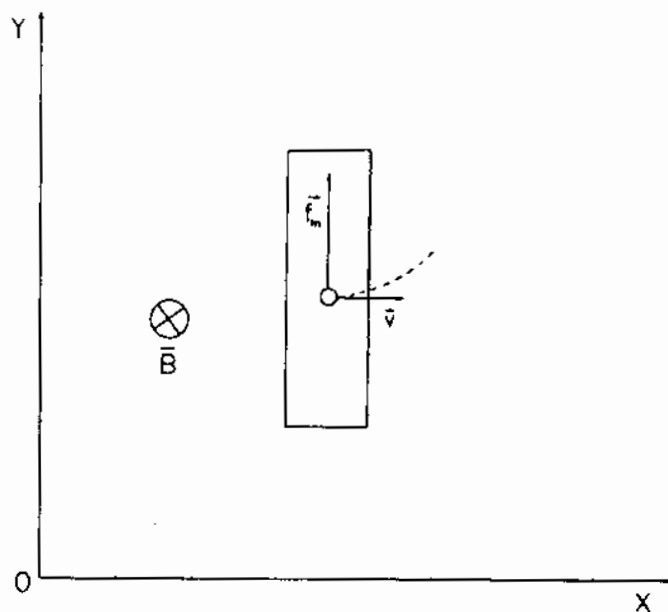


Figura 3

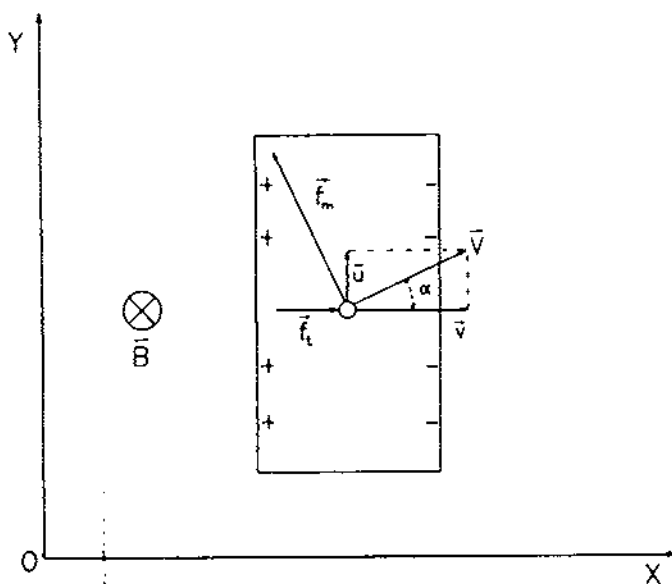


Figura 4

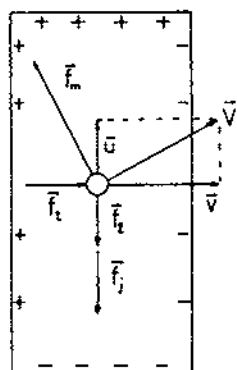


Figura 5

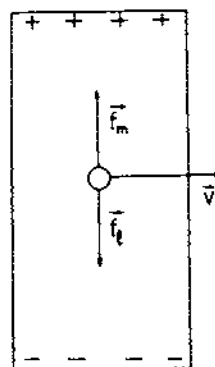


Figura 6

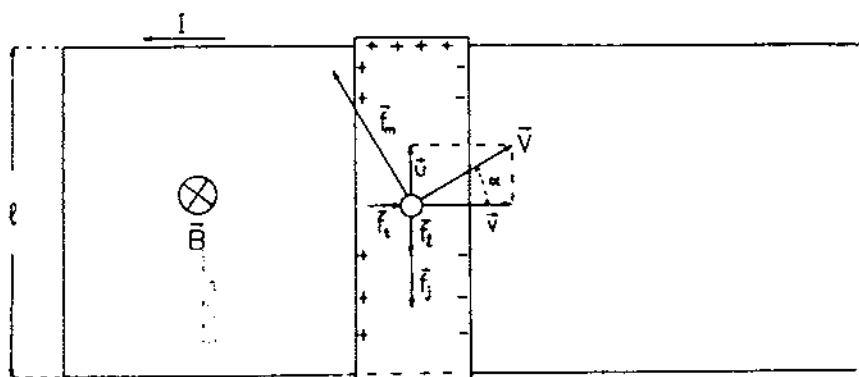


Figura 7