MATEMATICAS E INFORMATICA: UNOS EJEMPLOS

ELISEO BORRÀS (Grupo Cero)

SUMMARY

The possibility of acquiring a micro-computer in our secondary schools begins to cause reactions, for and against it, amongst the teachers.

This paper tries to provide some experience on a concrete subject: the teaching of statistics in secondary schools.

INTRODUCCION

Los microordenadores, como una inmensa ola, nos invaden. La posibilidad de adquirirlos en nuestros centros de enseñanza comienza a suscitar reacciones entre los profesores, a favor y en contra.

¿Qué podemos hacer?

Parece claro que hay que evitar, al menos, dos trampas:

— Utilizar el microordenador como simple "santificador" de lo que siempre se ha hecho, manteniendo los alumnos pasivos y temerosos ante tanto prodigio.

— Utilizarlo como motivo para aumentar el ya voluminoso caudal de información que reciben nuestros alumnos, como materia de un nuevo examen, sin reducir y mejorar el existente.

Por otra parte, el grado de aceptación de los microordenadores en nuestra enseñanza tiene que depender de la respuesta a dos cuestiones claves:

(1) ¿Promueven y mejoran la enseñanza de las matemáticas en nuestras clases?

(2) ¿Hasta qué punto su uso modifica el contenido de lo que se enseña o el énfasis que se da a cada tema matemático?

Ambas cuestiones sólo podrán ser contestadas, con ciertas garantías, si acudimos a la práctica cotidiana (ver [3]).

Con el ánimo de comenzar a buscar respuestas a las dos cuestiones anteriores, presento aquí algunas experiencias sobre la enseñanza de la estadística cuando se dispone de un microordenador.

A. SIMULACION DE DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DISCRETA

La posibilidad de simular experiencias aleatorias mediante el microordenador, y la rapidez con que las realiza, hace que puedan ser tratadas experimentalmente difíciles conceptos y resultados de la Estadística.

Es ya sabido cómo realizar la simulación (ver [1]):

Los microordenadres disponen de la función RND (abreviatura de RANDOM) que suele generar un número aleatorio entre 0 y 1 cuando se activa; los números generados están uniformemente distribuidos en el intervalo (0,1). Por tanto, si N es un número entero (positivo), los valores X dados por la expresión

$$X = \text{INT}(N.\text{RND}),$$

siendo INT la función que da la parte entera del número al que se le aplica, generará los números 0, 1, 2, 3,..., N-1 aleatoriamente, con idéntica probabilidad:

$$p = 1/N.$$

Si los resultados del experimento aleatorio que deseamos simular no son equiprobables, la distribución de probabilidad tendrá la forma general

$$x_1 \; x_2 \; x_3 \; \ldots \; x_n$$

$$p_1 \; p_2 \; p_3 \; \ldots \; p_n$$

ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS. 1983, pp. 42-45

Para simularla basta buscar un número entero N tal que se verifique la igualdad

$$N \cdot p_i = \mathrm{INT}\,(N \cdot p_i)$$

para todos los valores de i (i = 1, 2, 3,..., n).

Nuestra distribución de probabilidad será equivalente a una ruleta con N sectores iguales, numerados del 0 al N-1; a cada valor x_i de la distribución se le asocia un cierto número de tales sectores del siguiente modo:

Sea X el número aleatorio generado por el micro. Diremos que el resultado ha sido

x_1, si $0 \leq X < Np_1$,
x_2, si $Np_1 \leq X < N(p_1 + p_2)$,
x_3, si $N(p_1 + p_2) \leq X < N(p_1 + p_2 + p_3)$
...
x_i, si $N(p_1 + p_2 + \ldots + p_{i-1}) \leq X < N(p_1 + p_2 + \ldots + p_i)$

Es pues posible simular cualquier distribución de probabilidad con el microordenador. En consecuencia, pueden ser verificadas las conjeturas que los propios alumnos vayan elaborando al intentar resolver un problema, evitando cálculos difíciles y tediosos. Cualquier tentativa de solución podrá ser puesta a prueba de inmediato, ¡jugando! (ver [1] y [2]).

B. TEOREMA DE BERNOULLI

El teorema de Bernoulli se suele enunciar de forma muy simplificada a los alumnos: "Si repetimos un gran núm. de veces, N, una experiencia alñeatoria, la frecuencia, k/N, con que aparece un resultado determinado (que llamaremos "exito") se acerca más y más a la probabilidad, p, de "exito" en una sola prueba".

este modo de enunciar el teorema es luegfo origen de malentendidos en el desarrrollo de la probabilidad y de la estadistica. Es pues importante aclarar en qué sentido se acercan entre sí la frecuencia y la probabilidad, per la justificación teórica cae fuera del alcance de la mayoria de nuestros alumnos. Realmente, lo que afirma el teorema es que, fijado un número E positivo y tan pequeño como se quiera, la **probabilidad** de que sea $\left|\frac{K}{N} - p\right| < E$ es tan cercana a 1 como se quiera, con tal de aumentar N suficientemente.

El microordenador da posibilidades para adentrarse en este teorema:

Elaboraré un programa que, de forma paralela, halla la diferencia entre una función F y su limite; y entre la frecuencia de un resultado aleatorio en N prubas y la probabilidad p en una. A los alumnos se les presentarán varias tiras como la que, fragmentariamente, se muestra a continuación (se simula el lanzamiento de una moneda)

E = máxima separación = 0.01
F = (N + 3) (2*N); LIM = O.5; F-LIM = RF
p = 0.5; CA = Exitos; FR = CA/N; FR-p = RP

N	RF	RF<E?	CA	RP	RP<E?
1	1.5			0.5	
2	0.75			0.5	
3	0.5			0.5	
4	0.375			0.5	
5	0.3		1	0.3	
6	0.25			0.3	
7	0.2142857142		2	0.2142857143	
.					
.					
.					
990	1.5151515E-03		489	6.0606061E-03	
991	1.5136226E-03		490	5.5499496E-03	
992	1.5120967E-03		491	5.0403226E-03	
993	1.510574E-03			5.0403226E-03	
994	1.5090543E-03			5.0403226E-03	
995	1.5075376E-03			5.0403226E-03	
996	1.506024E-03			5.0403226E-03	
997	1.5045135E-03			5.0403226E-03	
998	1.503006E-03		492	7.0140281E-03	
999	1.5015015E-03			7.0140281E-03	
1000	1.5E-03		493	7.0E-03	

Después de analizarla, debían comprobar los cinco primeros resultados de la lista y contestar a los interrogantes. Si lo deseaban, podian obtener nuevas listas del microordenador dando la función y su limite, así como la probabilidad de "exito" por el que se interesaban. Finalmente, debian presentar un informe que mostrara las diferencias entre las columnas RF y RP.

Los resultados fueron muy alentadores:

— Una muy aceptable comprensión del teorema de Bernoulli: Una vez fijado E, llega un término a partir del cual es ya menor que E la distancia entre la función F y su limite, mientras que no ocurre lo mismo con la frecuencia y la probabilidad, cuya diferencia llega a ser menor que E, pero puede dejar de serlo, aunque cada vez con menos frecuencia.

— Mayor concentración e ilusión en su trabajo.

C. TEOREMA DE TCHEBYCHEV

Solemos presentar la media y la desviación típica de una distribución de probabilidad de manera formal. Nuestros alumnos no llegan a percibir la íntima relación entre ambos parámetros y su significado. La desigualdad de Tchábychev da esa relación, pero su demostración e incluso su simple enunciado suele soslayarse en nuestras clases de bachillerato.

De manera muy breve, dicho teorema afirma que es muy raro que al efectuar una experiencia aleatoria el resultado obtenido se aparte de la media esperada más de 3 desviaciones típicas.

También aquí el microordenador puede ayudarnos:

Los alumnos reciben tiras de resultados, como la que, fragmentariamente, se encuentra a continuación, que simula la realización de 200 series de 10 lanzamientos de una moneda.

Esperanza = m = 5; Desviación típica = s
R = | m-EX |
s = 1.58113883; 2s = 3.16227766; 3s = 4.74341649

Número de repeticiones por serie = 10; Exitos = EX

Serie	EX	R	R<s ?	R<2s?	R<3s?
1	4	1			
2	6	1			
3	6	1			
4	6	1			
5	4	1			
6	8	3			
7	5	0			
8	6	1			
9	4	1			
10	5	0			
.	.	.			
190	8	3			
191	6	1			
192	5	0			
193	8	3			
194	5	0			
195	6	1			
196	5	0			
197	5	0			
198	7	2			
199	4	1			
200	3	2			

Finalmente deben analizarlas y completar los interrogantes. Pueden solicitar del micro nuevas tiras.

Los resultados, como anteriormente, fueron muy buenos:

— Algunos llegaron a ensayar enunciados cuantitativos del teorema de Tchébychev.

— Dudaban de la generación aleatoria de los números por el microordenador, lo que nos llevó a cuestiones de inferencia: ¿Es "buena" una lista de números aleatorios?; ¿Es sesgada una moneda?,...

D. COMBINATORIA

El cálculo de los números factoriales n! o de los números combinatorios $\binom{n}{k}$ para pequeños valores de n es sencillo; pero para grandes valores de n y k se hace prohibitivo. Muchos problemas interesantes no son abordados por esta causa.

El microordenador nos hace cambiar el énfasis en el tratamiento de dichos números. En efecto, ahora lo importante es lograr elaborar el algoritmo necesario para su cálculo. Las relaciones:

$$(n+1)! = (n+1)\cdot n!$$

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$$

son las que permiten la construcción del algoritmo.

Los alumnos, por tanteos sucesivos, van elaborando los algoritmos, teniendo en cuenta que están obligados a gastar el menor número posible de variables, de "almacenes". El conocido modelo humano de ordenador, previamente ensayado en clase, es de gran ayuda para las elaboraciones. (No es necesario un tipo concreto de lenguaje en esta etapa.)

Por ejemplo, para el cálculo del factorial de un número se llegó al esquema que sigue:

M
N
FAC

1.- Introduce el número cuyo factorial quieres hallar en el almacén M.

2.- Introduce 0 en el almacén N y 1 en el FAC

3.- Mientras sea N ≦ M haz
 -Aumenta N en una unidad.
 -Multiplica el valor en N por el de FAC y éste pasa a ser el nuevo valor de FAC.

4.- Imprime el valor de FAC

Sin duda, la necesidad de llegar al algoritmo de cálculo hizo que los alumnos conocieran más profundamente la estructura de los números factoriales y combinatorios.

RESUMEN

Los ejemplos A, B y C intentan aportar argumentos a la 1ª cuestión planteada en la introducción: Parece claro que los microordenadores pueden promover y mejorar la enseñanza de las matemáticas:

— Procurando esa experiencia previa a toda elaboración de un concepto, imprescindible no sólo para su comprensión sino también para su mismo nacimiento.

— Fijando el interés del alumno, al que hace concentrarse más en su trabajo.

— Dando respuesta experimental e inmediata a las conjeturas iniciales de los alumnos.

El ejemplo D, relacionado con la 2ª cuestión de la introducción, intenta mostrar cómo el microordenador puede ser un catalizador de cambio en los planteamientos de las cuestiones matemáticas y en su resolución.

Tal vez logremos que la ola de los microordenadores introduzca una corriente de alegria y fecundidad en nuestras clases.

BIBLIOGRAFIA

[1] L'Enseignement des probabilités et de la statistique. ARTHUR ENGEL. CEDIC 1975, 1979, Paris (dos volúmenes).

[2] Método de Montecarlo. I. M. SÓBOL. Editorial Mir. Moscú. 1976.

[3] Mathematics Counts. Cockcroft Report. Her Majesty's Stationery Office. Londres. 1982.