AQUEST DOCUMENT NOMÉS
PODRÀ SER CONSULTAT DINS
L'ÀREA DE TREBALL INTERN

PROHIBIDA LA REPRODUCCIÓ
TOTAL O PARCIAL SENSE
L'AUTORITZACIÓ PER ESCRIT
DE L'AUTOR

Universitat Autònoma de Barcelona
Servei de Biblioteques
1500531460

SOBRE EL NUCLEO DE UNA ECONOMIA CON INCERTIDUMBRE

Ferran Sancho Pifarré

Mayo 1983

Director: Xavier Calsamiglia

UNIV. AUT. DE BARNA. - FAC. CIENCIES ECONOM.
BIBLIOTECA

TESIS DOCTORAL

AGRADECIMIENTOS

El autor desea expresar su profundo agradecimiento y deuda intelectual hacia Gerard Debreu y Andreu Mas Colell quienes con la calidad de sus enseñanzas, lo acertado de sus consejos y su constante estímulo influyeron decisivamente en su formación. A Xavier Calsamiglia -director de este trabajo- le agradezco el impulso y orientación que dió a mi carrera. Juan Carlos Collado, Clemente Polo y Kaoru Yamaguchi leyeron críticamente y comentaron pertinentemente versiones preliminares de algunos capítulos. Para ellos va también mi agradecimiento.

A HELEN

INDICE

CAPITULO I : INTRODUCCION

Un repaso breve de la literatura tradicional.

El concepto de núcleo, originalmente formulado con este nombre en el área de matemáticas conocida como Teoría de Juegos, ha jugado un papel crucial en el estudio de los fundamentos cooperativos de la Teoría del Equilibrio General. Fue sin embargo Edgeworth [1881] el primer economista que definió y utilizó el concepto bajo el nombre de "curva de contrato". La importancia de su contribución no fue plenamente apreciada hasta la década que empezó en 1950 cuando especialistas en Teoría de Juegos como Gillies [1953] y Shapley [1953] reintrodujeron independientemente la noción de curva de contrato bajo el epígrafe de núcleo de un juego. Shubik [1959] apreció la relación existente entre la curva de contrato de una economía y el núcleo de un juego. Su observación catalizó el desarrollo de lo que hoy en día conocemos como Teoría del Núcleo de una economía.

Un juego es una representación abstracta de una situación de conflicto entre varios agentes. Cada uno de ellos toma decisiones, individualmente o en cooperación con otros agentes, con el objetivo de maximizar su utilidad o ganancia. El resultado final del juego es determinado, conjuntamente, por el conjunto de decisiones efectuadas. En general,

cada posible combinación de decisiones da lugar a una asignación de utilidades o ganancias distinta. Una <u>solución</u> de un juego es una regla que, satisfaciendo ciertos criterios de razonabilidad y aceptabilidad, selecciona un subconjunto dentro del conjunto de todas las asignaciones posibles.
Se dice que una asignación de utilidades es vetada si existe un subconjunto de participantes en el juego que, por si mismo, puede ofrecer a cada uno de sus miembros integrantes un nivel de utilidad superior al que obtendrían en la asignación propuesta. El núcleo de un juego es el subconjunto de asignaciones de utilidad que son posibles y que no pueden ser vetadas por ningún subconjunto de participantes.

La curva de contrato de una economía de intercambio puro consiste, por su parte, de todas aquellas asignaciones de bienes que no son mejorables por ningún individuo o grupo de individuos. Una asignación para la economía es mejorable por un subconjunto de agentes si éstos pueden redistribuir sus dotaciones iniciales de bienes y ofrecer a cada componente un nivel de satisfacción superior al que obtendrían con la asignación original.

Las dos definiciones que acabamos de introducir ponen de manifiesto la íntima relación entre la curva de contrato y el núcleo de un juego. El núcleo, conceptualización abstracta diseñada como solución de un juego, aparece en la teoría económica como un mecanismo de asignación de recursos. El lector interesado en una discusión de la razonabilidad y aceptabilidad del núcleo como solución de un juego puede consultar la obra clásica de Luce y Raiffa [1957] o bien la sucinta y metódica exposición de Maschler [1975] donde, además, se presentan y discuten otras soluciones propuestas en la literatura.

La línea de investigación que se originó a partir de las contribuciones mencionadas fue doble. En primer lugar, el problema del intercambio de mercancías fue transformado en un juego y se demostró que toda economía convexa da lugar a un juego con un núcleo no vacío. Este resultado fue demostrado por Scarf [1967]. En segundo lugar, la denominada conjetura de Edgeworth, a saber, que la curva de contrato se "contrae" hacia el conjunto de las asignaciones competitivas cuando el número de agentes presentes en la economía crece indefinidamente, fue satisfactoriamente probada por Debreu y Scarf [1963], para el caso de una secuencia de economías de réplica, y por Aumann [1964] para el caso ideal de una economía con un contínuo de agentes. En el trabajo de Debreu y Scarf la idea de contracción fue rigurosamente formulada: las asignaciones competitivas son aquellas que no son mejorables por ningún grupo de agentes independientemente del grado de réplicación de la economía. Aumann probó, por su parte, que las asignaciones en el núcleo o curva de contrato de una economía con un contínuo de agentes coincidían, precisamente, con el conjunto de asignaciones competitivas.

El vacío existente entre los casos extremos representados por las aportaciones de Debreu y Scarf y Aumann fue satisfactoriamente cubierto con las contribuciones, entre otros, de Hildenbrand [1974], Bewley [1974], Anderson [1978] y Cheng [1980]. Estos autores formularon la conjetura de Edgeworth en economías con un gran número de agentes, pero finitas, que no se obtenían necesariamente a través de un proceso de replicación. Un panorama excelente de la literatura sobre el núcleo de una economía es el realizado por Hildenbrand [1982].

El núcleo como mecanismo de asignación de recursos.

El concepto de núcleo tiene indudables atractivos como mecanismo de asignación de recursos. En primer lugar, toda asignación en el núcleo es eficiente en el sentido de Pareto puesto que sino existiría una coalición -la de todos los agentes- que vetaría la mencionada asignación. En segundo lugar, ningún agente recibe un nivel de utilidad inferior al de su dotación inicial de bienes. En tercer lugar, el mecanismo es claramente democrático en tanto que la facultad de veto de cualquier coalición es respetada, en particular la de las coaliciones minoritarias. Observamos, en cuarto lugar, que el mecanismo no es discriminatorio puesto que no se imponen restricciones a priori en la formación y la composición de las coaliciones. Finalmente, las asignaciones en el núcleo son equitativas en el sentido que los indivíduos que poseen características similares reciben niveles de utilidad similares.

La posibilidad de implementar una asignación en el núcleo depende claramente de la ausencia de costes de comunicación y de adquisición de información. Estos costes son probablemente sustanciales en economías con un gran número de agentes, de ahí que la implementabilidad sea una cuestión delicada. Esto, sin embargo, no limita la relevancia de la teoría del núcleo puesto que su interés principal radica no tanto en la operatividad del mecanismo como en los fundamentos cooperativos que ofrece al mecanismo tradicional de asignación de bienes a través de precios. En efecto, el aspecto crucial de la conjetura de Edgeworth, o lo que en terminología moderna denominamos teorema de equivalencia, es que las asignaciones competitivas y las asignaciones en el núcleo no son muy distintas si la economía posee un gran número de agentes. No es difícil el demostrar que, para cualquier economía, una asignación competitiva pertenece al núcleo y por tanto disfruta de las propiedades que hemos mencionado anteriormente. Por otra parte, una asignación en el núcleo de una economía con mucho agentes es "casi" competitiva y el grado de aproximación mejora a medida que el número de individuos aumenta. Así pues, vemos como dos mecanismos de asignación de recursos con características tan dispares dan lugar a resultados prácticamente indistinguibles, con lo que la utilización de un mecanismo operativo como los mercados competitivos queda justificada en un sistema cooperativo como el representado por el núcleo.

Una interesante propiedad de las asignaciones en el núcleo es la de equidad. No es intuitivamente claro, a partir de la definición, que los agentes que poseen características similares sean tratados equitativamente en términos de utilidad. Esta propiedad es, de hecho, poco trivial y requiere una prueba matemática bastante compleja. Una proposición previa a la demostración del teorema de Debreu y Scarf trata precisamente esta cuestión. Si las características de los agentes, ésto es, sus funciones de utilidad y sus dotaciones iniciales de bienes, satisfacen ciertas propiedades, es posible demostrar que idénticos agentes reciben en el núcleo de cualquier economía de réplica dada idénticos niveles de utilidad. Esta propiedad es ciertamente satisfactoria pero depende crucialmente del supuesto de replicación. Green [1972] demostró que si la economía no posee un idéntico número de réplicas de cada tipo de agente, la propiedad de tratamiento igualitario que hemos expuesto desaparece. En un artículo publicado en 1973, Hildenbrand y Kirman demostraron que, en economías con un número suficientemente grande de indivíduos, todos los agentes pertenecientes al mismo tipo son tratados de manera similar en el núcleo: los niveles de utilidad de consumidores idénticos no son necesariamente iguales pero puede hacerse que estén arbitrariamente próximos. Esta aportación concluyó la polémica acerca de las propiedades equitativas del núcleo en economías sin incertidumbre.

El papel de la incertidumbre en la teoría del núcleo.

A la vista de la creciente importancia que ha ido adquiriendo la introducción de incertidumbre o riesgo[1] en los modelos económicos, resulta sorprendente la escasa atención que este factor ha recibido en el estudio de las características y propiedades del núcleo. Ello puede deberse, quizás, a la indoctrinación de los economistas teóricos con el modelo de mercancías contingentes de Arrow-Debreu. En efecto, supon-

---

[1] Como es sabido, la distinción entre incertidumbre y riesgo es irrelevante.

gamos la existencia de un conjunto de estados de la naturaleza cuya ocurrencia está regida por una determinada distribución de probabilidad de manera que la dotación inicial de bienes de cada agente depende del estado particular que acaece. Dos agentes son del mismo tipo si comparten la misma función de utilidad y sus dotaciones aleatorias son descritas por la misma variable aleatoria. La incertidumbre Arrow-Debreu implica que dos agentes del mismo tipo reciben en cada estado social posible la misma dotación de bienes. Por consiguiente, una redefinición del espacio de bienes que incluya mercancías contingentes permite aplicar los resultados obtenidos en el marco tradicional con certidumbre al caso de incertidumbre del tipo Arrow-Debreu o colectiva. La técnica de generalización es, pues, idéntica a la utilizada en la extensión de los teoremas de existencia y optimalidad; véase Debreu [1959].

Una economía se define normalmente como una función cuyo dominio es un espacio de agentes y cuyo recorrido es un espacio de características (preferencias o funciones de utilidad y dotaciones iniciales). Un método alternativo de introducir incertidumbre en el análisis puede basarse no tanto en considerar aleatoriedad en el espacio de características como en hacerlo en el espacio de agentes. Así, se puede construir una secuencia de economías en la que el número de agentes de cada tipo en cada término de la secuencia se construye a partir de una cierta distribución de probabilidad. En cada economía de la mencionada secuencia se puede obtener la proporción de indivíduos que comparten una determinada característica. La secuencia de proporciones así construida es aleatoria, pero en la medida que dicha secuencia converge hacia una distribución límite, los resultados tradicionales de la teoría del núcleo pueden también extenderse al marco de "economías muestrales" que hemos descrito; véase, al respecto, Hildenbrand [1974].

La hipótesis de incertidumbre colectiva que hemos discutido previamente puede interpretarse probabilísticamente como una situación donde las variables aleatorias que describen las dotaciones iniciales de bienes de los agentes del mismo tipo son dependientes. Supongamos, por contra, que definimos como indivíduos del mismo tipo a aquellos que comparten la misma función de utilidad y la misma dotación aleatoria de bienes pero con la particularidad que éstas son independientes. Así, dos agentes idénticos pueden estar afectados por estados distintos. Por ejemplo, la capacidad de trabajo de un indivíduo depende de su estado de salud. Haciendo abstracción de plagas o enfermedades colectivas, el hecho que un indivíduo de un tipo dado esté sano o enfermo no implica a priori nada respecto al estado de salud del resto de agentes del mismo tipo ni, en consecuencia, en su capacidad de trabajo.

En este contexto es evidente que los agentes ven determinados su dotación de bienes no por la ocurrencia de diversos estados de la naturaleza sino por la ocurrencia de sus estados personales, de ahí que este tipo de incertidumbre se denomine personal o individual. Por otra parte, es claro que los estados personales determinan un conjunto de estados sociales o colectivos a partir de los que podemos definir un espacio de mercancías contingentes. La dimensión del espacio de bienes contingentes depende, para un conjunto dado de estados personales, del número de agentes presentes en la economía. Además, agentes idénticos no dispondrán en general de las mismas dotaciones contingentes. No es inmediato, por consiguiente, que los teoremas del núcleo sean adaptables al marco de incertidumbre personal.

El objetivo del presente trabajo es, precisamente, el estudio de las condiciones que garantizan que en economías con incertidumbre individual se satisface una versión (redefinida) del teorema de equivalencia. Asimismo, deseamos analizar la validez de las propiedades de tratamiento igualitario.

Esta área de investigación fue abierta por Caspi [1978] y continuada por Weller [1981]. Caspi presentó un modelo de una economía con riesgos individuales y probó que las asignaciones en el núcleo satisfacen, asintóticamente, propiedades de tratamiento igualitario en términos de utilidad esperada.

Su modelo se basa, sin embargo, en hipótesis excesivamente fuertes: un solo tipo de consumidor y de bien material; aumento del tamaño de la economía por réplicación; funciones de utilidad diferenciables y estrictamente cóncavas; dotaciones iniciales de bienes representadas por variables aleatorias independientes y con idéntica distribución. El trabajo de Weller amplía los resultados de Caspi al caso de más de un bien material manteniendo, básicamente, el resto de hipótesis. El considerar un solo tipo de agentes es tan particularmente conveniente y simplificador como restrictivo. Permite, en concreto, obtener un teorema de convergencia con un coste muy reducido. En efecto, la contribución principal de estos trabajos puede resumirse diciendo que las asignaciones en el núcleo de una economía con incertidumbre personal ofrecen niveles de utilidad esperada arbitrariamente próximos a la utilidad de la esperanza matemática de la dotación inicial de bienes. Bajo las hipótesis mencionadas es trivial el comprobar que dicha esperanza matemática es el único equilibrio competitivo de la economía sin incertidumbre que se deriva tomando como dotación inicial de bienes el valor esperado de las variables aleatorias que definen las dotaciones iniciales en la economía con incertidumbre y un solo tipo de agente. La simple introducción de dos tipos de agentes destruye este resultado.

El modelo que presentamos en esta tesis incluye un número arbitrario, pero finito, de distintos tipos de agentes. Prescindimos completamente de la hipótesis de diferenciabilidad, mientras que la concavidad estricta es relajada a concavidad excepto en un caso particular donde probamos que, de hecho, no podemos prescindir de ella. Ampliamos, también, el tipo de incertidumbre personal; tanto Caspi como Weller utilizan casos particulares de variables aleatorias que satisfacen la ley fuerte de los grandes números. Veremos que el único requerimiento que debemos imponer a la aleatoriedad de las dotaciones iniciales es que ésta sea lo "suficientemente individual" para que una versión de la ley de los grandes números sea aplicable; en concreto, utilizaremos axiomáticamente la ley débil de los grandes números. Finalmente, demostraremos que la condición de replicación de los agentes no es crucial para obtener los teoremas de convergencia del núcleo. Estas hipótesis están, a nuestro entender, más en consonancia con las hipótesis tradicionalmente realizadas en la teoría del núcleo de una economía en condiciones de certidumbre.

Organización del trabajo.

En el capítulo II introducimos y discutimos las hipótesis que conforman la naturaleza del modelo. Asimismo, enunciamos las principales definiciones y presentamos algunos ejemplos. En el capítulo III analizamos algunos criterios de equidad y demostramos que en el marco de secuencias de economías de réplica las asignaciones pertenecientes al núcleo satisfacen los criterios propuestos. En el siguiente capítulo extendemos los resultados elaborados para secuencias de economías de réplica a economías más generales, en particular prestaremos singular atención a las denominadas secuencias competitivas. El capítulo V trata la cuestión de la relación entre las asignaciones en el núcleo y las asignaciones competitivas o walrasianas. Esta relación se sumariza en dos teoremas de convergencia para, respectivamente, secuencias de economías de réplica y secuencias competitivas. Varios apéndices recogen conceptos y resultados (matemáticos y económicos) que, por su carácter más técnico o bien para no interrumpir el flujo de la discusión, parecía más adecuado no intercalar en el texto principal. Finalizamos el trabajo con una breve recapitulación de su contenido.

CAPITULO II : DESCRIPCION DEL MODELO

Una economía $\mathscr{E}$ está compuesta de una colección finita J de individuos caracterizados por una función de utilidad u y una dotación inicial de bienes e. Cada agente $j \in J$ viene descrito por un par (u_j, e_j). Para precisar el conjunto de economías que vamos a considerar en este trabajo, efectuamos las siguientes hipótesis,

H.1.a. Para todo $j \in J$, la función $u_j \colon R_+ \to R$ es contínua, acotada, cóncava y creciente.

H.1.b. Propiedad de la utilidad esperada: sean $(f|P)$ y $(g|Q)$ loterías con espectro finito. La lotería $(f|P)$ es preferida a la lotería $(g|Q)$ por el agente j si y solo si la utilidad esperada de $(f|P)$ no es menor que la utilidad esperada de $(g|Q)$, i.e., $(f|P) \gtrsim_j (g|Q)$ si y solo si $Eu_j(f|P) \geq Eu_j(g|Q)$.

Una función de utilidad que satisface H.1. se denomina función de utilidad de Bernoulli. La hipótesis de continuidad es típica en teoría económica y su caracter es puramente técnico. La condición de concavidad refleja que los agentes no son amantes del riesgo. La hipótesis de acotación es natural dentro del contexto de la teoría de la utilidad esperada para obviar la conocida paradoja de San Petersburgo. Puesto que en este trabajo utilizaremos espacios de probabilidad finitos y no denumerables, la propiedad de acotación no puede derivarse del resto de hipótesis, de ahí que sea preciso asumirla. Una discusión completa sobre esta propiedad puede verse en el artículo de Fishburn [1970]. La condición de monotonía de las funciones de utilidad es standard y no merece mayor comentario. La hipótesis H.1.b. tiene en cuenta el contenido probabilístico del modelo y recoge la hipótesis de racionalidad de los consumidore, a saber, que todos ellos tienen como objetivo la maximización de su utilidad esperada. Denotaremos por $\mathcal{U}$ el conjunto de las funciones que satisfacen H.1..

Cada agente j está afectado por un conjunto de estados cuya ocurrencia determina la dotación inicial en su posesión. Si Ω_j es tal conjunto, denotaremos por $\mathcal{P}(\Omega_j)$ el conjunto de todos los sucesos generables a partir de Ω_j y por Π_j una medida de probabilidad definida en $\mathcal{P}(\Omega_j)$. Asumimos,

H.2. La dotación inicial $e_j:(\Omega_j, \mathcal{P}(\Omega_j), \Pi_j) \longrightarrow R_+$ es una función medible que satisface $e_j(w_j) > 0$ para todo $w_j \in \Omega_j$. El conjunto Ω_j es finito y $\Pi_j(w_j) > 0$ para todo $w_j \in \Omega_j$.

El símbolo ξ representará todas aquellas funciones que satisfacen H.2.. Podemos, ahora, definir de manera precisa el concepto de economía. Una economía estocástica $\mathcal{E}$ es una función del espacio de agentes J en el espacio de características $\mathcal{U} \times \xi$, i.e.,

$$\mathcal{E} : J \to \mathcal{U} \times \xi$$

de manera que $\mathcal{E}(j) = (u_j, e_j) \in \mathcal{U} \times \xi$ para todo $j \in J$. La hipótesis de incertidumbre individual implica, como hemos mencionado en la introducción, que cada individuo es afectado únicamente por su propio conjunto de estados Ω_j. El conjunto de estados sociales Ω se obtiene como el producto cartesiano de los conjuntos de estados personales, i.e.,

$$\Omega = \prod \Omega_j$$

Un vector $w \in \Omega$ especifica los estados que afectan a cada consumidor. Sea $\text{proy}_{|j}(w)$ la proyección del vector w en su j-ésima coordenada; entonces, la hipótesis de incertidumbre personal puede expresarse formalmente como

H.3. Para todo $w \in \Omega$, $e_j(w) = e_j(\text{proy}_{|j}(w))$.

Dada una economía $\mathcal{E} : J \to \mathcal{U} \times \xi$, podemos construir una secuencia de economías $\{\mathcal{E}^r\}$, $r=1, 2, \ldots$, tomando como base el subconjunto de características $\mathcal{E}(J) \subseteq \mathcal{U} \times \xi$. Denotaremos por A^r el conjunto de agentes en la economía $\mathcal{E}^r$ y por A_j^r el subconjunto de agentes de tipo j en $\mathcal{E}^r$, de manera que $A^r = \bigcup A_j^r$. Puesto que deseamos analizar propiedades de economías con un gran número de agentes, debemos asumir

H.4. Para todo $j \in J$, $\lim_{r \to \infty} \# A_j^r = \infty$

donde $\#A$ denota la cardinalidad del conjunto A . Para facilitar la interpretación, se puede asumir que todas las copias del tipo j comparten la misma dotación aleatoria de bienes. Sin embargo, ésto no es necesario. Los únicos requerimientos que necesitamos en la definición de "copia" son los de independencia estocástica e idéntica esperanza matemática en las dotaciones iniciales. Esto es suficiente para postular una condición de estabilidad estocástica que refleje la noción de independencia implícita en el concepto de incertidumbre personal. Así pues,

H.5. Para todo $j \in J$, la secuencia $\{e_j(a)\}_{a \in A_j^r}$, $r=1, 2, \ldots$, satisface la ley débil de los grandes números, i.e., para todo $\delta > 0$

$$\lim_{r \to \infty} \text{Prob} \left\{ \left| (\# A_j^r)^{-1} \sum_{a \in A_j^r} e_j(a) - Ee_j \right| > \delta \right\} = 0$$

donde $e_j(a)$ es la dotación de bienes que corresponde a la copia a del tipo j y Ee_j es la esperanza matemática común de todas las variables aleatorias $e_j(a)$.

Ejemplo 1. Sea $\{e_j(a)\}_{a\in A_j^r}$ una secuencia de dotaciones aleatorias mutuamente independiente y con idéntica distribución. Dadas nuestras hipótesis, la varianza de $\bar{e}_j^r =: (\# A_j^r)^{-1} \sum_{a\in A_j^r} e_j(a)$ existe siempre y es igual a

$$\operatorname{var}(\bar{e}_j^r) = \frac{\operatorname{var}(e_j(a))}{\# A_j^r}$$

Como $\lim \# A_j^r = \infty$, se sigue que $\lim \operatorname{var}(\bar{e}_j^r) = 0$. De la desigualdad de Tchebyschev

$$\operatorname{Prob} \{|\bar{e}_j^r - Ee_j| > \delta\} \leq \frac{\operatorname{var}(\bar{e}_j^r)}{\delta^2}$$

se deriva de manera inmediata que $\lim \operatorname{Prob} \{|\bar{e}_j^r - Ee_j| > \delta\} = 0$ para todo $\delta > 0$, con lo que la secuencia de dotaciones verifica H.5.

Ejemplo 2. Sea $\{e_j(a)\}_{a\in A_j^r}$ una secuencia de dotaciones aleatorias mutuamente independientes que cumple

i) $Ee_j(a) = Ee_j$, para todo $a \in A_j^r$, para todo $r=1,2,\ldots$

ii) $\operatorname{var}(e_j(a)) < +\infty$

$$\text{iii)} \quad \lim_{r\to\infty} (\# A_j^r)^{-2} \sum_{a\in A_j^r} \operatorname{var}(e_j(a)) = 0$$

La secuencia $\{e_j(a)\}_{a\in A_j^r}$ satisface H.5.. En efecto, puesto que

$$E(\bar{e}_j^r - Ee_j)^2 = \operatorname{var}(\bar{e}_j^r - Ee_j) = (\# A_j^r)^{-2} \sum \operatorname{var}(e_j(a))$$

la condición iii) implica que la secuencia $\{\bar{e}_j^r\}$ converge en la media de orden 2 hacia Ee_j. Por consiguiente, $\{\bar{e}_j^r\}$ converge asimismo en probabilidad hacia Ee_j.

La descripción de una secuencia de economías depende, obviamente, del método que utilicemos para incrementar el número de agentes. Las hipótesis realizadas hasta el momento son en este sentido bastante débiles. Si $\mathcal{E} : J \to \mathcal{U} \times \xi$ es una economía que satisface H.1-H.3 y $\{\mathcal{E}^r\}$ es una secuencia basada en $\mathcal{E}$ que satisface H.4-H.5, tenemos

<u>Definición 1</u>. La secuencia de economías $\{\mathcal{E}^r\}$ se denomina de <u>réplica</u> si $A^r = J \times \{1, 2, \ldots, r\}$ de manera que $\mathcal{E}^r(j, a) = (u_j, e_j(a))$, $a = 1, 2, \ldots, r$.

En una economía de réplica de orden r existen, por tanto, r copias de cada tipo de agente. Un procedimiento más general de aumentar el tamaño de la economía viene recogido en la siguiente definición.

<u>Definición 2</u>. La secuencia de economías $\{\mathcal{E}^r\}$ se denomina <u>competitiva</u> si para todo $j \in J$ existe un $\eta_j \in]0, 1[$ tal que

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\# A_j^r}{\# A^r} = \eta_j$$

La interpretación es inmediata. La fracción $\# A_j^r / \# A^r$ indica la proporción de individuos de tipo j presentes en la economía $\mathcal{E}^r$. Este número fluctúa de economía a economía, pero cuando el índice r es lo suficientemente grande dicha proporción se estabiliza en un entorno arbitrariamente pequeño de η_j. Claramente, $\sum \eta_j = 1$. La secuencia de proporciones $\# A_j^r / \# A^r$ recoge toda la información sobre la distribución de las características de los agentes. La convergencia de la mencionada secuencia refleja la idea intuitiva de que al aumentar el tamaño de la economía, y por tanto su grado de competitividad, no está variando sustancialmente el carácter de la economía, ésto es, su distribución de características. Se observará que una secuencia de economías de réplica es un caso particular de economías competitivas. En efecto, para una secuencia de réplicas tenemos que

$$\frac{\# A_j^r}{\# A^r} = (\# J)^{-1} \qquad \text{para todo} \quad r = 1, 2, \ldots.$$

Si $\Omega_{(j,\ a)}$ representa el conjunto de los estados personales que afectan a la copia a del tipo j, el conjunto de todos los estados sociales para la economía $\mathcal{E}^r$ viene definido por el producto cartesiano

$$\Omega^r = \prod_{\substack{j \in J \\ a \in A_j^r}} \Omega_{(j,\ a)}$$

<u>Definición 3</u>. Una asignación factible para la economía $\mathcal{E}^r$ es una función medible $f^r : A^r \times \Omega^r \to R_+$ que satisface

$$\sum_{j \in J} \sum_{a \in A_j^r} f^r(a,\ w) \leq \sum_{j \in J} \sum_{a \in A_j^r} e_j(a,\ w)$$

para todo $w \in \Omega^r$.

Por conveniencia de notación, omitiremos el argumento w sin que ello cause confusión. Usaremos, pues

$$\sum_{j \in J} \sum_{a \in A_j^r} f_j^r(a) \leq \sum_{j \in J} \sum_{a \in A_j^r} e_j(a)$$

teniendo en cuenta que esta relación implícitamente recoge que la igualdad entre ofertas y demandas tiene lugar en todos los estados sociales. Se observará que el número de mercancías contingentes depende de r.

Las preferencias de los consumidores sobre vectores de bienes contingentes respetan H.l.b.. Así, si $a \in A_j^r$ y f^r y g^r son asignaciones para la economía $\mathcal{E}^r$, tenemos que $f_j^r(a)$ es preferido a $g_j^r(a)$ por a si y solo si

$$Eu_j f_j^r(a) \geq Eu_j g_j^r(a)$$

Por otra parte, la variable aleatoria $f_j^r(a)$ es estrictamente preferida a $g_j^r(a)$ por a si y solo si

$$Eu_j f_j^r(a) > Eu_j g_j^r(a)$$

Una coalición de agentes en la economía $\mathcal{E}^r$ es cualquier subconjunto T de A^r. Una coalición $T \neq \emptyset$ puede escribirse como $T = \bigcup_j T_j^r$ donde T_j^r representa el conjunto de las copias de tipo j perteneciente a la coalición T.

Puesto que es posible que para algún j tengamos $T_j^r = \emptyset$, denotaremos por J_T al conjunto de todos los $j \in J$ para los que $T_j^r \neq \emptyset$.

<u>Definición 4</u>. Una asignación f^r para la economía $\mathcal{E}^r$ es <u>mejorable</u>, <u>bloqueada</u> o <u>vetada</u> si existen una coalición T y una asignación g^r tales que

1) $\sum_{j \in J_T} \sum_{a \in T_j^r} g_j^r(a) = \sum_{j \in J_T} \sum_{a \in T_j^r} e_j(a)$

2) $Eu_j g_j^r(a) > Eu_j f_j^r(a)$ para todo $a \in T_j^r$, para todo $j \in J_T$.

Obsérvese que no es restrictivo el suponer que todos los miembros de la coalición T reciben en la asignación g^r niveles de utilidad esperada estrictamente superiores a los que obtienen con f^r. En efecto, la condición 2) es equivalente a

2') $Eu_j g_j^r(a) \geq Eu_j f_j^r(a)$ para todo $a \in T_j^r$, para todo $j \in J_T$, con algún agente a^* satisfaciendo $Eu_j g_j^r(a^*) > Eu_j f_j^r(a^*)$.

gracias a las hipótesis de continuidad y monotonía de la función de utilidad u_j.

Definición 5. El núcleo de una economía $\mathcal{E}^r$, denotado $C(\mathcal{E}^r)$, es el conjunto de asignaciones realizables para $\mathcal{E}^r$ que no pueden ser bloqueadas por ninguna coalición $T \subseteq A^r$.

El siguiente ejemplo demuestra que indivíduos idénticos no son tratados idénticamente en el núcleo de una economía estocástica.

Ejemplo 3. Considérese una economía con dos agentes descritos por la misma función de utilidad $u(x) = \sqrt{x}$ y cuyas dotaciones iniciales son variables aleatorias independientes y con idéntica distribución definidas sobre un conjunto $\Omega = \{w_1, w_2\}$ de estados personales tales que

$$e(w_1) = 1 \quad \text{con probabilidad} \quad \Pi(w_1) = 1/2$$

$$e(w_2) = 4 \quad \text{con probabilidad} \quad \Pi(w_2) = 1/2$$

El conjunto de estados sociales es, por tanto,

$$\Omega^2 = \{(w_1, w_1), (w_1, w_2), (w_2, w_1), (w_2, w_2)\}$$

con $\text{Prob}\,(w_i, w_j) = \Pi(w_i)\,\Pi(w_j) = 1/4$. La dotación contingente del primer indivíduo viene definida por

$$e_1(w_1, w_1) = e_1(w_1) = 1$$

$$e_1(w_1, w_2) = e_1(w_1) = 1$$

$$e_1(w_2, w_1) = e_1(w_2) = 4$$

$$e_1(w_2, w_2) = e_1(w_2) = 4$$

mientras que para el segundo agente tenemos

$$e_2(w_1, w_1) = e_2(w_1) = 1$$

$$e_2(w_1, w_2) = e_2(w_2) = 4$$

$$e_2(w_2, w_1) = e_2(w_1) = 1$$

$$e_2(w_2, w_2) = e_2(w_2) = 4$$

Puesto que las dotaciones iniciales de mercancías contingentes son distintas, es intuitivamente claro que pueden existir posibilidades para que ambos agentes mejoren su bienestar a través de una distribución de sus bienes. En efecto, la solución del programa

$$\text{Max} \sum_{i,j} \text{Prob}\ (w_i, w_j)\ u(f_1(w_i, w_j))$$

sujeto a

$$\sum_{a=1,2} f_a(w_i, w_j) = \sum e_a(w_i, w_j) \qquad \text{para } i, j= 1, 2$$

$$\sum_{i,j} \text{Prob } (w_i, w_j)\, u(f_2(w_i, w_j) \geq Eu(e_2)$$

$$f_a(w_i, w_j) \geq 0 \qquad \text{para } a= 1, 2;\ i, j= 1, 2$$

describe las asignaciones en el núcleo. Tediosa computación permite ver que la asignación

$$f_1(w_1, w_1) = 0.98$$

$$f_1(w_1, w_2) = 2.45$$

$$f_1(w_2, w_1) = 2.45$$

$$f_1(w_2, w_2) = 3.92$$

$$f_2(w_1, w_1) = 1.02$$

$$f_2(w_1, w_2) = 2.55$$

$$f_2(w_2, w_1) = 2.55$$

$$f_2(w_2, w_2) = 4.08$$

pertenece al núcleo de la economía. Sin embargo, ambos agentes reciben vectores de bienes distintos y sus niveles de utilidad esperada son, como es fácilmente comprobable, también distintos.

El intercambio de bienes llevado a término puede interpretarse como un intercambio de riesgos. En determinados estados, algunos consumidores reciben dotaciones que les resultan especialmente favorables mientras que en otros estados pueden resultar perjudicados con la cesta de bienes que les corresponde. Esta situación puede invertirse para otro grupo de agentes. Los estados (w_1, w_2) y (w_2, w_1) de nuestro ejemplo ilustran esta observación. Una asignación en el núcleo permite, pues, que los consumidores intercambien riesgos y aumenten su utilidad esperada. Si la economía comprendiera un mayor número de individuos, las posibilidades de intercambiar riesgos aumentarían correspondientemente con la presencia de un mayor número de estados. En lenguaje común, existiría una mayor variedad de pólizas de seguro sobre la que negociar. Esta es, precisamente, la razón por la que intuitivamente esperamos que en economías con una gran cantidad de individuos las utilidades esperadas no sean sustantivamente diferentes. El objetivo del próximo capítulo consiste en precisar y en dar contenido formal a esta intuición económica.

CAPITULO III : ECONOMIAS DE REPLICA : PROPIEDADES EQUITATIVAS

En este capítulo presentaremos y discutiremos criterios de equidad y demostraremos que las asignaciones pertenecientes al núcleo satisfacen asintóticamente los criterios introducidos. Antes de proceder en esta línea de análisis necesitamos establecer algunos resultados de tipo técnico.

Sea $\{X_n\}$ una secuencia de variables aleatorias definidas en espacios abstractos de probabilidad $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$ con dominio en R_+ dotado de la σ-algebra $\mathcal{B}(R_+)$ de todos los subconjuntos de Borel y sea $\bar{x}$ un escalar. Tenemos,

Lema 1. Si la secuencia $\{X_n\}$ satisface para todo $\delta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P_n \left\{ w \in \Omega_n \;/\; |X_n(w) - \bar{x}| > \delta \right\} = 0$$

entonces, para toda función $h: R_+ \to R$ contínua y acotada se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} Eh(X_n) = h(\bar{x})$$

Demostración: Véase el apéndice.

Una aplicación trivial del lema 1 muestra que para cualquier función de utilidad de Bernoulli se sigue la misma conclusión,

$$\lim_{n\to\infty} Eu(X_n) = u(\bar{x})$$

Lema 2. Sea $\{x_n\}$ una secuencia de números reales y sea $\bar{x}$ un escalar. Si

i) Existen $\varepsilon > 0$ y $\alpha \in]0, 1[$ tal que para todo $n = 1, 2, \ldots$

$$\frac{\#\{a=1, 2, \ldots, n \ / \ |x_a - \bar{x}| > \varepsilon\}}{n} > \alpha$$

ii) Existe $c > 0$ tal que para todo $a=1, 2, \ldots, n$ y para todo $n=1, 2, \ldots$ se sumple $x_a \geq \bar{x} - c$.

iii) $\limsup \ (n)^{-1} \sum_{a=1}^{n} x_a \leq \bar{x}$

Entonces, existen $\bar{\varepsilon} > 0$ y $\bar{\alpha} \in]0, 1[$ que satisfacen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{a=1, 2, \ldots, n / \ x_a < \bar{x} - \bar{\varepsilon}\}}{n} > \bar{\alpha}$$

Demostración: Véase el apéndice.

Sea $\{\mathcal{E}^r\}$ una secuencia de economías de réplica y sea $f^r \in C(\mathcal{E}^r)$, para $r = 1, 2, \ldots,$ una asignación en el núcleo de $\mathcal{E}^r$. Toda asignación en el núcleo de una economía es realizable y, por tanto, tomando valores esperados en la condición de factibilidad

$$\sum_{j \in J} \sum_{a \in A_j^r} Ef_j^r(a) \leq \sum_{j \in J} (\# A_j^r) \, Ee_j$$

y si para cada $j \in J$ definimos

$$\bar{f}_j^r = (\# A_j^r)^{-1} \sum_{a \in A_j^r} Ef_j^r(a) .$$

se obtiene

$$\sum_{j \in J} \bar{f}_j^r \leq \sum_{j \in J} Ee_j$$

lo que implica que la asignación $\bar{f}^r$ es factible para la economía cuyo conjunto de agentes es J y donde cada individuo recibe como dotación inicial la esperanza matemática Ee_j de su dotación aleatoria en $\mathcal{E}$. Dicha economía, que denotamos $\mathcal{E}_E$, es una economía standard sin incertidumbre; se deriva

de $\mathcal{E}$ a través de la aplicación $(u_j, e_j) \longrightarrow (u_j, Ee_j)$.
La secuencia de asignaciones $\bar{f}^r$ para la economía $\mathcal{E}_E$ está claramente acotada. Sin pérdida de generalidad podemos, por tanto, suponer que para todo $j \in J$ existe un $\bar{f}_j$ tal que

$$\lim_{r \to \infty} \bar{f}_j^r = \bar{f}_j$$

Consecuentemente, la asignación $\bar{f}$ también es realizable para $\mathcal{E}_E$,

$$\sum_{j \in J} \bar{f}_j = \sum_{j \in J} E e_j$$

La asignación $\bar{f}$ jugará un papel crucial en el análisis pues servirá como punto de referencia sobre el el que se centrará el estudio de las propiedades de tratamiento igualitario.

Dado un número real $\varepsilon > 0$ podemos construir para cada $j \in J$ y para todo $r = 1, 2, \ldots$ el subconjunto de copias del tipo j cuya utilidad esperada en una asignación perteneciente al núcleo se desvía más de ε con respecto a la utilidad que cada $j \in J$ recibiría con la asignación cierta $\bar{f}^r$. Formalmente,

$$D_j^r(f^r, \varepsilon) =: \left\{ a \in A_j^r \,/\, |Eu_j f_j^r(a) - u_j(\bar{f}_j^r)| > \varepsilon \right\}$$

La utilidad $u_j(\bar{f}_j^r)$ puede interpretarse como la utilidad que cada indivíduo de tipo j recibiría si la esperanza matemática de su vector agregado de bienes fuera repartida equitativamente. La expresión $A_j^r - D_j^r(f^r, \varepsilon)$ representa el conjunto complementario de $D_j^r(f^r, \varepsilon)$ en A_j^r, es decir, el subconjunto de copias del tipo j que obtienen tratamiento ε-igualitario en la asignación f^r. Si $\# D_j^r(f^r, \varepsilon) = 0$, todos los indivíduos del tipo j son tratados ε-igualitariamente. En caso contrario, la fracción $\# D_j^r(f^r, \varepsilon) / \# A_j^r$ nos indica la proporción de indivíduos que, bien por defecto o bien por exceso, son "injustamente" tratados. Si dicha proporción fuera reduciéndose a medida que el tamaño de la economía aumenta, podríamos concluir que "la desigualdad desaparece con los grandes números". Esta idea puede expresarse, matemáticamente, de la siguiente manera: para todo $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{r\to\infty} \# D_j^r(f^r, \varepsilon) / \# A_j^r = 0$$

La función de utilidad u_j es contínua y por consiguiente $\lim u_j(\bar{f}_j^r) = u_j(\bar{f}_j)$. De ahí que si definimos

$$D_j(f^r, \varepsilon) =: \left\{ a \in A_j^r \;/\; |Eu_j f_j^r(a) - u_j(\bar{f}_j)| > \varepsilon \right\}$$

sea fácilmente comprobable que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\# D_j^r(f^r,\ \varepsilon)}{\# A_j^r} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{r\to\infty} \frac{\# D_j(f^r,\ \varepsilon)}{\# A_j^r} = 0$$

Nuestro primer resultado prueba que las asignaciones en el núcleo de economías con un gran número de agentes sirven, efectivamente, para eliminar las desigualdades en términos de utilidad esperada.

Teorema 1. Sea $\{\mathcal{E}^r\}$ una secuencia de economías de réplica tal que para todo $r = 1, 2, \ldots,$ $f^r \in C(\mathcal{E}^r)$. Sea $\varepsilon > 0$ un número real arbitrario. Entonces, para todo $j \in J$,

$$\lim_{r\to\infty} \# D_j(f^r,\ \varepsilon) \,/\, \# A_j^r = 0$$

Demostración: Si la conclusión no fuera cierta, existirían un tipo de consumidor -que sin pérdida de generalidad puede asumirse que es el tipo 1- , números $\bar{\varepsilon} > 0$, $\bar{\alpha} \in]0, 1[$ y una subsecuencia de índices -que por simplicidad denotamos de nuevo $\{R\}$ - tales que para todo $r \in \{R\}$ se cumpliría

$$\frac{\# D_1(f^r, \bar{\varepsilon})}{\# A_1^r} > \bar{\alpha} \tag{3.1}$$

Es fácil de ver que para todo j y todo $\varepsilon > 0$ se cumple

$$A_j^r - D_j(f^r, \varepsilon) \subseteq \{a \in A_j^r \,/\, Eu_j f_j^r(a) < u_j(\bar{f}_j) + \varepsilon\}$$

Por lo tanto, si $j \neq 1$ se tiene

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\# \{a \in A_j^r \,/\, Eu_j f_j^r(a) < u_j(\bar{f}_j) + \varepsilon\}}{\# A_j^r} = 1$$

En consecuencia, para $j \neq 1$, para cualquier $\varepsilon > 0$ y para cualquier $\alpha \in]0, 1[$, existe un número entero $R_j(\varepsilon, \alpha)$ tal que si $r > R(\varepsilon, \alpha) =: \max R_j(\varepsilon, \alpha)$ y $j \neq 1$ se tiene

$$\frac{\# \{a \in A_j^r \,/\, Eu_j f_j^r(a) < u_j(\bar{f}_j) + \varepsilon\}}{\# A_j^r} > \alpha$$

Para los indivíduos pertenecientes al tipo 1 es posible demostrar que existen $\hat{\varepsilon} > 0$, $\hat{\alpha} \in]0, 1[$ y R_1 tal que si $r > R_1$ entonces

$$\frac{\# \{a \in A_1^r \,/\, Eu_1 f_1^r(a) < u_1(\bar{f}_1) - \hat{\varepsilon}\}}{\# A_1^r} > \hat{\alpha} \tag{3.2}$$

En efecto, (3.1) implica que la condición i) del lema 2 se satisface. Demostramos, a continuación, que ii) y iii) en el mencionado lema también se satisfacen. Puesto que $f^r \in C(\mathcal{E}^r)$ y, por la hipótesis H.2. , $e_1(a) > 0$, se sigue que $Eu_1 f_1^r(a) \geq Eu_1 e_1(a) > 0$, con lo que siempre es posible encontrar $c > 0$ tal que $Eu_1 f_1^r(a) \geq u_1(\bar{f}_1) - c$ y ii) se satisface. Por otra parte, la definición de $\bar{f}_1^r$ y la concavidad de u_1 implican

$$u_1(\bar{f}_1^r) \geq (\# A_1^r)^{-1} \sum_{a \in A_1^r} u_1(Ef_1^r(a)) \geq$$

$$\geq (\# A_1^r)^{-1} \sum_{a \in A_1^r} Eu_1 f_1^r(a)$$

La hipótesis H.1. garantiza que la función u_1 está acotada superiormente. Esto implica que la función de utilidad esperada Eu_1 también tiene una cota superior y, por tanto, haciendo que r tienda a infinito obtenemos

$$u_1(\bar{f}_1) \geq \limsup (\# A_1^r)^{-1} \sum_{a \in A_1^r} Eu_1 f_1^r(a)$$

con lo que la condición iii) del lema 2 se satisface y (3.2) queda probado.

A continuación, definimos para todo $r > \max(R_1, R(\varepsilon, \hat{\alpha}))$

$$m^r =: \operatorname{int}[(\# A_j^r)\hat{\alpha}] + 1$$

de forma que $m^r \leq \#\{a \in A_j^r / Eu_j f_j^r(a) < u_j(\bar{f}_j) + \varepsilon\}$, $j \neq 1$, y $m^r \leq \#\{a \in A_1^r / Eu_1 f_1^r(a) < u_1(\bar{f}_1) - \hat{\varepsilon}\}$ y, en consecuencia, es posible construir conjuntos $B_j^r(\varepsilon)$, $j \neq 1$, y $B_1^r(\hat{\varepsilon})$ tales que

$$B_j^r(\varepsilon) \subseteq \{a \in A_j^r / Eu_j f_j^r(a) < u_j(\bar{f}_j) + \varepsilon\}$$

$$B_1^r(\hat{\varepsilon}) \subseteq \{a \in A_1^r / Eu_1 f_1^r(a) < u_1(\bar{f}_1) - \hat{\varepsilon}\}$$

y cuya cardinalidad es precisamente m^r. El resto de la prueba consiste en demostrar que para un número ε adecuadamente escogido, la coalición $B^r(\varepsilon) =: (\cup_{j\neq 1} B_j^r(\varepsilon)) \cup B_1^r(\hat{\varepsilon})$ bloqueará la asignación en el núcleo f^r siempre que el índice r sea lo suficientemente grande. Se observará que los agentes en $B_1^r(\hat{\varepsilon})$ reciben niveles de utilidad esperada particularmente desfavorables. Para poder formar una coalición con $\cup_{j\neq 1} B_j^r(\varepsilon)$ veremos que cada agente en $B_1^r(\hat{\varepsilon})$ puede ofrecer un pago Δ a los agentes de tipo $j \neq 1$ de manera que éstos verán aumentado su nivel de utilidad esperada y no podrán objeción a formar una coalición con $B_1^r(\hat{\varepsilon})$. El aspecto crucial es que una vez la coalición se ha constituido, existe una redistribución de sus recursos que también incrementa el nivel de utilidad esperada de los agentes del tipo 1 . Si Δ_j es el pago que cada agente en $B_j^r(\varepsilon)$, $j \neq 1$, recibe, de manera que $\Delta = \sum_{j \neq 1} \Delta_j$, y definimos una nueva asignación estocástica

$$\hat{f}_j^r(a) = \bar{f}_j + \Delta_j + (m^r)^{-1} \sum_{a=1}^{m^r} e_j(a) - Ee_j \quad , \quad \forall\, a \in B_j^r(\varepsilon)$$

para $j \neq 1$, y

$$\hat{f}_1^r(a) = \bar{f}_1 - \Delta + (m^r)^{-1} \sum_{a=1}^{m^r} e_1(a) - Ee_1 \quad , \quad \forall\, a \in B_1^r(\hat{\varepsilon})$$

es posible demostrar que $\hat{f}^r$ es factible para la coalición $B^r(\varepsilon)$. En efecto, es fácil de ver que para $j \neq 1$

$$\sum_{j \neq 1} \sum_{a=1}^{m^r} \hat{f}_j^r(a) = m^r \sum_{j \neq 1} (\bar{f}_j + \Delta_j - Ee_j) + \sum_{j \neq 1} \sum_{a=1}^{m^r} e_j(a)$$

mientras que para $j = 1$

$$\sum_{a=1}^{m^r} \hat{f}_1^r(a) = m^r(\bar{f}_1 - \Delta - Ee_1) + \sum_{a=1}^{m^r} e_1(a)$$

y por consiguiente

$$\sum_{j\in J} \sum_{a=1}^{m^r} \hat{f}_j^r(a) = m^r\left(\sum_{j\in J}(\bar{f}_j - Ee_j) + \left(\sum_{j\neq 1}\Delta_j - \Delta\right)\right) +$$

$$+ \sum_{j\in J} \sum_{a=1}^{m^r} e_j(a)$$

Claramente, el primer sumando del lado derecho es menor o igual que cero por definición de Δ_j y el hecho que $\bar{f}$ es realizable para $\mathcal{E}_E$. Se sigue por tanto que $\hat{f}$ es realizable para la coalición $B^r(\varepsilon)$. Se observará, por otra parte, que para todo $a \in B_j^r(\varepsilon)$, $j \neq 1$, y para todo $a \in B_1^r(\hat{\varepsilon})$ se tiene

$$|\hat{f}_j^r(a) - (\bar{f}_j + \Delta_j)| = |(m^r)^{-1} \sum_{a=1}^{m^r} e_j(a) - Ee_j|$$

$$|\hat{f}_1^r(a) - (\bar{f}_1 - \Delta)| = |(m^r)^{-1} \sum_{a=1}^{m^r} e_1(a) - Ee_1|$$

La ley débil de los grandes números -hipótesis H.5.-

implica que para todo $\delta > 0$ se cumple

$$\lim_{r\to\infty} \text{Prob}\left\{ |\hat{f}_j^r(a) - (\bar{f}_j + \Delta_j)| > \delta \right\} = 0 \;, \quad j \neq 1$$

$$\lim_{r\to\infty} \text{Prob}\left\{ |\hat{f}_1^r(a) - (\bar{f}_1 - \Delta)| > \delta \right\} = 0$$

Podemos, por lo tanto, aplicar el lema 1 a las secuencias de variables aleatorias $\{f_j^r\}$, $j \neq 1$, y $\{f_1^r\}$ y obtener

$$\lim_{r\to\infty} Eu_j(\hat{f}_j^r(a)) = u_j(\bar{f}_j + \Delta_j) \;, \quad j \neq 1$$

(3.3)

$$\lim_{r\to\infty} Eu_1(\hat{f}^r(a)) = u_1(\bar{f}_1 - \Delta)$$

El siguiente paso consiste en especificar los pagos de forma que sea posible encontrar un valor de ε para el que se cumpla que $u_j(\bar{f}_j + \Delta_j) > u_j(\bar{f}_j) + \varepsilon$, si $j \neq 1$, y $u_1(\bar{f}_1 - \Delta) > u_1(\bar{f}_1) - \hat{\varepsilon}$. Observamos, en primer lugar, que $u_1(\bar{f}_1) > u_1(\bar{f}_1) - \hat{\varepsilon}$ por lo que la continuidad de u_1 implica que existe un $\Delta > 0$ pequeño tal que $u_1(\bar{f}_1 - \Delta) > u_1(\bar{f}_1) - \hat{\varepsilon}$. Definamos $\Delta_j = (\# J - 1)^{-1} \Delta$

La monotonía de u_j garantiza que $u_j(\bar{f}_j + \triangle_j) > u_j(\bar{f}_j)$.
Si definimos

$$\varepsilon^* = \tfrac{1}{2} \min_{j \neq 1} (u_j(\bar{f}_j + \triangle_j) - u_j(\bar{f}_j))$$

podemos asegurar que para $j \neq 1$

$$u_j(\bar{f}_j + \triangle_j) > u_j(\bar{f}_j) + \varepsilon^*$$

Haciendo $\varepsilon = \varepsilon^*$ obtenemos $R(\varepsilon^*, \hat{\alpha})$ y podemos construir los subconjuntos de agentes $B_j^r(\varepsilon^*)$ para $r > \max(R_1, R(\varepsilon^*, \hat{\alpha}))$ y todas las propiedades demostradas para ε arbitrario se siguen cumpliendo para ε^* . Finalmente, si hacemos

$$\theta_j = \min_{j \neq 1} (u_j(\bar{f}_j + \triangle_j) - (u_j(\bar{f}_j) + \varepsilon^*))$$

$$\theta = \min (\theta_j, u_1(\bar{f}_1 - \triangle) - u_1(\bar{f}_1) - \hat{\varepsilon})$$

se sigue de (3.3) y de la definición de θ que

$$Eu_j\hat{f}_j^r(a) > u_j(\bar{f}_j + \triangle_j) - \theta \geq u_j(\bar{f}_j) + \varepsilon^* \quad , j \neq 1$$

$$Eu_1\hat{f}_1^r(a) > u_1(\bar{f}_1 - \Delta) - \theta \geq u_1(\bar{f}_1) - \hat{\varepsilon}$$

para todo $a \in B_j^r(\varepsilon^*)$, $j \neq 1$, y para todo $a \in B_1^r(\hat{\varepsilon})$ siempre que el índice r sea lo suficientemente grande. La definición de $B_j^r(\varepsilon^*)$, $j \neq 1$, y $B_1^r(\hat{\varepsilon})$ implica, por su parte,

$$u_j(\bar{f}_j) + \varepsilon^* > Eu_j f_j^r(a) , \quad \forall\ a \in B_j^r(\varepsilon^*) , \ j \neq 1$$

$$u_1(\bar{f}_1) - \hat{\varepsilon} > Eu_1 f_1^r(a) , \quad \forall\ a \in B_1^r(\hat{\varepsilon}) .$$

En consecuencia, la coalición $B^r(\varepsilon^*)$ bloquea la asignación f^r para r grande, con lo que alcanzamos una contradicción a la hipótesis de partida $f^r \in C(\mathcal{E}^r)$, para todo $r = 1, 2, \ldots$ QED.

El teorema 1 prueba que las asignaciones en el núcleo constituyen un mecanismo que elimina las desigualdades generadas en un contexto de incertidumbre. Todos los indivíduos que comparten las mismas características, excepto quizás una fracción que deviene arbitrariamente pequeña, reciben niveles de utilidad esperada arbitrariamente próximos. Este resultado puede también interpretarse diciendo que el núcleo de una economía con incertidumbre personal funciona como un mecanismo <u>ex-ante</u>

para asegurar riesgos. El teorema 1 es, desde un punto de vista matemático, un teorema de convergencia en medida. Este modo de convergencia es, en general, el más débil. Las hipótesis formuladas permiten, además, probar convergencia en la media.

<u>Teorema 2</u>. Sea $\{\mathcal{E}^r\}$ una secuencia de economías de réplica tal que para todo $r = 1, 2, \ldots,$ $f^r \in C(\mathcal{E}^r)$. Entonces, para todo $j \in J$ se cumple

$$\lim_{r\to\infty} (\# A_j^r)^{-1} \sum_{a \in A_j^r} |Eu_j f_j^r(a) - u_j(\bar{f}_j)| = 0 .$$

<u>Demostración</u>: Definamos $D_j^{co}(f^r, \varepsilon) =: A_j^r - D_j(f^r, \varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$ dado. Entonces, si hacemos $\bar{u}_j =: u_j(\bar{f}_j)$ tenemos

$$\sum_{a \in A_j^r} |Eu_j f_j^r(a) - \bar{u}_j| = \sum_{a \in D_j^{co}(f^r, \varepsilon)} |Eu_j f_j^r(a) - \bar{u}_j| +$$

$$+ \sum_{a \in D_j(f^r, \varepsilon)} |Eu_j f_j^r(a) - \bar{u}_j|$$

La función de utilidad esperada Eu_j está acotada y por tanto $Eu_j f_j^r(a) \leq K$ para algún K. Por otro lado, si $a \in D_j^{co}(f^r, \varepsilon)$, se tiene que $|Eu_j f_j^r(a) - u_j(f_j)| < \varepsilon$

De aquí se deriva

$$\sum_{a \in A_j^r} |Eu_j f_j^r(a) - \bar{u}_j| < \# D_j(f^r, \varepsilon)(2K) + \# D_j^{co}(f^r, \varepsilon)\, \varepsilon$$

y consecuentemente

$$(\# A_j^r)^{-1} \sum_{a \in A_j^r} |Eu_j f_j^r(a) - \bar{u}_j| < \frac{\# D_j(f^r, \varepsilon)}{\# A_j^r} (2K) +$$

$$+ \left(1 - \frac{\# D_j(f^r, \varepsilon)}{\# A_j^r}\right) \varepsilon$$

El teorema 1 implica $\lim (\# A_j^r)^{-1} \# D_j(f^r, \varepsilon) = 0$, para todo $\varepsilon > 0$. Así pues,

$$\lim_{r \to \infty} (\# A_j^r)^{-1} \sum_{a \in A_j^r} |Eu_j f_j^r(a) - \bar{u}_j| \leq \varepsilon$$

Como ε es arbitrario, la conclusión se sigue inmediatamente. QED.

La utilidad esperada de un agente de tipo j en una asignación

f^r en el núcleo puede ser mayor o menor que la utilidad que dicho agente recibiría con la asignación cierta $\bar{f}$. El teorema 2 nos asegura, sin embargo, que la desviación media con respecto a la asignación de utilidades $(\bar{u}_j)_{j\in J}$ converge hacia cero. Un corolario inmediato a los teoremas 1 y 2 establece que todos los agentes de tipo j , excepto una fracción arbitrariamente pequeña, reciben en el núcleo niveles de utilidad esperada arbitrariamente próximos a la media de las utilidades esperadas de los agentes de tipo j . Si hacemos

$$E\bar{u}_j^r =: (\# A_j^r)^{-1} \sum_{a\in A_j^r} Eu_j f_j^r(a)$$

tenemos formalmente

<u>Corolario</u> 1. Sea $f^r \in C(\mathcal{E}^r)$, donde $\{\mathcal{E}^r\}$ es una secuencia de economías de réplica. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Entonces, para todo $j\in J$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\#\{a\in A_j^r / |Eu_j f_j^r(a) - E\bar{u}_j^r| > \varepsilon\}}{\# A_j^r} = 0$$

<u>Demostración</u>: Es fácil de ver que la desigualdad triangular y el teorema 2 implican que $\lim |E\bar{u}_j^r - \bar{u}_j| = 0$. Sabemos,

además, que lim $|u_j(\bar{f}_j^r) - \bar{u}_j| = 0$ y por tanto $u_j(\bar{f}_j^r)$ y $E\bar{u}_j^r$ son mutuamente sustituibles en $D_j^r(f^r, \varepsilon)$ cuando el índice r es lo suficientemente grande. QED.

Un segundo procedimiento para analizar la cuestión de equidad en el núcleo consiste en obtener una medida de desigualdad en el espacio de bienes, en lugar de en el espacio de utilidades. Si para cada $j \in J$ y cada $\varepsilon > 0$ definimos

$$\hat{D}_j(f^r, \varepsilon) = \{a \in A_j^r \,/\, |Ef_j^r(a) - \bar{f}_j| > \varepsilon\}$$

entonces, la fracción $\# \hat{D}_j(f^r, \varepsilon) / \# A_j^r$ es una medida del conjunto de agentes de tipo j que no obtienen tratamiento ε-igualitario, en términos de la esperanza matemática de su asignación, en f^r. El siguiente teorema establece que las asignaciones en el núcleo sirven también para eliminar este tipo de desigualdad.

Teorema 3. Sea $\{\mathcal{E}^r\}$ una secuencia de economías de réplica tal que para todo $r = 1, 2, \ldots$, $f^r \in C(\mathcal{E}^r)$. Sea $\varepsilon > 0$ un número real arbitrario. Entonces, para todo $j \in J$,

$$\lim_{r \to \infty} \# \hat{D}_j(f^r, \varepsilon) / \# A_j^r = 0$$

Demostración: Si la conclusión fuera falsa, existirían números $\bar{\varepsilon} > 0$, $\bar{\alpha} \in]0, 1[$, subsecuencia $\{R\}$ y un tipo de agente, por ejemplo el tipo 1, tal que para todo $r \in \{R\}$

$$\frac{\# \hat{D}_1(f^r, \bar{\varepsilon})}{\# A_1^r} > \bar{\alpha}$$

Una aplicación del lema 2 permite deducir de la relación que acabamos de obtener que existen $\hat{\varepsilon} > 0$, $\hat{\alpha} \in]0, 1[$ y R_1 tal que si $r > R_1$

$$\frac{\#\{a \in A_1^r \,/\, Ef_1^r < \bar{f}_1 - \hat{\varepsilon}\}}{\# A_1^r} > \hat{\alpha}$$

En efecto, $f^r \in C(\mathcal{E}^r)$ implica que $Ef_j^r(a) > 0$ para todo $j \in J$, para todo r y para todo $a \in A_j^r$. En caso contrario existirían $j' \in J$, r' y $a' \in A_{j'}^{r'}$ tal que $Ef_{j'}^{r'} = 0$. Puesto que asumimos que todos los estados tienen probabilidad positiva se sigue que en cualquier estado $f_{j'}^{r'}(a') = 0$. De aquí se deduce que $Eu_{j'} f^{r'}(a') = 0$ lo que contradice el hecho que $f^{r'}$ pertenece al núcleo pues sabemos que $Eu_{j'} f^{r'}(a') \geq Eu_{j'} e_{j'}(a') > 0$. Esto prueba que ii) del lema 2 se satisface puesto que si $Ef_j^r(a) > 0$ para todo $j \in J$, para todo r, para todo $a\ A_j^r$, siempre es posible encontrar $c > 0$ tal que $Ef_j^r(a) \geq \bar{f}_j - c$. Por otra parte iii) se satisface trivialmente a partir de las definiciones de $\bar{f}_j^r$ y $\bar{f}_j$.

Para $j \neq 1$ y ε arbitrario tenemos la inclusión

$$\{a \in A_j^r / |Ef_j^r(a) - \bar{f}_j| < \varepsilon\} \subseteq \{a \in A_j^r / Ef_j^r(a) < \bar{f}_j + \varepsilon\}$$

y como para $j \neq 1$ y ε arbitrario se cumple

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\# \{a \in A_j^r / |Ef_j^r(a) - \bar{f}_j| < \varepsilon\}}{\# A_j^r} = 1$$

se comprueba fácilmente que para todo $\varepsilon > 0$ y para el número $\hat{\alpha}$ obtenido, existe un número entero $R(\varepsilon, \hat{\alpha})$ tal que si $r > R(\varepsilon, \hat{\alpha})$ y $j \neq 1$

$$\frac{\# \{a \in A_j^r / Ef_j^r(a) < \bar{f}_j + \varepsilon\}}{\# A_j^r} > \hat{\alpha}$$

Si $Ef_j^r(a) < \bar{f}_j + \varepsilon$, existe un $\delta_j(\varepsilon)$ tal que

$u_j(\bar{f}_j + \varepsilon) = u_j(\bar{f}_j) + \delta_j(\varepsilon)$. Por continuidad de u_j, $\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_j(\varepsilon) = 0$. La concavidad de u_j y la construcción de $\delta_j(\varepsilon)$ implican

$$\{a \in A_j^r / Ef_j^r(a) < \bar{f}_j + \varepsilon\} \subseteq \{a \in A_j^r / u_j(Ef_j^r(a)) < u_j(\bar{f}_j) + \delta_j(\varepsilon)\}$$

$$\subseteq \{a \in A_j^r / Eu_j f_j^r(a) < u_j(\bar{f}_j) + \delta_j(\varepsilon)\}$$

Así pues, si $r > R(\varepsilon, \hat{\alpha})$ y $\delta(\varepsilon) =: \max_{j \neq 1} \delta_j(\varepsilon)$ se obtiene

$$\frac{\# \{a \in A_j^r / Eu_j f_j^r(a) < u_j(\bar{f}_j) + \delta(\varepsilon)\}}{\# A_j^r} > \hat{\alpha}$$

para todo $j \neq 1$. Para $j = 1$, se deriva de la continuidad de u_1 la existencia de $\varepsilon' > 0$ tal que $u_1(\bar{f}_1 - \hat{\varepsilon}) = u_1(\bar{f}_1) - \varepsilon'$, mientras que por concavidad de u_1 observamos que si $r > R_1$

$$\frac{\# \{a \in A_1^r / Eu_1 f_1^r(a) < u_1(\bar{f}_1) - \varepsilon'\}}{\# A_1^r} > \hat{\alpha}$$

A partir de aquí, el mismo procedimiento utilizado en la prueba del teorema 1 puede utilizarse *verbatim* para obtener una coalición que bloqueará para r grande la asignación en el núcleo f^r siempre que $\delta(\varepsilon)$ pueda escogerse lo suficientemente pequeño. Esto es claramente posible si seleccionamos un número ε adecuado. QED.

Hasta el momento presente, hemos analizado el problema de la equidad en el núcleo utilizando criterios *ex-ante*. Toda asignación de bienes y su correspondiente asignación de utilidades son variables aleatorias. Hemos visto como las asignaciones en el núcleo satisfacen asintóticamente propiedades de tratamiento ε-igualitario en términos de esperanzas matemáticas. Sin embargo, la convergencia de una secuencia de valores esperados no implica que la secuencia original de variables aleatorias se aproxime, para todos los estados posibles, al límite de la secuencia de valores esperados.

Ejemplo 4. Definamos la variable aleatoria X_n, $n = 1, 2, \ldots$

$$X_n = -(K + 1/n) \quad \text{con probabilidad } \tfrac{1}{2}$$

$$= (K + 3/n) \quad \text{con probabilidad } \tfrac{1}{2}$$

donde $K > 0$. Se comprueba fácilmente que $\lim EX_n = 0 \in [-K, K]$ y, sin embargo, para todo n tenemos que $X_n \notin [-K, K]$.

El ejemplo presentado pone de manifiesto la necesidad de estudiar la convergencia en probabilidad de una secuencia de asignaciones en el núcleo. En particular, queremos ver si la ocurrencia de estados en los que la asignación realizada <u>ex-post</u> en el núcleo no está arbitrariamente próxima a la asignación cierta tiene probabilidad despreciable. Una respuesta afirmativa a esta pregunta indicaría que las asignaciones en el núcleo de economías con un gran número de agentes son variables aleatorias cuya masa de probabilidad se concentra en entornos de radio tan pequeño como se desee. En otras palabras, el núcleo da lugar a asignaciones "casi" ciertas.

La novedad del enfoque de Weller [1981] consiste precisamente en abordar este problema. Su trabajo se sitúa en el marco de una secuencia de economías de réplica con un solo tipo de agente con función de utilidad diferenciable y estrictamente cóncava y con dotación inicial que satisface la ley fuerte de los grandes números. El teorema que formularemos en breve generaliza el resultado anterior al marco de nuestro modelo.

En el mencionado trabajo se demuestra que si $\{X_n\}$ es una secuencia de variables aleatorias, u es una función diferenciable y estrictamente cóncava y $\bar{x}$ es un número real tal que $\lim EX_n = \bar{x}$ y $\lim Eu(X_n) = u(\bar{x})$, entonces para todo $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \text{Prob} \left\{ |X_n - \bar{x}| > \varepsilon \right\} = 0$$

Probamos, a continuación, que no se puede prescindir de la hipótesis de concavidad estricta.

Ejemplo 5. Considérese la función

$$\begin{aligned} u(x) &= 2x \quad \text{si} \quad x \in [0, 1] \\ &= x + 1 \quad \text{si} \quad x \in [1, 2] \\ &= 3 \quad \text{si} \quad x \in [2, +\infty[\end{aligned}$$

Esta función satisface H.1. excepto en el segmento $[2, +\infty[$ donde no es creciente. Esto, sin embargo, es irrelevante para la validez del ejemplo. La función es diferenciable en todos los puntos excepto en $x = 0, 1, 2$. Podemos transformar la función dada en una función diferenciable en $x = 1, 2$ sustituyendo los ángulos por tramos curvilíneos pequeños tal como se indica en la figura I .

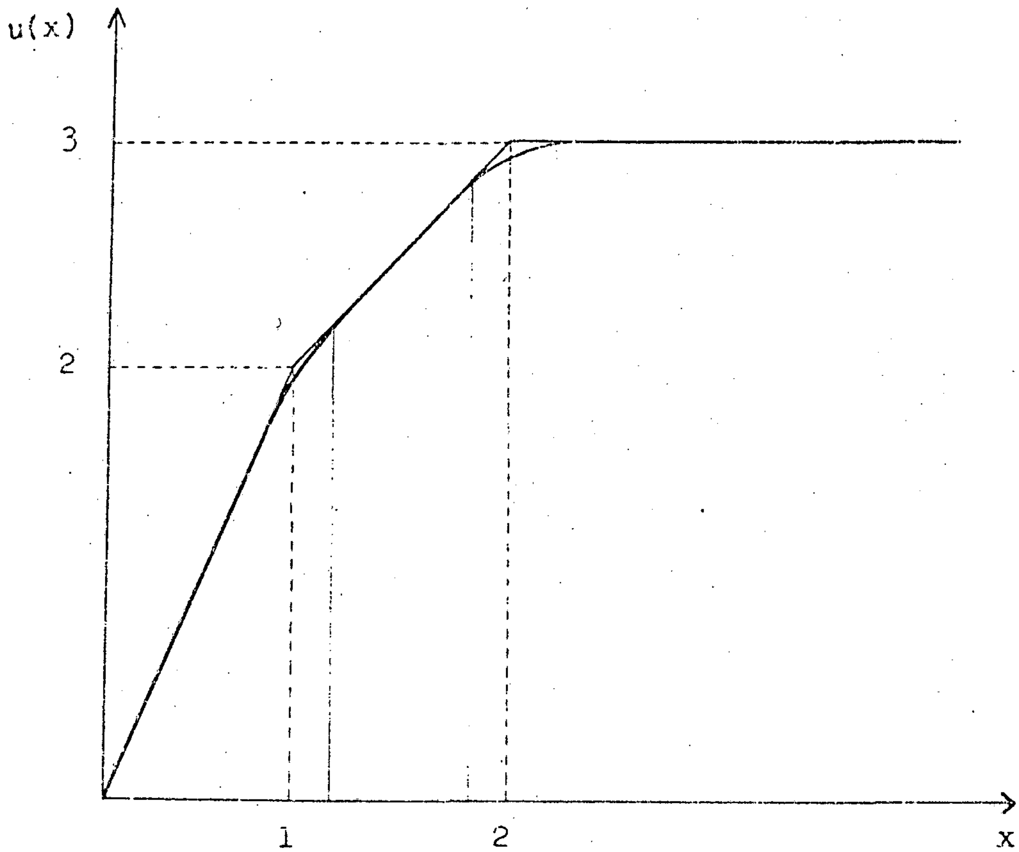

Figura I.

Definimos, a continuación, la secuencia de variables aleatorias X_n, $n = 1, 2, \ldots$

$$X_n = 5/4 - 1/4n \qquad \text{con probabilidad } \tfrac{1}{2}$$

$$ = 7/4 + 1/4n \qquad \text{con probabilidad } \tfrac{1}{2}$$

Así pues, $\lim EX_n = 3/2$ y $u(\lim EX_n) = 5/2$. Por otra parte, es fácil de ver que existe un $\gamma > 0$ tal que $u[5/4 - \gamma\ ,\ 7/4 + \gamma\ ]$ es un segmento lineal y para un cierto entero $\bar{n}$, si $n > \bar{n}$ tenemos $u(X_n) \in u[5/4 - \gamma\ ,\ 7/4 + \gamma\ ]$. En este caso es claro que $u(X_n) = X_n + 1$ y de aquí se sigue que $Eu(X_n) = 5/2$ para $n > \bar{n}$, por lo que $\lim Eu(X_n) = u(\lim EX_n) = 5/2$. Sin embargo, para todo $n = 1, 2, \ldots$, $X_n \notin [5/4, 7/4]$ y la secuencia $\{X_n\}$ no converge en probabilidad hacia $\lim EX_n$.

La conclusión que se deriva del ejemplo es que no se puede prescindir de la hipótesis de concavidad estricta, mientras que la hipótesis de diferenciabilidad es simplemente conveniente para obtener una prueba más sencilla. Debe señalarse, no obstante, que toda función cóncava y propia es diferenciable en un subconjunto denso del interior de su dominio cuyo complemento tiene medida de Lebesgue igual a cero. (Rockafellar [1970], teorema 25.5) . Sea D tal conjunto para una función de utilidad estrictamente cóncava. Si para $\{X_n\}$ se satisface que $\lim Eu(X_n) = u(\lim EX_n)$ y, además, $\lim EX_n \in D$, la observación realizada permite concluir que $\{X_n\}$ converge en probabilidad hacia $\lim EX_n$. Felizmente, veremos que este resultado puede extenderse a todos los puntos en el interior del dominio de u.

Sea g una función real de variable real cualquiera. El epigrafo de g, denotado $\mathrm{epi}(g)$, se define como

$$\mathrm{epi}(g) = \{(x, y) \in R \times R \,/\, y \geq g(x)\}$$

Una función g es convexa si el conjunto $\mathrm{epi}(g)$ es convexo; g es estrictamente convexa si $\mathrm{epi}(g)$ es estrictamente convexo. Si la función de utilidad u es estrictamente cóncava, el conjunto $\mathrm{epi}(-u)$ es estrictamente convexo. Sea

$$\partial\, \mathrm{epi}(-u) = \{(x, y) \in \mathrm{epi}(-u) \,/\, y = u(x)\}$$

y sea $(\bar{x}, \bar{y}) \in \partial\, \mathrm{epi}(-u)$. La convexidad estricta de $\mathrm{epi}(-u)$ garantiza la existencia de un hiperplano soporte al conjunto $\mathrm{epi}(-u)$ en el punto $(\bar{x}, \bar{y})$. Dicho hiperplano se denota y define

$$H_{\bar{x}}(a, b) = \{(x, y) \in R_+ \times R \,/\, y = ax + b\}$$

Si $H^i_{\bar{x}}(a, b)$ denota el semiespacio inferior derivado de $H_{\bar{x}}(a, b)$, se tienen las propiedades

i) $\operatorname{epi}(-u) \subseteq H^i_{\bar{x}}(a, b)$

ii) $H_{\bar{x}}(a, b) \cap \operatorname{epi}(-u) = \{(\bar{x}, \bar{y})\}$

Veáse la figura II. El hiperplano $H_{\bar{x}}(a, b)$ puede describirse alternativamente como la colección de puntos $(x, h_{\bar{x}}(x))$, donde $h_{\bar{x}}(x) = ax + b$. Para $\bar{x} \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}(u))$ fijo, una medida de la distancia vertical entre $H_{\bar{x}}(a, b)$ y $\operatorname{epi}(-u)$ para x en $\operatorname{int}(\operatorname{dom}(u))$ viene dada por

$$\bar{V}(x) = h_{\bar{x}}(x) - u(x)$$

Con estos preliminares podemos formular,

<u>Lema 3</u>. La función $\bar{V}$ satisface

1) $\bar{V}(x) = a(x - \bar{x}) + u(\bar{x}) - u(x)$

2) $\bar{V}(\bar{x}) = 0$

3) $\bar{V}(x) > 0$ para $x \neq \bar{x}$

4) $\bar{V}$ es una función estrictamente cóncava.

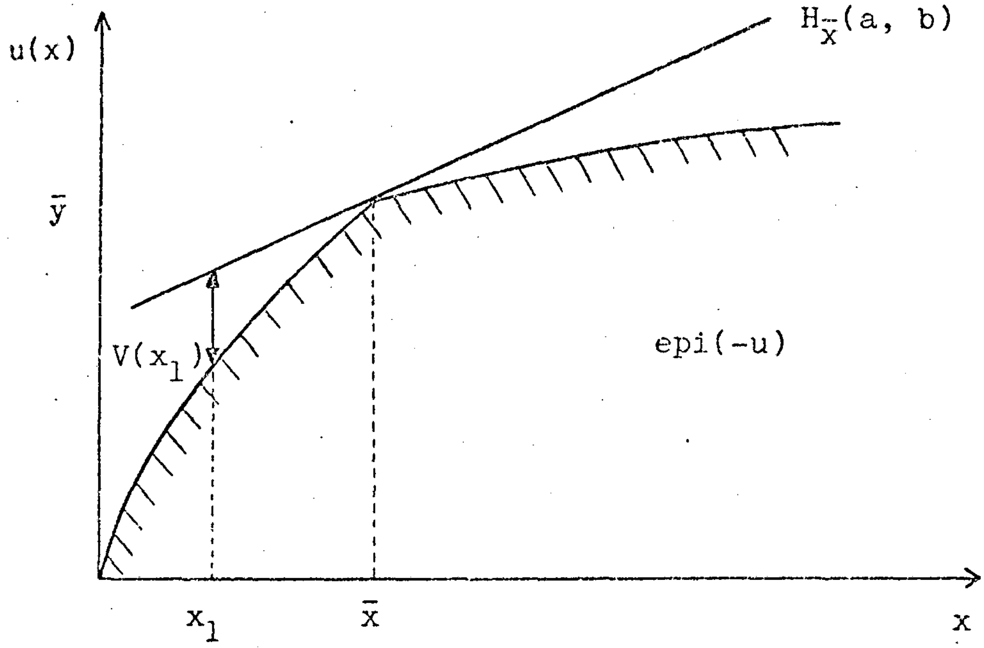

Figura II .

Demostración: Puesto que $h_{\bar{x}}(x) = u(x)$ se tiene que $\bar{V}(x) = h_{\bar{x}}(x) - u(x) = h_{\bar{x}}(x) - u(x) - h_{\bar{x}}(\bar{x}) + u(\bar{x}) = ax + b - a\bar{x} - b + u(\bar{x}) - u(x) = a(x - \bar{x}) + u)\bar{x}) - u(x)$. Esto prueba 1). La propiedad 2) es trivial. El resultado 3) se sigue de la convexidad estricta del conjunto epi(-u). Para demostrar 4) necesitamos ver que si $\lambda_1, \lambda_2 \in]0, 1[$ y $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, entonces $\bar{V}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 \bar{V}(x_1) + \lambda_2 \bar{V}(x_2)$. En efecto, la definición de $\bar{V}$ implica $V(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = a(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + b - u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$. La còncavidad estricta de u garantiza $\lambda_1 u(x_1) + \lambda_2 u(x_2) < u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$ y, por tanto òbtenemos $a(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + b - u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1((ax_1 - b) - u(x_1)) + \lambda_2((ax_2 - b) - u(x_2))$.

QED.

Dados $\bar{x} \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}(u))$ y $\varepsilon > 0$ arbitrario, definimos la esfera $S(\bar{x}, \varepsilon) = \{x / |x - \bar{x}| = \varepsilon\}$ y la función

$$M(\bar{x}, \varepsilon) =: \min \{\bar{V}(x) / x \in S(\bar{x}, \varepsilon)\}$$

Obtenemos los siguientes resultados,

Lema 4. 1) $M(\bar{x}, \varepsilon) > 0$; 2) si $|x - \bar{x}| > \varepsilon$, entonces $\bar{V}(x) > M(\bar{x}, \ )$.

Demostración: El conjunto $S(\bar{x}, \varepsilon)$ es compacto y la función $\bar{V}$ es contínua; existe, por tanto, $x_{min} \in S(\bar{x}, \varepsilon)$ tal que $\bar{V}(x_{min}) = M(\bar{x}, \varepsilon)$. Como $\bar{x} \neq x_{min}$, el resultado se sigue. Esto demuestra 1). La propiedad 2) se deriva, por contradicción, a partir de la convexidad estricta de $\bar{V}$. QED.

Lema 5. Sea u una función estrictamente cóncava; sea $\{X_n\}$ una secuencia de variables aleatorias que satisface las propiedades 1) $\lim EX_n = \bar{x}$, 2) $\lim Eu(X_n) = u(\bar{x})$, $\bar{x} \in R$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \text{Prob} \left\{ |X_n - \bar{x}| > \varepsilon \right\} = 0$$

Demostración: Si la conclusión fuera falsa, existirían $\varepsilon > 0$, $\bar{\alpha} > 0$ y subsecuencia, que denotamos nuevamente $\{N\}$, tal que para todo $n \in \{N\}$ se tendría

$$\text{Prob} \, \{w \,/\, |X_n(w) - \bar{x}| > \bar{\varepsilon}\} > \bar{\alpha}$$

Si $|X_n(w) - \bar{x}| > \bar{\varepsilon}$, la propiedad 2) del lema 4 permite concluir $\bar{V}(X_n(w)) > M(\bar{x}, \bar{\varepsilon})$. Si hacemos

$$T_n =: \{ w \,/\, |X_n(w) - \bar{x}| > \bar{\varepsilon} \}$$

la no-negatividad de $\bar{V}$ implica

$$E\bar{V}(X_n) \geq E\bar{V}(X_n)_{|T_n}$$

mientras que de la definición de T_n y $\bar{V}(X_n(w)) > M(\bar{x}, \bar{\varepsilon})$ se deduce

$$E\bar{V}(X_n)_{|T_n} \geq M(\bar{x}, \varepsilon) \text{ Prob} \{T_n\} > M(\bar{x}, \bar{\varepsilon}) \; \bar{\alpha} > 0$$

Por otra parte, tenemos

$$\bar{V}(X_n(w)) = a(X_n(w) - \bar{x}) + u(\bar{x}) - u(X_n(w))$$

Tomando valores esperados en la expresión anterior

$$E\bar{V}(X_n) = a(EX_n - \bar{x}) + u(\bar{x}) - Eu(X_n)$$

Haciendo que $n \in \{N\}$ tienda a infinito, observamos que $\lim E\overline{V}(X_n) = 0$. Pero ésto contradice el hecho que para todo $n \in \{N\}$

$$E\overline{V}(X_n) > M(\bar{x}, \bar{\varepsilon})\ \bar{\alpha} > 0$$

QED.

El resultado que acabamos de establecer permite demostrar la convergencia en probabilidad de una secuencia de asignaciones en el núcleo si u_j es estrictamente cóncava.

<u>Teorema 4</u>. Sea $f^r \in C(\mathcal{E}^r)$, donde $\mathcal{E}^r$ es una secuencia de economías de réplica. Sean $\varepsilon > 0$ y $\alpha \in]0, 1[$ números arbitrarios. Entonces, para todo $j \in J$

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\#\{a \in A_j^r \,/\, \text{Prob}\{|f_j^r(a) - \bar{f}_j| > \varepsilon\} < \alpha\}}{\# A_j^r} = 1$$

<u>Demostración</u>: Si $a \in D^{co}(f^r, \varepsilon) \cap \hat{D}^{co}(f^r, \varepsilon)$ y el índice r es lo suficientemente grande, el lema anterior implica

$$D_j^{co}(f^r, \varepsilon) \cap \hat{D}_j^{co}(f^r, \varepsilon) \subseteq \{ a \in A_j^r / \text{ Prob } \{|f^r(a) - \bar{f}_j| > \varepsilon\} < \alpha \}$$

Por otro lado, no es difícil comprobar que

$$\frac{\# D_j^{co}(f_j^r, \varepsilon)}{\# A_j^r} + \frac{\# \hat{D}_j^{co}(f^r, \varepsilon)}{\# A_j^r} - 1 \leq \frac{\# D_j^{co}(f^r, \varepsilon) \cap \hat{D}_j^{co}(f^r, \varepsilon)}{\# A_j^r}$$

Una aplicación de los teoremas 1 y 3 al lado izquierdo de esta desigualdad permite ver que éste converge hacia 1 . Por consiguiente, el lado derecho también converge hacia 1 y la conclusión del teorema se sigue de manera inmediata de la inclusión anterior. QED.

Todos los agentes, excepto quizás una fracción que deviene arbitrariamente irrelevante, reciben en el núcleo asignaciones que son "casi" ciertas. Los estados sociales en los que las asignaciones f^r en el núcleo de economías $\mathcal{E}^r$ con un gran número de agentes no pertenecen a un entorno de radio arbitrario centrado en la asignación cierta $\bar{f}$ tienen ocurrencia con probabilidad tan cercana a cero como se desee. Los grandes números, operando a través de las asignaciones en el núcleo, hacen desaparecer paulatinamente la incertidumbre presente en la economía.

El siguiente corolario al teorema 4 prueba la convergencia en probabilidad de los niveles de utilidad que se derivan de una asignación en el núcleo y sirve para complementar la propiedad de tratamiento ε-igualitario en términos de utilidad esperada. La demostración del corolario es trivial a partir de la continuidad de las funciones u_j.

Corolario 2. Sea $f^r \in C(\mathcal{E}^r)$, $r = 1, 2, \ldots,$ y sea $\{\mathcal{E}^r\}$ una secuencia de réplicas. Para todo $\varepsilon > 0$, $\alpha \in]0, 1[$ y $j \in J$ se cumple

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\#\{a \quad A^r / \text{Prob}\{|u_j(f^r(a) - \bar{u}_j| > \varepsilon\} < \alpha\}}{\# A_j^r} = 1$$

Finalizamos este capítulo introduciendo la noción de equilibrio walrasiano para una economía estocástica. Un par $(\tilde{p}^r, \tilde{f}^r)$ es un equilibrio walrasiano para la economía $\mathcal{E}^r : A^r \to \mathcal{E}(J)$ si

i) $\forall j \in J$, $\forall a \in A_j^r$ si $f_j^r(a)$ satisface $\tilde{p}^r f_j^r \leq \tilde{p}^r e_j(a)$, entonces $Eu_j \tilde{f}_j^r(a) \geq Eu_j f_j^r(a)$

$$\text{ii)} \quad \sum_{j \in J} \sum_{a \in A_j^r} \tilde{f}_j^r(a) \leq \sum_{j \in J} \sum_{a \in A_j^r} e_j(a)$$

La primera condición indica que cada agente maximiza su utilidad esperada en su conjunto presupuestario, mientras la segunda restricción es la típica igualdad entre ofertas y demandas. Se dice que una asignación $\tilde{f}^r$ es walrasiana si existe un vector de precios $\tilde{p}^r$ tal que $(\tilde{p}^r, \tilde{f}^r)$ es un equilibrio walrasiano. El símbolo $W(\mathcal{E}^r)$ denota el conjunto de las asignaciones walrasianas para la economía $\mathcal{E}^r$. Un argumento standard demuestra que $W(\mathcal{E}^r) \subseteq C(\mathcal{E}^r)$, es decir, toda asignación walrasiana pertenece también al núcleo. Esta relación permite concluir que cualquier secuencia de asignaciones walrasianas extraida de una secuencia de economías de réplica satisface todas las propiedades de tratamiento igualitario y reducción de riesgos enunciadas en este capítulo. Por otra parte, no es difícil el verificar que las hipótesis realizadas sobre las funciones de utilidad y las dotaciones iniciales permiten adaptar a nuestro marco la prueba tradicional de existencia de equilibrios walrasianos; véase Debreu [1959, 1978]. Esta observación es importante pues pone de manifiesto que los resultados obtenidos no tienen un contenido vacío, ya que $\emptyset \neq W(\mathcal{E}^r) \subseteq C(\mathcal{E}^r)$. Un método alternativo para comprobar que $C(\mathcal{E}^r) \neq \emptyset$ consiste en utilizar el teorema de

Scarf [1967]. En breve, la economía $\mathcal{E}^r$ se transforma en un juego cooperativo para el que se demuestra que su núcleo es no vacío. Una traslación del espacio de utilidades al espacio de bienes permite ver que el núcleo del juego derivado de $\mathcal{E}^r$ es no vacío si y solo si el núcleo de la economía es no vacío.

APENDICE AL CAPITULO III.

Demostración del lema 1 : Para cada término X_n en la secuencia de variables aleatorias denotamos por μ_n la medida de probabilidad inducida por X_n en la σ-álgebra de los subconjuntos de Borel, i.e.

$$\mu_n(B) = P_n(X_n^{-1}(B)) \qquad \forall\ B \in \mathcal{B}(R_+)$$

Sea $\bar{\mu}$ la medida de probabilidad con masa igual a la unidad en $\bar{x}$. El teorema del cambio de variable (Billingsley [1968]) permite escribir

$$Eh(X_n) = \int_{\Omega_n} (h \circ X_n)\ dP_n = \int_{R_+} h\ d\mu_n$$

donde h es una función contínua y acotada. La definición de la medida $\bar{\mu}$ implica

$$h(\bar{x}) = \int_{R_+} h\ d\bar{\mu}$$

por lo tanto, es suficiente el demostrar que la secuencia de medidas de probabilidad μ_n converge débilmente hacia la medida $\bar{\mu}$.

La función de distribución de la constante $\bar{x}$ considerada como una variable aleatoria viene dada por

$$F_{\bar{\mu}}(x) = \mu[0, x] = 0 \quad \text{si} \quad x < \bar{x}$$

$$= \mu[0, x] = 1 \quad \text{si} \quad x > \bar{x}$$

y claramente el único punto de discontinuidad de $F_{\bar{\mu}}$ es $\bar{x}$. Si probamos que para todo $x \neq \bar{x}$ se cumple

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n[0, x] = \bar{\mu}[0, x]$$

habremos demostrado que μ_n converge débilmente hacia $\bar{\mu}$. En primer lugar, tomemos $x > \bar{x}$ y hágamos $\delta = |x - \bar{x}|$. Como

$$\{w\in\Omega_n / |X_n(w) - \bar{x}|<\delta\} \subseteq \{w\in\Omega_n / X_n(w) \leq x\}$$

obtenemos

$$P_n\{w\in\Omega_n / |X_n(w) - x| <\delta\} \leq P_n\{w\in\Omega_n / X_n(w) \leq x\} = \mu_n[0, x]$$

Por hipótesis, sabemos que para todo $\delta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P_n \left\{ w \in \Omega_n \,/\, |X_n(w) - \bar{x}| < \delta \right\} = 1$$

y de aquí deducimos que $\lim \mu_n[0, x] = 1$. En segundo lugar, si $x < \bar{x}$ y $\delta = |x - \bar{x}|$ se puede comprobar que

$$\left\{ w \in \Omega_n \,/\, X_n(w) \leq x \right\} \subseteq \left\{ w \in \Omega_n \,/\, |x - \bar{x}| \leq |X_n(w) - \bar{x}| \right\}$$

de donde se sigue que

$$P_n \left\{ w \in \Omega_n \,/\, X_n(w) \leq x \right\} \leq P_n \left\{ w \in \Omega_n \,/\, |X_n(w) - x| > \delta \right\}$$

El lado izquierdo de esta desigualdad es precisamente $\mu_n[0, x]$, mientras que por hipótesis el lado derecho converge hacia cero. En consecuencia, $\lim \mu_n[0, x] = 0$. QED.

<u>Demostración del lema 2</u> : Sin pérdida de generalidad podemos asumir que ε , α y c son racionales. Postulamos que

$$\bar{\varepsilon} = \min (\varepsilon , \varepsilon\alpha / 4(1 - \tfrac{1}{2}\alpha))$$

$$\bar{\alpha} = \min (\alpha, \varepsilon\alpha / 6c)$$

satisfacen la conclusión del lema. En caso contrario, existiría una subsecuencia $\{N'\}$ tal que para todo $n' \in \{N'\}$ tendríamos

$$\frac{\# \{ a=1, 2, \ldots , n' / x_a - \bar{x} > -\bar{\varepsilon} \}}{n'} \geq 1 - \bar{\alpha}$$

Puesto que $-\varepsilon \leq -\bar{\varepsilon}$, tenemos para $n' \in \{N'\}$ que

$$\frac{\# \{ a=1, 2, \ldots , n' / x_a - \bar{x} < -\varepsilon \}}{n'} \leq \bar{\alpha} \leq \tfrac{1}{2}\alpha$$

y de aquí, junto con la condición i) , se deduce que

$$\frac{\# \{ a=1, 2, \ldots , n' / x_a - \bar{x} > \varepsilon \}}{n'} \geq \tfrac{1}{2}\alpha$$

Sea $n^* \in \{N'\}$ un índice lo suficientemente grande y tal que $\frac{1}{2}\alpha\, n^*$ y $(1-\bar{\alpha})\, n^*$ son enteros. Tomamos $\frac{1}{2}\alpha\, n^*$ elementos en el conjunto $\{ a=1, 2, \ldots, n^* / \ x_a - \bar{x} > \varepsilon \}$, $(1 - \bar{\alpha} - \frac{1}{2}\alpha)$ en el conjunto $\{ a=1, 2, \ldots, n^* / \ \varepsilon > x_a - \bar{x} \geq -\bar{\varepsilon} \}$ mientras que los restantes $\bar{\alpha}\, n^*$ elementos satisfacen $x_a - \bar{x} \geq -c$ por la condición ii). Obtenemos

$$\sum_{a=1}^{n^*} (x_a - \bar{x}) \geq (\tfrac{1}{2}\varepsilon\alpha)n^* + (1 - \bar{\alpha} - \tfrac{1}{2}\alpha)(-\bar{\varepsilon})n^* + \bar{\alpha}(-c)n^*$$

o equivalentemente,

$$(n^*)^{-1} \sum_{a=1}^{n^*} (x_a - \bar{x}) \geq (\tfrac{1}{2}\varepsilon\alpha) + (1 - \bar{\alpha} - \tfrac{1}{2}\alpha)(-\bar{\varepsilon}) + \bar{\alpha}(-c) \geq$$

$$(\tfrac{1}{2}\varepsilon\alpha) + (1 - \tfrac{1}{2}\alpha)(-\bar{\varepsilon}) + (\varepsilon\alpha / 6c)(-c) \geq$$

$$(\tfrac{1}{2}\varepsilon\alpha) + (1 - \tfrac{1}{2}\alpha)(\varepsilon\alpha / 4(1 - \tfrac{1}{2}\alpha)) - \varepsilon\alpha / 6 = \varepsilon\alpha / 12 > 0$$

Tomando $r = 1, 2, \ldots.$ observamos que también se cumple

$$(r\, n^*)^{-1} \sum_{a=1}^{rn^*} (x_a - \bar{x}) \geq \varepsilon\,\alpha / 12 > 0$$

Haciendo que r tienda a infinito tenemos

$$\lim\sup\,(r\,n^*)^{-1}\sum_{a=1}^{rn^*}(x_a-\bar{x})\geq \varepsilon\alpha\,/\,12>0$$

con lo que obtenemos una contradicción a la hipótesis iii).

QED.

CAPITULO IV : EXTENSION A ECONOMIAS COMPETITIVAS

El lector puede preguntarse si los resultados obtenidos en el capítulo precedente dependen del mecanismo particular que hemos utilizado para incrementar el tamaño de la economía, a saber, replicación de agentes. La respuesta es afortunadamente negativa. Todas las propiedades de equidad del núcleo se generalizan al marco de economías competitivas.

Dada una economía inicial $\mathcal{E} : J \to \mathcal{U} \times \xi$ podemos construir una secuencia competitiva $\mathcal{E}^r$ basada en $\mathcal{E}$ de la forma indicada en el capítulo II. A partir de la economía $\mathcal{E}$ podemos, asimismo, derivar una economía infinita con un conjunto de agentes representados por el intervalo unitario $[0, 1]$, con características (u_j, Ee_j), $j \in J$, y donde las copias de tipo j están representadas por un intervalo $I_j \subseteq [0, 1]$ con medida $\eta_j > 0$. Esta economía será denotada por el símbolo $\mathcal{E}^{\infty}_{E}$.

Sea f^r un asignación realizable para $\mathcal{E}^r$; entonces, puede comprobarse que

$$\sum_{j \in J} \sum_{a \in A_j^r} Ef_j^r(a) \leq \sum_{j \in J} (\# A_j^r)\, Ee_j$$

de donde se sigue que

$$(\# A^r)^{-1} \sum_{j\in J} (\# A_j^r)\, \bar{f}_j^r \leq (\# A^r)^{-1} \sum_{j\in J} (\# A_j^r)\, Ee_j$$

y tomando $\eta_j^r =: (\# A_j^r) / (\# A^r)$ se deduce finalmente

$$0 \leq \eta_j^r\, \bar{f}_j^r \leq \sum_{j\in J} \eta_j^r\, \bar{f}_j^r \leq \sum_{j\in J} \eta_j^r\, Ee_j$$

Sabemos que $\lim \eta_j^r = \eta_j$, por la definición de secuencia competitiva, y por lo tanto podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\bar{f}_j^r$ converge hacia un límite $\bar{f}_j$, para todo $j \in J$. Esto implica que la asignación $\bar{f}$ es factible para la economía $\mathcal{E}_E^{\infty}$, i.e.,

$$\sum_{j\in J} \eta_j(\bar{f}_j - Ee_j) \leq 0$$

Formulamos,

<u>Teorema 5</u>. Sea $\mathcal{E}^r$ una secuencia competitiva de economías y sea $f^r \in C(\mathcal{E}^r)$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $j \in J$,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\#\{a \in A_j^r \,/\, |Eu_j f_j^r(a) - u_j(\bar{f}_j)| > \varepsilon\}}{\# A_j^r} = 0$$

Demostración: Por contradicción. Existirían, en caso contrario, $\bar{\varepsilon} > 0$, $\bar{\alpha} \in]0, 1[$, subsecuencia $\{R\}$ y un tipo de agente, por ejemplo el tipo 1, tales que si $r \in \{R\}$, entonces

$$\frac{\#\{a \in A_1^r \;/\; |Eu\; f^r(a) - u\;(\bar{f}\;)| > \bar{\varepsilon}\}}{\#\, A_1^r} > \bar{\alpha}$$

Un argumento idéntico al empleado en la demostración del teorema 1 muestra que existen $\hat{\varepsilon} > 0$, $\hat{\alpha} \in]0, 1[$ y entero R_1 tales que si $r > R_1$

$$\frac{\#\{a \in A_1^r \;/\; Eu_1 f_1^r(a) < u_1(\bar{f}_1) - \hat{\varepsilon}\;\}}{\#\, A_1^r} > \hat{\alpha}$$

Para $j \neq 1$ y ε arbitrario sabemos que existe $R(\varepsilon, \hat{\alpha})$ tal tal que si $r > R(\varepsilon, \hat{\alpha})$

$$\frac{\#\{a \in A_j^r \;/\; Eu_j f_j^r(a) < u_j(\bar{f}_j) + \varepsilon\;\}}{\#\, A_j^r} > \hat{\alpha}$$

Si $r > \max(R_1, R(\varepsilon, \hat{\alpha}))$ y $\eta =: \min_j \eta_j$ definimos

$$m^r =: \min(\operatorname{int}[(\# A^r)\eta], \min_j(\operatorname{int}[(\# A_j^r)\hat{\alpha}] + 1))$$

de manera que podemos construir conjuntos

$$B_j^r(\varepsilon) \subseteq \{a \in A_j^r / Eu_j f_j^r(a) < u_j(\bar{f}_j) + \varepsilon\} \quad , \quad j \neq 1$$

$$B_1^r(\hat{\varepsilon}) \subseteq \{a \in A_1^r / Eu_1 f_1^r(a) < u_1(\bar{f}_1) - \hat{\varepsilon}\}$$

cuya cardinalidad es m^r y, además, con la propiedad $m^r(\# A^r)^{-1} \leq \eta_j$ para todo $j \in J$.
La asignación definida por

$$\hat{f}_j^r(a) = \bar{f}_j + \triangle_j - Ee_j + (m^r)^{-1} \sum_{a=1}^{m^r} e_j(a) \quad , \quad \forall a \in B_j^r(\varepsilon)$$

$$\hat{f}_1^r(a) = \bar{f}_1 - \triangle - Ee_1 + (m^r)^{-1} \sum_{a=1}^{m^r} e_1(a) \quad , \quad \forall a \in B_1^r(\hat{\varepsilon})$$

es realizable para la coalición $(\bigcup_{j\neq 1} B_j^r(\varepsilon)) \cup B_1^r(\hat{\varepsilon})$ si r es grande. En efecto,

$$\sum_{j\in J}\sum_{a=1}^{m^r}\hat{f}_j^r(a) = m^r\sum_{j\in J}(\bar{f}_j - Ee_j) + m^r\Big(\sum_{j\neq 1}\Delta_j - \Delta\Big) +$$

$$+\sum_{j\in J}\sum_{a=1}^{m^r} e_j(a) = \sum_{j\in J} m^r(\bar{f}_j - Ee_j) + \sum_{j\in J}\sum_{a=1}^{m^r} e_j(a)$$

y para r lo suficientemente grande observamos que

$$\frac{1}{\# A^r}\sum_{j\in J}\sum_{a=1}^{m^r}\hat{f}_j^r(a) = \sum_{j\in J}\frac{m^r}{\# A^r}(f_j - Ee_j) +$$

$$\frac{1}{\# A^r}\sum_{j\in J}\sum_{a=1}^{m^r} e_j(a) \le \sum_{j\in J}\eta_j(\bar{f}_j - Ee_j) +$$

$$\frac{1}{\# A^r}\sum_{j\in J}\sum_{a=1}^{m^r} e_j(a) \le \frac{1}{\# A^r}\sum_{j\in J}\sum_{a=1}^{m^r} e_j(a)$$

Esto demuestra que $\hat{f}$ es realizable para nuestra coalición si r es lo suficientemente grande. El resto del argumento es esencialmente idéntico al utilizado en la demostración del teorema 1. QED.

Los restantes teoremas enunciados y demostrados para secuencias de economías de réplica se generalizan asimismo al marco de secuencias competitivas utilizando argumentos similares a los empleados en el capítulo anterior.

Las propiedades de tratamiento ε-igualitario se centran en la asignación límite $\bar{f}$. Hasta el momento, sin embargo, no hemos ido más allá de esta observación. El propósito del siguiente capítulo es profundizar en el estudio de las características de la asignación $\bar{f}$.

CAPITULO V : TEOREMAS DE CONVERGENCIA .

Deseamos, en este capítulo, explorar la relación existente entre el núcleo y las asignaciones walrasianas o de equilibrio en economías con incertidumbre personal. En economías sin incertidumbre y con un gran número de individuos sabemos que toda asignación en el núcleo puede constituirse como un equilibrio walrasiano aproximado (una formulación precisa de este enunciado puede verse en el apéndice a este capítulo). La presencia de incertidumbre individual modifica el contenido usual de los teoremas de convergencia o equivalencia. En efecto, hemos visto como las asignaciones en el núcleo de una secuencia de economías estocásticas constituyen un mecanismo efectivo para eliminar desigualdades y reducir riesgos. Los resultados formales obtenidos singularizan el papel de una asignación límite, derivada de la secuencia de asignaciones en el núcleo, perteneciente a una economía en la que todos los riesgos han sido perfectamente cubiertos, en el sentido que cada individuo recibe como dotación inicial la esperanza matemática de su dotación aleatoria. Situémonos, por el momento, en el marco simple de una secuencia $\&^r$ de economías de réplica con un solo tipo de agente. En este caso, si $f^r \in C(\&^r)$, es fácil de comprobar que la asignación $\bar{f}^r$ se reduce, para todo r , al valor esperado de la dotación aleatoria común a todas las copias, ésto es, $\bar{f}^r = Ee$. Denotemos por $\&_E^r$ a la economía sin incertidumbre compuesta por r individuos idénticos, cada uno de ellos con características (u, Ee) . Si la función de utilidad es estrictamente cóncava, un argumento familiar permite demostrar que la asignación de bienes $(Ee)_{a=1}^r$ es un equilibrio walrasiano (de hecho, el único equilibrio walrasiano) para la economía $\&_E^r$. Podemos, por tanto, concretar los resultados del capítulo anterior subrayando que todos los agentes, excepto una minoría sin importancia, reciben en el núcleo de economías de réplica con un solo tipo de agente, pero con un número elevado de copias, una cesta aleatoria de bienes cuya esperanza matemática está contenida en un entorno de Ee tan pequeño como se desee; la probabilidad que tal cesta aleatoria no pertenezca al mencionado entorno es arbitrariamente pequeña; finalmente, los niveles de utilidad esperada en el núcleo se pueden hacer tan cercanos como queramos a la utilidad que se derivaría de la asignación de equilibrio $(Ee)_{a=1}^r$.

La observación que acabamos de realizar especifica el contenido económico de la asignación $\bar{f}^r$ y, por consiguiente, de $\bar{f}$ en economías de réplica simples como las descritas en el párrafo anterior. Da pie, además, a conjeturar que un resultado similar debería ser válido para secuencias de economías más complejas como las estudiadas en el capítulo precedente. Nuestro interés en este capítulo se centra específicamente en explorar y analizar esta cuestión.

Consideramos, en primer lugar, el caso general de economías de réplica para proceder, a continuación, a estudiar su generalización a secuencias competitivas.

Dada una economía $\mathcal{E} : \to \mathcal{U} \times \xi$ que satisface las hipótesis del modelo, derivamos de la manera usual la secuencia $\mathcal{E}^r$ de economías de réplica y la correspondiente economía sin incertidumbre $\mathcal{E}_E$.

<u>Teorema 6</u>. Sea $\{\mathcal{E}^r\}$ una secuencia de economías de réplica tal que para todo $r = 1, 2, \ldots,$ $f^r \in C(\mathcal{E}^r)$. Entonces, la asignacion $\bar{f}$ definida por

$$\bar{f}_j = \lim_{r \to \infty} (r)^{-1} \sum_{a=1}^{r} Ef_j^r(a)$$

para todo $j \in J$ es una asignación walrasiana para la economía sin incertidumbre $\mathcal{E}_E$.

<u>Demostración</u>: Denotemos por $W(\mathcal{E}_E)$ al conjunto de todas las asignaciones walrasianas o de equilibrio correspondientes a la economía $\mathcal{E}_E$. Si la conclusión del teo-

rema no fuera cierta, podríamos concluir, gracias al teorema de Debreu y Scarf [1963] (véase el apéndice) para economías de réplica sin incertidumbre, que la réplica de orden r de la asignación $\bar{f}$ sería vetada en la economía $\&_E^r$ para todo r mayor que cierto $\bar{r}$. Esto quiere decir que $\bar{f}^{(r)} \notin C(\&_E^r)$ para $r \geq \bar{r}$. Podemos, entonces, encontrar una coalición $B^{\bar{r}} \subseteq A^r$ y una asignación g tales que

$$\text{i)} \quad \sum_{j \in J_{B^{\bar{r}}}} \sum_{a \in B_j^{\bar{r}}} g_j(a) = \sum_{j \in J_{B^{\bar{r}}}} \sum_{a \in B_j^{\bar{r}}} Ee_j(a)$$

$$\text{ii)} \quad u_j(g_j(a)) > u_j(\bar{f}_j) \qquad \forall a \in B_j^{\bar{r}}, \quad \forall j \in J_{B^{\bar{r}}}$$

donde $B_j^{\bar{r}} = \{a \in B^{\bar{r}} / \text{ a es del tipo } j\}$ y $J_{B^{\bar{r}}}$ es el subconjunto de J para el que se verifica que $B_j^{\bar{r}} \neq \emptyset$ si $j \in J_{B^{\bar{r}}}$. La interpretación es inmediata. La condición i) refleja que la asignación g es realizable para $B^{\bar{r}}$ mientras que ii) pone de manifiesto que todos los agentes en $B^{\bar{r}}$ prefieren la cesta de bienes que reciben en g a la que reciben en $\bar{f}$. La coalicíon de agentes $B^{\bar{r}}$ es la base sobre la que será posible construir una coalición con capacidad de veto para la economía estocástica.

Para cada $j \in J_B{}^{\bar{r}}$ y para $n = 1, 2, \ldots$ definamos la copia de orden n de la coalición $B^{\bar{r}}$ como el subconjunto de agentes en la economía $\mathcal{E}^{n\bar{r}}$ donde cada individuo de tipo j en $B^{\bar{r}}$ aparece replicado n veces. Si $B^{n\bar{r}}$ es dicho conjunto, es evidente que

$$B^{n\bar{r}} = \bigcup_{j \in J_B^{\bar{r}}} B_j^{n\bar{r}}$$

donde $B_j^{n\bar{r}}$ tiene un significado obvio y $\# B_j^{n\bar{r}} = n \# B_j^{\bar{r}}$. Para simplificar la notación hacemos $n \# B_j^{\bar{r}} =: b_j^n$. Definimos, a continuación, la asignación $h^{n\bar{r}}$ de la siguiente manera

$$h_j^{n\bar{r}}(a) = g_j(a) - Ee_j + (b_j^n)^{-1} \sum_{a=1}^{b_j^n} e_j(a)$$

para todo $a \in B_j^{n\bar{r}}$, para todo $j \in J_B{}^{\bar{r}}$. Esta asignación $h^{n\bar{r}}$ es realizable para la coalición $B^{n\bar{r}}$; en efecto,

$$\sum_{a=1}^{b_j^n} h_j^{n\bar{r}}(a) = \sum_{a=1}^{b_j^n} (g_j(a) - Ee_j) + \sum_{a=1}^{b_j^n} e_j(a) =$$

$$= \sum_{a \in B_j^{n\bar{r}}} (g_j(a) - Ee_j) + \sum_{a=1}^{b_j^n} e_j(a) =$$

$$= n \left(\sum_{a \in B_j^{\bar{r}}} (g_j(a) - Ee_j) + \sum_{a=1}^{b_j^n} e_j(a) \right.$$

y por consiguiente tenemos

$$\sum_{j \in J_B\bar{r}} \sum_{a=1}^{b_j^n} h_j^{n\bar{r}}(a) = n \sum_{j \in J_B\bar{r}} \sum_{a \in B_j^{\bar{r}}} (g_j(a) - Ee_j) +$$

$$+ \sum_{j \in J_B\bar{r}} \sum_{a=1}^{b_j^n} e_j(a)$$

La condición i) obtenida al principio demuestra que el primer sumando del lado derecho de la relación que acabamos de derivar es idénticamente cero. Así pues,

$$\sum_{j \in J_B\bar{r}} \sum_{a=1}^{b_j^n} (h_j^{n\bar{r}}(a) - e_j(a)) = 0$$

y la asignación $h^{n\bar{r}}$ es realizable para $B^{n\bar{r}}$ para todo $n = 1, 2, \ldots$. La definición de $h^{n\bar{r}}$ implica

$$|h_j^{n\bar{r}}(a) - g_j(a)| = |(b_j^n)^{-1} \sum_{a=1}^{b_j^n} (e_j(a) - Ee_j)|$$

y, en consecuencia, la ley débil de los grandes números garantiza, para todo $\delta > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \text{Prob} \left\{ |h_j^{n\bar{r}}(a) - g_j(a)| > \delta \right\} = 0$$

El lema 1 del capítulo III permite deducir

$$\lim_{n\to\infty} Eu_j h_j^{n\bar{r}}(a) = u_j(g_j(a))$$

para todo $j \in J_B\bar{r}$. Si hacemos

$$\theta_j(a) = u_j(g_j(a)) - u_j(\bar{f}_j)$$

y definimos

$$\theta = \tfrac{1}{4} \min \left\{ \theta_j(a) \,/\, j \in J_B\bar{r} \;,\; a \in B_j^{\bar{r}} \right\}$$

podemos comprobar que

$$u_j(g_j(a)) - \theta > u_j(\bar{f}_j) + \theta \qquad \forall\, j \in J_B\bar{r} \;,\; \forall\, a \in B_j^{\bar{r}}$$

Dado θ , existe un índice n' grande tal que para $n > n'$, $j \in J_B\bar{r}$ y $a \in B_j^{n\bar{r}}$ se tiene

$$Eu_j h_j^{n\bar{r}}(a) > u_j(g_j(a)) - \theta$$

Por otro lado, el teorema 1 del capítulo III implica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\left\{ a \in A_j^{n\bar{r}} \,/\, |Eu_j f_j^{n\bar{r}}(a) - u_j(\bar{f}_j)| < \varepsilon \right\}}{n\bar{r}} = 1$$

para todo $\varepsilon > 0$. En particular, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\left\{ a \in A_j^{n\bar{r}} \,/\, Eu_j f_j^{n\bar{r}}(a) < u_j(\bar{f}_j) + \theta \right\}}{n\bar{r}} = 1$$

y por consiguiente podemos seleccionar en $\mathcal{E}^{n\bar{r}}$ tantos agentes del tipo $j \in J_B\bar{r}$, satisfaciendo

$$Eu_j f_j^{n\bar{r}}(a) < u_j(\bar{f}_j) + \theta$$

como se deseen, siempre que el índice n sea lo suficientemente grande. Estos agentes así seleccionados pasan a constituir los conjuntos $B_j^{n\bar{r}}$ cuyos componentes habian sido, hasta el momento, anónimos. Finalmente, si n es lo suficientemente grande, $j \in J_B\bar{r}$ y $a \in B_j^{n\bar{r}}$ vemos que

$$Eu_j f_j^{n\bar{r}}(a) < u_j(\bar{f}_j) + \theta < u_j(g_j(a)) - \theta < Eu_j h_j^{n\bar{r}}(a)$$

y la coalición $B^{n\bar{r}}$ bloquea la asignación en el núcleo $f^{n\bar{r}}$, con lo que contradecimos la hipótesis de partida.

QED.

El teorema que acabamos de enunciar y demostrar formaliza la idea de convergencia de las asignaciones en el núcleo de economías con incertidumbre personal hacia un equilibrio walrasiano de la economía asociada sin incertidumbre. El teorema es válido para secuencias de economías de réplica. Nuestro siguiente paso consiste en analizar si y como el resultado puede extenderse a secuencias de economías que no son necesariamente de réplica, en particular a secuencias competitivas.

Dada una secuencia $\{f^r\}$ de asignaciones factibles para $\{\mathcal{E}^r\}$, derivamos la asignación realizable $\bar{f}$ para la economía $\mathcal{E}_E^{\infty}$ tal como se indicó en el capítulo anterior.

<u>Teorema 7</u>. Sea $\{f^r\}$ una secuencia de asignaciones tal que $f^r \in C(\mathcal{E}^r)$ y $\{\mathcal{E}^r\}$ es competitiva. Entonces, la asignación $\bar{f}$ es un equilibrio walrasiano para la economía $\mathcal{E}_E^{\infty}$.

<u>Demostración</u>: Si la conclusión del teorema no fuera cierta, el teorema de equivalencia de Aumann [1964] (véase el apéndice) nos asegura que $\bar{f} \notin C(\mathcal{E}_E^{\infty})$. Existe, por tanto, una coalición $B \subseteq [0, 1]$ que bloqueará $\bar{f}$. Podemos escribir $B = \cup\{B_j / j \in J_B\}$ donde B_j es el conjunto de agentes de tipo j que integran la coalición bloqueadora y J_B es el conjunto de tipos que constituyen la coalición cuya presencia no es "negligible", es decir, si $j \in J_B$, entonces la medida del conjunto B_j es positiva. En economías sin átomos, y en particular en economías con un contínuo de agentes

como la que estamos utilizando, los conjuntos de agentes cuya cardinalidad es finita o denumerable son irrelevantes.

La medida del conjunto B_j, $j \in J_B$, será representada por β_j. Un resultado obtenido por Schmeidler [1972] prueba que el núcleo de una economía sin átomos no depende del "tamaño" o medida de las coaliciones que son efectivamente construibles. Más precisamente, supongamos que las únicas coaliciones admisibles son aquellas cuya medida es positiva pero menor o igual que un número $\gamma > 0$ arbitrario menor o igual que la medida del conjunto de todos los agentes. Si $C_\gamma(\mathcal{E}_E^\infty)$ denota las asignaciones que no son bloqueadas por ninguna coalición γ-admisible, entonces $C_\gamma(\mathcal{E}_E^\infty) = C(\mathcal{E}_E^\infty)$. Una aplicación de este resultado permite demostrar que la coalición B puede escogerse con medida tan pequeña como deseemos. En particular, escogeremos B tal que su medida sea menor que $\min\{\eta_j / j \in J_B\}$.

La coalición B vetará la asignación $\bar{f}$ a través de un asignación g tal que

i) $$\sum_{j \in J_B} \beta_j(g_j - Ee_j) = 0$$

ii) $$u_j(g_j) > u_j(\bar{f}_j) \quad , \quad \forall\, j \in J_B$$

Obsérvese que g puede escogerse de manera que todos los agentes en B_j, $j \in J_B$, reciben la misma asignación. En caso contrario, cada copia de tipo j podría recibir la media de la asignación agregada correspondiente a B_j. Esta redistribución es claramente factible para B_j y, por convexidad de las preferencias, es también estrictamente preferida a la cesta de bienes que los agentes de tipo j obtienen en la asignación vetada.

Para cada $j \in J_B$ existe un entero r'_j tal que para $r > r'_j$ podemos construir un conjunto $\emptyset \neq B^r_j \subseteq A^r_j$ con la propiedad

$$\frac{\# B^r_j}{\# A^r_j} \leq \beta_j$$

Definamos para todo $a \in B^r_j$, $j \in J_B$ y $r > \max \{ r'_j \,/\, j \in J_B \}$ la asignación

$$h^r_j(a) = g_j - E\hat{e}_j + (\# B^r_j)^{-1} \sum_{a \in B^r_j} e_j(a)$$

Esta asignación es realizable para la coalición definida por $B^r = \cup \{ B^r_j \,/\, j \in J_B \}$. En efecto, tomando sumatorios

$$\sum_{j\in J_B}\ \sum_{a\in B_j^r} h_j^r(a) = \sum_{j\in J_B} (\# B_j^r)(g_j - Ee_j) +$$

$$+ \sum_{j\in J_B}\ \sum_{a\in B_j^r} e_j(a)$$

de donde por construcción de B_j^r obtenemos para r grande

$$\frac{1}{\# A^r} \sum_{j\in J_B}\ \sum_{a\in B_j^r} (h_j^r(a) - e_j\ a)) =$$

$$\sum_{j\in J_b} \left(\frac{\# B_j^r}{\# A^r}\right)(g_j - Ee_j) \leq \sum_{j\in J_B} \beta_j (g_j - Ee_j) = 0$$

y la factibilidad de h^r para B^r queda probada. Asimismo, un argumento familiar prueba que h_j^r converge en probabilidad hacia g_j y $\lim Eu_j h_j^r(a) = u_j(g_j)$. Por otro lado, para $j\in J_B$ tenemos que $\beta_j < \min\{\eta_j / j\in J_B\}$ y una aplicación del teorema 5 en el capítulo IV nos permite deducir que para $\varepsilon > 0$ arbitrario existe un un indice r grande tal que se verifica

$$\frac{\#\{a \in A_j^r \,/\, Eu_j f_j^r(a) < u_j(\bar{f}_j) + \varepsilon\}}{\# A^r} \geq \beta_j \geq \frac{\# B_j^r}{\# A^r}$$

Esta relación demuestra que podemos seleccionar los componentes de B_j^r entre los miembros del conjunto $\{a \in A_j^r \,/\, Eu_j f_j^r(a) < u_j(\bar{f}_j) + \varepsilon\}$ siempre y cuando r sea lo suficientemente grande. Finalmente, si definimos

$$\Theta =: \tfrac{1}{4} \min \{u_j(g_j) - u_j(\bar{f}_j) \,/\, j \in J_B\}$$

podemos comprobar para $a \in B_j^r$, $j \in J_B$ y r grande que tenemos

$$Eu_j h_j^r(a) > u_j(g_j) - \Theta > u_j(\bar{f}_j) + \Theta > Eu_j f_j^r(a)$$

La primera desigualdad se sigue de $\lim Eu_j h_j^r(a) = u_j(g_j)$, la segunda se deriva de la construcción de Θ mientras que la tercera es una implicación de la propiedad de tratamiento igualitario para $\varepsilon = \Theta$. Por lo tanto, la coalición B^r bloquea f^r para r grande a través de la asignación h. QED.

APENDICE AL CAPITULO V

El propósito de este apéndice es ofrecer, de manera sucinta y a título de referencia, una versión de los teoremas de equivalencia de Debreu y Scarf [1963] y Aumann [1964].

Sea $\mathcal{U}$ el conjunto de las funciones de utilidad que satisfacen las propiedades de continuidad, monotonía y cuasiconcavidad y sea Q el conjunto de consumo representado por el ortante positivo. Los agentes presentes en la economía son representados por un conjunto J dotado de una σ-álgebra $\mathfrak{J}$ de subconjuntos sobre los que tenemos definida una medida λ. Una economía sin incertidumbre $\mathcal{E}_E$ es una función que asigna a cada agente una función de utilidad y una dotación inicial; formalmente,

$$\mathcal{E}_E : (J, \mathfrak{J}, \lambda) \to \mathcal{U} \times Q$$

Una economía se denomina simple si $\# J < +\infty$, $\mathfrak{J} = 2^J$ y λ es una medida de proporciones. Si el espacio de medida $(J, \mathfrak{J}, \lambda)$ no contiene ningún átomo se dice que $\mathcal{E}_E$ es una economía sin átomos. Un caso particular de una economía sin átomos corresponde al espacio $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ donde $\mathcal{B}([0, 1])$ es la familia de subconjuntos de Borel en $[0, 1]$ y λ es la medida de Lebesgue.

Toda economía simple $\mathcal{E}_E$ permite definir una secuencia $\{\mathcal{E}_E^r\}$ de economías de réplica tomando como conjunto de agentes A^r en la economía $\mathcal{E}_E^r$ el conjunto $A^r =: J \times \{1, 2, \ldots, r\}$. Así pues,

$$\mathcal{E}_E^r : J \times \{1, 2, \ldots, r\} \rightarrow \mathcal{E}_E(J)$$

y todas las copias del tipo j disfrutan de las mismas características.

Los conceptos de asignación realizable, coalición con capacidad de veto, núcleo y equilibrio walrasiano son standard y no serán reproducidos aquí. Véase Hildenbrand y Kirman [1976]. A efectos de notación, $W(\mathcal{E}_E)$ denotará el conjunto de las asignaciones walrasianas o de equilibrio en la economía $\mathcal{E}_E$. Si f es una asignación realizable para $\mathcal{E}_E$, $f^{(r)}$ representará la asignación para $\mathcal{E}_E^r$ que ofrece a cada una de las r copias de tipo j la cesta de bienes f_j .

<u>Teorema de equivalencia de Debreu y Scarf</u>. Sea $\mathcal{E}_E$ una economía simple y sea $\mathcal{E}_E^r$ una secuencia de economías de réplica basada en $\mathcal{E}_E$. Entonces, $f \in W(\mathcal{E}_E)$ si y solo si $f^{(r)} \in C(\mathcal{E}_E^r)$ para todo $r = 1, 2, \ldots$.

<u>Demostración</u> : Véase Debreu y Scarf [1963], Hildenbrand y

Kirman [1976] o Hildenbrand [1978].

Teorema de equivalencia de Aumann. Sea $\mathcal{E}_E$ una economía sin átomos. Entonces, $W(\mathcal{E}_E) = C(\mathcal{E}_E)$

Demostración : Véase Aumann [1964] o Hildenbrand [1974].

VI. CONCLUSIONES

El trabajo presentado ha explorado la teoría del núcleo en economías con incertidumbre personal.

El primer bloque de resultados trata la cuestión de la equidad en el núcleo. Los resultados obtenidos formalizan la intuición que un intercambio ex-ante de bienes entre agentes con aversión al riesgo permite reducir el grado de incertidumbre presente en la economía y las desigualdades generadas por una distribución asimétrica de las dotaciones contingentes. Así, la formación de coaliciones de agentes puede interpretarse como un mecanismo cooperativo para asegurar riesgos. En esta luz, el núcleo de una economía consiste de aquellos contratos de redistribución de riesgos que no son mejorables a través de la cooperación de indivíduos. Hemos visto, por otra parte, que la cobertura de riesgos mejora a medida que aumenta el número de agentes en la economía. En efecto, un mayor número de agentes y, por tanto, de estados colectivos proporcionan más posibilidades de recontratación y, en ausencia de costes de comunicación y de recolección de información, permiten homogeneizar el nivel de bienestar de los agentes.

Una vez establecidas las propiedades del núcleo en economías estocásticas, pasamos a estudiar la relación existente entre las asignaciones competitivas o walrasianas y las asignaciones en el núcleo. Supongamos un mundo donde la incertidumbre que afecta a cada indivíduo es perfectamente cubierta en el sentido que cada agente recibe como dotación inicial la esperanza matemática de su dotación aleatoria de bienes. Los teoremas de convergencia que hemos enunciado y probado ponen de manifiesto que en economías estocásticas con un gran número de agentes, el núcleo da lugar a asignaciones (de bienes y de utilidades) arbitrariamente próximas (en el espacio de bienes, de utilidades y en probabilidad) a una asignación walrasiana de la economía sin incertidumbre descrita con anterioridad.

Los resultados de este trabajo se extienden fácilmente al marco de economías muestrales (donde el número de agentes se construye aleatoriamente) gracias al teorema de Glivenko-Cantelli (véase Hildenbrand [1974], (43)). En este contexto, todos los teoremas que hemos presentado son asimismo válidos con probabilidad igual a uno.

Otras generalizaciones que posiblemente merecen ser estudiadas en aras a la completitud del trabajo comprenderían la introdución de producción en un contexto de economías con coaliciones de productores (<u>coalition production economies</u>) donde cada posible coalición dispondría de un conjunto factible de producción contingente en los estados sociales generados. Por otra parte, sería también interesante el indagar la validez de nuestros resultados cuando, además de las dotaciones iniciales, las preferencias de los consumidores son, asimismo, aleatorias. Esto requeriría una definición muy precisa de como aleatoriezar las preferencias. Quizás el trabajo de Hildenbrand [1971] sería un buen punto de partida.

Finalmente, queremos señalar que a pesar que las funciones de utilidad han sido definidas en R_+, la extensión al ortante no-negativo de R_+ es inmediata en todos los casos excepto en el teorema 3 donde la prueba presentada es aplicable únicamente al caso unidimensional. El coste matemático de la extensión parece bastante elevado pero no irrealizable.

UNIV. AUT. DE BARNA. BIBLIOTECA FAC. CIENCIES ECONOM.

BIBLIOGRAFIA

Anderson, R. [1978], "An Elementary Core Equivalence Theorem", Econometrica, 46.

Aumann, R. [1964], "Markets with a Continuum of Traders", Econometrica, 32.

Bewley, T. [1974], "Edgeworth's Conjecture", Econometrica, 41.

Billingsley, P. [1968], Convergence of Probability Measures, Wiley, New York.

Caspi, Y. [1978], "A Limit Theorem on the Core of an Economy with Individual Risks", Review of Economic Studies, 140.

Cheng, H. [1980], "Edgeworth's Conjecture Revisited", Working Paper #IP-292, University of California, Berkeley.

Debreu, G. [1959], Theory of Value, Wiley, New York.

Debreu, G. [1975], "The Rate of Convergence of the Core of an Economy", Journal of Mathematical Economics, 2.

Debreu, G. [1981], "Existence of Competitive Equilibrium" en Handbook of Mathematical Economics, vol. II, editado por K. Arrow y M. Intriligator, North Holland, Amsterdam.

Debreu, G. y H. Scarf [1963], "A Limit Theorem on the Core of an Economy", International Economic Review, 4.

Debreu, G. y H. Scarf [1972], "The Limit of the Core of an Economy" en Decision and Organization, editado por R. Radner y C.B. McGuire, North Holland, Amsterdam.

Edgeworth, F.Y. [1881], Mathematical Psychics, Paul Kegan, London.

Fishburn, P. [1970], Utility Theory for Decision Making, Wiley, New York.

Gillies, D. [1953], Some Theorems on N-Person Games, Ph. D. Thesis, Princeton University, Princeton.

Green, J. [1972], "On the Inequitable Nature of Core Allocations", Journal of Economic Theory, 4.

Halmos, P. [1974], Measure Theory, Springer Verlag, New York.

Hildenbrand, W. [1970], "On Economies with many Agents", Journal of Economic Theory, 2.

Hildenbrand, W. [1971], "Random Preferences and Equilibrium Analysis", Journal of Economic Theory, 4.

Hildenbrand, W. [1974], Core and Equilibria of a Large Economy, Princeton University Press, Princeton.

Hildenbrand, W. [1981], "The Core of an Economy", en Handbook of Mathematical Economics, vol. II, editado por K. Arrow y M. Intriligator, North Holland, Amsterdam.

Hildenbrand, W. y A. Kirman [1973], "Size Removes Inequity", Review of Economic Studies, 123.

Hildenbrand, W. y A. Kirman [1976], Introduction to Equilibrium Analysis, North Holland, Amsterdam.

Kannai, Y. [1970], "Continuity Properties of the Core of a Market", Econometrica, 38.

Luce, R. y H. Raiffa [1957], Games and Decisions, Wiley, New York.

Malinvaud, E. [1972], "The Allocation os Individual Risks in Large Markets", Journal of Economic Theory, 4.

Maschler, M. [1975], Lectures on Game Theory, mimeo.

Rockafellar, T. [1970], Convex Analysis, Princeton University Press, princeton.

Scarf, H. [1967], "The Core of an N-person Game", Econometrica, 35.

Schmeidler, D, [1972], "A Remark on the Core of an Atomless Economy", Econometrica, 44.

Shapley, L. [1953], "Stochastic Games", Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A., 39.

Shapley, L. [1972], "On Balanced Games without Side Payments", The Rand Corporation, P-4479.

Shubik, M. [1959], "Edgeworth Market Games", en Contributions to the Theory of Games, IV, Annals of Mathematical Studies 40, editado por R. Luce y A.W. Tucker, Princeton University Press, Princeton.

Trockel, W. [1976], "A Limit Theorem on the Core", Journal of Mathematical Economics, 3.

Vind, K. [1964], "Edgeworth-allocations in an Exchange Economy with many Traders", International Economic Review, 5.

Vind, K. [1965], "A Theorem on the Core of an Economy", Review of Economic Studies, 5.

Weller, P. [1981], "Limit Theorems on the Core of a many good Economy with Individual Risks", International Economic Review, 22.