Publicacions Matemàtiques, Vol 33 (1989), 411–415.

SUR L'INTÉGRATION SYMPLECTIQUE DE LA STRUCTURE DE POISSON SINGULIÈRE $\wedge = (x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y}$ DE $\mathbb{R}^2$

FERNANDO ALCALDE CUESTA, PIERRE DAZORD ET GILBERT HECTOR

Abstract

The purpose of this note is to give an example of a singular Poisson structure on $\mathbb{R}^2$ which admits a symplectic realization by a Lie groupoid.

0. Introduction

Une *structure de Poisson* sur $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ est la donnée d'un champ différentiable de tenseurs antisymétrique deux fois contravariant

$$\wedge = h(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y},$$

où h est une fonction différentiable réelle sur $\mathbb{C}$, cf. [L]. Le *feuilletage caractéristique* $\mathcal{F}$ de $\wedge$ est le feuilletage singulier engendré par les champs hamiltoniens $X_x = h\frac{\partial}{\partial y}$ et $X_y = -h\frac{\partial}{\partial x}$. Les zéros de h sont donc les feuilles de dimension 0 de $\mathcal{F}$ et les composantes connexes de $\mathbb{C} - h^{-1}(0)$ sont celles de dimension 2.

On va s'intéresser au cas où $h^{-1}(0) = \{0\}$ et donc le feuilletage $\mathcal{F}$ n'a que deux feuilles $\{0\}$ et $\mathbb{C}^*$. Le tenseur $\wedge$ définit une forme symplectique σ sur la feuille $\mathbb{C}^*$ donnée par

$$\wedge(dx,dy) = \sigma(X_x,X_y) = -h^2\sigma\left(\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial x}\right) = h$$

et donc $\sigma = \frac{1}{h}dx\wedge dy$ sur $\mathbb{C}^*$. Pour simplifier les calculs on utilisera l'écriture complexe $\wedge = h(z)\frac{\partial}{\partial z}\wedge\frac{\partial}{\partial \bar z}$ qui est identique à celle de départ à un facteur $-2i$ près. D'ailleurs la forme symplectique σ sur $\mathbb{C}^*$ s'écrit $\sigma = \frac{1}{h(z)}dz\wedge d\bar z$.

Dans le paragraphe 1 on vérifiera que $\mathcal{F} = \{\{0\},\mathbb{C}^*\}$ est *réalisé* par un groupoïde de Lie $\Pi = \mathbb{C}\times\mathbb{C} \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} \mathbb{C}$ séparé à fibres simplement connexes (i.e.

les orbites $\alpha(\beta^{-1}(z)) = \beta(\alpha^{-1}(z))$, de Π sur $\mathbb{C}$ sont les feuilles $\{0\}$ et $\mathbb{C}^*$ de $\mathcal{F}$, [**P**]). Ce groupoïde jouera le même rôle que le groupoïde d'homotopie du feuilletage caractéristique dans le cas régulier.

Le problème que nous nous posons au paragraphe 2 est celui de *l'intégration symplectique* de Λ dans le cas particulier $h(z) = z\bar{z}$ et donc $\Lambda = z\bar{z}\frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. De façon précise on cherche à construire un *groupoïde symplectique* $(\Gamma, \widetilde{\sigma}) \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} \mathbb{C}$ ([**CDW**]) dont l'espace des unités muni de la structure de Poisson canonique est isomorphe à $(\mathbb{C}, \Lambda)$. En fait on le construira à fibres simplement connexes.

1. Réalisation de $\mathcal{F}$ par un groupoïde de Lie

Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage singulier de $\mathbb{C}$ à deux feuilles $\{0\}$ et $\mathbb{C}^*$. On considère l'action de groupe

$$\varphi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

définie par:

$$\varphi(Z, z) = e^Z z,$$

dont les orbites sont les feuilles de $\mathcal{F}$.

1.1. Le groupoïde défini par l'action φ.

La donnée de l'action φ est équivalente à la donnée d'une structure de groupoïde de Lie

$$\Pi = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} \mathbb{C}$$

définie par:

i) les submersions α et β données par:

$$\alpha(Z, z) = z$$
$$\beta(Z, z) = \varphi(Z, z) = e^Z z,$$

pour tout couple $(Z, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$,

ii) la sous-variété $\Pi * \Pi = \{((Z_2, z_2), (Z_1, z_1)) \in \Pi \times \Pi / z_2 = e^{Z_1} z_1\}$ de $\Pi \times \Pi$ formée des couples composables et la multiplication partielle

$$\mu : \Pi * \Pi \longrightarrow \Pi$$

donnée par:

$$\mu((Z_2, z_2), (Z_1, z_1)) = (Z_2 + Z_1, z_1),$$

iii) l'inversion $\iota : \Pi \to \Pi$ définie par $\iota(Z, z) = (-Z, e^Z z)$.

Cette structure de groupoïde sera dite *définie par l'action* φ. On remarque que le sous-groupoïde $\Pi^* = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} \mathbb{C}^*$ de Π est isomorphe au groupoïde d'homotopie $\Pi_1(\mathbb{C}^*)$ du cylindre $\mathbb{C}^*$, car Π^* est à fibres simplement connexes et $(\beta, \alpha) : \Pi^* = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ est un revêtement.

Maintenant pour des raisons qui apparaîtront au paragraphe 2, on va modifier la structure de groupoïde sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ en une structure de groupoïde sur la même variété $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ réalisant le même feuilletage sur $\mathbb{C}$ mais probablement non isomorphe à celle de départ.

1.2. Le groupoïde modifié.

Soit $\Psi : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ le difféomorphisme défini par

$$\Psi(Z, z) = (Z/\bar{z}, z),$$

pour tout couple $(Z, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. On transporte la structure de groupoïde restreint $\Pi^* = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} \mathbb{C}^*$ en une structure isomorphe sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$

$$\begin{array}{ccc} \Pi^* = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\Psi} & \Gamma^* = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \\ {\scriptstyle\alpha} \searrow\searrow {\scriptstyle\beta} & & {\scriptstyle\beta} \swarrow\swarrow {\scriptstyle\alpha} \\ & \mathbb{C}^* & \end{array}$$

qui sera définie par les données suivantes:

i) les applications $\alpha, \beta : \Gamma^* = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ qui sont les submersions définies par:

$$\alpha(Z, z) = z$$
$$\beta(Z, z) = e^{Z\bar{z}} z,$$

pour tout couple $(Z, z) \in \Gamma^* = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.

ii) la sous-variété des couples composables

$$\Gamma^* * \Gamma^* = \{((Z_2, z_2), (Z_1, z_1)) \in \Gamma^* \times \Gamma^* / z_2 = e^{Z_1 \bar{z}_1} z_1\}$$

et la multiplication $\mu : \Gamma^* * \Gamma^* \to \Gamma^*$ qui est définie par:

$$\mu((Z_2, z_2), (Z_1, z_1)) = (Z_2 e^{\bar{Z}_1 z_1} + Z_1, z_1),$$

iii) l'inversion $\iota : \Gamma^* \to \Gamma^*$ qui est donnée par:

$$\iota(Z, z) = (-Z e^{-\bar{Z} z}, e^{Z\bar{z}} z).$$

Le difféomorphisme Ψ ne s'étend évidemment pas à $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, mais par contre les données ci-dessus sont définies sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ et définissent donc une structure de groupoïde de Lie $\Gamma = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} \mathbb{C}$ telle que:

i) Γ réalise le feuilletage singulier $\mathcal{F}$,

ii) le sous-groupoïde $\Gamma^* = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} \mathbb{C}^*$ est isomorphe à $\Pi_1(\mathbb{C}^*)$.

On dira que Γ est le *groupoïde modifié*.

2. Intégration symplectique de la structure de Poisson $\Lambda = z\bar{z}\frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ sur $\mathbb{C}$

Considérons maintenant le cas particulier

$$\Lambda = z\bar{z}\frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

La feuille $\mathbb{C}^*$ est munie de la forme symplectique $\sigma = \frac{1}{z\bar{z}}dz \wedge d\bar{z}$. Le groupoïde grossier $(\mathbb{C}^*, -\sigma) \times (\mathbb{C}^*, \sigma)$ est naturellement un groupoïde symplectique. Puisque le morphisme de groupoïdes $(\beta, \alpha) : \Pi^* = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \to (\mathbb{C}^*, -\sigma) \times (\mathbb{C}^*, \sigma)$ est un revêtement, il s'ensuit que $(\Pi^*, \alpha^*\sigma - \beta^*\sigma)$ est un groupoïde symplectique. On vérifie aisément que la forme $\alpha^*\sigma - \beta^*\sigma$ ne s'étend pas à $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$; c'est pour cela qu'on remplace Π par le groupoïde modifié Γ.

Pour le groupoïde restreint $\Gamma^* = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} \mathbb{C}^*$, la forme $\widetilde{\sigma} = \alpha^*\sigma - \beta^*\sigma$ s'écrit

$$-(z\bar{z}dZ \wedge d\bar{Z} + \bar{z}\bar{Z}dZ \wedge dz + Zzd\bar{z} \wedge d\bar{Z} + Z\bar{Z}d\bar{z} \wedge dz + dZ \wedge d\bar{z} + d\bar{Z} \wedge dz)$$

et

$$\widetilde{\sigma} \wedge \widetilde{\sigma} = 2\, dZ \wedge d\bar{Z} \wedge dz \wedge d\bar{z}.$$

Ces deux formes sont en fait définies sur tout Γ. La forme $\widetilde{\sigma}$ est fermée car il en est ainsi pour sa restriction à l'ouvert partout dense Γ^* et $\widetilde{\sigma} \wedge \widetilde{\sigma}$ est une forme volume sur Γ. Bref, $\widetilde{\sigma}$ est une forme symplectique sur Γ.

Théorème. *Le groupoïde de Lie $(\Gamma, \widetilde{\sigma}) \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} (\mathbb{C}, \Lambda)$ réalise l'intégration symplectique de la structure de Poisson $\Lambda = z\bar{z}\frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ sur $\mathbb{C}$.*

Démonstration: Il reste à vérifier que les deux structures symplectique et de groupoïde sont compatibles, c'est-à-dire, le graphe de la multiplication dans Γ est une sous-variété lagrangienne de $(\Gamma, -\widetilde{\sigma}) \times (\Gamma, \widetilde{\sigma}) \times (\Gamma, \widetilde{\sigma})$, cf. **[CDW]**. Or le graphe de la multiplication dans Γ^* est une sous-variété lagrangienne de $(\Gamma^*, -\widetilde{\sigma}) \times (\Gamma^*, \widetilde{\sigma}) \times (\Gamma^*, \widetilde{\sigma})$, car $(\Gamma^*, \widetilde{\sigma})$ est un groupoïde symplectique. Puisque Γ^* est un ouvert partout dense de Γ, par continuité il en est de même pour le graphe de la multiplication dans Γ. D'où le théorème. ■

On peut montrer que le théorème reste vrai pour les structures de Poisson $\Lambda = h(z)\frac{\partial}{\partial_z} \wedge \frac{\partial}{\partial_{\bar{z}}}$ où h est une fonction de Morse pour la quelle 0 est l'unique point critique et que c'est un extremum.

References

[CDW] A. COSTE–P. DAZORD–A. WINESTEIN, Groupoïdes symplectiques, *Publications Dép. Math. Lyon* 2/A (1987), 1–62.

[H] M.W. HIRSCH, "*Differential Topology.*" Springer-Verlag New York, 1976.

[L] A. LICHNÉROWICZ, Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées, *J. Diff. Geometry* **12** (1977), 253–300.

[P] J. PRADINES, How to define the differentiable graph of a singular foliation, *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle* **26**(4) (1985), 339–380.

Fernando Alcalde: Dpto. de Xeometria e Topoloxia
Universidade de Santiago
15705 Santiago de Compostela
SPAIN

Pierre Dazord: Laboratoire de Géometrie et Analyse
U.R.A. DO 746
Université Claude Bernard (Lyon I)
69622 Villeurbanne Cedex
FRANCE

Gilbert Hector: Laboratoire de Géometrie et Analyse
U.R.A. DO 746
Université Claude Bernard (Lyon I)
69622 Villeurbanne Cedex
FRANCE

Rebut el 4 de Juliol de 1989