EL DESARROLLO DEL ESQUEMA DE DERIVADA

Sánchez-Matamoros García, Gloria[1], García Blanco, Mercedes[2] y Llinares Ciscar, Salvador[3]
[1] IES Andrés Benítez. Jerez de la Frontera. Cádiz
[2] Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Sevilla
[3] Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante

Resumen. La investigación tiene como objetivo estudiar el desarrollo de la comprensión del concepto de *derivada* en el nivel de bachillerato (16-18 años) y primer año de la universidad. El marco teórico utilizado fue el desarrollo de un esquema a través de tres fases: Intra, Inter, Trans (Piaget y García, 1983, 1989). El análisis de las respuestas de los estudiantes a diferentes problemas de derivadas nos permitió asignarles un nivel de desarrollo del esquema de derivada. Los resultados obtenidos indican que el desarrollo del esquema de derivada está vinculado a la capacidad de los estudiantes de relacionar elementos constitutivos del concepto durante la resolución de problemas. Los resultados se discuten considerando el potencial de la idea de síntesis para explicar el desarrollo del esquema de derivada.

Palabras clave. Desarrollo de la comprensión, esquema, fases del desarrollo del esquema.

The development of derivative schema

Summary. The goal of this research is the study of development of understanding of derivative concept in bachillerato (16-18 years old) and the first University course. We considered the triad mechanism introduced by Piaget y García (1983, 1989). This mechanism distinguishes three stages in the development of a schema: Intra, Inter, Trans. The results show that the development of derivative schema isn't only linked to the knowledge of many concept elements but also the capacity to establish relationships among them during problem solving. The analysis achieved that each student was assigned to one stage in the development of derivative schema. The synthesis idea is used to understand the development of derivative schema in the results.

Keywords. Development of understanding, schema, stages in the development of schema.

INTRODUCCIÓN

La comprensión de conceptos matemáticos es un campo de gran interés para la investigación en educación matemática (Tall, 1991), y es en este ámbito donde hemos encuadrado nuestro estudio. La investigación realizada tenía como objetivo estudiar el desarrollo de la comprensión del concepto de *derivada* en el nivel de bachillerato (16-18 años) y primer año de la universidad. Las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del cálculo diferencial e integral realizadas en España (Azcárate, 1990; Badillo, 2003; Contreras et al., 2000; Espinoza y Azcárate, 2000; Font, 2000; Font y Acevedo, 2003; García y Llinares, 1996; Moreno y Azcárate, 2003; Sierra et al., 1999) han puesto de manifiesto la dificultad de la enseñanza y el aprendizaje de estos conceptos. En relación con el concepto de *derivada,* Artigue (1995) afirma que, aunque se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y a resolver algunos problemas estándar, existen grandes dificultades para hacer que desarrollen una comprensión de los conceptos y métodos de pensamiento que son el centro del cálculo. Por ejemplo, muchos estudiantes son capaces de aplicar, de forma correcta, las reglas de derivación y, sin embargo, muestran dificultades en el manejo del significado de la noción de derivada.

El análisis de la comprensión del concepto de *derivada* ha sido abordado por diferentes investigadores desde distintos planteamientos (Asiala et al., 1997; Aspinwall et al., 1997; Azcárate, 1990; Badillo, 2003; Baker et al., 2000; Ferrini-Mundy y Graham, 1994; Orton, 1983; Zandieh, 2000). Las investigaciones realizadas se han centrado en describir las características de los significados del concepto de *derivada* construidos por el estudiante, mostrando la existencia de conflictos e inconsistencias entre las construcciones realizadas y los significados formales presentados por los libros de texto (Ferini-Mundy y Graham, 1994). Además, han subrayado la influencia de los contextos, ya que los estudiantes no relacionan automáticamente una concepción, proceso de las ideas, de razón, límite y función vinculadas a las ideas de derivada dados en contextos diferentes. Por ejemplo, Azcárate (1990) señala, como un aspecto de esta influencia, la confusión que tienen algunos estudiantes entre la velocidad media con la instantánea en un punto. En este sentido, Zandieh (2000) aboga por la idea de que se conseguirá una comprensión completa de la idea de derivada cuando se reconozca y reconstruya cada una de las ideas de razón, límite y función en diferentes contextos.

Los modos de representación gráfico y analítico también influyen en la construcción de los significados por parte de los estudiantes. Estos modos de representación pueden ser considerados por los estudiantes como separados, donde se pueden aplicar algoritmos sin relación (Ferrini-Mundy y Graham, 1994). En este sentido, las «imágenes incontroladas» construidas por los estudiantes crean barreras en el proceso de construir y usar los significados del concepto de *derivada* (Aspinwall et al., 1997). Por ejemplo, se han identificado dificultades referidas a la comprensión de la diferenciación y a la gráfica asociada al rango de cambio (Orton, 1983), y dificultades en dotar de significado gráficamente a la derivada de la función en un punto, $f'(a)$, al confundirlo con la ordenada en $x = a, f(a)$ (Azcárate, 1990). Las dificultades de los estudiantes en relacionar el modo gráfico y el modo analítico también se ponen de manifiesto cuando, en contextos eminentemente gráficos, los estudiantes solicitan la expresión analítica de la función para resolver determinadas cuestiones (Asiala et al., 1997). La enseñanza apoyada en las traslaciones entre distintos modos de representación parece que puede ayudar a la superación de estas dificultades (Font, 1999). Finalmente, el comportamiento de los estudiantes ante aspectos característicos de las funciones, como la existencia de puntos cúspides, tangentes verticales y los cambios en las condiciones de continuidad, características de la comprensión de la segunda derivada, parece que pueden ser consideradas indicadores de su comprensión (Baker et al., 2000).

Por otra parte, y desde el punto de vista del desarrollo de la comprensión de la noción de derivada, las investigaciones han señalado la importancia de la integración de los significados de la noción de derivada en un punto ($f'(a)$) y la función derivada ($f'(x)$) (Badillo, 2003). Esta necesaria integración se manifiesta en el contexto particular de la velocidad cuando los alumnos tienen dificultades al pasar de la velocidad media, desde el origen y la velocidad instantánea en un punto, a la construcción de la noción de velocidad instantánea y la noción de tasa de variación instantánea, interpretando, describiendo y representando situaciones de variación instantánea de una función dada por su gráfica (Azcárate, 1990).

Estas investigaciones nos han proporcionado información sobre las características de la comprensión del concepto de *derivada* en los estudiantes, y cómo se desarrolla dicha comprensión. Sin embargo, en estos momentos falta información sistemática para comprender y describir globalmente el desarrollo de la comprensión de dicho concepto. En esta problemática específica hemos centrado nuestra investigación (Sánchez-Matamoros, 2004). Para particularizar en cuestiones específicas de investigación nos hemos situado en una determinada manera de concebir la construcción de las nociones matemáticas, dentro del campo del pensamiento matemático avanzado (Dubinsky, 1991). Estos aspectos serán descritos en la próxima sección.

MARCO TEÓRICO

El problema de investigación que nos planteamos era caracterizar el desarrollo de la comprensión del concepto de *derivada* y por ello nos preguntamos por los referentes teóricos que nos hablan de las distintas formas de conocer un concepto y por la forma en la que se construye el conocimiento. Lo que parece común a todas las teorías, y que de alguna forma caracteriza el pensamiento matemático avanzado, es concebir la construcción de la comprensión de una noción matemática a través de la metáfora de la construcción de un objeto que se puede manipular en sí mismo a partir de un proceso que generalmente es realizado paso a paso (Dörfler, 2002; Meel, 2003; Mason y Jonston-Wilder, 2004; Sfard, 1992; Tall et al., 2000). Aunque esta aproximación a la idea de construcción de la comprensión ha generado algunas críticas (Confrey y Costa, 1996), creemos que proporciona recursos conceptuales (la noción de esquema, conocer las nociones matemáticas como acciones, procesos u objetos, reificación, la noción de *procepts* o el mecanismo de la tríada para describir el desarrollo de un esquema) que tienen suficiente poder explicativo para ayudarnos a caracterizar el desarrollo de la comprensión de la noción de derivada. En particular, la aproximación al desarrollo de un esquema propuesto por Piaget y García (1983, 1989) y la particularización a través de la teoría APOS (Dubinsky, 1991) nos han servido para fundamentar nuestras decisiones.

Una aproximación piagetiana del desarrollo de un esquema: la teoría APOS

Un esquema puede considerarse «la estructura o la organización de acciones, tales como se transfieren o se generalizan con motivo de la repetición de una acción determinada en circunstancias iguales o análogas» (Piaget y Inherler, 1978, p. 20).

El desarrollo de un esquema es un proceso dinámico y cambiante. Piaget y García (1983, 1989) plantean que el conocimiento crece según ciertos mecanismos, y que un esquema se desarrolla pasando por tres niveles o fases: INTRA-INTER-TRANS, denominado tríada, que se suceden según un orden fijo. Estos autores han formulado la hipótesis de que estos niveles se pueden encontrar cuando se analiza el desarrollo de un esquema de cualquier noción matemática. El mecanismo por el cual el individuo se mueve de un nivel a otro es denominado por Piaget y García (1983, 1989) *abstracción reflexiva* (p. 10). Para Piaget, la abstracción reflexiva se lleva a cabo a través de actividades (físicas o mentales) del sujeto que tienen dos partes, necesariamente asociadas: una es la proyección del conocimiento existente a un plano superior del pensamiento, y la otra es la reorganización y reconstrucción de aquel conocimiento para formar nuevas estructuras. Piaget y García (1983, 1989) caracterizan las tres fases en el desarrollo de un esquema del siguiente modo:

– Intra: «lo propio de este periodo es el descubrimiento de una acción operatoria cualquiera, y la búsqueda del análisis de sus diversas propiedades internas o de sus consecuencias inmediatas, pero con una doble limitación. En primer lugar, no hay coordinación de esta preoperación con otras en un agrupamiento organizado; pero además el análisis interno de la operación en juego se acompaña de errores que se corregirán progresivamente, así como de lagunas en la inferencia que de ella puedan deducirse» (p. 163).

– Inter: «una vez comprendida una operación inicial es posible deducir de ella las operaciones que están implicadas, o de coordinarlas con otras más o menos similares, hasta la constitución de sistemas que involucran ciertas transformaciones. Si bien hay aquí una situación nueva, existen sin embargo limitaciones que provienen del hecho de que las composiciones son restringidas ya que solamente pueden proceder con elementos contiguos» (p. 165).

– Trans: «en función de lo que precede, como involucrando, además de las transformaciones, síntesis entre ellas. Dichas síntesis llegan a la construcción de "estructuras"» (p. 167).

Dubinsky (1991) y el grupo de investigadores integrados en Research in Undergraduate Mathematics Education Community (RUMEC) han adaptado la teoría piagetiana relativa a la «abstracción reflexiva» al pensamiento matemático avanzado (Asiala et al., 1996; Czarnocha et al., 1999). Para Dubinsky, la abstracción reflexiva es el proceso por el cual se construyen objetos mentales a través de acciones mentales sobre estos objetos. Dos ideas son claves en este modelo teórico: las ideas de «construcción mental» y de «mecanismo» por el cual los individuos realizan dichas construcciones. Estos investigadores señalan que el conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a situaciones-problemas percibidas a través de la (re-)construcción de (nuevos) esquemas con los cuales tratar con esas situaciones (Dubinsky, 1991).

Basándose en el trabajo de Piaget, Asiala y otros (1996) describen la noción de esquema de un individuo como la totalidad del conocimiento que, para él, está conectado (consciente o inconscientemente) con un tópico matemático particular. Así, un individuo tendrá un esquema de función, un esquema de derivada, etc. Baker y otros (2000) señalan que la teoría del desarrollo de un esquema puede explicar por qué los estudiantes tienen dificultades con diferentes partes de un tema, y pueden tener incluso problemas diferentes con la misma situación en distintos casos. En su estudio definen un «esquema desarrollado» como una colección coherente de acciones, procesos, objetos y otros esquemas, previamente construidos, que son coordinados y sintetizados por el individuo para formar estructuras utilizadas en la resolución de problemas matemáticos. Una persona demuestra la coherencia del esquema al discernir cuando la noción es aplicable o no. Este hecho se manifiesta en el nivel Trans del desarrollo del esquema, ya que es en este nivel en el que el estudiante toma conciencia de que el esquema está completo y puede percibir propiedades globales que eran inaccesibles en otros niveles.

Globalmente consideradas, las caracterizaciones del desarrollo de un esquema llevadas a cabo por varios investigadores (Clark et al., 1997; McDonald et al., 2000; Baker et al., 2000; Brown et al., 2002), a través de los niveles Intra, Inter, Trans, se apoyan en definir el desarrollo mediante el tipo de relaciones *–coordinación de operaciones* en términos piagetianos– que los estudiantes son capaces de establecer entre los elementos matemáticos que constituyen el concepto cuando resuelven un problema. Desde este punto de vista, aunque, en la teoría APOS, se habla de «mecanismos» de construcción y éstos se caracterizan a través de la idea de abstracción reflexiva piagetiana, queda por resolver cómo podemos ser capaces de dar una respuesta operativa a la cuestión de caracterizar el paso de un nivel a otro. Lo que sí sabemos, a partir de las investigaciones previas sobre el desarrollo de los esquemas, es que hay que centrar la atención en el «tipo de relaciones» que los estudiantes son capaces de establecer entre los «elementos matemáticos» del concepto, comprendidos, de alguna manera determinada (como una acción, un proceso o un objeto), cuando resuelven problemas. Desde este planteamiento y con estos presupuestos teóricos pretendíamos responder a la pregunta:

– ¿Cómo los estudiantes llegan a comprender el concepto *derivada*?

Y en concreto:

– ¿Cómo podemos caracterizar los niveles de desarrollo del esquema de derivada? ¿Qué relaciones y qué elementos matemáticos se manifiestan en cada nivel de desarrollo de la derivada?

– ¿Cómo podemos caracterizar el paso de un nivel de desarrollo al siguiente?

METODOLOGÍA

Participantes

Los participantes en esta investigación fueron 150 estudiantes: 50 de 1º de bachillerato, 50 de 2º de bachillerato y 50 de primer curso de la licenciatura de matemáticas. Estos estudiantes no tenían ninguna característica especial y participaron en la investigación de manera voluntaria. Los alumnos de 1º curso de bachillerato cursaban el bachillerato de ciencias de la naturaleza y eran estudiantes a los que se les había introducido por primera vez el concepto de *derivada*. Los estudiantes de 2º curso de bachillerato cursaban un bachillerato tecnológico; era el segundo año que tenían contacto con la idea de derivada, y empezaban a trabajar con la idea de segunda derivada (f’’) y sus interpretaciones, vinculando expresiones analíticas y gráficas. Los estudiantes de primer año de licenciatura de matemáticas habían trabajado la sistematización de las ideas vinculadas a la derivada en la asignatura «Elementos de Análisis Matemáticos», por lo que podíamos considerarlos en un nivel avanzado de conocimiento del concepto de *derivada* de función real de variable real.

Instrumentos

Se utilizaron dos tipos de instrumentos para recoger los datos: tres cuestionarios diseñados específicamente para cada uno de los grupos de estudiantes considerados, teniendo en cuenta el currículo de sus respectivos cursos en relación con la derivada, y un guión de entrevista diseñada, teniendo en cuenta el cuestionario y que se realizaba apoyándonos en las respuestas producidas por los estudiantes al cuestionario. La entrevista tenía como objetivo obtener una información más detallada de las resoluciones a los problemas realizadas. El diseño de los instrumentos siguió dos etapas:

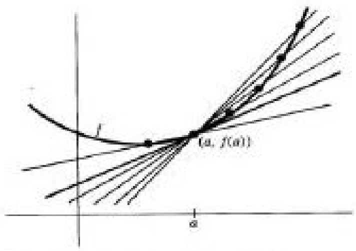
Etapa 1. Análisis de la noción de derivada desde la perspectiva de los elementos matemáticos y relaciones lógicas (transformaciones y coordinaciones en el sentido piagetiano) que pueden darse entre ellos para la resolución de problemas.

Etapa 2. Diseño y selección de los problemas.

Etapa 1: Análisis de la noción de derivada.

Cuadro 1
Elemento matemático gráfico puntual.

La recta tangente a la curva en x = a - interpretación geométrica de la derivada en un punto (x = a): *tangente a la curva por el punto (a, f(a)) es la recta pendiente f’(a) que pasa por el punto (a,f(a)).*



Cuadro 2
Elementos matemáticos analíticos globales.

La condición suficiente para que *f* sea una función constante, creciente o decreciente:
Si f ’(x) = 0 en (a, b) → f es constante en el intervalo (a, b).
Si f ’(x) > 0 en (a, b) → f es creciente en el intervalo (a, b).
Si f ’(x) < 0 en (a, b) → f es decreciente en el intervalo (a, b).

La condición necesaria para que *f* sea una función constante, creciente o decreciente: Sea f una función derivable en (a, b)
Si f es constante para todo x de (a, b) → f ’(x) = 0 en (a, b).
Si f es creciente para todo x de (a, b) → f ’(x) > 0 en (a, b).
Si f es decreciente para todo x de (a, b) → f ’(x) < 0 en (a, b).

Piaget (1963) define un elemento como «*el producto de una disociación o de una segregación en el interior de una totalidad previa*» (p. 8). Al adaptar dicha definición en nuestra investigación, consideramos, un **elemento matemático,** el producto de una disociación o de una segregación del concepto de *derivada*, vinculado a la definición del concepto y a sus propiedades. Tuvimos en cuenta dos **aspectos** de los elementos matemáticos: los **modos de representación** y su carácter **local o global**. Respecto a los modos de representación, consideramos lo **analítico y lo gráfico**, ya que la comprensión de la noción de derivada está influenciada por los componentes analíticos y gráficos según han mostrado investigaciones previas (Orton, 1983; Azcárate, 1990; Ferrini-Mundy y Graham, 1994; Asiala et al., 1997; Font, 1999; Baker et al., 2000; Zandieh, 2000). Dentro de cada uno de estos modos (analítico y gráfico) distinguimos elementos matemáticos puntuales (si el elemento matemático conlleva una propiedad local x = a) y globales (si el elemento matemático conlleva una propiedad de un intervalo (a, b)) al haber mostrado, las investigaciones previas, la influencia de la integración de estos aspectos en determinar la comprensión de la noción de derivada alcanzada (Badillo, 2003). Se da un ejemplo de elemento matemático gráfico puntual en el cuadro 1, y un elemento matemático analítico global en el cuadro 2.

El análisis de la noción de derivada lo realizamos estudiando los elementos matemáticos y las relaciones que forman esta noción, basándonos en cómo el concepto es presentado, usado y justificado en diferentes libros de textos de bachillerato (editoriales Editex, Oxford, SM, Anaya, Santillana) y en algunos textos de análisis matemático que son referencia en la introducción al análisis en el primer año en la licenciatura de matemáticas (Spivak, Apóstol, Demidovich).

El segundo aspecto considerado en el análisis de la noción de derivada fue la idea de «coordinación entre las operaciones», entendidas como relaciones lógicas establecidas entre los elementos matemáticos que se puedan poner de manifiesto en la resolución de los problemas. Un estudiante, cuando tiene que resolver un problema puede establecer relaciones lógicas entre los elementos para inferir nueva información. Algunas de las relaciones que se ponen de manifiesto durante la resolución de un problema son:

– **Conjunción lógica ($A \wedge B$) («y lógica»)**
– **Contrarrecíproco $[(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)]$**
– **Equivalencia lógica $[(A \leftrightarrow B), A \rightarrow B \wedge B \rightarrow A]$**

Por ejemplo, la conjunción lógica es la relación que se produce cuando el estudiante relaciona a través de la «y lógica» dos elementos matemáticos para hacer inferencias. Supongamos que sabemos:

Sea f derivable en (a, b) y c $\in$ *(a, b)*
A) si f ''> 0 en (a, b) $\rightarrow$ *f convexa en (a, b)*
B) f es creciente en (a, c) y f es decreciente en (c, a)

Considerando conjuntamente esta información (A y B) a través de la «y lógica», se infiere que $x = c$ es punto anguloso. La información sobre el crecimiento de f en el intervalo (a, c) y el decrecimiento de f en (c, b) puede venir de haber considerado previamente

f '> 0 en (a, c) $\rightarrow$ *f es creciente en (a, c), y*
f '< 0 en (c, b) $\rightarrow$ *f es decreciente en (c, b).*

Sin embargo, aquí lo que se subraya es que, cuando se tiene información de un determinado tipo (como en este caso: *f convexa en (a, b), y f es creciente en (a, c) y f es decreciente en (c, a))* se vinculan los significados, y permite tomar una decisión sobre la naturaleza del punto $x = c$ (en este caso $x = c$ es punto anguloso).

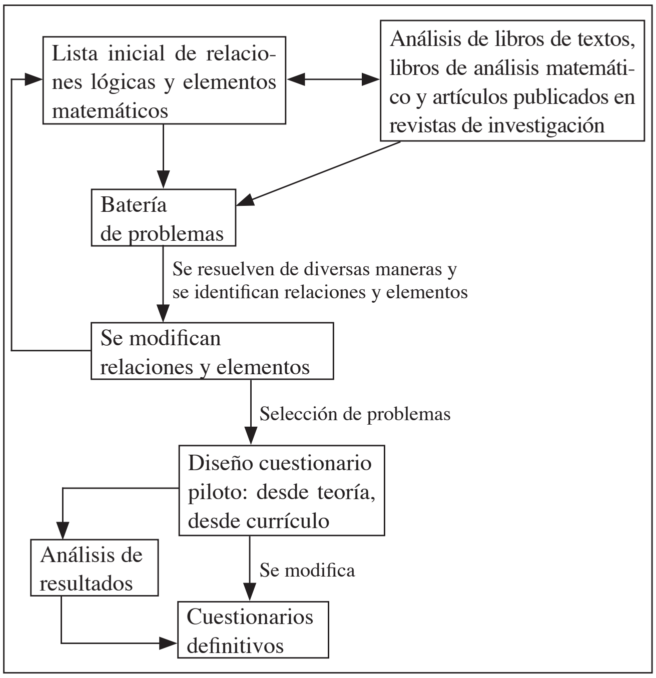
Para identificar las relaciones lógicas que hipotéticamente podrían establecerse entre los elementos matemáticos en la resolución de los problemas, se resolvieron un conjunto de problemas de diversas maneras, y analizamos las diferentes resoluciones considerando los elementos matemáticos usados y las relaciones establecidas. Con este procedimiento adaptamos algunos problemas y seleccionamos otros para producir un grupo de problemas desde el cual diseñar los cuestionarios

Etapa 2: Diseño y selección de los cuestionarios.

Los problemas de los distintos cuestionarios fueron diseñados o elegidos considerando las relaciones lógicas que se podían establecer y los aspectos de los elementos matemáticos (analíticos y gráficos, puntuales y globales) necesarios en su resolución. En la selección de los problemas para los cuestionarios, la idea fue que la «demanda del problema propuesto» al resolutor en cada curso fuera tal que pudiéramos caracterizar los niveles de desarrollo del esquema de derivada. Por ello tuvimos en cuenta el currículo de los diferentes cursos (1º, 2º de bachillerato y 1º de licenciatura de matemáticas) y los resultados de las investigaciones previas sobre la comprensión del concepto de *derivada*. Con los problemas inicialmente elegidos se realizaron algunas entrevistas con estudiantes de bachillerato, lo que permitió modificar algunas expresiones del texto escrito y del guión de entrevista. En el cuadro 3 se muestra el esquema del proceso que seguimos en la elaboración de los cuestionarios.

Con este procedimiento diseñamos o adaptamos doce problemas a partir de los cuales confeccionamos tres cuestionarios, teniendo en cuenta que una misma tarea podía estar en más de un cuestionario si su proceso de resolución así lo permitía. Se pretendió que en cada cuestionario se contemplaran diversos elementos matemáticos y posibles relaciones que se podían establecer entre ellos en ambos modos de representación (analítico y gráfico) y considerando su aspecto local o global. En el cuadro 4 aparece el cuestionario diseñado para 2º de Bachillerato siguiendo este procedimiento.

Cuadro 3
Esquema del proceso de elaboración de los cuestionarios.



Procedimiento

Los cuestionarios fueron contestados por los estudiantes en su horario de clase de matemáticas. En días posteriores a la realización de los cuestionarios se realizaron las entrevistas centradas en la forma en la que se habían resuelto los diferentes problemas. Previamente a la realización de las entrevistas, se examinaron las respuestas dadas por los estudiantes –descartando los cuestionarios entregados en blanco, y, para adecuar las preguntas de las entrevistas a las respuestas producidas– con el objetivo de intentar en lo posible que los estudiantes explicitaran lo que estaban pensando al resolver los problemas. Además, las entrevistas permitieron obtener información sobre los dominios y los límites de aplicación de las propiedades consideradas por los estudiantes, aportando información relevante sobre la manera en la que parece desarrollarse la comprensión del esquema de derivada. Debido al carácter voluntario de las entrevistas y a las incompatibilidades horarias aparecidas en algunos institutos, se realizaron un total de 69 entrevistas semiestructuradas (20 en 1º y 2º de bachillerato y 29 en 1º de licenciatura de matemáticas).

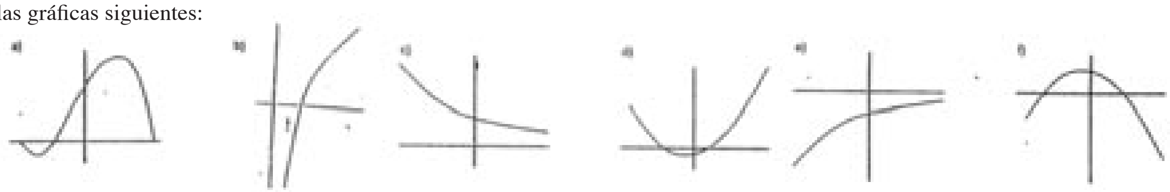
La realización de las entrevistas puso de manifiesto su potencial para ampliar la información sobre cómo los estudiantes establecen relaciones entre los elementos y permitió hacer inferencias sobre las características de la comprensión del esquema de derivada y su nivel de desarrollo. Una vez realizadas las entrevistas se procedió al análisis de los cuestionarios y las entrevistas de forma conjunta.

Cuadro 4

Cuestionario de 2º de bachillerato.

TAREA 1

Analiza las gráficas siguientes:



¿Cuántas parejas producirías de cada función con su derivada?

TAREA 2

La gráfica correspondiente a la función *f '(x)* primera derivada de una cierta función *f(x)* es una recta que pasa por los puntos (a,0) y (0,b). Esboza las posibles gráficas de *f(x).*

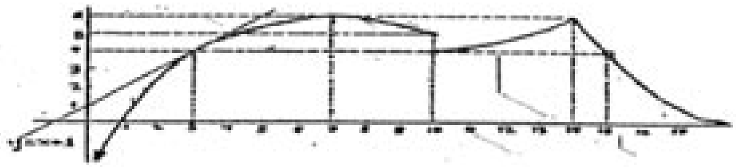
TAREA 3

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 2x + a & x < 1 \\ bx^2 + 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Calcula a y b para que *f* sea derivable en x = 1.

TAREA 4

Dada la gráfica de la función *f*, formada por las ramas de parábolas



a) Obtén los valores de *f'*(3), *f'*(7), *f'*(10), *f'*(14) y *f'*(15). Explica cómo los obtienes.

b) Realiza un esbozo de la gráfica de f '. Explica cómo lo has obtenido.

TAREA 5

Dada la función *f(x)* = (x-1)(x-2)(x-3), encuentra un punto, entre dos valores que tengan la misma imagen, en el que la recta tangente sea paralela al eje x.

TAREA 6

A) De una cierta función f conocemos algunos valores dados en la siguiente tabla:

a) Usa esta tabla para aproximar el valor de la derivada de f en x = 2.

b) A partir de la información que te da esta tabla, ¿crees que *f(x)* es derivable en x = 1?

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	1	1.00001	1.0001	1.001	1.01	1.1
f(x)	-2.1	-2.01	-2.001	-2.0001	-2.00001	-2	-2.00002	-2.0002	-2.002	-2.02	-2.2

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	2	2.00001	2.0001	2.001	2.01	2.1
f(x)	3.61	3.9601	3.996001	3.99960001	3.99996	4	4.00004	4.00040001	4.004001	4.0401	4.41

B) Supón que f es una función para la que lim (*f(x)*-*f*(2))/(x-2) cuando (x -> 2) es igual a 0. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones tienen que ser verdaderas, cuáles pueden ser verdaderas y cuáles son obligatoriamente falsas?

1) *f'*(2) = 2 2) *f*(2) = 0 3) lim *f(x)* cuando (x -> 2) igual a *f*(2)

4) f es continua en x = 0 5) *f* es continua en x = 2.

TAREA 7

Esboza la gráfica de una función que satisface las condiciones siguientes:

– *f* es continua - *f*(2) = 0 - *f'*(3) = f '(5) = 0

– $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -4$ – $\lim\limits_{x \to 8} f(x) = -\infty$

– *f'(x)* < 0 cuando 5 < x < 8 – *f'(x)* > 0 cuando x < 5

– *f''(x)* < 0 cuando 3 < x< 8 – *f''(x)* > 0 cuando x < 3

Análisis

El procedimiento de análisis se centraba en identificar los elementos matemáticos y las relaciones que los estudiantes establecían durante la resolución de los problemas. Este procedimiento permitió realizar inferencias sobre los niveles de desarrollo del esquema de derivada, considerando el papel de las características de la comprensión del concepto de *derivada* que habían sido identificadas en las investigaciones anteriores. Estas características fueron vistas desde lo que significaban para explicar el desarrollo de la comprensión del concepto desde el uso de la tríada INTRA, INTER y TRANS. Con estas referencias se desarrolló un proceso de análisis en dos fases.

Este procedimiento proporcionó dos tipos de información. Por una parte, nos permitió describir la comprensión del concepto de *derivada* que tenía cada estudiante. Por otra parte, proporcionó información sobre la forma en la que parecía que se desarrollaba la comprensión del esquema de derivada. A través de este análisis pudimos observar que las características de cada nivel de desarrollo no se conquistan de inmediato sino que existe una construcción progresiva, que venía reflejada por el tipo de relaciones lógicas que era posible establecer entre los elementos matemáticos utilizados en cada momento. Los resultados que se presentan en este artículo proceden de la información reunida con el análisis conjunto de las 69 entrevistas y los cuestionarios correspondientes.

RESULTADOS

El análisis realizado nos permitió inferir unos indicadores que describían el comportamiento de los estudiantes en los diferentes niveles de desarrollo y, además, nos proporcionó información sobre la manera en la que parece darse el paso de un nivel de desarrollo al siguiente. Esta información es la que nos permite describir el desarrollo del esquema de derivada. Esta sección está organizada presentando las características de los diferentes niveles de desarrollo del esquema de derivada que nos permiten describir la construcción progresiva del esquema, definida por los elementos y relaciones consideradas por los estudiantes (Cuadro 5)

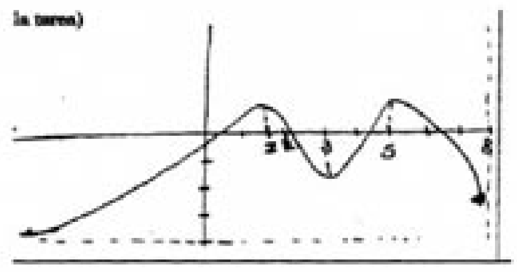
Nivel INTRA del desarrollo del esquema. El nivel INTRA viene caracterizado, en general, por el descubrimiento de una acción operatoria (en este caso, el uso de un elemento matemático en la resolución del problema) y la búsqueda de sus consecuencias inmediatas, que algunas veces se realiza con errores y mostrando algunas lagunas en las inferencias que el estudiante realiza. Los estudiantes situados en este nivel podían usar los elementos matemáticos para inferir informaciones o para interpretar la situación dada, pero no establecían ninguna relación entre dichos elementos. Suelen usar algunos elementos matemáticos (pocos) de forma correcta y, generalmente, vinculados a un modo de representación. Por ejemplo, la siguiente respuesta describe un comportamiento prototípico de los estudiantes en este nivel. María, una estudiante de 2º de bachillerato, ante la tarea 7 (cuadro 4) comenta:

E: ¿Y con $f' < 0$ qué información has obtenido?
María: He averiguado donde era decreciente.
E: ¿y $f' > 0$?
María: Donde es creciente, crece hasta 5.
[Pero dibuja el gráfico de *f*, creciente en (-infinito, 2) y en (3, 5), y decreciente en (2, 3)]
E: ¿Qué información obtienes de $f'(3) = f'(5) = 0$?
María: Para saber si era máximo o mínimo, o si crecía o decrecía.
E: Cuando $f' = 0$ en un punto, ¿sólo puede ser máximo o mínimo?
María: No, o posible punto de inflexión.
[Sin embargo en x = 3 considera un mínimo, y no un punto de inflexión]

En este diálogo vemos que María recuerda los elementos matemáticos analíticos puntual y global:

– **condición necesaria para que f tenga un extremo o punto de inflexión en x = a:** si $f'(a) = 0 \rightarrow x = a$ máximo, mínimo o punto de inflexión en f; y
– **condición suficiente para que f sea una función creciente o decreciente:** sea *f* derivable en (a, b), si $f' > 0$ en (a, b) $\rightarrow f$ crece en (a,b), y si $f' < 0$ en (a,b) $\rightarrow f$ decrece en (a, b).

Pero tiene dificultad en establecer relaciones entre estos elementos matemáticos a través de «y lógica» para responder al problema, lo que hace que esboce un gráfico incorrecto de *f*:



(María, Tarea 7)

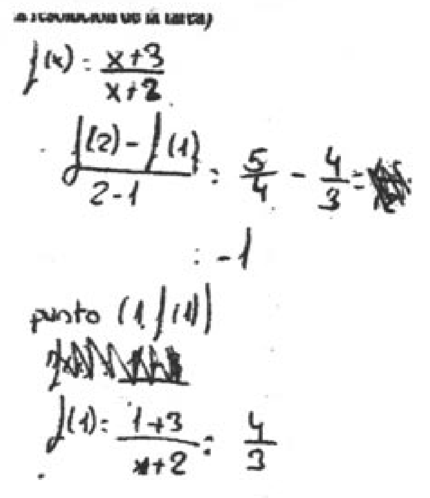
En el análisis de los cuestionarios, en su segunda fase (análisis global), observamos que, en el nivel INTRA del desarrollo del esquema, había estudiantes que, además de no establecer relaciones lógicas entre los elementos matemáticos, no utilizaban ningún elemento matemático de forma correcta a lo largo de todo el cuestionario, por lo que dentro del nivel INTRA del desarrollo del esquema, consideramos subniveles, debido al carácter progresivo de la construcción del esquema. Por ejemplo, el comportamiento de José, estudiante de 1º de bachillerato, a lo largo de todo el cuestionario, mostraba evidencia de esta característica; así, en la tarea 1, en la cual se daba la expresión analítica de una cierta función f y se pedía la tasa de variación media (TVM) en el intervalo [1, 2] y la tasa de variación instantánea en x = 1. José hace uso del elemento matemático analítico global relativo a la tasa de variación media para resolver la primera parte de la tarea, poniendo de manifiesto en la entrevista que no conoce o no recuerda el elemento matemático analítico puntual relativo a la tasa de variación instantánea:

E: Calculas la tasa de variación media. ¿Y el cálculo de la pendiente de la recta secante?
José: No me acordaba.
E: ¿Y la tasa de variación instantánea en el punto $(1, f(1))$?
José: No me acuerdo.

Cuadro 5

Caracterización de los subniveles de desarrollo del esquema de derivada a través de relaciones lógicas y elementos matemáticos.

NIVEL	RELACIONES LÓGICAS[1]	ELEMENTOS MATEMÁTICOS[2]
INTRA1	– No se establecen relaciones lógicas entre los elementos matemáticos.	– RECTA TANGENTE A LA CURVA EN x = a – INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA EN UN PUNTO (x = a) (GP) – DERIVADA EN UN PUNTO COMO LÍMITE DE LA TASA DE VARIACIÓN MEDIA (AP) – TASA DE VARIACIÓN MEDIA (AG)
INTRA	– Intento de relación «y lógica».	– CONDICIÓN NECESARIA PARA QUE f TENGA UN EXTREMO O PUNTO DE INFLEXIÓN EN x = a (AP) – CONDICIÓN SUFICIENTE PARA QUE f TENGA UN EXTREMO O PUNTO DE INFLEXIÓN EN x = a (AP) – CONDICIÓN NECESARIA PARA QUE f SEA DERIVABLE EN x = a (AP) – CONDICIÓN SUFICIENTE PARA QUE f SEA UNA FUNCIÓN CRECIENTE O DECRECIENTE EN (a, b) (AG) – CONDICIÓN SUFICIENTE DE CONVEXIDAD Y CONCAVIDAD DE f EN RELACIÓN CON EL SIGNO DE f ’’ (AG) – CONDICIÓN SUFICIENTE DE CONVEXIDAD Y CONCAVIDAD DE f EN RELACIÓN CON EL CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE f ’ (AG) – OPERADOR DERIVADA: REGLAS DE DERIVACIÓN – INVERSO DEL OPERADOR DERIVADA: INTEGRACIÓN
INTER1	– Se establecen relaciones del tipo «y lógica» entre elementos matemáticos analíticos o gráficos puntales o globales (generalmente en el mismo modo).	– DERIVADA EN UN PUNTO COMO LÍMITE DE LA TASA DE VARIACIÓN MEDIA: Se usa «desencapsulando» la idea de la existencia de f ’ en un punto x = a, mediante la aplicación de la igualdad de los límites laterales del cociente incremental (AP)
INTER	– Se establecen relaciones del tipo «y lógica» entre elementos matemáticos analíticos o gráficos puntales o globales (generalmente en el mismo modo).	– CÚSPIDE: GRÁFICA «QUEBRADA» (GP) – RELACIONES DE f ’ CON EXTREMOS Y PUNTOS DE INFLEXIÓN (AP) – RELACIONES DE f ’’ CON LOS EXTREMOS Y LOS PUNTOS DE INFLEXIÓN (AP) – CONDICIÓN SUFICIENTE DE LOS PUNTOS DE INFLEXIÓN (RELACIONES CON f ’’) (AP) – INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA (CON CARÁCTER GLOBAL) (GG) – OPERADOR DERIVADA: Si el gráfico de f es una parábola, el gráfico de f ’ es una recta (GG) – OPERADOR DERIVADA: Utilizando el significado geométrico de la segunda derivada como la tangente a la gráfica f ’ (GG) – CONDICIÓN NECESARIA PARA QUE f SEA UNA FUNCIÓN CRECIENTE O DECRECIENTE (AG) – OPERADOR DERIVADA: REGLAS DE DERIVACIÓN (AG)
	– Contrarrecíproco de elemento matemático analítico puntual	– CONDICIÓN NECESARIA PARA QUE f SEA DERIVABLE EN x = a (AP)
	– Equivalencias lógicas (o doble implicación) de elementos matemáticos analíticos puntuales o globales.	– CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE PARA QUE f SEA UNA FUNCIÓN CRECIENTE O DECRECIENTE EN (a,b) (AG)
	– Esbozos de síntesis de los modos de representación analítico y gráfico.	– CONDICIÓN SUFICIENTE PARA QUE f TENGA UN EXTREMO O PUNTO DE INFLEXIÓN EN x = a (AP) – OPERADOR DERIVADA: Si el gráfico de f es una parábola, el gráfico de f ’ es una recta (GG) – CONDICIÓN SUFICIENTE PARA QUE f SEA UNA FUNCIÓN CRECIENTE O DECRECIENTE EN (a, b) (AG)
TRANS	– Síntesis de los modos de representación analítico y gráfico.	– CONDICIÓN SUFICIENTE PARA QUE f SEA UNA FUNCIÓN CONSTANTE, CRECIENTE O DECRECIENTE A TRAVÉS DE LA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA (GG)



(José, Tarea 1)

En la tarea 2, en la que figuraba el gráfico de una función f(x) y la recta tangente a la f(x) en el punto de abscisa x = 2 con su ecuación, y se pedía el valor de f y de f' en x = 2, José, para encontrar el valor de f(2), intenta recordar algún procedimiento aprendido en la instrucción previa pero sin éxito, indicando que necesita la expresión analítica de f(x). Para encontrar f'(2) recuerda con errores la interpretación geométrica de la derivada necesario para poder encontrarlo. Todo esto puede indicar que José no tiene la idea de derivada en un punto como pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto, pues en la entrevista comenta: *«porque como la tangente coincide con la derivada»*.

A José no le fue posible identificar cuál era el significado de derivada en un punto, ni como límite del cociente incremental (TVI), ni como pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto. Este tipo de comportamiento fue característico de los estudiantes que se encuentran en el nivel INTRA 1 del desarrollo del esquema.

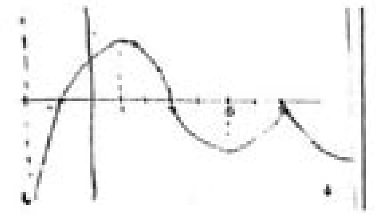
Nivel INTER del desarrollo del esquema. La característica principal de este nivel de desarrollo es que los estudiantes empiezan a establecer relaciones entre los elementos matemáticos. Un aspecto característico de este nivel es que los estudiantes sólo son capaces de establecer relaciones entre elementos para inferir nueva información en determinados casos. Por ejemplo, la siguiente respuesta describe un comportamiento prototípico de este nivel de desarrollo. Juan un estudiante de 1º de licenciatura de matemáticas muestra dificultades para identificar los puntos de inflexión en una tarea dada en forma gráfica. La manera en la que relaciona los diferentes elementos matemáticos para obtener información sobre los puntos angulosos en este modo de representación, y las dificultades con las que se encuentra se ponen de manifiesto en el protocolo siguiente: *«en estos puntos f" = 0 por ser puntos de tangente horizontal de f', en ellos cambiaría la concavidad»*.

Pero el gráfico no lo esboza de forma correcta, y no es capaz de establecer relaciones entre los elementos que le hubieran permitido obtener nueva información sobre el comportamiento de la función en ese punto.

Sin embargo, en una tarea dada en forma analítica (tarea similar a la tarea 7, cuadro 4, pero con puntos angulosos), relaciona a través de «y lógica», los elementos matemáticos que relacionan el signo de f' con el crecimiento de f, y el signo de f" con la concavidad de f, y el elemento que relaciona los puntos en los que f' se anula con la existencia de un máximo, un mínimo o un punto de inflexión. El uso conjunto de estos elementos le permite identificar máximos, mínimos y puntos de inflexión y comenta:

Juan: ... x = 3 es punto de inflexión porque entre –1 y 5 es decreciente y pasa de ser cóncava a convexa...
E: ¿En x = 7?
Juan: Hasta x = 7 f crece, y a partir de ahí decrece, y es convexa, luego hay un punto anguloso.

Y esboza un gráfico correcto de f.



(Juan, Tarea 4)

El comportamiento de Juan, manejando de manera diferente el mismo elemento matemático según el modo de representación en que se presenta el problema, muestra una característica de los estudiantes en el nivel INTER del desarrollo: los estudiantes no siempre son capaces de establecer las relaciones lógicas necesarias entre los elementos matemáticos que conocen durante la resolución de los problemas, cuando los modos de representación son diferentes.

Una característica del nivel INTER es que las relaciones que se llegan a establecer entre los elementos matemáticos se restringen sólo a elementos «contiguos». La necesidad de especificar de manera operativa la idea de «elementos contiguos», al referirnos a los elementos matemáticos del esquema de derivada entre los que se establecen relaciones, llevó a diferenciar dos subniveles (cuadro 5). Nuestros datos apuntan en la dirección de que «la continuidad cognitiva» de la que se habla en términos piagetianos se puso de manifiesto en la dificultad que tienen los estudiantes de trasladar las relaciones que vinculan la función y su derivada a la relación entre la primera derivada y la segunda. Este hecho pone de manifiesto que los limites de aplicación de las relaciones, en este caso, pasar de considerar el par (f, f ') a considerar el par (f ', f "), es una característica del nivel INTER de desarrollo del esquema y, por tanto, un indicador de cómo se genera el desarrollo del esquema.

De la misma manera que ocurría en la caracterización del nivel INTRA, aquí los comportamientos en la resolución de problemas que reflejaban las características del nivel INTER podían mostrar características diferentes en función de la forma en la que se establecían las relaciones entre los elementos matemáticos. Esto permitió considerar dos subniveles INTER 1 e INTER. Así, a diferencia de Juan, que hace uso de diferentes tipos de relaciones lógicas entre elementos en distintos momentos de la resolución de las tareas, Miguel, que es un estudiante de 2º de bachillerato, hace uso de elementos matemáticos puntuales y globales a lo largo de todo el cuestionario vinculados al par (f, f'), pero en ningún momento hace uso de elementos vinculados a (f', f''). Por ejemplo, en la entrevista sobre la realización de la tarea 1 del cuestionario (Cuadro 4) se estableció el siguiente diálogo:

E: ¿En qué te has fijado para relacionar a) y f)?
Miguel: Por ejemplo, en la a), los máximos y los mínimos, donde está el máximo y el mínimo, en f) corta al eje OX, es 0 en esos puntos. En a) hasta el mínimo decrece y en f) está por debajo del eje OX, es menor que 0. Y desde el mínimo al máximo en a) crece, en f) está por encima del eje OX, es mayor que 0.
E: ¿Para relacionar b) y c) en qué te has fijado?
Miguel: Esta función es entera creciente sin máximos ni mínimos, y aquí encontré que toda la función está por encima del eje OX, y entonces, al no cortar al eje la función no va tener ni máximos ni mínimos.
E: ¿Podrías fijarte en algo más para establecer relaciones?
Miguel: No, esto es así, porque es así...
E: ¿Encontraste alguna otra pareja?
Miguel: Yo buscando no encontré ninguna otra.

Usa dos elementos matemáticos analíticos, uno puntual **(si f '(a) = 0 → x = a máximo, mínimo o punto de inflexión)**, y otro global (sea f derivable en (a, b) **si f '> 0 en (a, b) → f crece en (a, b), y si f '< 0 en (a, b) → f decrece en (a, b)).** A través del establecimiento de la relación lógica («y lógica») entre ellos le permitió encontrar la pareja formada por a) función y f) derivada. Sin embargo, haciendo uso del elemento relativo al signo de f' y al crecimiento de la función, forman una pareja incorrecta c) y b), usando de manera incorrecta un elemento matemático que recuerda de forma correcta. Podemos decir que Miguel se encontraba en el subnivel INTER 1 del desarrollo del esquema de derivada.

Nivel TRANS de desarrollo del esquema. La característica de este nivel es que los estudiantes son capaces de establecer diferentes relaciones entre los elementos del esquema sin demasiadas restricciones y estableciendo la síntesis. Un comportamiento prototípico de este nivel es el de Mario, un estudiante de 1º de licenciatura de matemáticas, que, ante una tarea dada en forma gráfica utiliza la idea de la **derivada como pendiente de la recta tangente a f con carácter local y global,** y la utiliza reconstruyendo su significado al indicar que **el signo de f' proporciona información sobre el crecimiento de f:**

«*si f'> 0, f crece porque f'es la pendiente de la recta tangente a f; entonces, si la pendiente es positiva, f es creciente*».

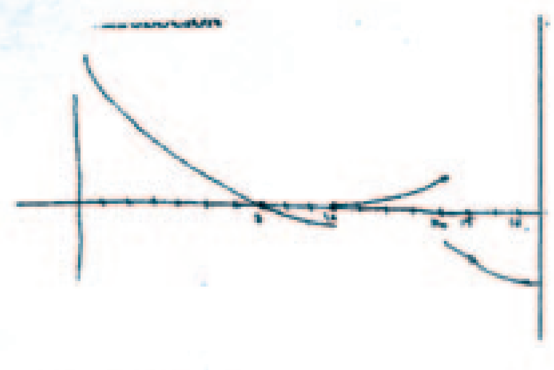
Además, el cambio de creciente a decreciente le permite identificar los puntos x = 1 (x = 3) como máximo (mínimo) relativo. Por la forma de resolver la tarea, podemos inferir que Mario tiene la idea de derivada como pendiente de la recta tangente a f con carácter global, lo que le permite esbozar un gráfico correcto de f.

En la tarea 2 (común con la tarea 3 del cuestionario de 2º bachillerato), Mario usa la idea de **derivada como límite del cociente incremental** para el cálculo de f '. Y en la entrevista comenta que «*la igualdad de los límites laterales del cociente incremental significaría que la tangente por un lado y por el otro son iguales en ese punto*». Mario usa los elementos matemáticos con sentido (es decir, guiado por un objetivo), mostrando la equivalencia lógica entre la expresión analítica de la derivada como límite del cociente incremental, y la ***interpretación geométrica de la derivada como pendiente de la recta tangente*** (que puede ser interpretado como una síntesis en los modos de representación).

En la segunda parte de la tarea 3 (igual a la tarea 4 del cuestionario de 2º de bachillerato), esboza un gráfico de f' correcto, excepto en su forma, pero al preguntarle en la entrevista comenta que *«f' estaría formado por trozos de rectas»* dándose cuenta del error cometido. Para el esbozo de la gráfica relaciona, a través de la **conjunción lógica,** varios elementos matemáticos, entre ellos:

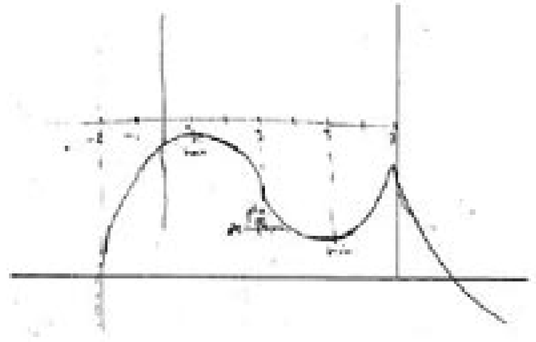
…sea f derivable en (a, b), si f crece en (a, b) → f' > 0 en (a, b), y si f decrece en (a, b) → f' < 0 en (a, b) (implicación contraria a la utilizada en la tarea 1 del mismo elemento)…

…y la información obtenida por la utilización de varios elementos matemáticos, en diversos puntos, en la primera parte de la tarea:



(Mario, segunda parte de la Tarea 3)

En la tarea 4 (igual a la tarea 7 del cuestionario de 2º de bachillerato), dada en modo analítico, usa los elementos matemáticos globales que relacionan el **signo de f' con el crecimiento de f, y el signo de f '' con la concavidad de f,** al establecer de forma correcta relaciones (**«y lógica»**) entre los elementos matemáticos, que conoce y utiliza. Eso hace que Mario resuelva correctamente la tarea, indicando que en x = 3 hay un punto de inflexión y en x = 7 un punto anguloso.



(Mario. Tarea 4)

Mario establece diversas relaciones lógicas **(«y lógica», contrarrecíproco, equivalencia lógica)** de forma correcta entre los elementos matemáticos que utiliza. Además, los elementos matemáticos analíticos y gráficos (puntuales y globales) que necesita para resolver las diferentes tareas del cuestionario los usa correctamente y con sentido, es decir, haciendo uso de los significados implícitos cuando es necesario. La forma en que resuelve las distintas tareas del cuestionario sugiere que Mario tiene sintetizados los modos de representación, lo que le permite manejar la misma información independientemente del modo analítico o del modo gráfico.

A través de esta caracterización y considerando el comportamiento global de un estudiante en todo el cuestionario, se le asignó un nivel de desarrollo. El resultado de este proceso se recoge en el cuadro 6.

Una interpretación de estos resultados es que el desarrollo del esquema de derivada no es algo que esté necesariamente vinculado a conocer muchos elementos constitutivos del concepto. Así la comprensión del concepto de *derivada* no está vinculado únicamente a conocer los elementos constitutivos del concepto sino también a ser capaces de relacionarlos durante la resolución de problemas. Los estudiantes de primero de licenciatura de matemáticas podían conocer más elementos matemáticos del concepto de *derivada* que los alumnos de bachillerato; sin embargo, había un número importante de ellos que sólo eran capaces de usarlos de manera aislada, o sólo relacionar un número limitado de ellos para obtener información relevante para el problema que tenían que resolver. Al caracterizar la comprensión desde el punto de vista de las relaciones que se pueden establecer entre los elementos para obtener información que sea pertinente para la resolución de los problemas, nuestros resultados indican que, al cabo de tres años de enseñanza de la derivada, una cantidad importante de estudiantes no eran capaces de ir más allá de recordar sólo de manera aislada algunos elementos o de relacionarlos entre sí.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Nuestra investigación, al tener en cuenta tres años consecutivos de enseñanza, nos aporta información sobre el desarrollo de la construcción del concepto de *derivada* independientemente del currículo específico de cada uno de los cursos considerados. Mediante este trabajo podemos aislar las características fundamentales de los diferentes niveles del desarrollo del esquema de derivada.

Para poder dar respuesta a nuestras preguntas de investigación, tuvimos que diseñar unos cuestionarios que recogiesen estos aspectos diferenciales. Este instrumento fue completado con entrevistas en las que el estudiante podía aclarar los procesos de resolución que había realizado así como las ideas que los fundamentaban. Por otra parte, el proceso de análisis realizado ha permitido desvincular la especificidad de un problema concreto, posibilitándonos obtener una caracterización global y, por lo tanto, elaborada con más profundidad, del esquema de derivada que tenían los estudiantes e ilustrar las diferencias entre los niveles que nos permiten caracterizar el paso de un nivel al siguiente.

Debemos aclarar que, evidentemente, las respuestas a los cuestionarios/entrevistas de la licenciatura de matemáticas utilizaban diversos tipos de relaciones lógicas y más elementos matemáticos que los cuestionarios de bachillerato, por lo que aportaron, a la investigación, más información sobre la construcción del esquema de derivada; pero el hecho de estar en primer año de la licenciatura de matemáticas no implicaba que estuviera en el nivel TRANS por la propia caracterización de los niveles de desarrollo del esquema derivada que habíamos realizado.

La caracterización de cada uno de los niveles y del desarrollo del esquema de la noción de derivada realizada nos ha permitido dar cuenta de la progresión en la construcción del esquema, integrando, en una caracterización global, lo que significa llegar a comprender un concepto en análisis matemático, identificado en las diferentes investigaciones.

El paso de un nivel a otro lo hemos caracterizado a través de las relaciones lógicas que se establecen y de los elementos matemáticos que se usan, los cuales consideramos que son una concreción de la idea de entender el «desarrollo» como «coordinación de la información al intentar resolver un problema». Estas aportaciones en relación con el desarrollo del esquema son las que nos van a permitir realizar algunas reflexiones sobre el desarrollo del esquema de derivada.

Cuadro 6

NIVEL	1º DE BACHILLERATO	2º DE BACHILLERATO	1º DE LICENCIATURA
INTRA 1	5	6	6
INTRA	4	4	3
INTER 1	11	5	6
INTER	-	5	9
TRANS	-	-	5
TOTAL	20	20	29

El desarrollo del esquema de derivada

Nuestros datos señalan que la manera en la que un estudiante pasa de un nivel de desarrollo del esquema de derivada al siguiente viene caracterizada por la forma en la que realiza la síntesis de los modos de representación. Desde una perspectiva piagetiana, la idea de «síntesis de las transformaciones» puede ser entendida como el proceso por el que, a partir de algo que se conoce, realizando «operaciones» con y sobre ello, se llega a la conclusión y a la comprensión de lo que no se conocía previamente. En este sentido, la «síntesis» se aplica a situaciones en las que hay que relacionar (relación lógica) diferentes elementos matemáticos para inferir nuevos datos. En particular, un aspecto característico del desarrollo se puso de manifiesto a través de la forma en la que los estudiantes relacionaban lo gráfico y lo analítico para obtener información; es decir, usar información procedente de dos sistemas de representación diferentes para considerarla conjuntamente y obtener «algo» que no se conocía. «Considerar la información conjuntamente» significa establecer algún tipo de relación lógica entre los elementos matemáticos para tomar una decisión relativa a la situación en la que se encuentra. La forma en la que los estudiantes responden a la demanda del problema ponía de manifiesto el grado de síntesis entre los dos modos de representación, permitiéndoles realizar algunas tareas y no otras.

Por otra parte, las diferentes características de los elementos matemáticos, que conocen los estudiantes en cada momento, ayudan a determinar lo que ellos son capaces de hacer desde el punto de vista de obtener nueva información pertinente para la resolución del problema desde lo que ya conocen (desde su experiencia previa o por ser un dato proporcionado por el problema). La idea de que la síntesis de modo de representación no sea una cosa vinculada únicamente con la presentación a los estudiantes del modo gráfico y analítico, sino que es precisamente lograr esta síntesis lo que caracteriza el desarrollo del esquema viene apoyado por los resultados de otras investigaciones (Baker et al., 2000; Font, 2000) que indican que coordinar información al intentar resolver un problema de cálculo gráfico no rutinario presenta bastantes dificultades.

Otro dato que revela el potencial de la idea de «síntesis de las transformaciones» para explicar el desarrollo del esquema de derivada son las dificultades que tienen los estudiantes para establecer relaciones (coordinar) entre aproximaciones globales y puntuales; es decir, para pensar conjuntamente en el comportamiento de la función en intervalos y el comportamiento puntual de la función. Los puntos angulosos son una manifestación de este comportamiento prototípico, señalado también en la investigación de Baker y otros (2000). En nuestra investigación hemos observado también esa dificultad, tanto cuando el punto anguloso se presenta en modo gráfico como cuando se presenta en modo analítico, mostrando que, en el momento que los alumnos son capaces de realizar la síntesis de los significados puntuales y globales, les es permitido establecer una variedad más amplia de relaciones y establecer los límites de aplicación de las propiedades. Otro aspecto que puede ser interpretado desde el desarrollo de la capacidad de «síntesis», como un indicador del desarrollo del esquema de derivada en los estudiantes, es la manera en la que establecen relaciones entre la información procedente de la primera y segunda derivada (Asiala et al., 1997; Baker, 2000), y la integración paulatina de la idea de la derivada como recta tangente y como razón de cambio (Baker et al., 2000). En nuestro trabajo, la integración de estas dos ideas se ha considerado una característica del nivel TRANS del desarrollo del esquema.

Por otra parte, la síntesis entre la derivada en un punto y la función derivada ($f'(a)$ y $f'(x)$) parece apoyarse en la coordinación de lo analítico y lo gráfico (Badillo, 2003), sin un uso prioritario de los elementos analíticos o gráficos puntuales sobre los globales o viceversa. En este sentido parecen también ir los resultados de la investigación de Baker y otros (2000) sobre un problema de cálculo gráfico y la coordinación de la idea de propiedad e intervalo.

De manera resumida, podemos indicar que la idea de síntesis tiene suficiente poder explicativo para ayudarnos a caracterizar y comprender el proceso por el cual se pasa de un nivel de desarrollo al siguiente. El significado de la idea de «síntesis» como una actividad mental del estudiante no está vinculada en sí misma a la cantidad de «elementos» que se conocen sobre la noción de derivada, sino en función del tipo de información que los estudiantes son capaces de generar a partir de lo que conocen para intentar resolver el problema que se les presenta. Precisamente esta idea de «ser capaces de generar nueva información» es la clave para entender la noción de síntesis piagetiana y cómo ha sido utilizada para interpretar los resultados de nuestra investigación. La forma en la que los estudiantes generan nueva información, entendida en esta investigación a través del tipo de relaciones lógicas que estructuraban su manera de pensar ante los problemas, se apoya evidentemente también en la forma en la que se conocen los elementos matemáticos que configuran el esquema de derivada. Probablemente la posibilidad de desencapsular los significados de las ideas matemáticas conocidas como objetos es la que está vinculada a la capacidad de establecer determinadas relaciones lógicas durante el proceso de resolución de problemas relativos a la noción de derivada. Verificar esto es tarea de nuevas investigaciones.

NOTAS

La tarea a la que se hace referencia en el nivel INTER del estudiante de 1º de licenciatura similar a la tarea 7 (cuadro 4) se diferencia de ésta al considerar un punto anguloso o cúspide en $x = 7$ (Baker et al., 2000).

[1] Las relaciones lógicas que se establecen entre los elementos matemáticos en el nivel TRANS son, además de las que figuran en dicho nivel, las que figuran en el nivel INTER.

[2] Al final de cada elemento figuran dos letras mayúsculas que indican: la primera letra si se trata de un elemento gráfico (G) o analítico (A), y la segunda letra si se trata de un elemento puntual (P) o global (G).

Los elementos matemáticos que se utilizan en el nivel INTER son además de los que figuran en dicho nivel, los que figuran en el nivel INTRA. Lo mismo sucede con los elementos matemáticos que se utilizan en el nivel TRANS.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANZOLA, M. y VIZMANOS, J.R. (1996). *Matemáticas I. Matemáticas II*. Madrid: Editorial, SM.

APÓSTOL, T.M. (1982). *Análisis matemático*. Barcelona-Bogotá-Buenos Aires - Caracas - México - Río de Janeiro: Reverté.

ARTIGUE, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos, en Gómez, P. (ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática (un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, pp. 97-140. Méjico DC: Grupo editorial Iberoamérica.

ASIALA, M., BROWN, A., DEVRIES, D.J., DUBINSKY, E., MATHEWS, D. y THOMAS, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education II CBMS Issues in Mathematics Education,* 6, pp. 1- 32.

ASIALA, M., COTTRILL, J., DUBINSKY, E. y SCHWINGENDORF, K. (1997). The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivate. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(4) pp. 399-431.

ASPINWALL, L., SHAW, K.L. y PRESMEG, N.C. (1997). Uncontrollable mental imagery: graphical connections between a function and its derivate. *Educational Studies in Mathematics*, 33, pp. 301-317.

AZCÁRATE, C. (1990). «La velocidad: introducción al concepto de *derivada*». Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

BADILLO, E. (2003). «La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia». Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

BAKER, B., COOLEY, L. y TRIGUEROS, M. (2000). A calculus graphing schema. *The Journal for Research in Mathematics Education*, 31(5), pp. 557-578.

BECOS, E. y PENA, Z. (1998). *Matemáticas I*. Navarra: Oxford University Press España.

BOBILLO ARES, N.C. y GARCÍA MUÑIZ, M.A. (2000). *Matemáticas II. Órbita.* Madrid: Grupo Santillana de Ediciones.

BROWN, A., THOMAS, K. y TOLÍAS, G. (2002). Conceptions of Divisibility: Success and Understanding, en Campbell, S.R. y Zazkis, R. (eds.). *Learning and Teaching Number Theory*, pp. 41-82. Westport-Connecticut-London: Ablex Publishing.

CLARK, J.M., CORDERO F., COTTRILL, J., CZARNOCHA, B., DEVRIES, D.J., ST. JOHN, D., TOLIAS, G. y VIDAKOVIC, D. (1997). Constructing a Schema: The Case of the Chain Rule. *Journal of Mathematical Behavior*, 14(4), pp. 345-364.

COLERA, J., OLIVEIRA, M.J. y GARCÍA, R. (2000). *Matemáticas I*. Madrid: Editorial Anaya.

CONFREY, J. y COSTA, SH. (1996). A critique of the selection of «mathematical objects» as a central metaphor for advanced mathematical thinking. *International Journal of Computer for Mathematical Learning*, 1, pp. 139-168.

CONTRERAS, A., LUQUE, L., ORDÓÑEZ, L., ORTEGA, M. y SÁNCHEZ, C., (2000). Concepciones y obstáculos en la noción de derivada. Análisis de un manual de 2º de bachillerato-LOGSE. IX Congreso sobre Enseñanza de las Matemáticas «THALES». Cádiz: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

CZARNOCHA, B., DUBINSKY, E., PRABHU, V. y VIDAKOVICK, D. (1999). On theoretical perspectiva in undergraduate mathematics education research (1:95-1:110), en Zaslavsky, O. (ed.). *Proceedings of the XXIII Conference of the International Group for the PME.* Haifa: Israel.

DEMIDOVICH, B.P. (1976). *5000 problemas de análisis matemático*. Madrid: Paraninfo.

DÖRFLER, W. (2002). Formation of Mathematical objects as decision making. *Mathematical Thinking and Learning*, 4(4), pp. 337-350.

DUBINSKY, E. (1991). Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics, en Steffe, L.P. (ed.). *Epistemological Foundations of Mathematical Experiences*, pp. 160-202. Nueva York: Springer - Verlag.

ESPINOZA, L. y AZCÁRATE, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto de «límite de función»: una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias*, 18(3), pp. 355-368.

FERRINI-MUNDY, J. y GRAHAM, K. (1994). Research in calculus learning. Understanding limits, derivates and integrals, en Dubinsky y Kaput (eds.). *Research issues in undergraduate Mathematics Learning*, pp. 31-45.

FONT, V. (1999). «Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a las derivadas». Tesis doctoral. Universitat de Barcelona.

FONT, V. (2000). Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de f'(x). El caso de la función seno. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 25, pp. 21-40.

FONT, V. y ACEVEDO, J.I. (2003). Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las Ciencias*, 21(3), pp. 405-418.

GARCÍA, M. y LLINARES, S. (1996). El concepto de función a través de los textos escolares: reflexión sobre una evolución. *Qurrículum*, 10-11, pp. 103-115.

GONZÁLEZ, C., LLORENTE, J. y RUIZ, M.J. (1996/2003). *Matemáticas I. Matemáticas II*. Madrid: Editex.

MASON, J. y JONSTON-WILDER, S. (2004). *Fundamental Constructs in Mathematics Education.* RouthledgeFalmer -The Open University: Londres.

McDONALD, M.A., MATHEWS, D.M., y STROBEL, K.H. (2000). Understanding Sequences: A tale of two Objets. *Research in Collegiate Mathematics Education II CBMS Issues in Mathematics Education*, 8, pp. 77-100.

MEEL, D.E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática y la teoría

APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(3), pp. 221-271.

MORENO, M. y AZCÁRATE, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias*, 21(2), pp. 256-280.

ORTON, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14, pp. 235-250.

PIAGET, J. (1963). Las estructuras matemáticas y las estructuras operatorias de la inteligencia, en la colección Psicología y Educación. *La enseñanza de las matemáticas*, pp. 3-28. Madrid: Aguilar.

PIAGET, J. e INHELDER, B. (1978). *Psicología del niño* (8a. ed.) Madrid: Morata.

PIAGET, J. y GARCÍA, R. (1983, 1989). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México, España, Argentina, Colombia (Madrid): Siglo XXI.

SÁNCHEZ-MATAMOROS, G. (2004). «Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de la universidad sobre la noción matemática de derivada. (Desarrollo del concepto). Tesis doctoral. Universidad de Sevilla.

SIERRA VÁZQUEZ, M., GONZÁLEZ ASTUDILLO, M.T. y LÓPEZ ESTEBAN, C. (1999). Evolución histórica del concepto de *límite funcional* en los libros de texto de bachillerato y COU: 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias* 17(3), pp. 463-476.

SPIVAK, M. (1970, 1974). Calculus. Cálculo infinitesimal. Barcelona-Bogotá-Buenos Aires-Caracas-México-Rio de Janeiro: Reverté.

SFARD, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification – the case of function, en Harel, G. y Dubinsky, E. (eds.). *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy,* pp. 59-84. Washington, DC: MAA, Notes 25.

TALL, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking, en Tall, D. (ed.). *Advanced mathematical thinking.*

TALL, D. (1999). Reflections on APOS Theory in elementary and Advanced Thinking (1:111-1:118), en Zaslavsky, O. (ed.). *Proceedings of the XXIII Conference of the International Group for the PME.* Haifa: Israel.

TALL, D., THOMAS, M., DAVIS, G., GRAY, E. y SIMPSON, A. (2000). What is the object of the Encapsulation of a Process? *Journal of Mathematical Behavior*, 18(2), pp. 223-241.

ZANDIETH, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivate, en Dubinsky, E., Shoenfeld, A. H. y Kaput, J. (eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education IV CBMS Issues in Mathematics Education*, 8, pp. 103-127.

[Artículo recibido en febrero de 2005 y aceptado en octubre de 2005]