Educar, 17 (1990) 205-219

CONCEPCIONES ERRÓNEAS EN MATEMÁTICAS. REVISIÓN Y EVALUACIÓN DE LAS INVESTIGACIONES

José del Río Sánchez
I.C.E. U. de Salamanca

RESUMEN

En este artículo se revisan las investigaciones sobre las concepciones erróneas que poseen los estudiantes de Enseñanza Primaria y Enseñanza Secundaria acerca de los principales temas del curriculum de matemáticas. Se evalúan y se formulan sugerencias para posteriores trabajos.

ABSTRACT

This article examines research in to the erroneous conceptions thta students in Primary and Secondary Education have about the principal subjects in the mathematics programme. These conceptions are evaluated and suggestions are made for further studies.

Introducción

Los errores más frecuentes que cometen los estudiantes al realizar ciertas tareas escolares (contestación a preguntas, formulación de conjeturas, resolución de problemas o ejercicios, discusiones grupales, etc.) han dejado de ser exclusivamente sancionados para convertirse en el centro de interés de una línea de investigación muy importante tanto en el campo de la educación matemática como en el de otras materias, desarrolladas, sobre todo, desde hace 15 años. Estos errores son consecuencia de ciertas ideas o concepciones erróneas que normalmente se generan durante el propio proceso de aprendizaje, aunque, algunas existen ya en los estudiantes antes de que comience el proceso instructivo específico del tema afectado. La detección de concepciones erróneas, el análisis de sus causas y el estudio de su evolución a lo largo de los distintos niveles educativos ha sido objeto de numerosos trabajos. El interés didáctico de esta línea de investigación es enorme, sobre todo, para diseñar y aplicar estrategias instructivas que, dentro del modelo constructivista, aspiren a facilitar un aprendizaje significativo a los estudiantes. En los párrafos siguientes, resumimos los resultados obtenidos por las principales investigaciones que se han ocupado de este importante tema y formulamos las conclusiones pertinentes.

1. Concepciones erróneas en aritmética

Destacamos una investigación sobre números enteros y dos sobre fracciones.

Bell (1986b) se propuso identificar las concepciones erróneas sobre los números enteros en una muestra de 400 niños de 8-9 años y utilizó para ello varias entrevistas y una prueba escrita de 20 items que cubría todos los tipos básicos de problemas con una operación (suma o resta). Detectó las siguientes ideas erróneas:

1. *Subir es aumentar*: los niños confunden «ir hacia arriba» en una escala con «aumentar el número», sin darse cuenta de que en algunos contextos (listas de discos más vendidos, números negativos, etc.) una «subida» implica una «disminución» del (valor absoluto) del número.

2. *Ignorancia del signo negativo*: Sucede con frecuencia en la respuesta a preguntas como ésta: «Un día en Moscú la temperatura descendió 6° entre la salida del sol y el mediodía. A la salida del sol era de —7°. ¿Cuál era al mediodía?».

3. *Signo denota región*: Se refiere al hecho de que las variaciones en la región negativa de una escala son afectadas siempre con el signo menos; por ejemplo, respuestas como «bajó —7°» cuando se pregunta por la variación entre —9° y —2°.

4. *Fracaso en la inversión*: en los problemas donde es desconocido el estado inicial, los alumnos realizan una inversión del sentido del cambio expresado en el enunciado; por ejemplo: «El disco favorito de Sandra está 5 lugares más abajo de lo que estaba hace dos semanas. Durante la primera de estas dos semanas subió 3 lugares. ¿Subió o bajó la segunda semana? ¿Cuántos lugares?». Casi la mitad de los alumnos respondió que bajó o subió dos lugares.

CLEMENTS y DEL CAMPO (1987) se interesaron en estudiar el lenguaje que usan los niños para expresar sus ideas sobre fracciones y las relaciones con su habilidad para comprender el lenguaje formal tal como aparece en los libros de texto. Intentaron explorar las ideas sobre las fracciones originadas intuitivamente por el uso de las palabras del lenguaje coloquial o de la propia instrucción formal. En concreto, investigaron la concepción que poseen los niños de enseñanza primaria acerca de las fracciones 1/2, 1/4 y 1/3. Utilizaron 240 entrevistas y un test de lápiz y papel con 36 items que fue contestado por 1024 alumnos. Entre sus conclusiones, destacamos las siguientes:

1. La mayoría de los niños tiene una buena comprensión receptiva de 1/2 si por esto entendemos la habilidad para reconocerlo como la mitad de las figuras geométricas sencillas. No obstante, cuando el eje de simetría de la figura no es ni vertical ni horizontal, algunos alumnos de 2° no reconocieron la representación pictórica de 1/2.
2. La mayoría de los niños tuvieron dificultades para contestar a las preguntas sobre 1/4 a pesar del «conocimiento» de la noción «mitad de la mitad» debido a la escolarizacion. Por ejemplo, cuando se les presentó una figura dividida en cuatro partes y sólo se coloreó una de ellas, muchos alumnos pensaron que el diagrama representaba 1/3 porque asociaron la palabra «tercio» con «tres» ya que eran tres las zonas no coloreadas. Sólo en 5° curso algunos niños parecen haber desarrollado una idea correcta de la representación de 1/4 en figuras sencillas como círculos, por ejemplo.
3. Aunque los niños saben cómo repartir equitativamente un pequeño número de objetos entre tres personas cuando el reparto es exacto, sin embargo, en contextos continuos, no identifican correctamente la unidad entera y, por lo tanto, son incapaces de hacer las particiones correspondientes a 1/3.
4. En cuando al orden en que los niños adquieren los conceptos de 1/2, 1/4 y 1/3, éste depende de los contextos (discreto y continuo) y del tipo de comprensión (receptiva o expresiva).

Complementando el estudio anterior, TATSUOKA (1984) se ocupó de examinar los errores cometidos en los algoritmos de suma y resta de fracciones por 600 estudiantes de enseñanza secundaria. He aquí algunos de sus resultados más interesantes:

1. La ignorancia de la fracción en las operaciones con números mixtos; por ejemplo:

$$4\ 7/12 - 2\ 4/12 = 2$$

2. Consideración de que el numerado y el denominador son elementos

independientes en una fracción y, por lo tanto, puede operarse con ellos aisladamente, por ejemplo:

$$5/4+3/2=8/6 \text{ o } 3/5-1/10=2/5$$

3. Aprendizaje memorístico de las reglas lo que produce fallos frecuentes; por ejemplo, en una suma de fracciones con denominadores distintos, múltiplican los denominadores y suman los numeradores.

4. Incomprensión del significado «racional» del cero y del uno que se manifiesta en errores como los siguientes:

$$2/3-2/3=1;\ 3/4-3/8=0/4=4;\ 6/7-4/7=2/0=2$$

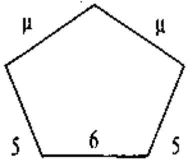
2. Concepciones erróneas en álgebra

Reseñamos en este párrafo tres investigaciones, hasta cierto punto complementarias, que configuran una buena panorámica del trabajo en este campo. La primera (Booth, 1982) utiliza los errores en álgebra previamente detectados por el programa CSMS («Concepts in Secondary Mathematics and Science»; Hart, 1981). Mediante 72 entrevistas y un test de lápiz y papel pasado a 1.000 alumnos de enseñanza secundaria, el autor identifica cuatro áreas de dificultad:

1. *Interpretación de letras*: los estudiantes frecuentemente no comprenden que las letras representan números y que el número representado puede tener un único valor (como en $x+2=5$) o infinitos valores (como en $x+y=y+x$ o $x+1=0$).

2. *Formalización y simbolización del método algebraico de resolución de problemas*: los alumnos no utilizan o no comprenden o cometen errores en la resolución algebriaca de problemas porque no simbolizan ni formalizan los métodos usados al resolver problemas aritméticos.

3. *Conjunción en la suma algebraica*: los estudiantes no reconocen expresiones aditivas del tipo $n+3$ o $2+a$ como resultados y tienden a fusionarlas en las formas $3n$ o $2a$; por ejemplo, para muchos el perímetro de la figura



es 2u556 o 2u16 y el resultado de sumar 4 con 3n es 3n4 o 7n.

4. *Uso de paréntesis*: Los alumnos piensan que no es necesario utilizar los paréntesis pues las operaciones deben realizarse en el mismo orden en que se escriben y, en todo caso, el resultado siempre es el mismo.

Un grupo de autores españoles (GRUPO AZARQUIEL, 1987) pasaron una prueba escrita a 182 alumnos de 1° de BUP para hacer un catálogo ordenado de los errores en temas como operaciones con números y letras, ecuaciones, sistemas y problemas de posible resolución algebraica. Los errores detectados caen, en general, dentro de las cuatro áreas de dificultad indicadas antes por BOOTH. Posteriormente realizaron entrevistas clínicas a algunos alumnos con el fin de profundizar en las conductas erróneas y buscar las posibles hipótesis que las expliquen. Para estos autores, los procesos mentales que conducen a este tipo de errores serían los siguientes:

1. *Memorización de reglas*: tendencia a funcionar utilizando siempre una regla establecida.
2. *Generalización abusiva*: utilización de reglas conocidas fuera de su contexto de validez.
3. *Uso indebido del signo igual*: los estudiantes conciben el signo igual como una acción que debe llevar a un resultado en vez de considerarlo como un equilibrio manipulable en ambos sentidos.
4. *Reducción de campo*: los alumnos prescinden de algunas condiciones y se quedan sólo con las que son relevantes para el sujeto.
5. *Necesidad de clausurar*: reducción de las situaciones a términos más simples y conocidos.
6. *Traducción literal de enunciados*: elaboración de la expresión simbólica en el mismo orden en que aparece en el enunciado coloquial.

Completamos estos dos trabajos exponiendo algunos de los resultados obtenidos por OPPENHEIM (1987) al estudiar los errores en «aritmética generalizada» mediante un test de 135 items contestado por 140 jóvenes de enseñanza secundaria. En el área de la *interpretación de letras*, encontró que, aunque muchos estudiantes reconocían que las letras representaban números, sin embargo valoraban las expresiones en términos de números particulares; por ejemplo:

1. Para decir si A—B=0 es una expresión verdadera no basta con saber que A es igual a B sino que es necesario conocer los valores concretos de A y de B.

3. N(1/N) no es 1 sino que depende del valor de N.

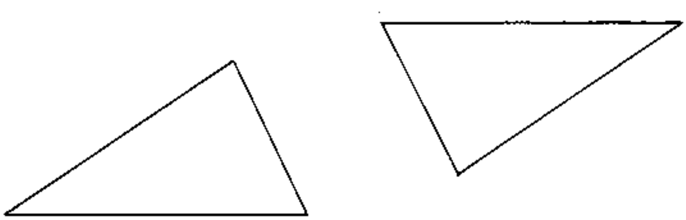
En el área de la *simbolización de problemas*, encontró que muchos alumnos escogen la expresión $x > y$ para representar la cantidad en que x excede a y, y 2N/3N o N:2/3 o 2/3:N para representar 2/3 de un número N. Asimismo, casi la mitad de los alumnos infiere de $C > D$ y $E > F$ la expresión $C/E > D/F$ (en lugar de $C + E > D + F$).

3. Concepciones erróneas en geométrica

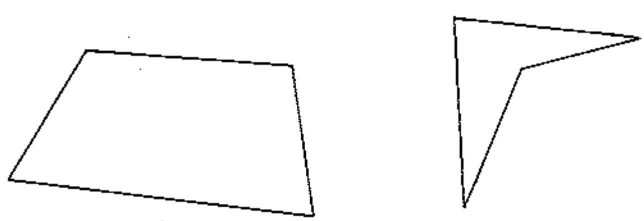
Seleccionamos de nuevo cuatro investigaciones representativas de los estudios que se han realizado en este campo.

Hershkowitz (1987) investigó el «grado» de asimilación de algunos conceptos básicos de geometría en alumnos de enseñanza primaria y secundaria (572), estudiantes de una escuela de profesorado (142) y profesores de enseñanza primaria en ejercicio (25). En la identificación y construcción de elementos geométricos constató errores como los siguientes:

1. No reconocimiento de triángulos rectángulos en figuras como:



2. No reconocimiento de las figuras siguientes como cuadriláteros:



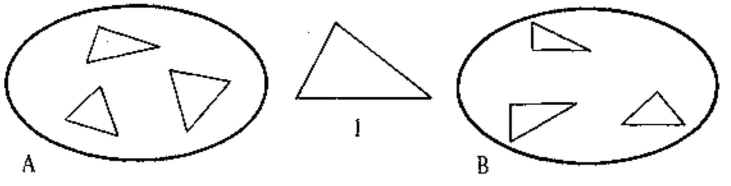
3. Concepción de las alturas como segmentos «interiores» al triángulo.

El autor constató que algunos de estos errores, como el referido a los cuadriláteros, disminuyen con el nivel de escolarización. Otros, como en el relativo al triángulo rectángulo, son compartidos de modo paralelo por los tres grupos que formaban la muestra (pág. 241). Atribuye estos comportamientos a que los estudiantes se dejan llevar en las tareas de identificación y construcción por los *prototipos*, es decir, por aquellos super-ejemplos que son los más populares de un concepto dado, y estas representaciones empobrecen el concepto porque, con frecuencia, ocultan alguno de sus atributos críticos.

En relación también con la formación y adquisición de conceptos geométricos, MEDECI, SSPERANZA y VIGHI (1986) indagaron qué características geométricas son elegidas preferentemente para efectuar los procedimientos de abstracción y cuál es el papel del éxito geométrico. Sobre una muestra de 388 estudiants de 9-10 años, mediante un cuestionario de 11 items, obtuvieron los siguientes resultados:

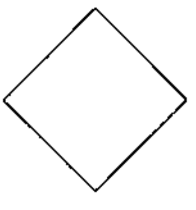
1. El número de lados de un polígono es un criterio de clasificación más intuitivo que el paralelismo de sus lados, el número de ángulos rectos o la equisuperficialidad.
2. Sin embargo, cuando se trata de triángulos, la existencia de un ángulo recto es un criterio de clasificación determinante; por ejemplo, a la pregunta:

¿Pondrías la figura 1 en A o en B?



el 83 % de los alumnos responde que en B. Este resultado contrasta con el obtenido por HERSHKOWITZ (1987) pues supone un reconocimiento generalizado del triángulo rectángulo en posición no prototípica. Los mismos autores se sorprnden de este resultado que atribuyen a la actividad específica desarrollada en clase para reconocer un ángulo recto incluso cuando no está dibujado con los lados paralelos a los bordes de la hoja.

3. Como contraste, sólo la tercera parte de los alumnos reconoce que esta figura



es un cuadrado; la mitad lo llama *rombo*, aunque las respuestas varían notablemente de clase en clase según que, en ellas, los alumnos hubieran trabajado o no con las transformaciones geométricas.

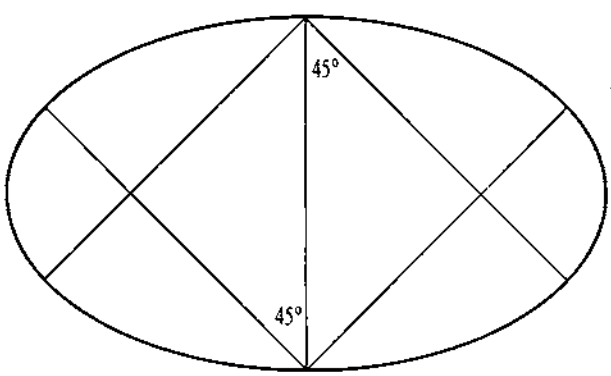
4. La presencia de un «nombre propio oficial» que se puede atribuir a una figura geométrica influye a menudo en el criterio con el que los niños agrupan o asocian figuras. Sin embargo, se notan dificultades al describir las figuras cuando no se pueden denotar con nombres conocidos.

5. El hecho de que muchos libros de texto, para cada tipo de figura, presenten un solo ejemplo gráfico conduce a que *esa* figura concreta acabe por tomarse como *modelo estándar* del concepto. Los niños suelen ampliar el modelo estándar sólo con traslaciones u homotecias, lo que es fuente de numerosos errores. Estas ideas corroboran las anteriormente mencionadas de HERSHKOWITZ (1987) sobre los *prototipos*.

DEL RÍO (1989) investigó las ideas previas que tienen sobre las *cónicas* los alumnos de 3° de B.U.P. (17 años) antes de comenzar su estudio sistemático. Con una muestra de 305 estudiantes del distrito universitario de Salamanca y mediante un cuestionario de 40 items, constató que la mayor parte del conocimiento que poseen los alumnos sobre las cónicas es de tipo *físico* y *social* pero no *lógico-matemático* en el sentido que da PIAGET a estos términos, pues solamente han realizado una abstracción empírica (conocimiento físico) y han asignado a esas curvas el nombre convencionalmente aceptado en el entorno socio-cultural (conocimiento social). Como consecuencia, las definiciones de elipse, hipérbola y parábola, aceptadas de modo casi unánime, están constituidas por una sucesión de propiedades obtenidas perceptualmente que intentan describir por exhaustión la *forma* de la curva.

Las principales *ideas previas erróneas* detectadas fueron las siguientes:

1. Un óvalo construido con cuatro arcos de circunferencia, como el de la figura 5, es una elipse.



2. Un arco de circunferencia y dos semirrectas tangentes en sus extremos, como muestra la figura 6, forman una parábola.

3. Todas las cónicas pueden dibujarse perfectamente empleando sólo la regla y el compás.

4. Los tres tipos de cónicas (elipse, hipérbola y parábola) son independientes no guardan relación estructural entre sí, ni directa ni indirecta (a través de un elemento *externo* como podría una superficie cónica).

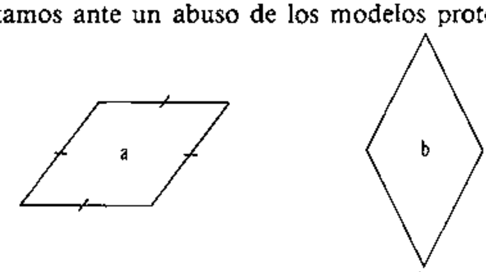
5. Una parábola (y, en general, cualquier curva) no es un objeto geométrico independiente del sistema de referencia; por el contrario, primero existe el sistema de referencia como algo dado *a priori* y después la curva completamente *encadenada* a él; esto implica que una curva no tiene infinitas ecuaciones dependiendo del sistema acogido sino una sola.

6. Puede trazarse dos tangentes distintas en cada punto de una cónica.

7. En general, los alumnos perciben que las cónicas están poco conectadas con la realidad y los pocos casos en que advierten su presencia tienen características.

Otros trabajos investigan las ideas que tienen los estudiantes sobre el «método» matemático y su naturaleza. Destamos el trabajo de VINNER y ZUR (1987) que examina si los estudiantes de los cuatro últimos cursos de la enseñanza secundaria han apreciado el aspecto de la geometría como un sistema deductivo y si han adquirido algunas habilidades específicas para el aprendizaje de la geometría como tal sistema deductivo. Utilizaron un cuestionario respondido por 201 alumnos que constaba de 6 partes, cada una de las cuales analizaba un aspecto particular de este aprendizaje. Entre las conclusiones a que llegaron los autores, destacamos las siguientes:

1. La habilidad para reconocer y dibujar figuras geométricas sencillas es alta; no obstante, casi la cuarta parte de los alumnos no reconocen que la figura a) es un rombo a pesar de señalarles mediante un segmento la igualdad de sus lados; en cambio, prácticamente todos reconocen la figura b) (de nuevo estamos ante un abuso de los modelos prototípicos).



2. Un número variable de estudiantes (entre 1/3 y 2/3, dependiendo del curso) comprenden la naturaleza minimalista de la definición matemática,

esto es, que el conjunto de atributos críticos del concepto que se recogen en la definición debe ser mínimo. El resto de los estudiantes incrementa este conjunto con propiedades que son deducibles o que no son atributos del concepto. Así, por ejemplo, aceptan como definiciones matemáticas las siguientes:

a) Un triángulo isósceles es un triángulo con dos lados y dos ángulos congruentes.
b) Los paraleloramos son cuadriláteros con lados opuestos paralelos e iguales.
d) Angulos adyacentes son aquéllos que tienen el vértice y un lado común y además suman 180°.

3. En una lista de frases sobre geometría elemental, más de la mitad de los alumnos reconocen cuáles deben ser probadas y cuáles no. En este último caso, la mayoría argumenta que son definiciones o axiomas. Se observa, sin embargo, que algunos consideran la definición de líneas paralelas («aquéllas que no se cortan») como un axioma.
4. La habilidad para descomponer proposiciones en «hipótesis» y «tesis» depende del contenido, es decir, varía según la experiencia previa con los conceptos implicados o con proposiciones similares.

Los autores señalan que encontraron diferencias entre los cuatro niveles de escolaridad, en el sentido de que el porcentaje de respuestas correctas aumentaba con el grado, pero estas diferencias no fueron drásticas.

4. Concepciones erróneas en análisis

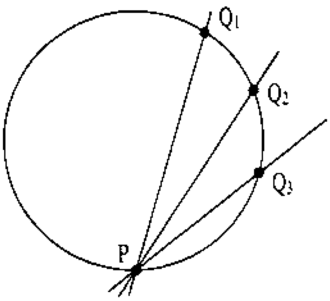
Revisamos algunos estudios sobre gráficas de funciones y sobre cálculo diferencial e integral. Entre los primeros destaca el realizado por un grupo de investigadores ingleses (BELL, BREKKE y SWAN, 197; SAN, 1989) que se propusieron identificar las concepciones erróeas que tienen los alumnos de enseñanza primaria sobre las gráficas de funciones (interpretación y construcción). Las principales ideas erróneas que encontraron son las siguientes:

1. Identificación de una gráfica con el dibujo de una situación.
2. Incomprensión de que las gráficas muestran una relación entre *dos* variables.
3. Confusión de intervalos y gradientes con *puntos* particulares.
4. Fijación en uno o dos factores y exclusión de los restantes al construir una gráfica.

CLEMENT y otros (1985) volvieron a encontrar en la enseñanza secundaria el primero de estos errores y una variante del tercero: confusión de la pendiente (rapidez de variación) con *puntos* más altos o puntos más bajos de la gráfica. Al menos en el primer caso nos encontramos ante una idea previa errónea (gráfica=dibujo de una situación) resistente al cambio tras el proceso instructivo habitual.

En el campo del cálculo elemental, destaca la investigación de ORTON (1983a y b) realizada con dos grupos de estudiantes: uno de enseñanza secundaria (n=60) y otro de enseñanza universitaria (n=50). Entrevistó dos veces a cada alumno durante una hora aproximadamente empleando un test de 38 items. En lo referente a concepciones erróneas, he aquí los resultados más interesantes:

1. Tratamiento del símbolo del infinito como un símbolo algebraico.
2. Las sucesiones crecientes (como $3n/n+1$) tienden a infinito.
3. Incapacidad para apreciar cuándo el cálculo de un límite resuelve un problema como, por ejemplo, el cálculo del área bajo una curva mediante el límite de las aproximaciones rectangulares.
4. Predominio de algoritmo sobre la comprensión conceptual al calcular por integrales el área bajo una curva; por ejemplo, ignoran la condición de que la función debe estar acotada.
5. En la siguiente figura, cuando los puntos Q_n se aproximan indefinidamente a P, las secantes llegan a convertirse en el punto P.



6. Confusión de la derivada en un punto x con la tasa de variación media en un intervalo (x, x+h).
7. Fracaso en la interpretación de una derivada nula o negativa en un punto.

La extensión de estas ideas erróneas es diferente en los dos grupos pero no siempre a favor de los estudiantes de enseñanza secundaria. ARTIGUE y VIENNOT (1987) confirman con estudiantes universitarios de matemáticas el error cuarto: prevalecen los procedimientos algorítmicos sobre la comprensión del concepto que está en juego.

5. Conclusiones

En primer lugar, observamos que algunas investigaciones se limitan a detectar actuaciones erróneas de los estudiantes, otras descubren las concepciones que subyacen y otras formulan hipótesis sobre el mecanismo que las causa.

En segundo lugar, se aprecia que muchas investigaciones no estudian con detalle la evolución de la concepción errónea a través de los distintos niveles educativos y, si lo hacen, no indican qué tipo de currículo han seguido los estudiantes, particularmente en lo que se refiere a la metodología didáctica. Y este aspecto es muy importante de cara al diseño de estrategias instructivas que permitan superar tales concepciones. Además, rara vez se indica si alguna de estas concepciones proviene de una *idea preinstruccional* que no ha sido cambiada. Puesto que una concepción errónea está ligada al tipo de comprensión del concepto implicado, creemos que, en estos estudios, debe investigarse como evoluciona esta comprensión a partir de las posibles ideas previas que ya posean los sujetos sobre el mismo.

Por tanto, con ser muy importante lo realizado hasta ahora, sugerimos para posteriores investigaciones la necesidad de incluir los siguientes elementos:

1. Detección y extensión de una actuación errónea a lo largo de uno o varios ciclos educativos especificando el tipo de currículo seguido.
2. Descubrimiento de la concepción errónea subyacente y cómo evoluciona con el nivel de escolarización.
3. Análisis de los mecanismos causales de tales concepciones en cada nivel educativo (idea previa errónea, inmadurez psicológica, estrategia instructiva deficiente, etc.).

A partir de investigaciones que reúnan estos elementos, estaremos en condiciones óptimas para diseñar, al menos en el ámbito donde se hayan realizado procesos de intervención educativa que realmente sean eficaces contra la persistencia de tales concepciones erróneas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLWOOD, C.M. «Use of knowledge and error detection when solving statistical problems», en Vermandel (Ed.): *Proceeding of the sixth International Conference for the Psychology of Mathematical Education*, Universitaire Instelling Antwerpen, Bélgica, 1982.

ARTIGUE, M.; VIENNOT, L. «Some aspects of student's conceptions and difficulties about differentials» en NOVAK, J. (Ed.): *Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics. Proceeding of the International Seminar (2nd).* Cornell Univ., Ithaca, NY, v. III, pp. 1-8. 1987.

BELL, A. «Treating Student Misconceptions». *Australian Mathematics Teacher*, 38(3) 11-13. 1982.

BELL, A. «Shell Center for Mathematical Educations: Estudios de enseñanza por diagnóstico». *Enseñanza de las Ciencias*, 4(1), pp. 86-89. 1986a.

BELL, A. «Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros». *Enseñanza de las Ciencias*, 4(3), pp. 199-208. 1986b.

BLL, A.; BREKKE, G.; SWAN, M. «Diagnostic Teaching». *Mathematics Teaching*, 119, 56-59. 1987.

BOOTH, L.R. «Developing a teaching module in beginning Algebra», en A. Vermandel (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Universitaire Instelling, Antwerp, Bélgica, 1982.

BORASI, R. «Errors in the Enumeration of Infinite Sets». *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 7(3-4), pp. 77-89. 1985.

CLEMENT, J. y otros. *Adolescents' Graphing Skills: A Descriptive Analysis.* Technical Education Research Center, Cambridge, Mass. 1985.

CLEMENTS, M.A.; DEL CAMPO, G. «Fractional understanding of fractions: Variations in children's understanding of fractional concepts, across embodiments (Grades 2 through 5)» en NOVAK, J. (Ed.): *Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics. Proceedings of the International Seminar (2nd)*, Cornell Univ., Ithaca, NY, v. III, pp. 98-119. 1987.

CLOSE, G.S. *Children's Understanding of Angle at the Primary/Secondary Transfer Stage.* Polytechnic of the South Bank, London (England). 1982.

DEL RÍO, S.J. «*Ideas previas en matemáticas: una investigación sobre las cónicas*». *Studia Paedagogica*, 21, 59-96. 1989.

ERNEST, P. «Mathematical Induction: A Pedagogical Discussion». *Educational Studies in Mathematics*, 15(2) 173-89. 1984.

FOXMAN, D.; RUDDOCK, G. «Concepts and Skills: Line Symmetry and Angle». *Mathematics in School*, 13, 9-13. 1984.

GRUPO AZARQUIEL. «Análisis de los errores en la adquisición de los conceptos matemáticas» en A. Alvárez (comp.): *Psicología y Educación. Realizaciones y tendencias actuales en la investigación y en la práctica*, Visor-MEC, Madrid. 1987.

HART, K.M. (ed.) *Children's Understanding of Mathematics 11-16*, Murray, Londres, 1981.

HELM, H.; NOVAK, J. (Ed.). *Misconceptions in Science and Mathematics. Proceedings of the International Seminar (Cornell University, Ithaca, June, 1983)*. Cornell University, Ithaca, New York. 1983.

HERSHKOWITZ, R. «The acquisition of concepts and misconceptions in basic Geometry or when «a little learing is dangerous thing», en NOVAK, J. (Ed.): *Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics. Proceedings of the International Seminar (2nd)*, Cornell Univ., Ithaca, NY, v. III, pp. 238-251. 1987.

HIRSTEIN, J.; LAMB, CH.; OSBORNE, A. «Student Misconceptions About Area Measure». *The Aritmetic Teacher*, 25(6), 10-16. 1978.

KAVETT, H.; PHILLIS, F. «Square Dealign». *School Science and Mathematics*, 78 (5), 419-24. 1978.

LAMB CH.E.; HIRSTEIN, J.J. «Point Counting in Measurement —or— What It the Unit?». *School Science and Mathematics*, 79 (2) 168-71. 1979.

MEDECI, D.; SPERANZA, F.; VIGHI, P. «Sobre la formación de los conceptos geométricos y sobre el léxico geométrico». *Enseñanza de las Ciencias*, 4(1), 16-22. 1986.

MORENO, A. y otros. «Un redondel con muchas cosas dentro. Eso es un conjunto» *Infancia y aprendizaje*, 30, 69-79. 1985.

NOVAK, J.D. *Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics. Proceedings of the International Seminar (2nd, Ithaca, New York, July 26-29, 1987), vol. III*. Cornell University, Ithaca, New York, 1987.

OPPENHEIM, J.R. «Patterns of Mathematical misconceptions as revealed on test of Algebra readiness», en NOVAK, J. (Ed.): *Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics. Proceedings of the International Seminar (2nd)*, Cornell Univ., Ithaca, NY, V. III, pp. 361-369. 1987.

ORTON, A. «Student's Understanding of Integration». *Educational Studies in Mathematics*, 14(1), 1-18. 1983a.

ORTON, A. «Student's Understanding of Differentiation». *Educational Studies in Mathematics*, 14(3), 235-50. 1983b.

SELDEN, A.; SELDEN, J. «Errors and Misconceptions in College level Theorem proving», en NOVAK, J. (Ed.): *Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics. Proceedings of the International Seminar (2nd)*. Cornell Univ., Ithaca, NY, v. III, pp. 457-470. 1987.

SHAUGHNESSY, J.M. «Misconceptions of probability: from systematic errors to systematic experiments and decision», en *Teaching Statistics and Probability. Yearbook.* NCTM, 90-99. 1981.

SHAUGHENESSY, J.M. «Misconceptions of probability, systematic and other-wise; teaching probability and statistics so as to overcome some misconceptions», en *Proceedings of ICOTS*, Universidad de Sheffield, vol II. 784-801. 1982.

SWAN, M. *El lenguaje de funciones y gráficas.* Universidad del País Vasco, Servicio Editorial, Bilbao, 1989.

TATSUOKA, K.K. *Analysis of Errors in Fraction Addition and Subtraction Problems. Final Report.* National Inst. of Education, Washington, D.C. 1984.

VINNER, S.; ZUR, CH. «Some aspects of Geometry as a Deductive System in High School Students», en NOVAK, J. (Ed.): *Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics. Proceedings of the International Seminar (2nd).* Cornell Univ., Ithaca, NY, v. III, pp. 551-563. 1987.

WOODWARD, E. «Heidi's Misconception about Area and Perimeter». *School Science and Mathematics*, 82(4) 332-334. 1982.

WOODWARD, E.; BYRD, F. «Area: Included Topic, Neglected Concept». *School Science and Mathematics*, 83 (4), (343-347).