Publicacions Matemàtiques, Vol 32 (1988), 129-134.

SOBRE LA EXISTENCIA DEL PRODUCTO DE MEDIDAS VALORADAS EN ESPACIOS LOCALMENTE CONVEXOS: UNA CONDICION NECESARIA

FIDEL JOSÉ FERNÁNDEZ Y FERNÁNDEZ-ARROYO

Abstract

A necessary condition is given for the existence of the tensor product of certain measures valued in locally convex spaces.

1. Introducción y Preliminares. En un reciente trabajo ([**7**], [**8**]) obtuvimos condiciones suficientes para garantizar, en el contexto de los espacios localmente convexos, la existencia y la representación integral del producto de dos medidas α y β con valores en un espacio de operadores. El objetivo del presente artículo es probar que, al menos en determinadas situaciones, alguna de estas condiciones es también necesaria, a semejanza de lo que ocurría en el caso bilineal considerado por S.A. Sivasankara [**14**] y R. Chivukula y Sastry [**11**].

En lo sucesivo, X, Y y S serán e.l.c. separados, siendo Y y S completos; denotaremos por $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{S}$ sendas familias generantes y dirigidas de seminormas continuas de estos espacios. Consideraremos, en el espacio vectorial $L(X,Y)$ (resp.$L(Y,S)$, $L(X,S)$) de las aplicaciones lineales y continuas de X en Y (resp. de Y en S, de X en S), la topología localmente convexa de la convergencia puntual. $(\Omega, \mathcal{A})$ y (E, ξ) serán espacios medibles; $\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow L(X,Y)$ y $\beta : \xi \longrightarrow L(Y,S)$, medidas contablemente aditivas.

Para cada par de seminormas $q \in \mathcal{Q}$ y $p \in \mathcal{P}$, llamaremos semivariación de α asociada a q y p a la aplicación

$$\|\alpha\|_{q,p} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

definida por

$$\|\alpha\|_{q,p}(A) = sup\{q(\Sigma_{i=1}^n \alpha(C_i)(x_i))\} \quad (A \in \mathcal{A}) \quad ,$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones medibles finitas $\{C_1,\dots,C_n\}$ de A y todas las colecciones finitas $\{x_1,\dots,x_n\}$ de elementos de X tales que $p(x_i)\leq 1$, para $i=1,\dots,n$.

Análogamente se define la semivariación de β asociada a cada par de seminormas $s\in S$ y $q\in Q$.

Decimos que la medida α (resp.β) es *de semivariación acotada* si, para cada seminorma $q\in Q$ (resp.$s\in S$), existe una seminorma $p\in \mathcal{P}$ (resp. $q\in Q$) tal que $\|\alpha\|_{q,p}(\Omega)<+\infty$ (resp.$\|\beta\|_{s,q}(E)<+\infty$).

En adelante supondremos que α y β son de semivariación acotada.

Diremos que la medida α es *continua* si, para cada seminorma $q\in Q$, existe una seminorma $p\in \mathcal{P}$ tal que la semivariación $\|\alpha\|_{q,p}$ es continua; es decir, se verifica que, si $(A_n)_{n\in N}\subset \mathcal{A}$ es una sucesión disjunta, entonces la sucesión $(\|\alpha\|_{q,p}(\cup_{i\geq n}A_i))_{n\in N}$ converge a cero. (Nótese que, por ser α de semivariación acotada, podemos suponer que $\|\alpha\|_{q,p}(\Omega)<+\infty$).

Decimos que α verifica la **' -condición* si, para cada $q\in Q$, existen una seminorma $p\in\mathcal{P}$, y una medida positiva finita y contablemente aditiva $\nu_{q,p}$: $\mathcal{A}\longrightarrow \mathbf{R}^+$, tales que $\|\alpha\|_{q,p}\ll\nu_{q,p}$ ($\|\alpha\|_{q,p}$ es absolutamente continua con respecto a $\nu_{q,p}$; e.d., dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que, si $A\in\mathcal{A}$ y $\nu_{q,p}(A)<\delta$, entonces $\|\alpha\|_{q,p}(A)<\varepsilon$); puede demostrarse que, en este caso, $\|\alpha\|_{q,p}(\Omega)<+\infty$ (ver [**2**], [**15**]).

Diremos que la medida $\alpha:\mathcal{A}\longrightarrow L(X,Y)$ está acotada en el sentido de Mackey (o es *Mackey–acotada*) si existe una aplicación $\lambda:\mathcal{A}\longrightarrow\mathbf{R}^+$ verificando:

1) λ está acotada.

2) Si $(A_n)_{n\in N}\subset\mathcal{A}$ es una sucesión disjunta, entonces la sucesión $(\lambda(\cup_{i\geq n}A_i))_{n\in N}$ converge a cero.

3) Para cada seminorma $q\in Q$, existen $p\in\mathcal{P}$ y $M_q>0$ tales que $q_x(\alpha(A))\leq M_q p(x)\lambda(A)$, cualesquiera que sean $xp\in X$ y $A\in\mathcal{A}$.

Si se verifica además la condición:

3') Para cada seminorma $q\in Q$, existen $p\in\mathcal{P}$ y $M_q>0$ tales que $\|\alpha\|_{q,p}(A)\leq M_q\lambda(A)$, para todo $A\in\mathcal{A}$, entonces α se llama *Mackey* –acotada.*

Nótese que de 3') se deduce 3) (ver [**7**]). Además, se comprueba fácilmente que, si α es Mackey* –acotada, entonces α ha de ser continua. Por otra parte, se prueba en [**7**] que, si Y es metrizable y α es continua, entonces α es Mackey* –acotada (y, por tanto, Mackey–acotada). (En [**7**] se pone un ejemplo de una medida que es Mackey*– acotada sin que Y sea metrizable.)

De manera análoga se definen las correspondientes condiciones relativas a la medida β.

Observación. Si la medida $\beta:\xi\longrightarrow L(Y,S)$ es continua y Mackey-acotada (en particular, si es Mackey* -acotada), entonces verifica la *' -condición.

En efecto, ya que β es Mackey–acotada, existe un conjunto acotado y absolutamente convexo $B\subset L(Y,S)$ tal que $\beta(\xi)\subset L_B$ y $\beta:\xi\longrightarrow L_B$ es una medida contablemente aditiva (y, por tanto, acotada) (ver[**7**, Teorema II.3]).

(Siguiendo la notación de Grothendieck, L_B denota el subespacio vectorial generado por B, en el que consideraremos la topología definida por el funcional de Minkowski, p_B.)

Por consiguiente, existe una medida positiva finita contablemente aditiva $\mu : \xi \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $p_B \circ \beta \ll \mu$ (ver [5]).

Se sigue que, si $\mu(G) = 0 (G \in \xi)$, entonces $\beta(B) = 0$, para todo subconjunto medible B de G; y, por tanto, $\|\beta\|_{s,q}(G) = 0$, para cada par de seminormas $s \in S$ y $q \in Q$.

Se deduce de lo anterior que, si la semivariación $\|\beta\|_{s,q}$ es continua, entonces $\|\beta\|_{s,q} \ll \mu$.

2. Resultados. Supongamos ahora que Y es normado, con norma q; las medidas α y β son Mackey–acotadas, y β verifica la *' – condición.

Según probamos en [7], [8], en estas condiciones la medida producto $\alpha \otimes \beta$ existe y está dada por

$$(\alpha \otimes \beta)(G) = \int_E \alpha(G.) d\beta \quad (G \in \mathcal{A} \otimes \xi),$$

donde la integral se toma en el sentido de [7] (ver también [9]). (Para cada $s \in E$, denotamos por G_s al conjunto $\{t \in \Omega / (t,s) \in G\}$, que como sabemos es medible).

Por otra parte, sabemos (ver [5]) que para cada $x \in X$ existe una medida positiva finita contablemente aditiva $\mu_x : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $q_x \circ \alpha \ll \mu_x$.

Además, por ser β Mackey–acotada, existen un conjunto acotado y absolutamente convexo $B \subset L(Y,S)$ y una medida positiva finita contablemente aditiva $\nu : \xi \longrightarrow \mathcal{R}^+$, tales que $\beta(\xi) \subset L_B$ y $p_B \cdot \beta \ll \nu$.

Proposición. *Para cada* $s \in S$ *y* $x \in X$, $s_x(\alpha \otimes \beta) \ll \mu_x \otimes \nu$ *es decir,*

$$\lim_{\substack{(\mu_x \otimes \nu)(G) \to 0 \\ (G \in \mathcal{A} \otimes \xi)}} s_x((\alpha \otimes \beta)(G)) = 0.$$

Demostración: Si $0 = (\mu_x \otimes \nu)(G) = \int_E \mu_x(G.) d\nu \quad (G \in \mathcal{A} \otimes \xi)$, entonces existe $B \in \xi$ tal que $\nu(B) = 0$ y $\mu_x(G_s) = 0$, para todo $s \in E - B$; y, por tanto, $\|\beta\|_{s,q}(B) = 0$, y $q_x(\alpha(G_s)) = 0$, si $s \in E - B$. Se sigue que $s_x((\alpha \otimes \beta)(G)) = s(\int_{E-B} \alpha(G.)(x) d\beta) = 0$.

Y ya que la medida producto $\alpha \otimes \beta$ es contablemente aditiva, resulta de lo anterior que $s_x(\alpha \otimes \beta) \ll \mu_x \otimes \nu$. ■

Definición. Supongamos que Y es normado (con norma q), la medida $\beta : \xi \longrightarrow L(Y,S)$ es Mackey–acotada, y $\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow L(X,Y)$ es una medida contablemente aditiva tal que la medida producto $\alpha \otimes \beta$ existe.

Según hemos visto, existen un conjunto acotado y absolutamente convexo $B \subset L(Y,S)$; y medidas positivas finitas contablemente aditivas $\nu : \xi \longrightarrow \mathbb{R}^+$

y $\mu_x : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ (para cada $x \in X$), tales que $\beta(\xi) \subset L_B$, $p_B \cdot \beta \ll \nu$, y $q_x \cdot \alpha \ll \mu_x (x \in X)$.

Decimos que la medida producto $\alpha \otimes \beta$ *hereda la propiedad de dominación* si $s_x(\alpha \otimes \beta) \ll \mu_x \otimes \nu$ para cada $s \in \mathcal{S}$ y $x \in X$ (y para cada μ_x, B y ν verificando las condiciones anteriores). Según hemos visto en la Proposición, $\alpha \otimes \beta$ hereda la propiedad de dominación si las medidas α y β verifican las hipótesis del Teorema II.3 de [7].

Definición. Supongamos que Y es normado. Siguiendo a Rao Chivukula y Sastry [11] y S.A. Sivasankara [14], diremos que el espacio Y tiene la *propiedad P* si el conjunto $\mathcal{B} = \{y \in Y/q(y) \leq 1\}$ está contenido en la imagen de una medida vectorial (es decir, existen un espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$ y una medida contablemente aditiva $\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow L(R, Y) \simeq Y$ tales que $\mathcal{B} \subset \{\alpha(A)(1)/A \in \mathcal{A}\} \simeq \alpha(\mathcal{A})$). (En [11] y [14] se dan ejemplos de espacios normados que tienen la propiedad P.)

Teorema. *Supongamos que: la medida β es Mackey–acotada; el espacio Y es normado con norma q (por ser Y normado, β verifica la u-condición, ver [7]), y tiene la propiedad P; y, para todo espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$ y toda medida contablemente aditiva $\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow L(\mathbb{R}, Y) \simeq Y$, la medida producto $\alpha \otimes \beta$ existe y además hereda la propiedad de dominación.*

*Entonces, la medida β verifica la *' -condición.*

Demostración: Ya que Y tiene la propiedad P, existen un espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$ y una medida contablemente aditiva $\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow L(\mathbb{R}, Y)$ tales que $\mathcal{B} = \{y \in Y/q(y) \leq 1\} \subset \alpha(\mathcal{A})(\{1\}) = \{\alpha(A)(1)/A \in \mathcal{A}\}$.

Por ser β Mackey–acotada, existen un conjunto $B \subset L(Y, S)$, acotado, convexo y equilibrado; y una medida positiva finita contablemente aditiva $\nu : \xi \longrightarrow \mathbb{R}^+$, tales que $\beta(\xi) \subset L_B$ y $p_B \cdot \beta \ll \nu$.

Por otra parte, puesto que α es contablemente aditiva, existe una medida positiva finita contablemente aditiva $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que
$q_1 \cdot \alpha \ll \mu$.

Pongamos $K = \mu(\Omega) + 1$.

Sea $s \in \mathcal{S}$. Veamos que $\|\beta\|_{s,q} \ll \nu$.

Por hipótesis, la medida producto $\alpha \otimes \beta$ existe y hereda la propiedad de dominación. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si $(\mu \otimes \nu)(G) < \delta$ $(G \in \mathcal{A} \otimes \xi)$, entonces $s_1((\alpha \otimes \beta)(G)) < \varepsilon$.

Se tiene que, si $B \in \xi$ verifica que $\nu(B) < \frac{\delta}{K}$, entonces, para cada partición medible y finita $\{B_1, \ldots, B_n\}$ de B, y para cada colección $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{A}$,

$$(\mu \otimes \nu)(\cup_{i=1}^n A_i \times B_i) = \sum_{i=1}^n (\mu \otimes \nu)(A_i \otimes B_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \cdot \nu(B_i) \leq$$

$$\leq K \cdot (\sum_{i=1}^n \nu(B_i)) = K \cdot \nu(B) < \delta \quad ;$$

y por consiguiente,

$$s_1((\alpha \otimes \beta)(\cup_{i=1}^n A_i \times B_i) = s(\sum_{i=1}^n (\beta(B_i) \cdot \alpha(A_i)(1))) < \varepsilon.$$

Ahora bien, puesto que $\mathcal{B} = \{y \in Y/q(y) \leq 1\} \subset \alpha(\mathcal{A})(\{1\})$, para cada colección finita $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset \mathcal{B}$ existen $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ tales que $y_i = \alpha(A_i)(1)$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Se sigue de lo anterior que, si $\nu(B) < \frac{\delta}{K}(B \in \xi)$, entonces, para cada partición medible y finita $\{B_1, \ldots, B_n\}$ de B y cada colección $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset \mathcal{B}$, $s(\sum_{i=1}^n \beta(B_i)(y_i)) < \varepsilon$; y, por tanto, $\|\beta\|_{s,q}(B) \leq \varepsilon$.

Así pues, $\|\beta\|_{s,q} \ll \nu$, como queríamos demostrar. ■

Bibliografía

1. BARTLE, R.G., A general bilinear vector integral, *Studia Math.* **15** (1956), 337–352.
2. BRAVO DE LA PARRA, R., Tópicos en integración bilineal vectorial, Tesis Doctoral, Madrid, (1986).
3. BROOKS, J., On the existence of a control measure for strongly bounded vector measures, *Bull. Amer. Math. Soc.* **77** (1971), 999–1001.
4. DEBIEVE, C., Integration of vector valued functions with respect to vector valued measures, *Rev. Roum. math. P. et Appl.* **26** (1981), 943–957.
5. DIESTEL, J. Y UHL, J.J., Vector measures, *Math. Surveys Amer. Math. Soc. Providence, R. I.* **15** (1977).
6. DOBRAKOV, I., On integration in Banach spaces, I, *Czech. Math. J.* **20** (1970), 511–536.
7. FERNÁNDEZ Y FERNÁNDEZ–ARROYO, F.J., Producto de medidas valoradas en espacios localmente convexos, Tesis Doctoral, Madrid, (1987).
8. FERNÁNDEZ Y FERNÁNDEZ–ARROYO, F.J., On the product of operators valued measures, (En prensa).
9. FERNÁNDEZ Y FERNÁNDEZ–ARROYO, F.J., Integración en espacios localmente convexos, (En prensa).
10. KLUVÁNEK, I. Y KNOWLES, G., Vector Measures and Control Systems, "*Nort-Holland,*" Amsterdam, (1975).
11. RAO CHIVUKULA, R. Y SASTRY, A. S., Product vector measures via Bartle integrals, *J. Math. Anal. Appl.* **96** (1983), 180–195.
12. RODRÍGUEZ SALAZAR, S., Integración general en espacios localmente convexos, Tesis Doctoral, Madrid, (1985).
13. RODRÍGUEZ SALINAS, B., Integración de funciones con valores en un espacio localmente convexo, *Rev. R. Acad. Ci. Madrid* **73** (1979), 361–387.

14. SIVASANKARA, S. A., Vector integrals and product of vector measures, Ph. D. Thesis, Univ. Microfilm, Inter. Michigan, (1983).
15. SWARTZ, C., A generalization of a theorem of Duchon on products of vector measures, *J. Math. Anal. Appl.* **51** (1975), 621–628.

Departamento de Matemáticas Fundamentales
Facultad de Ciencias, U.N.E.D.
Ciudad Universitaria
28040–Madrid, SPAIN.

Rebut el 2 d'Octubre de 1987