

UN ESTUDIO DE EVALUACIÓN SOBRE EL TRATAMIENTO DE LAS ISOMETRÍAS EN EL SEGUNDO CICLO DE LA ESO EN GALICIA

FERNÁNDEZ BLANCO, M. TERESA y CAJARAVILLE PEGITO, JOSÉ A.

Departamento de Didáctica das Ciencias Experimentais. Área de Didáctica da Matemática

Facultade de Ciencias da Educación. Santiago de Compostela

terefb@usc.es

cajaraville@usc.es

Resumen. El objeto de este artículo es presentar un análisis cuantitativo y cualitativo de las respuestas, de una muestra representativa de alumnos de 2º ciclo de la ESO de la comunidad gallega, a una serie de ítems relacionados con las isometrías del plano.

Los resultados presentados en este trabajo han sido además confrontados con las directrices del currículo oficial como guía propuesta por la Administración Educativa, con el desarrollo que se hace de estas directrices en los libros de texto más utilizados en las aulas gallegas y, por último, con la particular visión que el docente tiene de ese tema concreto de las matemáticas y su repercusión sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de las transformaciones geométricas en el plano.

Palabras clave. Isometrías, currículo, directrices, docente, tópico, enseñanza-aprendizaje.

A study of evaluation on the treatment of isometries in the second cycle of secondary education

Summary. The aim of this article is to present a quantitative and qualitative analysis of the answers from a representative sample of ESO second cycle students in the Galician community to a series of items connected with the isometries of the plane.

The results presented in this paper have been compared with the official curriculum rules as a proposed guide by the educative administration, with the development of these rules in the most used text books in Galician classrooms and, finally, with the particular view of teachers of this specific topic of Mathematics and its consequences on the teaching/learning process of geometric transformations on the plane.

Keywords. Isometries, curriculum, rules, topic, teaching/learning.

INTRODUCCIÓN

El trabajo que aquí presentamos surge de una investigación realizada en el marco de referencia de un proyecto de investigación del Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Santiago de Compostela, en el que participaron investigadores de las tres universidades gallegas, titulado *Aviación do currículo de matemáticas no 2º ciclo da E.S.O. en la comunidad gallega*, cuyos resultados completos se encuentran recogidos en Cajaraville y otros

(2003). Uno de los puntos más relevantes de la citada investigación consistió en la evaluación curricular de tres temas concretos del 2º ciclo de ESO en Galicia: medida de magnitudes, transformaciones geométricas en el plano y estadística y probabilidad. En este artículo nosotros retomaremos ese estudio centrándonos exclusivamente en las transformaciones geométricas, y analizando y categorizando las variables de la evaluación realizada.

En la primera parte del documento se describe de forma resumida el marco teórico en el que se encuadra la enseñanza-aprendizaje de las transformaciones geométricas, analizando algunas propuestas y conclusiones de trabajos de investigación relacionados con el análisis de textos y el pensamiento del profesor. En estos momentos de cambio en los programas oficiales, resulta importante para los docentes disponer de materiales curriculares adecuados a la normativa actual que faciliten su tarea educativa; a este respecto, el libro de texto sigue siendo la principal referencia para la mayoría, hasta el extremo de que muchos de los profesores de estos niveles se someten al currículo que éste refleja, tanto en lo que se refiere a contenidos como a metodología (Rey y Penalva, 2002). Esta circunstancia reafirma la importancia de este análisis como parte de la investigación, con vistas a conocer el tratamiento real que los profesores dan al tema, a la introducción y al desarrollo de las diferentes propuestas en el aula.

Por otro lado, se hace necesario contrastar este análisis de los libros de texto con las directrices del currículo oficial como guía marcada por la Administración Educativa, de manera que se pueda observar con qué criterio están plasmadas y recogidas estas directrices en los libros de texto analizados.

Desde el punto de vista de las concepciones y creencias de profesores y alumnos, resulta imprescindible analizar su papel en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Los primeros como principal vehículo de presentación de contenidos y gestión del proceso de estudio (en este caso concreto, sobre transformaciones geométricas), y los segundos como receptores de ese conocimiento.

Desde esta perspectiva, las creencias que los profesores tienen sobre la materia son fundamentales y determinantes en la planificación y la puesta en práctica de su actividad docente y, por consiguiente, se verán reflejadas en la evaluación realizada.

En la segunda parte del trabajo presentamos el marco metodológico en el que ha sido realizada la investigación, que incluye los criterios e instrumentos de evaluación utilizados y el análisis de los resultados obtenidos en relación con los tres focos de interés señalados: libros de texto, profesores y alumnos. En particular, la evaluación realizada a los alumnos nos permitirá valorar tanto los conocimientos que han adquirido sobre este tema matemático como, en algunos casos, la forma en que lo han hecho y su relación con los puntos anteriores (objetivo central del trabajo).

MARCO TEÓRICO Y REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

El currículo de matemáticas de la secundaria obligatoria como plan de formación debe tener presentes las finalidades que la sociedad asigna a la enseñanza de esta área que justifican su incorporación a los planes de estudio de esta etapa. Estas finalidades responden a tres tipos de

argumentos (Rico, 1997): en primer lugar, se considera que las matemáticas poseen un alto valor formativo, ya que desarrollan las capacidades de razonamiento lógico, simbolización, abstracción, precisión, etc.; en segundo lugar, las matemáticas tienen interés por su utilidad práctica, puesto que aparecen en casi todas las formas de expresión humana, permitiendo codificar información y obtener una modelización del medio social y natural; por último, las matemáticas son, junto con el lenguaje, uno de los hilos conductores de la formación intelectual de los alumnos. Estos tres argumentos se pueden aplicar de forma particular a las isometrías.

Las principales propuestas publicadas sobre didáctica de la geometría (Alsina, Burgués y Fortuny, 1987, 1988; Jaime y Gutiérrez, 1996; Contreras, 1994; NCTM, 1991, 2000) ponen de manifiesto las ventajas y la necesidad del trabajo con materiales manipulativos, programas informáticos y construcciones propias. Coincidimos con Jaime y Gutiérrez (1996), y con Alsina, Pérez y Ruiz (1989), en la defensa del siguiente principio didáctico: el estudio y la utilización formales de las isometrías puede tener éxito sólo cuando previamente se ha permitido a los estudiantes descubrir y utilizar el sentido físico y dinámico de las isometrías. A este respecto, observaremos, mediante el análisis de los textos y de la evaluación llevada a cabo, si se ven reflejadas algunas de las propuestas de enseñanza a nivel metodológico que se derivan de las últimas investigaciones. Por otro lado, veremos si se manifiesta de una manera clara el uso de recursos como el doblado del papel, los espejos, el mira, programas informáticos, útiles de dibujo y de cualquier otro material didáctico que nos permita trabajar las isometrías de una manera activa.

Varios investigadores resaltan la importancia del análisis de los libros de texto en la búsqueda de una interpretación de los fenómenos ligados a los procesos de enseñanza-aprendizaje (Romberg y Carpenter, 1986; Rico, 1997; Llinares, Sánchez, García y Escudero, 1995; Martín, 2002). Ya en 1877, García de Galdeano señalaba que «los textos se escriben para presentar la ciencia ordenada; pero esto no exige que la enseñanza los siga rigurosamente. Cada libro presenta la ciencia en un estado definitivo, como la traducción más perfecta del plan concebido por cada autor». A pesar de esta recomendación, son muchos los docentes que optan por considerar el libro de texto como única referencia para la construcción y organización del conocimiento en las aulas.

Respecto a las concepciones y creencias de los profesores, existen numerosos trabajos (Leinhardt, 1986, 1989; Thompson, 1984; Schön, 1993; Llinares, 1991, 1993; Llinares y Sánchez, 1990) en los que se analiza de qué manera las creencias de los profesores sobre las matemáticas y su enseñanza influyen en su forma de impartir las clases: en la selección de contenidos (conceptuales, procedimentales y actitudinales), en la evaluación y, en definitiva, en todos los aspectos de su actuación en el aula. Ilustraremos esta tesis con la siguiente cita de Llinares y Sánchez (1990, p. 67) «La coherencia o no entre las creencias epistemológicas de los profesores sobre las matemáticas y su enseñanza y la forma en que los niños

aprenden las matemáticas escolares puede determinar el cauce a través del cual nos aproximemos o no a la mejora de la enseñanza de las matemáticas. En la evolución individual, las creencias y concepciones del profesor desempeñan un papel fundamental, ya que contribuyen a fundamentar parte de sus decisiones instruccionales.»

Algunas investigaciones realizadas en Galicia (Plata, 1998) muestran que la mayoría del profesorado que imparte clases en el nivel de secundaria considera la matemática como una ciencia formal axiomático-deductiva (circunstancia que guarda una relación muy estrecha con el enfoque predominante en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Santiago, en la cual se formaron una gran parte de los encuestados), lo que implica que su modelo de enseñanza se basa en la transmisión-recepción del contenido, considerando al aprendiz como un receptor-memorizador de hechos, conceptos y procedimientos.

Sin embargo, en ocasiones un profesor se enfrenta a la necesidad de adecuar sus creencias a situaciones específicas de enseñanza motivadas por condiciones contextuales o por necesidades de adaptación a cambios de criterio propuestos por reformas curriculares: la amplitud del programa a desarrollar, las influencias de la innovación, etc. Otras veces, es el mismo profesor quien modifica parcialmente sus creencias acerca de las matemáticas y, por consiguiente, modifica su práctica docente como consecuencia de sus propios aprendizajes y experiencias: teorías de enseñanza y aprendizaje, investigación propia, etc. En este caso, el principal problema que se le plantea consiste en cómo incorporar a la práctica diaria en las aulas las recomendaciones teóricas que se derivan de las investigaciones.

METODOLOGÍA Y RESULTADOS

Análisis de los libros de texto

Utilizando como fuente de información el catálogo de la Consellería de Educación y Ordenación Universitaria de la Xunta de Galicia (Xunta de Galicia, 2000) de centros públicos y privados que imparten ESO en Galicia, se eligió una muestra aleatoria, por provincias, que comprende aproximadamente el 20% de los centros públicos (un total de 65 centros) y privados (un total de 35 centros) objeto del estudio. Posteriormente, se hizo una consulta

a los centros seleccionados sobre la procedencia editorial de los textos de matemáticas de 3º y 4º de la ESO que utilizaban.

Basándonos en el resultado de esta consulta fueron seleccionados, para su análisis, los textos de matemáticas de 3º y 4º de ESO de tres editoriales, los cuales cubren en su conjunto aproximadamente el 70% del total de las aulas gallegas en este nivel educativo.

Para el análisis de los libros de texto hemos partido de los criterios citados por Prendes (1998), diferenciando seis puntos de interés: incidencia del tema, ajuste al DCB, línea metodológica, tipología de los problemas, utilización de materiales y fomento de un aprendizaje comprensivo. En este marco de referencia, para cada uno de los criterios seleccionamos un conjunto de preguntas que consideramos relevantes con el fin de realizar un análisis preciso. Este estudio está recogido con detalle en Cajaraville y otros (2003), y en él se pone de manifiesto el elevado porcentaje de centros de ESO que usan libros de texto de matemáticas, sobre todo en el caso de centros privados.

En la tabla 1 se presenta una comparativa de la secuencia realizada por cada una de las editoriales; existen variaciones incluso entre diferentes series de una misma editorial. Como se puede observar, en todas las editoriales menos en una, las transformaciones geométricas aparecen en los libros de texto de 3º y 4º de la ESO, intentando aparentemente reflejar lo propuesto por el DCB (Xunta de Galicia, 1992): «La enseñanza de las matemáticas en la ESO se debe configurar de forma cíclica, de tal manera que en cada curso aparezcan contenidos que ya figuraron de forma elemental en cursos precedentes, con el objeto de que el sistema permita el repaso y una mejor fijación de ideas y técnicas, ampliando su campo de aplicación y posibilidad de relación».

Sin embargo, la realidad es bien distinta, pues apenas se observa que el texto de 4º de la ESO sea una ampliación (en ningún sentido) del correspondiente de 3º. En la editorial C, como puede observarse en la tabla 1, el tema sólo es tratado en 4º, mientras que en las otras dos, pese a que se hace a lo largo de los dos cursos, el contenido es prácticamente el mismo y no se modifica la secuencia, ni los tipos de problemas, ni la metodología a seguir, ni siquiera se amplían contenidos respecto del curso anterior. Además, como se pone de manifiesto en algunos textos, resulta difícil desligar las isometrías de la homotecia y de la semejanza.

Tabla 1

	EDITORIAL A Serie a	EDITORIAL A Serie b	EDITORIAL B	EDITORIAL C
3º	- Transformaciones geométricas	- Traslaciones - Simetrías en el plano	- Movimientos en el plano: traslación-giro-simetría	
4º	- Simetrías y traslaciones en el plano - Giros en el plano - Homotecia y semejanza	- Giros en el plano - Homotecia y semejanza	- Relaciones métricas. Movimientos	- Transformaciones en el plano: traslación-giro-simetría. Homotecia

Con respecto a las líneas metodológicas seguidas por las diferentes editoriales analizadas, se observa que usan casi exclusivamente el modelo «definición-propiedades-actividades», incluyendo en algún caso alguna situación o problema como introducción del tema a modo de curiosidad, pero sin profundizar en ella. Se dejan en un segundo plano el aspecto constructivo y las propiedades intrínsecas de las transformaciones geométricas, y es prácticamente nulo el espacio dedicado a programas informáticos específicos.

Si nos detenemos en el fomento del significado y la comprensión de conceptos relacionados con las isometrías en los textos analizados, se sigue viendo una clara tendencia a promocionar los aspectos algorítmicos derivados de la aún vigente algebrización de la geometría.

Esta revisión de los textos debe contrastarse con el análisis que hemos realizado del actual currículo oficial para esta etapa en la comunidad gallega, el cual se ha centrado en el estudio de la presencia de contenidos relativos a las transformaciones isométricas y la importancia dada a los mismos, que se refleja en los objetivos y criterios de evaluación contenidos en dicho documento.

La propuesta del Diseño Curricular Base (Xunta de Galicia, 1992) introduce los movimientos con el estudio de vectores y coordenadas. En este documento se habla explícitamente de «transformaciones isométricas» y la secuencia que se sigue es traslación-simetría-giro. No se hace referencia a la semejanza y la homotecia como transformaciones geométricas. De hecho, la homotecia ni siquiera es citada y la semejanza se trata únicamente desde el punto de vista de la medida: proporcionalidad de segmentos, representación a escala y relación entre área y volumen de figuras semejantes.

Los materiales didácticos cuyo uso se contempla o se aconseja en el DCB son únicamente la regla, el compás, el transportador de ángulos y tramas de distintos tipos.

En este documento no se nombran de manera explícita los frisos y mosaicos, aunque se puede considerar que están englobados dentro de los contenidos procedimentales («construir figuras por aplicación de transformaciones isométricas sobre otras figuras» [Xunta de Galicia, 1992]). A pesar de ello debemos indicar que, en contra de lo recogido en la LOGSE, los diferentes documentos analizados se centran casi exclusivamente en los contenidos *conceptuales*, dando una importancia secundaria al desarrollo de los *procedimentales* y *actitudinales*.

Concepciones y creencias de los profesores

Tomando como punto de partida las reflexiones realizadas en el marco teórico, se hacía necesario analizar la posición que adoptan los profesores de secundaria sobre los contenidos curriculares de matemáticas en la ESO y sobre los criterios metodológicos que son utilizados en sus clases para la enseñanza-aprendizaje de los temas objeto de esta investigación. La principal herramienta de

este estudio fue un cuestionario con el que se pretendía evaluar las concepciones y actuaciones de una muestra de profesores que imparten docencia en el segundo ciclo de la ESO en Galicia.

Los criterios para la elaboración de dicho cuestionario de evaluación fueron elegidos de manera que nos permitiesen valorar el posicionamiento de los profesores con respecto a:

1. La actividad matemática en la que, según se deriva de las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas, debemos basar el trabajo en clase, centrada en procesos como explorar, conjeturar, inferir, representar, generalizar, comprobar, etc.
2. La clasificación de los contenidos en tres categorías: procedimentales, conceptuales y actitudinales, y la importancia dada a cada una de estas categorías.
3. El currículo oficial de Educación Secundaria Obligatoria para la comunidad gallega.
4. El papel del libro de texto y otros materiales curriculares.
5. El tipo de actividades planteadas en la enseñanza de los diferentes conceptos trabajados.
6. La situación de la enseñanza de la matemática en las aulas de secundaria en Galicia.

De los 11 ítems de que consta el cuestionario construido para la evaluación del profesorado en Cajaraville y otros (2003), el número 7 (Tabla 2) es el que agrupa cuatro cuestiones dedicadas a obtener información sobre el tipo de actividades que se realizan en el aula en relación con las transformaciones geométricas y sobre la postura del profesorado ante la enseñanza de este tema. Los resultados obtenidos para este ítem corresponden a una muestra de 77 profesores y se recogen en la siguiente tabla.

De una lectura detenida de los datos de la tabla siguiente podemos inferir que:

- a) Los profesores introducen el concepto de *semejanza* en contextos de proporcionalidad.
- b) No es frecuente el uso de materiales manipulativos en la enseñanza de las transformaciones geométricas, en oposición al papel relevante que deberían tener, según se deduce de numerosas investigaciones.
- c) Algunos programas informáticos específicos para la enseñanza de la geometría, muy difundidos y ampliamente contrastados, como LOGO y CABRI, no son utilizados casi nunca por la inmensa mayoría de los miembros de la muestra. Algunos (12%) incluso se posicionan en contra de su uso.
- d) Las transformaciones no suelen ser consideradas como elemento globalizador de la geometría plana.

Tabla 2

Ítem 7
En sus clases de 2º ciclo de ESO, para el estudio de las transformaciones geométricas

	Nunca	Alguna vez	Habitualmente	No lo considero pertinente
a) La semejanza es presentada a los alumnos en contextos de proporcionalidad.	10%	17%	70%	3%
b) Se realizan actividades usando algún material manipulativo como el geoplano, el tangram, espejos, etc.	41%	40%	16%	3%
c) Se usan programas como LOGO o CABRI para la enseñanza de las transformaciones geométricas.	74%	14%	3%	9%
d) El estudio de las transformaciones geométricas es utilizado como un elemento globalizador de la geometría plana.	55%	22%	17%	6%

Análisis de la evaluación de una muestra de alumnos

Por último, para complementar este estudio debemos analizar el papel del alumno en todo este proceso: qué conocimientos (conceptuales, procedimentales y actitudinales) logra adquirir respecto de las transformaciones geométricas planas, qué estrategias utiliza para reconocerlas y para aplicarlas, qué es lo que entiende por transformaciones isométricas, cómo influyen en sus respuestas las creencias sobre la naturaleza de la matemática, qué recursos aplica cuando el tema no le es familiar, de qué manera influye la actuación del profesor, etc.

Dentro de las características de los ítems que compondrían el instrumento de evaluación de los alumnos priorizamos las siguientes:

- a) Que pudieran responder en una clase de aproximadamente 45 minutos.
- b) Que incluyera preguntas abiertas que posibilitaran una valoración cualitativa de los argumentos utilizados.
- c) Que permitiera evaluar la capacidad de los alumnos para la toma de decisiones ante situaciones no rutinarias.
- d) Que facilite la afloración de diversos errores y obstáculos de aprendizaje.
- e) Que nos permitiera valorar las impresiones personales del alumno ante las dificultades que pudieran plantear los ítems.

El cuestionario provisional fue propuesto a un grupo de 100 alumnos (muestra piloto) a finales del curso académico 2000-2001. La valoración de las dificultades de los ítems y las opiniones de los alumnos respecto de la dificultad que atribuían a las preguntas motivó la revisión del mismo. Finalmente, el instrumento definitivo quedó estructurado con 9 ítems, 3 por cada estructura conceptual, que configuran las variables explicativas del instrumento:

- Los ítems 2, 5 y 8 plantean preguntas relativas a la medida de magnitudes.

- Los ítems 3, 4 y 9 se refieren a cuestiones de estadística y probabilidad.

- Los ítems 1, 6 y 7 formulan cuestiones relativas a las transformaciones geométricas. Los análisis de las respuestas a estos ítems son los que ocuparán las siguientes páginas de este artículo.

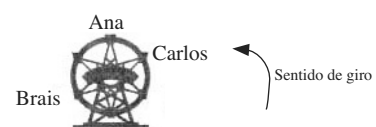
Las variables respuesta o dependientes que se seleccionaron para el análisis se agrupan en:

- a) Valoración subjetiva de la dificultad del ítem a juicio del estudiante
- b) Valor objetivo de la respuesta
- c) Valoración de la argumentación aportada
- d) Razonamiento implícito en la argumentación
- e) Tipo de errores y dificultades que se infieren.

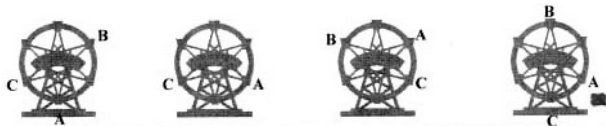
La muestra de alumnos y alumnas que respondieron a las preguntas de este cuestionario constaba de 302 individuos de los centros públicos y privados de las cuatro provincias gallegas. Aunque se trata de una muestra intencional, en la selección de la misma se ha tenido en cuenta, porcentualmente, la diferente tipología de los centros gallegos (rural/urbano y público/privado).

A continuación iremos describiendo simultáneamente cada uno de los ítems relativos a las isometrías junto con la valoración de los resultados obtenidos.

Ítem 1. *Tres amigos (Ana, Brais y Carlos) suben en diferentes asientos de una noria del parque de atracciones. Su situación al comenzar el movimiento de la noria es la siguiente:*



¿Cuál de las siguientes figuras representará la situación de los tres amigos al girar la noria un ángulo de 240°?



En el análisis de respuestas hemos visto que un 83% de los alumnos declaran saber responder a la cuestión; entre ellos, la mayoría (56,3%) incluso la consideran fácil (al final del artículo se incluye una tabla en la que se comparan estas valoraciones con el porcentaje de respuestas correctas).

El porcentaje de respuestas correctas (75,5%) sin embargo está algo por debajo de esta valoración optimista, aunque la diferencia es pequeña.

Respuestas	Frecuencia	%	% Válido
Incorrectas	71	23,5	23,7
Correctas	228	75,5	76,3
Total	299	99,0	100,0
No responden	3	1,0	
Total	302	100,0	

No obstante, a la hora de analizar la argumentación de la respuesta dada, únicamente nos encontramos un 45,5% de razonamientos adecuados a la resolución, y sólo el 27,2% pueden considerarse completos.

Tipología de la argumentación	Frecuencia	%	% Válido
No argumentación	88	29,1	29,4
Incorrecta	36	11,9	12,0
Deficiente	38	12,6	12,7
Insuficiente	55	18,2	18,4
Correcta	82	27,2	27,4
Total	299	99,0	100,0
No responden	3	1,0	
Total	302	100,0	

En general los alumnos siguen razonamientos de carácter geométrico (64,6%), aunque observamos un 13,6% que realiza estimaciones exclusivamente visuales. Solamente tres alumnos hacen un razonamiento numérico preciso sobre el ángulo (de 60°) que separa cada brazo de la noria y determinan la nueva posición contando el número de pasos.

Tipología	Frecuencia	%	% Válido
Gráfico-Geométrico	195	64,6	81,6
Algebraico	3	1,0	1,3
Intuitivo-Estimativo	41	13,6	17,2
Total	239	79,1	100,0
No se percibe	63	20,9	
Total	302	100,0	

Si concebimos las estrategias como una de las componentes que guían la planificación de los procesos de gestión del pensamiento en el transcurso de resolución de problemas, eligiendo los conocimientos y técnicas a utilizar, organizando la manera de tratar la información y controlando todo el proceso de resolución que incluye la autorregulación (supervisión y evaluación de proceso y resultados), nos interesa conocer qué estrategias de resolución siguen los alumnos aunque no hayan conseguido la respuesta correcta. A continuación describimos algunas de ellas:

– *Razonamiento a través del complementario* (En esta argumentación detectamos un error puesto que sólo se tiene en cuenta la posición de uno de los asientos.)

Explica brevemente las razones de que fas ou decides
 Por los giros de 360° - 240° da 90°
 Moviendo se localizaría así.

“Por los giros de 360° - 240° da 90°
 Moviendo se localizaría así.”

– *Estrategia basada en la amplitud del giro.*

Explica brevemente las razones de que fas ou decides
 A última. A avanza 240° igual que na segunda noria pero C na 2ª só avanza 180°.

“La última. A avanza 240° igual que en la segunda noria pero C en la segunda sólo avanza 180°”

– *Fijar el movimiento de A y considerar que los otros son diametralmente opuestos.*

Explica brevemente las razones de que fas ou decides
 Por que non chega a dar unha volta completa (360°)

“Porque no llega a dar una vuelta completa”

– División de una circunferencia.

Explica brevemente las razones de que fas ou decides

360 : 6 = 60 porque son las partes de los coches
 $60 \cdot 4 = 240^\circ$ que es lo que gira la noria.

“360 : 6 = 60 porque son las partes de los coches.
 $60 \times 4 = 240^\circ$ que es lo que gira la noria.”

– Por comparación.

Explica brevemente las razones de que fas ou decides

Dibujé un ángulo de $90^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 240^\circ$ y comparo con los dibujos.

“Dibujé un ángulo de $90^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 240^\circ$ y comparo con los dibujos.”

– Por eliminación.

Explica brevemente las razones de que fas ou decides

En la 1ª figura A se desplaza 180° , por lo que queda descartada.
 En la 2ª figura la distancia entre A y C es falsa.
 En la 3ª figura A se desplaza más de 240° ya que sobrepasa los $3/4$ de la circunferencia que formarían 270° .
 Por eliminación la 4ª figura es correcta.

Fina cuestión

“En la 1ª figura A se desplaza 180° , por lo que queda descartada.
 En la 2ª figura la distancia entre A y C es falsa.
 En la 3ª figura A se desplaza más de 240° ya que sobrepasa los $3/4$ de la circunferencia que formarían 270° .
 Por eliminación la 4ª figura es correcta.”

– Estimación.

Explica brevemente las razones de que fas ou decides

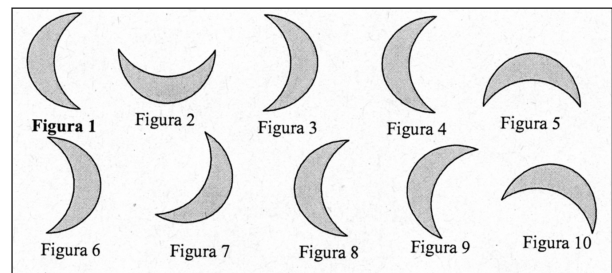
De cesta a cesta son unos 50° .
 Si partimos la noria son 180° .
 Toda la noria son 360°
 $3/4$ de noria son 270° ”

Por último hay que destacar que solamente tres estudiantes no fueron capaces de dar respuesta alguna a este ítem, lo que nos induce a pensar que la situación presentada es bastante familiar para ellos.

A pesar de que las actividades propuestas podrían ser consideradas como de iniciación al tema, puesto que en ningún caso requerían el uso de conocimientos profundos sobre el mismo, detectamos numerosos errores. Los errores más frecuentes son de tipo gráfico (16,6%) por estimar erróneamente lo que representa un ángulo de 240° (tomando 180° [5,2%] o 300° [9,2%]). Se detectan dificultades de tipo conceptual en el 14,2% de los casos, la mayoría referidos a la no conservación de las posiciones relativas antes y después de efectuar el giro (9,1%) –como ocurre en la opción b.

Tipología	Frecuencia	%	% Válido
Errores de concepto	43	14,2	17,8
Errores de cálculo	5	1,7	2,1
Errores gráficos	50	16,6	20,7
Sin errores	144	47,7	59,5
Total	242	80,1	100,1
No se perciben	60	19,9	
Total	302	100,0	

Ítem 6. De las siguientes figuras, ¿cuáles fueron obtenidas como resultado de aplicar una traslación a la figura 1? (Recuerda que una traslación es un movimiento que no es ni un giro ni una simetría).



- a) 3 y 6
- b) 4 y 8
- c) 4, 8 y 9
- d) Todas
- e) Ninguna de las anteriores.

Este ítem es considerado fácil por un porcentaje elevado de alumnos (53,3%) y el 70,8% de la muestra declaran saber responder a la cuestión. Aún así, el porcentaje de respuestas es sensiblemente inferior (57,9%) al del ítem anterior. Estos resultados (37,4% de respuestas incorrectas y 4,6% que no responde) ponen de manifiesto carencias significativas relativas al conocimiento de las transformaciones geométricas básicas.

Tipología	Frecuencia	%	% Válido
Incorrectas	113	37,4	39,2
Correctas	175	57,9	60,8
Total	288	95,4	100,0
No responden	14	4,6	100,0
Total	302	100,0	

Si analizamos la argumentación que hacen de la respuesta, sólo nos encontramos un 39% de razonamientos adecuados, y únicamente el 23% pueden considerarse completos. Resulta destacable el porcentaje de alumnos que no pueden o no estiman necesario justificar su respuesta (35%).

Tipología de la argumentación	Frecuencia	%	% Válido
No argumentan	105	34,8	36,5
Incorrecta	34	11,3	11,8
Deficiente	32	10,6	11,1
Insuficiente	48	15,9	16,7
Correcta	69	22,8	24,0
Total	288	95,4	100,0
No responden	14	4,6	
Total	302	100,0	

A la vista de la siguiente tabla, podemos considerar que la práctica totalidad de los que aportan argumentos hacen razonamientos de carácter geométrico (98,4%):

Tipología	Frecuencia	%	% Válido
Gráfico-geométrico	184	60,9	98,4
Algebraico	1	0,3	0,5
Intuitivo-estimativo	2	0,7	1,1
Total	187	61,9	100,0
No se percibe	115	38,1	
Total	302	100,0	

En este ítem el tipo de estrategias utilizadas hace referencia a diversos tipos de razonamientos que hemos clasificado de la siguiente manera:

– Razonamiento «por eliminación».

a) 3 e 6 **b) 4 e 8** c) 4, 8 e 9 d) Todas e) Nenhuma das anteriores.

Explica brevemente as razóns do que fas ou decides

A resposta é a "b" porque son as dúas únicas figuras que non teñen ningún xiro.

«La respuesta es la b) porque son las dos únicas figuras que no tienen ningún giro»

– Razonamiento «ingenuo».

a) 3 e 6 b) 4 e 8 c) 4, 8 e 9 d) Todas e) Nenhuma das anteriores.

Explica brevemente as razóns do que fas ou decides

«4 e 8. No han cambiado de lugar ni de forma.»

«4 y 8 no han cambiado de lugar ni de forma»

a) 3 e 6 **b) 4 e 8** c) 4, 8 e 9 d) Todas e) Nenhuma das anteriores.

Explica brevemente as razóns do que fas ou decides

«Porque son as dúas que máis se parecen.»

«Porque son las dos que más se parecen»

– Identificación «traslación-vector».

a) 3 e 6 **b) 4 e 8** c) 4, 8 e 9 **d) Todas** e) Nenhuma das anteriores.

Explica brevemente as razóns do que fas ou decides

Yo erro que todas porque no pone el ángulo de dilatación de traslación porque si traslado es siempre en línea recta.

«Porque si traslado es siempre la misma curva»

Hemos observado que los errores más frecuentes son de tipo conceptual, en el 27% de los casos, al no tener claro lo que significa «traslación» (un 6% de los estudiantes de la muestra confunden traslación con simetría y otro 9% con giro), llegando incluso a ignorar la clave interpretativa que se proporcionaba en el enunciado del ítem.

Tipología	Frecuencia	%	% Válido
Errores de concepto	82	27,2	38,3
Errores de cálculo	1	0,3	0,5
Errores gráficos	16	5,3	7,5
Sin errores	115	38,1	53,7
Total	214	70,9	100,0
No se perciben	88	29,1	
Total	302	100,0	

A continuación presentamos algunos ejemplos de este tipo de error.

– *Confusión con simetría axial o central.* Creemos que este tipo de error está motivado principalmente por la falta de trabajo específico con estos conceptos matemáticos, más que motivado por un error en la percepción.

a) 3 e 6 b) 4 e 8 c) 4, 8 e 9 d) Todas e) Ningunha das anteriores.

Explica brevemente as razóns do que fas ou decides

Esta cuestión:

Non a entendín Entendín o que se pregunta pero non teño idea do que facer

Sei resolvela, pero é unha pregunta difícil Para min é fácil.

(pon unha cruz no cadró que estimes oportuno)

– *No reconoce los tipos de transformación.* Al igual que en los casos anteriores vemos que este ítem, pese a que objetivamente debería resultar muy sencillo para alumnos de este nivel, demuestra que el trabajo con la visión geométrica es fundamental para la comprensión de las transformaciones (cuyo estudio se basa en el trabajo con coordenadas).

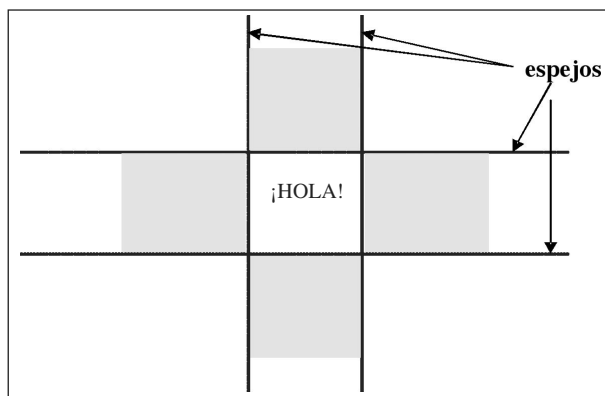
a) 3 e 6 b) 4 e 8 c) 4, 8 e 9 d) Todas e) Ningunha das anteriores.

Explica brevemente as razóns do que fas ou decides

Porque tes que mover sempre a figura.

«Porque tienes que mover siempre la figura»

Ítem 7. La exclamación ¡HOLA! Está rodeada de cuatro espejos colocados sobre las líneas de puntos. Escribe, en cada uno de los cuatro cuadrados sombreados, cómo se vería el reflejo de la exclamación en estos espejos¹.



El análisis de respuestas nos indica que el porcentaje de estudiantes que consideran este ítem dentro de sus competencias es del 61%. Entre el resto cabe señalar, con un porcentaje casi idéntico, los que afirman no saber dar una

respuesta y los que no entran a valorar. Resulta un ítem problemático para un número elevado de estudiantes de ESO. Si nos atenemos a los resultados obtenidos por la muestra, observamos que la valoración subjetiva de las propias capacidades resulta, en este caso, demasiado optimista, ya que solamente el 18% consigue una respuesta correcta. El fracaso es generalizado en esta situación (73%), confirmando las escasas competencias logradas por los estudiantes de este nivel en el trabajo con las transformaciones geométricas.

Tipología	Frecuencia	%	% Válido
Incorrectas	221	73,2	80,1
Correctas	55	18,2	19,9
Total	276	91,4	100,0
No responden	26	8,6	100,0
Total	302	100,0	

Estas carencias son también notorias a la hora de justificar la respuesta elegida. Sólo un 18% (que básicamente coincide con los que logran una respuesta correcta) aportan argumentos razonables de la misma. Por el contrario, un 60% no aporta ninguna justificación.

Tipología de la argumentación	Frecuencia	%	% Válido
No argumentación	168	55,6	60,9
Incorrecta	25	8,3	9,1
Deficiente	29	9,6	10,5
Insuficiente	32	10,6	11,6
Correcta	22	7,3	8,0
Total	276	91,4	100,0
No responden	26	8,6	
Total	302	100,0	

Teniendo en cuenta la naturaleza del ítem, los tipos de razonamiento que se hacen patentes son de carácter gráfico-geométrico, como puede observarse en la siguiente tabla:

Tipología	Frecuencia	%	% Válido
Gráfico-geométrico	155	51,3	99,4
Algebraico	0	0	0
Intuitivo-estimativo	1	0,3	0,6
Total	156	51,7	100,0
No se percibe	146	48,3	
Total	302	100,0	

La clasificación de los errores cometidos pone de manifiesto que los más frecuentes están relacionados con las simetrías

de ejes horizontales: sitúan al resolutor en la tesitura de arriba-abajo, mientras que las simetrías de ejes verticales lo sitúan frente a izquierda-derecha (aunque el 32% no consigue éxito con ningún eje). Se comprueba también que, además de errores sistemáticos de tipo gráfico, existe un profundo desconocimiento de la noción geométrica de simetría plana en este nivel educativo. En este sentido se observan tácitamente los problemas para determinar las simetrías de la letra L, o de los dos signos de admiración.

Tipos de errores detectados	Frecuencia	%	% Válido
a) Error 1 simetría	42	13,9	15,2
b) Error 2 simetría	51	16,9	18,5
c) Error 3 simetría	30	9,9	10,9
d) Error 4 simetría	98	32,5	35,5
e) Respuesta correcta	55	18,2	19,9
Total	276	91,4	100,0
Otras / Sin respuesta	26	8,6	
Total	302	100,0	

Seguidamente mostramos una selección representativa de los diferentes tipos de error detectados en las respuestas de los alumnos:

– Resolución como simetría central.

Explica brevemente as razóns do que fas ou decides

«Ya que las letras reflejadas en un espejo se ven al revés»

– Errores en ejes verticales.

Explica brevemente as razóns do que fas ou decides

Esta cuestión:
 Non a entendín Entendín o que se pregunta pero non teño idea do que facer
 Sei resolvela, pero é unha pregunta difícil Para min é fácil.
 (pon unha cruz no cuadro que estimes oportuno)

– Errores en ejes horizontales y verticales.

Explica brevemente as razóns do que fas ou decides

Esta cuestión:
 Non a entendín Entendín o que se pregunta pero non teño idea do que facer
 Sei resolvela, pero é unha pregunta difícil Para min é fácil.
 (pon unha cruz no cuadro que estimes oportuno)

– Errores sólo en admiraciones.

Explica brevemente as razóns do que fas ou decides

Basándome en cuando me miro nun espello

«Basándome en cuando me miro en un espejo»

Es interesante comparar la valoración de las preguntas dadas por los alumnos a cada uno de los ítems analizados, con los resultados que han obtenido en cada uno de ellos. Esta comparación está recogida en la siguiente tabla, en la que se revela una sobrevaloración de los conocimientos propios y de las capacidades para resolver este tipo de tareas:

Tabla 3

Valoración de las preguntas	Ítem 1	Ítem 6	Ítem 7
No la entendí	1,1%	6,1%	10,9%
La entendí pero no sé qué hacer	7,2%	12,9%	17,8%
Sé resolverla pero es una pregunta difícil	30,1%	20%	30,6%
Para mí es fácil	61,6%	61%	40,7%
Resultados obtenidos	Ítem 1	Ítem 6	Ítem 7
Correcto	76,3%	60,8%	19,9%
Incorrecto	23,7%	39,2%	80,1%

CONCLUSIONES

Finalmente recogemos de modo global las principales conclusiones que pueden extraerse del análisis anterior:

– La propuesta de los libros de texto analizados se centra preferentemente (en ocasiones casi exclusivamente) en el planteamiento de problemas de coordenadas, cuyo contenido es puramente numérico en el caso de las traslaciones y restando importancia a las isometrías como elemento clasificador en los polígonos y figuras planas o como elemento matemático del entorno del alumno (presencia de isometrías en obras de arte), etc. Se proponen en algunos casos trabajos con algún material a modo de anécdota o pasatiempo (aparentemente de forma totalmente aislada del currículo), y la relación entre las transformaciones y algunas manifestaciones artísticas o elementos del entorno del alumno se plantea únicamente a modo de curiosidad.

– La mayor parte de los profesores encuestados, probablemente influenciados por el planteamiento del DCB oficial y/o por sus creencias respecto de las matemáticas y su enseñanza, confiesa que se trata de un tema que habitualmente no es tratado en sus clases (lo que, de forma implícita, supone dar poca importancia al mismo). También se deduce de este análisis que el uso de materiales didácticos diferentes del libro de texto y de apuntes escritos (materiales manipulativos, recursos informáticos) es totalmente ocasional, reservándose para «días perdidos» antes de vacaciones o después del examen. Esta forma de presentar los materiales consigue que el alumno los vea como algo totalmente desligado de la clase de matemáticas, sólo como un juego o pasatiempo, y ello le resta toda efectividad al mismo.

– Del análisis de las respuestas de los alumnos al cuestionario, podemos concluir que, pese a que las actividades propuestas podrían ser consideradas como de iniciación al tema, puesto que no requieren el uso de conocimientos profundos sobre el mismo, el número de respuestas satisfactorias fue muy inferior al deseado y se detectan numerosos errores de diferente especie. Si se comparan los resultados con los obtenidos en otras preguntas que posibilitan una resolución numérica, observamos que los alumnos generalmente se desenvuelven mejor ante situaciones que no requieren razonamiento geométrico, aún en el caso de tener que trabajar con expresiones numéricas o algebraicas aparentemente menos sencillas. Esta conclusión coincide con lo expuesto en los últimos informes del Instituto de Evaluación de la Calidad de la Enseñanza (INCE) sobre las competencias matemáticas de los alumnos de ESO en España (INCE, 2000, 2001).

– Como se puede observar tras la lectura de los párrafos anteriores, no es posible considerar que el tratamiento dado a este tema en el 2º ciclo de ESO en nuestra comunidad sea satisfactorio. Todo ello se enmarca dentro de la observable persistencia de la «algebrización» de

los contenidos geométricos en los programas, y de las propuestas en ese sentido de los textos de mayor incidencia en las aulas, arrinconando todo lo que suponga manipulación y construcción activa, así como el uso de diferentes materiales y contextos. Esta situación, lejos de aumentar la cultura matemática de los alumnos, impide el desarrollo de capacidades básicas en esta etapa como la de crear, clasificar, enfrentarse a situaciones desconocidas, relacionar conocimientos de diferentes materias, construir, representar, etc.

– El nuevo DCB (Xunta de Galicia, 2002) de la comunidad gallega, aprobado en mayo del año 2002, parece suponer una «vuelta atrás» en lo que a la enseñanza de la geometría se refiere; se prima sobre todo el trabajo con fórmulas frente a la manipulación y exploración. Esto implica que el tema de las isometrías del plano, cuyo tratamiento con ecuaciones se hace inviable en estos niveles, aparezca desconectado de los restantes temas de geometría, otorgándosele un papel secundario en los mismos. Además encontramos algunas contradicciones en la secuencia indicada para los diferentes contenidos:

- Se adelanta el estudio del tema de 4º a 3º, mientras que en el último curso de ESO se propone la introducción de los vectores en el plano de manera totalmente desconectada del estudio de las traslaciones.

- A lo largo de la etapa, el estudio de la geometría se plantea comenzando por el plano para seguir luego con la geometría tridimensional, proponiendo el tratamiento de las isometrías del plano hacia el final (posteriormente incluso a la geometría tridimensional), en lugar de considerarlo dentro del bloque de geometría del plano, eliminando toda posible conexión con el resto de los contenidos bidimensionales.

Por último debemos significar que el enfoque dado a la enseñanza y aprendizaje de la geometría en general, y de las isometrías en particular, que se refleja en este estudio, no concuerda con lo recomendado en las principales propuestas publicadas sobre didáctica de la geometría.

NOTA

¹ En un cuestionario previo (piloto) se habían incluido, además, otros cuatro cuadrados sombreados (en las cuatro esquinas), para observar las simetrías puntuales. La complejidad interpretativa creada a los estudiantes de este nivel que realizaron la prueba piloto (100) nos hizo desistir del intento.

RECONOCIMIENTO

Este trabajo se ha realizado en el marco del proyecto PGIDT00PX124101PR de la Secretaría de I+D de la Xunta de Galicia.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALSINA, C., BURGUÉS, C. y FORTUNY, J.M. (1987). *Invitación a la Didáctica de la Geometría*. Madrid: Síntesis.
- ALSINA, C., BURGUÉS, C. y FORTUNY, J.M. (1988). *Materiales para construir la Geometría*. Madrid: Síntesis.
- CAJARAVILLE, J.A., LABRAÑA, A., FERNÁNDEZ, T., SALINAS, M.J., TORRE, E. y VIDAL, E. (2003). *Avaliación do currículo de Matemáticas en 2º ciclo da ESO en Galicia*. ICE - Servicio de Publicaciones de la Universidad de Santiago de Compostela.
- CONTRERAS, A. (1994). Los movimientos del plano y el lenguaje Logo. *UNO*, 2.
- INCE (2000). *Resultados de la prueba de matemáticas de 4º curso de la ESO*.
- INCE (2001). *Conocimientos de matemáticas de los alumnos de 4º curso de la ESO*.
- JAIME, A. y GUTIÉRREZ, A. (1996). *El grupo de las isometrías del plano*. Madrid: Síntesis.
- LEINHARDT, G. (1989). Math lessons: A contrast of novice and expert competence. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(1), pp. 52-75.
- LEINHARDT, G. y GREENO, J. (1986). The cognitive skill of teaching. *Journal of Educational Psychology*, 78(2), pp. 75-95.
- LLINARES, S. y SÁNCHEZ, M.V. (eds.). (1990). *Teoría y práctica en Educación Matemática*. Sevilla: Alfar.
- LLINARES, S. (1991). *La formación de profesores de matemáticas*. Sevilla: GID.
- LLINARES, S. (1993). Aprender a enseñar matemáticas. Conocimiento de contenido pedagógico y entornos de aprendizaje, en Montero, L. y Vez, J.M. (eds.). *Las didácticas específicas en la formación del profesorado*. Santiago de Compostela: Tórculo ediciones.
- LLINARES, S., SÁNCHEZ, M.V., GARCÍA, M. y ESCUDERO, I. (1995). *Creencias y aprender a enseñar matemáticas*. Sevilla: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Sevilla.
- MARTÍN, C. (2002). Criterios para el análisis de libros de texto desde la perspectiva de la didáctica de la Matemática. Aplicación a la estadística y probabilidad, en Penalva Martínez, M.C., Torregrosa Gironés, G. y Valls González, J. (eds.). *Aportaciones de la didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales*. Universidad de Alicante.
- N.C.T.M. (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación Matemática*. Sevilla: SAEM Thales.
- N.C.T.M. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Versión electrónica: <<http://standars.nctm.org>>.
- PLATA, A. (1998). «A aprendizaxe das matemáticas dende os modelos de mediación cognitiva: A práctica avaliativa dos profesores e as súas concepcións sobre a área e o seu ensino como contexto de interacción». Tesis doctoral. Universidade de Santiago de Compostela.
- PRENDES, M.P. (1998). *Evaluación de manuales escolares*. Revista electrónica. Pixel-Bit, 9. <<http://www.us.es/pixelbit/articulos/n9/n9art/art93.htm>>.
- REY, C. y PENALVA, M.C. (2002). Análisis del campo afectivo en los libros de texto de matemáticas, en Penalva Martínez, M.C., Torregrosa Gironés, G. y Valls González, J. (eds.). *Aportaciones de la didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales*. Universidad de Alicante.
- RICO, L. (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en Educación Secundaria*. Madrid: Síntesis.
- ROMBERG, T. y CARPENTER, T. (1986). Research on Teaching and Learning Mathematics: Two disciplines of scientific inquiry, en Wittrock, M.C. (ed.). *Handbook of Research on Teaching*. Nueva York: MacMillan.
- SCHÖN, D. (1993). Teaching and learning as a reflective conversation, en Montero, L. y Vez, J.M. (eds.). *Las didácticas específicas en la formación del profesorado*. Santiago de Compostela: Tórculo ediciones.
- THOMPSON, A. (1984). The relationship between teachers conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*. 15(1), pp. 105-127.
- XUNTA DE GALICIA. (1992). *Diseño Curricular Base. Educación Secundaria*. Gabinete de estudio para a reforma educativa. Consellería de Educación e OU. Santiago de Compostela.
- XUNTA DE GALICIA. (1992). *Educación Secundaria. Desenvolvemento Curricular. Secuencias de obxectivos, contidos e criterios de avaliación, por Áreas e por Ciclos*. Gabinete de estudio para a reforma educativa. Consellería de Educación e OU. Santiago de Compostela.
- XUNTA DE GALICIA. (2000). *Catálogo de centros públicos y privados que imparten ESO en Galicia*. Consellería de Educación e Ordenación Universitaria da Xunta de Galicia.
- XUNTA DE GALICIA. (2002). *Diseño Curricular Base. Educación Secundaria*. Gabinete de estudio para a reforma educativa. Consellería de Educación e O.U. Santiago de Compostela.

[Artículo recibido en septiembre de 2004 y aceptado en febrero de 2007]