Publicacions Matemàtiques, Vol 33 (1989), 423–430.

LEMME DE MOSER FEUILLETÉ ET CLASSIFICATION DES VARIÉTÉS DE POISSON RÉGULIÈRES

G. HECTOR, E. MACIAS ET M. SARALEGI

Abstract

Regular Poisson structures with fixed characteristic foliation $\mathcal{F}$ are described by means of foliated symplectic forms. Associated to each of these structures, there is a class in the second group of foliated cohomology $H^2(\mathcal{F})$. Using a *foliated version* of Moser's lemma, we study the isotopy classes of these structures in relation with their cohomology class. Explicit examples, with $\dim \mathcal{F} = 2$, are described.

1. Cohomologie feuilletée et variétés de Poisson régulières

Soit $(M, \mathcal{F})$ une variété munie d'un feuilletage régulier $\mathcal{F}$. On introduit le complexe des *formes feuilletées* puis la notion de *forme feuilletée symplectique* qui servira à décrire les variétés de Poisson régulières.

1.1. Formes feuilletées–cohomologie feuilletée.

Soient $(\Omega^*(M), d)$ le complexe de DeRham de M et $\Omega^*(M, \mathcal{F})$ le sous-complexe des formes relatives défini par $\omega \in \Omega^r(M, \mathcal{F})$ si $\omega \in \Omega^r(M)$ et

$$\omega(X_1, X_2, \ldots, X_r) = 0$$

pour tout r–uple de champs tangents à $\mathcal{F}$. Le complexe $\Omega^*(\mathcal{F})$ des *formes $\mathcal{F}$-feuilletées* est défini par passage au quotient:

$$\Omega^*(\mathcal{F}) = \Omega^*(M)/\Omega^*(M, \mathcal{F})$$

et sa cohomologie $H^*(\mathcal{F})$ est la *cohomologie feuilletée* de $(M, \mathcal{F})$. Pour $r > \dim \mathcal{F}$, on a $\Omega^r(\mathcal{F}) = 0$ et donc $H^r(\mathcal{F}) = 0$ mais même si M est compacte on ne peut en général rien conclure pour $H^n(\mathcal{F})$, $n = \dim \mathcal{F}$.

Concernant la structure de $\Omega^*(\mathcal{F})$, on remarquera que:

i) $\Omega^*(M, \mathcal{F})$ étant un idéal de $\Omega^*(M)$, le produit extérieur $\wedge$ définit par passage au quotient une structure multiplicative sur $\Omega^*(\mathcal{F})$;

ii) le produit intèrieur $X\rfloor\alpha$ de $\alpha \in \Omega^*(\mathcal{F})$ avec un champ X tangent à $\mathcal{F}$ est un élément bien défini de $\Omega^{*-1}(\mathcal{F})$; on pourra donc définir la dérivée de Lie $L_X\alpha$ par la formule habituelle; elle s'annulera exactement si α est invariante par le flot engendré par X;

iii) de même, l'évaluation de $\alpha \in \Omega^r(\mathcal{F})$ sur un r-champ tangent à $\mathcal{F}$ est un èlément de $\Omega^0(\mathcal{F}) = \Omega^0(M)$ donc une function sur M; en particulier on pourra définir comme d'habitude le rang de α en un point.

1.2. Formes feuilletées symplectiques et variétés de Poisson.

Suppons que $\mathcal{F}$ est de dimension paire $2m$. On dira qu'une forme $\sigma \in \Omega^2(\mathcal{F})$ est une *forme feuilletée symplectique* si elle est fermée et de rang $2m$. Cette dernière condition est équivalente au fait que $\overset{m}{\wedge}\sigma$ est non nulle en tout point i.e. $\overset{m}{\wedge}\sigma$ est une *forme feuilletée volume.*

Le couple $(\mathcal{F}, \sigma)$ définit une structure de Poisson Λ sur M dont le feuilletage caractéristique est égal à $\mathcal{F}$. En effet, parce que σ est de rang $2m$, il existe pour tout $f \in \Omega^0(M)$, un unique champ de vecteurs X_f tangent à $\mathcal{F}$ tel que:

$$X_f\rfloor\sigma = -\overline{df}$$

(où $\overline{df}$ est la classe dans $\Omega^1(\mathcal{F})$ de $df \in \Omega^1(M)$); et le bivecteur Λ défini par

$$\Lambda(df, dg) = \sigma(X_f, X_g)$$

est une structure de Poisson dont les Hamiltoniens sont les champs X_f qui engendrent évidemment $\mathcal{F}$.

Réciproquement, si Λ est une structure de Poisson régulière de rang constant $2m$ sur une variété M de dimension $(2m+n)$, il existe un systeme de cartes locales

$$(V, x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^m, z^1, \ldots, z^n)$$

telles que:

i) le feuilletage caractéristique $\mathcal{F}$ de Λ est défini par les équations $dz^j = 0$;

ii) en restriction à V, la forme symplectique sur les feuilles de $\mathcal{F}$ s'écrit $\omega_{\mathcal{F}} = \sum_{i=1}^{m} dx^i \wedge dy^i$. (cf. [L] ou [W]). Le choix d'un supplémentaire de $T(\mathcal{F})$ permet d'étendre la famille $(\omega_{\mathcal{F}})$ en une 2–forme sur M dont la classe σ dans $\Omega^2(\mathcal{F})$ est une forme feuilletée symplectique independante du choix du supplémentaire.

En résumé, toute structure de Poisson, régulière Λ est exactement déterminée par la donnée d'un couple $(\mathcal{F}, \sigma)$ où $\mathcal{F}$ est un feuilletage régulier et σ est une 2–forme $\mathcal{F}$–feuilletée symplectique. Pour $\mathcal{F}$ fixé, on dira que $\Lambda = (\mathcal{F}, \sigma)$ est *supportée* par $\mathcal{F}$ et on désignera par Poiss $(\mathcal{F})$ l'espace des structures de Poisson de support $\mathcal{F}$.

1.3. Classe de cohomologie associée à $\Lambda = (\mathcal{F}, \sigma)$.

A toute structure de Poisson $\Lambda = (\mathcal{F}, \sigma)$ on associe la classe de cohomologie feuilletée

$$[\Lambda] = [\sigma] \in H^2(\mathcal{F})$$

et on dit que

i) Λ est *présymplectique* si $[\Lambda] \in \operatorname{Im}\{H^2(M) \to H^2(\mathcal{F})\}$ i.e. σ admet un représentant $\omega \in \Omega^2(M)$ qui est une forme fermée;

ii) Λ est *exacte* si $[\Lambda] = 0$ i.e. σ admet un represéntant ω qui est exact.

La classe $[\Lambda]$ joue pour les structures de Poisson de support $\mathcal{F}$ le rôle joué par la classe de la forme symplectique pour les variétés symplectiques.

2. Lemme de Moser feuilleté

Classifier les structures de Poisson régulières de support $(M, \mathcal{F})$ fixé, va consister à étudier l'application

$$\begin{array}{rccc} \chi : & \operatorname{Poiss}(\mathcal{F}) & \longrightarrow & H^2(M) \\ & \Lambda & \longrightarrow & [\Lambda] \end{array}$$

Pour ce faire, on se servira d'une version *feuilletée* du lemme de Moser (cf. [**M**]).

2.1. Comparaison de structures $\Lambda = (\mathcal{F}, \sigma)$.

i) Une famille à un paramètre de formes feuilletées étant définie par passage au quotient d'une famille à un paramètre de formes differentielles sur M, on dira que $\Lambda_t = (\mathcal{F}, \sigma_t)$, $t \in \mathbf{R}$, est une *famille à un paramètre de structures de Poisson cohomologues*, s'il existe une famille à un paramètre $\lambda_t \in \Omega^1(\mathcal{F})$ telle que

$$\sigma_t = \sigma_0 + d\,\lambda_t.$$

ii) Par ailleurs, soit $\varphi : \mathbf{R} \times M \to M$ un flot sur M engendré par un champ de vecteurs X tangent à $\mathcal{F}$. Alors, φ_t agit sur $\Omega^*(\mathcal{F})$ et si $\sigma \in \Omega^2(\mathcal{F})$ est symplectique, il en sera de même pour $\varphi_t^*\sigma$. On dira que $\varphi_t^*\sigma$ est une *famille de structures de Poisson isotopes*.

Pour t fixé, on vérifie immediatement que l'opérateur d'homotopie asocié à l'isotopie $(\varphi_{bt})_{b \in [0,1]}$ passe au quotient en un opérateur d'homotopie

$$H_t : \Omega^*(\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega^{*-1}(\mathcal{F})$$

qui vérifie:

$$\varphi_t^* - \mathrm{id}^* = d\,H_t + H_t\,d.$$

Donc $\varphi_t^*\sigma - \sigma = d\,H_t\sigma$ et $\varphi_t^*\sigma$ est une famille à un paramètre de structures cohomologues.

On se propose maintenant de vérifier le réciproque dans le cas où M est compacte. Pour cela soient p la projection de $\mathbf{R} \times M$ sur M et $\hat{\mathcal{F}} = p^*\mathcal{F}$. Si $\alpha_t \in \Omega^r(\mathcal{F})$ est une famille à un paramètre de formes $\mathcal{F}$–feuilletées, on désigne par

- $\hat{\alpha}_t \in \Omega^r(\hat{\mathcal{F}})$ la r–forme $\hat{\mathcal{F}}$–feuilletée, de type $(0,r)$ relativement à la décomposition naturelle de $T(\mathbf{R} \times M)$ et égale à α_t en restriction à $\{t\} \times M$;
- α_t' la famille à un paramètre de r–formes $\mathcal{F}$–feuilletées obtenue en dérivant par rapport à t les coefficients de α_t.

On a les relations:

$$(2.1.1)\ \begin{cases} (d\alpha_t)' = d(\alpha_t') \text{ et } (\alpha_t)' = \widehat{\alpha_t'}; \\ d\,\hat{\alpha}_t = \widehat{d\alpha_t} + dt \wedge \hat{\alpha}_t'. \end{cases}$$

De même si Y_t est une famille à un paramètre de champs de vecteurs sur M, on désignera par $\hat{Y}_t$ le champ de vertical sur $\mathbf{R} \times M$ dont la restriction à $\{t\} \times M$ est donnée par Y_t.

2.2. Lemme. *Supposons M compacte. Pour toute famille à un paramètre $\sigma_t = \sigma_0 + d\,\lambda_t$ de structures de Poisson cohomologues, il existe un flot φ tangent à $\mathcal{F}$ tel que*

$$\sigma_t = \varphi_t^*\sigma_0.$$

Démonstration: D'après (2.1.1), la 2–forme $\hat{\mathcal{F}}$–feuilletée ω définie par

$$\omega = \hat{\sigma}_t + dt \wedge \hat{\lambda}_t' = \hat{\sigma}_0 + \widehat{d\lambda_t} + dt \wedge \hat{\lambda}_t'$$

s'écrit encore $\omega = \hat{\sigma}_0 + d\,\hat{\lambda}_t$; elle est donc fermée.

En outre, si X_t est le champ de vecteurs tangent à $\mathcal{F}$ défini par l'équation

$$X_t\rfloor\sigma_t = -\lambda_t',$$

on aura $X_t\rfloor\lambda_t' = 0$ et donc

$$\hat{X}_t\rfloor\omega = \hat{X}_t\rfloor\hat{\sigma}_t = -\hat{\lambda}_t'.$$

Par suite si $z = \frac{\partial}{\partial t} + \hat{X}_t$, il vient:

$$Z\rfloor\omega = 0.$$

On en déduit que la dérivée de Lie $L_Z\omega$ est nulle; le flot $\hat{\varphi}_t$ engendré par Z préserve $\hat{\mathcal{F}}$ et ω et donc le flot φ_t sur M obtenu par projection de $\hat{\varphi}_t$ sur $M = \{0\} \times M$ est tel que $\varphi_t^*\sigma_0 = \sigma_t$ ∎

En résumé, on obtient le lemme de Moser *feuilleté*:

2.3. Théorème. *Pour les structures de Poisson supportées par un feuilletage $\mathcal{F}$ sur une variété compacte M, les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

i) *σ_t est une famille à un paramètre de structures cohomologues;*
ii) *Il existe une isotopie φ tangente à $\mathcal{F}$ telle que $\sigma_t = \varphi_t^* \sigma_0$.*

Si $\mathcal{F}$ est de dimension 2, une forme feuilletée symplectique est aussi une forme feuilletée volume qui définit une orientation de $\mathcal{F}$ et on trouve un résultat plus précis:

2.4. Corollaire. *Si* $\dim \mathcal{F} = 2$, *deux structures de Poisson* $\Lambda_i = (\mathcal{F}, \sigma_i)$, $i = 0, 1$, *sont isotopes si et seulement si σ_0 et σ_1 définissent la même orientation de $\mathcal{F}$ et*

$$[\sigma_0] = [\sigma_1] \in H^2(\mathcal{F}).$$

Démonstration: En effet, si σ_0 et σ_1 définissent la même orientation de $\mathcal{F}$ et sont cohomologues dans $H^2(\mathcal{F})$, il existe une fonction $g > 0$ et $\lambda \in \Omega^1(\mathcal{F})$ tels que $\sigma_1 = g\,\sigma_0$ et $\sigma_1 - \sigma_0 = d\lambda$. Pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\sigma_t = t\,\sigma_1 + (1-t)\sigma_0 = (tg + 1 - t)\sigma_0$$

est une forme feuilletée symplectique et

$$\sigma_t - \sigma_0 = t\,\sigma_1 - t\,\sigma_0 = td\,\lambda.$$

Donc $\Lambda_t = (\mathcal{F}, \sigma_t)$ est une famille à un paramètre de structures de Poisson cohomologues. On applique 2.3. (en se restreignant à l'intervalle $[0, 1]$) ∎

2.5. Application: le cône $\mathcal{J}$Poiss $(\mathcal{F})$.

Si $\dim \mathcal{F} = 2$, toute forme feuilletée volume est une forme feuilletée symplectique et donc Poiss $(\mathcal{F}) \neq \phi$. En outre, d'après (2.3.), l'application χ identifie l'ensemble des classes d'isotopie de structures de Poisson avec l'image de χ qui est un cône ouvert de $H^2(\mathcal{F})$ que l'on désignere par $\mathcal{J}$Poiss $(\mathcal{F})$. Enfin dans les exemples du §3, on décrira plus precisément le cône $\mathcal{J}\mathrm{Poiss}^+(\mathcal{F})$ des classes d'isotopie de structures de Poisson $\Lambda = (\mathcal{F}, \sigma)$ positives i.e. telles que l'orientation définie par σ coïncide avec une orientation préalablement fixée de $\mathcal{F}$.

3. Exemples

Pour finir, on va donc décrire le cône $\mathcal{J}\mathrm{Poiss}^+(\mathcal{F})$ des classes d'isotopie de structures de Poisson positives supportées par certains feuilletages $\mathcal{F}$ de dimension 2 sur une variété M.

3.1. Fibrations localement triviales à fibres compactes.

Supposons $\mathcal{F}$ défini par une fibration localement triviale $\pi : M \to B$ à fibres compactes de dimension 2. L'integration sur les fibres de π est une application linéaire surjective de $\Omega^2(M)$ sur $C^\infty(B)$ nulle sur $\Omega^2(M,\mathcal{F})$ donc induit un opérateur surjectif

$$f : \Omega^2(\mathcal{F}) \longrightarrow C^\infty(B)$$

dont le noyau est exactement $d\Omega^1(\mathcal{F})$. Il induit un isomorphisme

$$f^* : H^2(\mathcal{F}) \longrightarrow C^\infty(B).$$

qui identifie $\mathcal{J}\mathrm{Poiss}^+(\mathcal{F})$ avec le cône $C^\infty_+(B)$ des fonctions strictement positives sur B (la compacite de M dans 2.3. est remplacée ici par la compacité des fibres!)

3.2. Feuilletages linéaires de T^3.

Soit $\mathcal{F}_\omega$ le feuilletage de T^3 défini par la 1–forme fermée, à coefficients constants, $\omega = \alpha dx + \beta dy + dz$ sur $T^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ et soit r le rang sur $\mathbb{Q}$ du triplet $(\alpha, \beta, 1)$.

i) Si $r = 1$, $\mathcal{F}_\omega$ est un fibré trivial de fibre T^2 et base $\mathbb{S}^1$ et d'après (3.1.), $\mathcal{J}\mathrm{Poiss}^+(\mathcal{F}_\omega)$ est un cône de dimension infinie;

ii) si $r = 2$, toutes les feuilles de $\mathcal{F}_\omega$ sont des cylindres partout denses dans T^3 et il existe une fibration triviale,

$$\mathbb{S}^1 \longrightarrow T^3 \xrightarrow{\bar{u}} T^2$$

telle que $\omega = \bar{u}^*\eta$ où η est une 1–forme à coefficents constants sur T^2 du type. Par integration sur les fibres de $\bar{u}$, on montre que $H^2(\mathcal{F}_\omega) \cong H^1(\mathcal{F}_\eta)$ et ce dernier groupe est de dimension 1 ou infinie suivant que α vérifie ou non une condition diophantienne. Donc $\mathcal{J}\mathrm{Poiss}^+(\mathcal{F}_\omega)$ sera suivant le cas de dimension 1 ou infinie.

iii) le cas $r = 3$ sera analogue à $r = 2$ sauf que cette fois–ci les feuilles de $\mathcal{F}_\omega$ des plans et non plus des cylindres.

On remarquera que dans tous les cas, $\mathcal{F}_\omega$ n'admet pas de structure de Poisson exacte car si la forme feuilletée symplectique σ était représentée par $d\mu \in \Omega^2(T^3)$, alors $\sigma \wedge \omega = d(\mu \wedge \omega)$ serait une forme volume exacte sur la variété compacte T^3.

3.3. Un exemple de structure de Poisson exacte sur une variété compacte.

Soient A le difféomorphisme linéaire de T^2 représenté par le matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ et λ une valeur propre de cette matrice. Si $\eta = \alpha dx + dy$ est telle que $A^*\eta = \lambda\eta$ alors α est algébrique donc vérifie une condition disphantienne et le feuilletage $\mathcal{F}_\eta$ défini par η est tel que $H^1(\mathcal{F}_\eta) = \mathbb{R}$.

Soit T^3_A l'espace total du fibré en tores au-dessus de $\mathbb{S}^1$ de monodromie A; c'est le quotient de $\mathbb{R} \times T^2$ par l'action de $\mathbb{Z}$ engendrée par le difféomorphisme $\widetilde{A}(t,u) = (t+1, A(u))$. On le munit du feuilletage $\mathcal{F}_A$ obtenu par passage au quotient du feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}_\eta} = pr_2^* \mathcal{F}_\eta$. En procédant de façon tout à fait analogue à la situation classique, on construit une suite exacte de Wang en cohomologie feuilletée qui s'écrit:

$$\longrightarrow H^1(\mathcal{F}_\eta) \xrightarrow{A^*-I} H^1(\mathcal{F}_\eta) \longrightarrow H^2(\mathcal{F}_A) \to H^2(\mathcal{F}_\eta) \longrightarrow$$

Le générateur de $H^1(\mathcal{F}_\eta)$ est vecteur propre pour la valeur propre irrationnelle $1/\lambda$ donc $A^* - I \neq 0$ est un isomorphisme de $H^1(\mathcal{F}_\eta)$ sur lui-même et comme $H^2(\mathcal{F}_\eta) = 0$, il vient $H^2(\mathcal{F}_A) = 0$. Bref toute structure de Poisson supportée par $\mathcal{F}_A$ est exacte.

3.4. Feuilletages avec cycles évanouissants.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension 1 sur une variété compacte de dimension 3. D'après le théorème de Novikov, on sait que l'existence d'un cycle évanouissant non trivial est équivalente à l'existence d'une composante de Reeb (cf. **[HH]**). Or on montre dans **[H. LV]** que le second groupe de cohomologie feuilletée d'une telle composante est de dimension infinie; il en est donc de même pour tout feuilletage $\mathcal{F}$ admettant un cycle évanouissant non trivial.

Comme conséquence $\mathcal{J}\mathrm{Poiss}^+(\mathcal{F})$ est de dimension infinie pour un tel $\mathcal{F}$.

References

[HH] G. HECTOR AND U. HIRSCH, Introduction to the Geometry of foliations, *A and B*, Vieweg, (1981–83).

[H. LV] G. HECTOR ET C. LASSO DE LA VEGA, Structures de Poisson régulières et cycles évanouissants, (à paraître).

[L] A. LICHNÉROWICZ, Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées, *J. Diff. Geom.* **12** (1977), 253–300.

[M] J. MOSER, On the volume elements on a manifold, *Trans. Amer, math. Soc.* **120** (1965), 286–294.

[W] A. WEISNTEIN, The local structure of Poisson manifolds, *J. Diff. Geom.* **18** (1983), 523–557.

G. Hector: URA CNRS 746
Institut de Mathemàtiques et Informatique
43 B. du 11 Novembre 1918
69622-Villeurbann-Cedex
FRANCE

E. Macias: Facultad de Matemáticas
Universidad Santiago de Compostela
SPAIN

M. Saralegi: C/ Chantada 21, 1o .1a.
28029-Madrid
SPAIN

Rebut el 26 de Juliol de 1989