ANÁLISIS DE LAS ACTUACIONES DE ALUMNOS DE 3º DE BUP EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE COMPARAN ÁREAS DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

COBO LOZANO, P.*
IB Pius Font i Quer. Manresa.

SUMMARY

This paper is a case study which intends to analyze and compare the performance of two pairs of 3rd BUP students when solving two mathematics problems in which the areas of geometric figures are related. The analysis and comparison of the performance of both pairs has been conducted from a two-fold perspective, the knowledge that students use during the problem-solving process, and the control they show over this process. For this, the protocol analysis technique has been used, by means of video recordings of the problem-solving processes.

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas en el ámbito escolar tiene unas características propias que la diferencian de su consideración en otros contextos, tanto por lo que se refiere a las investigaciones que sobre ella se llevan a cabo como a su enseñanza.

1) Así pues, mientras la introspección es un método de observación válido cuando los resolutores expertos tratan de analizar sus propios procesos de pensamiento, no lo es en el caso escolar, precisamente por la dificultad que tienen los alumnos de estas edades para analizar e informar sobre sus propias experiencias cognitivas (Postic y De Kelete, 1988). Por lo tanto, el análisis de las citadas experiencias ha de hacerse considerando métodos alospectivos.

2) La certeza de que determinadas preguntas –como por ejemplo: «¿Utilizan los alumnos, durante los procesos de resolución[1], todos sus conocimientos sobre los conceptos y procedimientos involucrados en los problemas que resuelven?», o bien «¿Controlan sus procesos de pensamiento eligiendo los enfoques más adecuados y verificando tanto el proceso como la solución final?»– no tengan respuestas válidas para cualquier alumno hace que nos inclinemos por metodologías observacionales a la hora de investigarlas.

3) La necesidad –cada vez más acuciante– de adaptar los métodos instructivos a las características específicas de cada alumno nos obliga a hacer análisis detallados de sus procesos cognitivos. Ahora bien, esos análisis sólo es posible hacerlos observando las actuaciones de los alumnos en la resolución de problemas.

Con las actuaciones observadas se pueden establecer modelos de actuación locales –referidos a contenidos y alumnos concretos y con la pretensión de que sean adecuados sólo a los fenómenos observados (Puig, 1993)– que nos sirvan para interpretar las formas de pensar de alumnos con características definidas y para simular su conducta en las situaciones educativas que se estudien.

La observación y el análisis de las actuaciones de los alumnos en la resolución de problemas, los limitamos, en este trabajo, a algunos aspectos cognitivos que especificamos más adelante, centrando nuestra atención en la comunicación verbal entre los alumnos. Por tanto, la interpretación de los aspectos de la cognición que consideramos, la hacemos a través de «los rasgos propios de los intercambios comunicativos en una conversación: se explica, se convence...» (Puig, 1993, p. 56), pudiéndose interpretar dichos intercambios, según Schoenfeld (1985b), como las discusiones que los alumnos hacen internamente cuando resuelven individualmente un problema.

Para explicar la actuación de los alumnos en la resolución de problemas, Schoenfeld (1985a) habla de los componentes del conocimiento y de la conducta –diferenciando entre recursos, estrategias heurísticas, control y sistemas de creencias y, más tarde (Schoenfeld, 1992), prácticas–, y explica el fracaso de un resolutor al resolver un problema por la falta de alguno de esos componentes.

A pesar de que en el presente trabajo tenemos en cuenta algunos de los aspectos cognitivos considerados por Schoenfeld, nos gusta más la terminología empleada por Callejo (1994), que diferencia la cognición –base de conocimientos y metaconocimientos– de los afectos, situándolos todos en un continuo, donde las creencias están próximas a la cognición –Garofalo, Lester (1985) y Schoenfeld (1987) las consideran como componentes de la metacognición–, pero las actitudes y las emociones se aproximan más a los afectos.

Los aspectos cognitivos que contemplamos en esta investigación se pueden resumir en:

a) Base de conocimientos

La base de conocimientos –que, en palabras de Callejo (1994), es «el conjunto de conocimientos que están disponibles en la memoria del sujeto para ser utilizados: hechos, definiciones, algoritmos, métodos de resolución...» (p. 34)– tendrá, para nosotros, una importancia especial porque los conocimientos de los alumnos sobre los contenidos de los problemas propuestos pueden ser relevantes para su resolución. Los aspectos de la base de conocimientos que analizamos abarcan:

i) los conceptos que los alumnos utilizan sobre las figuras geométricas involucradas –el triángulo, el rectángulo y el hexágono– y las formas de manejarlos en las argumentaciones que hacen durante la resolución;

ii) los enfoques que identifican y las técnicas que utilizan relativas a la clase de problemas que resuelven –descomposición de figuras en otras más sencillas, medidas indirectas de áreas (aplicación de fórmulas, equivalencia de figuras), etc.–, que relacionamos con las líneas del espacio básico de cada problema[2].

b) Metaconocimientos

Schoenfeld (1987) da a la metacognición un significado semejante a «reflexión sobre la cognición» o «pensamiento sobre nuestro propio pensamiento» y diferencia en ella tres categorías: los conocimientos sobre sus propios procesos de pensamiento, el control o autorregulación y las creencias e intuiciones. Los aspectos metacognitivos que analizamos tienen que ver con el control que los alumnos ejercen sobre sus procesos cognitivos, y podemos resumirlos en las siguientes preguntas:

i) ¿Cómo seleccionan el enfoque que implementan?

ii) ¿Explicitan las planificaciones y las decisiones de implementarlas?

iii) ¿Hacen revisiones locales de las etapas de la resolución (análisis, exploración, planificación e implementación), del estado de sus conocimientos relacionados con los contenidos matemáticos de los problemas y de los resultados locales obtenidos para conseguir objetivos intermedios?

iv) ¿Verifican tanto el proceso como los resultados a los que han llegado?

En resumen, la investigación que presentamos es un estudio de casos que pretende responder a las preguntas del apartado 2, en unas condiciones y en un contexto concretos:

– Observamos y comparamos las actuaciones de dos parejas de alumnos seleccionadas teniendo en cuenta el rendimiento académico de sus componentes.

– La observación de las actuaciones la hacemos en la resolución, por parte de cada pareja, de dos problemas de matemáticas que comparan áreas de figuras geométricas con unas características específicas que mostramos en las páginas siguientes.

– Analizamos –mediante la técnica de análisis de protocolos– cada proceso de resolución, haciendo hincapié en los conocimientos que utilizan y en el control que ejercen sobre sus propios procesos cognitivos.

Mostramos, al final de este artículo, algunas implicaciones didácticas que nos han sugerido los análisis realizados, con la finalidad de que puedan ser tenidas en cuenta en la elaboración de actividades de enseñanza sobre la resolución de problemas.

METODOLOGÍA

Para desarrollar la investigación seguimos una metodología de trabajo que resumimos a continuación.

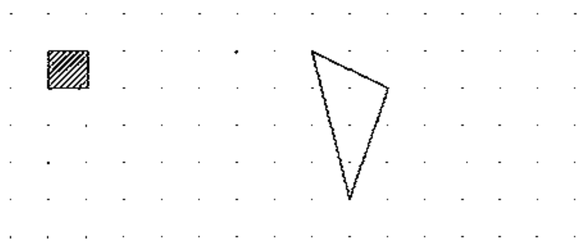
a) Problemas considerados

Las pruebas y grabaciones previas realizadas con diversos problemas nos han permitido elegir dos de la misma naturaleza –los dos comparan áreas de figuras geométricas–, pero que en su resolución involucren niveles de conocimientos diferentes, tengan varias posibilidades de resolución y su forma de presentación sea diferente. El primero exige una presentación gráfica, el segundo lo presentamos de forma verbal.

El análisis de las características de los dos problemas considerados, por lo que se refiere a la implementación de posibles enfoques y a sus contenidos matemáticos (Cobo, 1995), se facilita a partir de sus espacios básicos (Tablas I y II), en los que identificamos algunas de las líneas que se pueden seguir para resolverlos.

Problema 1

La zona rayada de la figura tiene una unidad cuadrada de área. Calcula, en unidades cuadradas, el área del triángulo.



Problema 2

Si en un hexágono regular se unen alternativamente –uno sí y otro no– tres de sus vértices, se obtiene un triángulo. Buscar la relación entre el área del hexágono y la del triángulo.

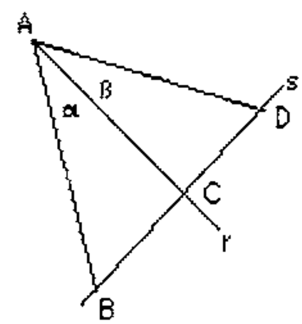
b) Características de los alumnos que han participado

La selección de las dos parejas de alumnos de 3° de BUP que participaron en esta experiencia, la hicimos teniendo en cuenta su rendimiento académico en la asignatura de matemáticas y los conocimientos sobre los contenidos matemáticos implicados en las resoluciones de los problemas 1 y 2, de la siguiente manera: los alumnos GT y MC que formaron una de las parejas fueron seleccionados entre 10 alumnos –con calificaciones altas (notable o excelente) en los dos primeros cursos de BUP y en la primera evaluación del 3°– tras obtener resultados similares en una prueba de valoración de conocimientos sobre los contenidos matemáticos involucrados en las diversas formas de resolver cada uno de los problemas 1 y 2 (Cobo, 1995); los alumnos MB y SP que formaron la otra pareja fueron seleccionados de la misma forma, pero entre 10 alumnos que habían obtenido calificaciones bajas (muy deficiente o insuficiente) en la primera evaluación de 3° de BUP, y además tenían las matemáticas de 2° de BUP suspendidas.

De los resultados de ambas parejas en la citada prueba (resuelta por los alumnos, aproximadamente, con un mes de antelación a la resolución conjunta de los problemas 1 y 2), resumimos a continuación los que aparecen involucrados en los procesos de resolución que después analizaremos.

• Así pues, GT y MC identificaron al menos dos fórmulas para calcular el área de un triángulo –entre ellas la fórmula de Herón (GT además conocía la fórmula que utiliza dos lados y el ángulo comprendido)–; representaron correctamente las alturas de diferentes triángulos; tenían claro el concepto de hexágono regular y supieron representar su circunferencia circunscrita; expresaron la igualdad de los lados de un hexágono regular con los segmentos que unen el centro con sus vértices, identificando como equiláteros los triángulos así obtenidos; y justificaron la igualdad de los triángulos ABC y ACD de la figura 1 –en la que se supone que la recta *r* es bisectriz del ángulo A y es perpendicular a *s*–, explicitando la rectangularidad de ambos, la igualdad de los ángulos *α* y ß y la coincidencia del lado AC.

Figura 1



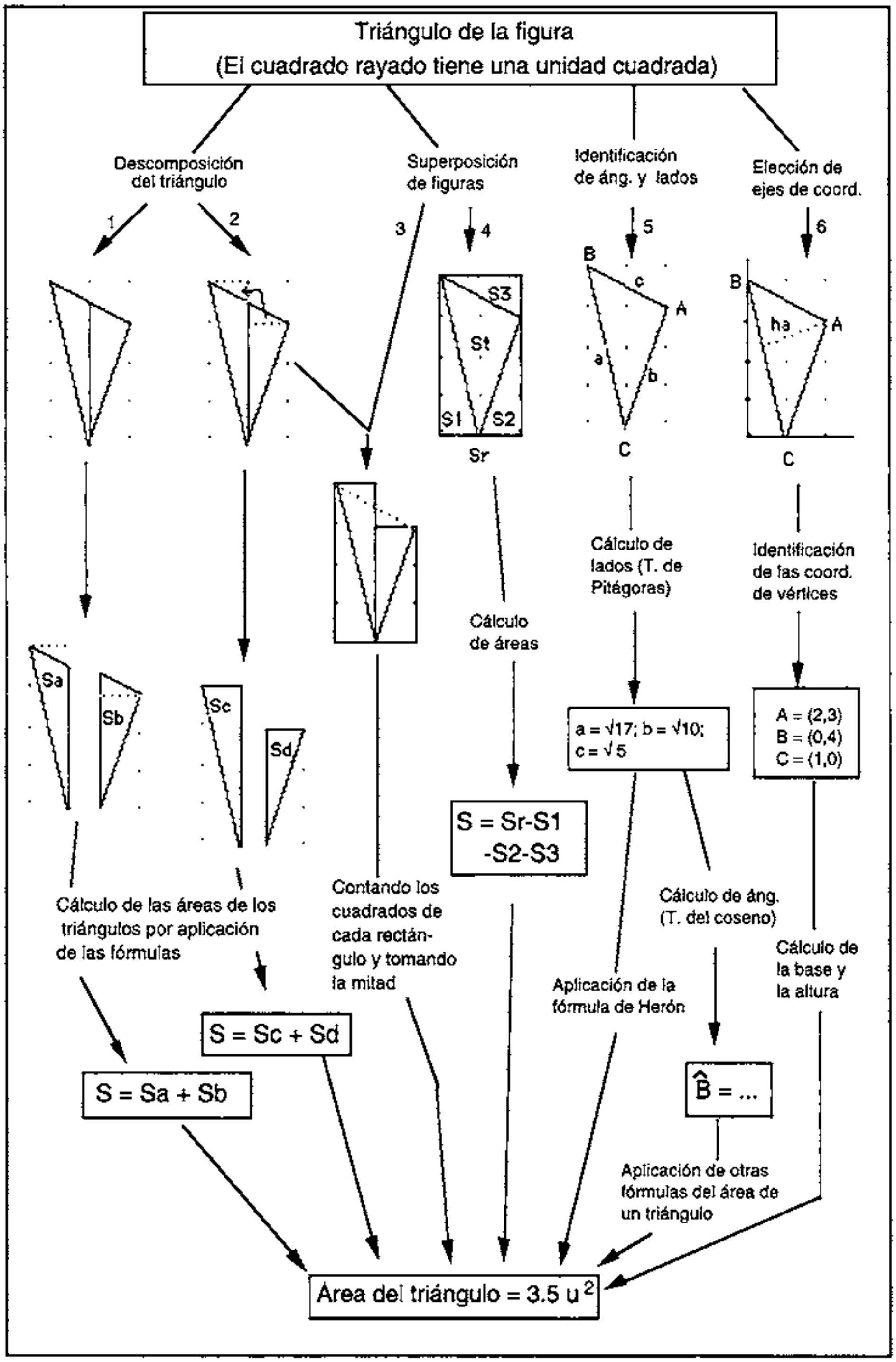
• En cambio, MB y SP sólo identificaron la fórmula tradicional del área de un triángulo –base por altura partido por dos–; representaron sólo las alturas que caen dentro de los lados de un triángulo, pero no las que caen fuera; tenían claro el concepto de hexágono regular, pero no el de circunferencia circunscrita; no reconocieron como equiláteros los triángulos obtenidos al unir el centro de un hexágono regular con sus vértices; y no justificaron de ninguna forma la igualdad de los triángulos ABC y ACD de la figura 1.

Las razones que nos llevaron a seleccionar a los alumnos de la forma que lo hicimos, las resumimos en los siguientes apartados:

– La importancia que los conocimientos matemáticos, ya sea de hechos y conceptos relacionados con los elementos que intervienen como de técnicas específicas dentro del campo en el que se enmarca el problema, tienen en la resolución de problemas.

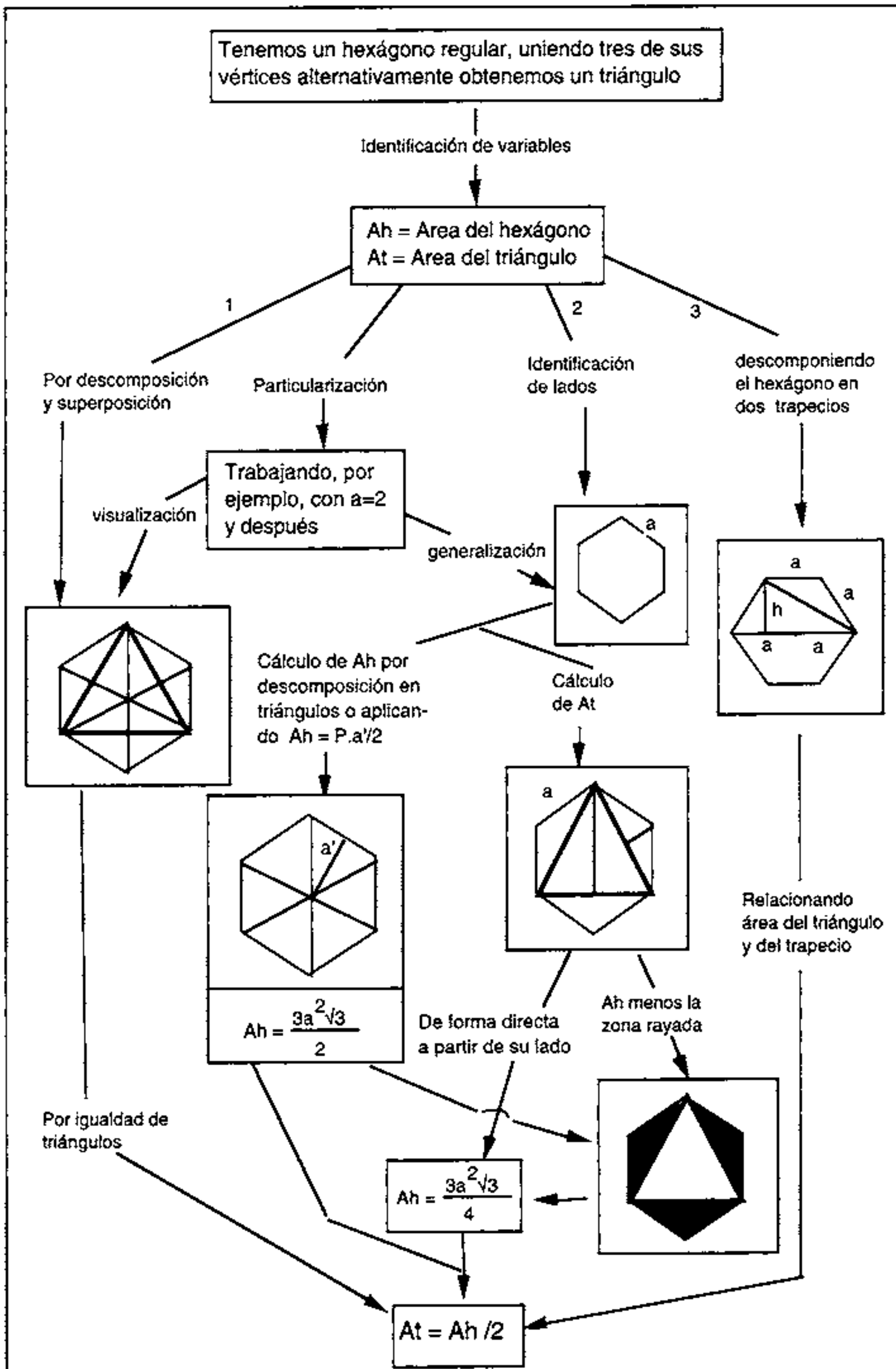
– La representatividad que el rendimiento tiene entre los aspectos relacionados con los «recursos» –según la no-

Tabla I
Espacio básico del problema 1.



menclatura de Schoenfeld (1985a)– que los alumnos utilizan en la resolución de problemas. A pesar de ello, somos conscientes de que el rendimiento académico del alumno respecto de las matemáticas engloba otros aspectos que pueden influir en el proceso de resolución y que aquí no hemos considerado, como las aptitudes generales (inteligencia), la motivación, los intereses, las necesidades, etc.

Tabla II
Espacio básico del problema 2.



c) *Características de la situación de observación*

Las observaciones tuvieron lugar en un contexto con las siguientes características:

– Dos alumnos seleccionados de la forma que hemos indicado antes resolvieron conjuntamente y en voz alta los problemas 1 y 2 (no se les permitió el uso de regla, ni de compás, ni de calculadora) en presencia de una cámara de vídeo, que registró sus diálogos y su escritura, y de un observador –su profesor de matemáticas–, que tomó nota de los aspectos más relevantes del proceso.

– Todas las observaciones se hicieron en el mismo lugar, es decir, sin cambios intersesionales y sin ninguna interrupción –ni por parte del observador (observación no intervencionista), ni por cualquier otra causa–, o sea, sin cambios intrasesionales.

Las grabaciones en vídeo, las transcribimos obteniendo cuatro protocolos. Parte de los análisis de esos protocolos son los que mostramos en las páginas siguientes.

ANÁLISIS DE LOS PROCESOS DE RESOLUCIÓN[3]

Analizamos los procesos de resolución considerando algunos aspectos cognitivos y diferenciando, como hemos indicado en la introducción, entre base de conocimientos y metaconocimientos.

1. Base de conocimientos

En la base de conocimientos hacemos separadamente el análisis de los conceptos involucrados en la resolución y los enfoques identificados.

1) Conceptos

El bajo nivel de conocimientos conceptuales que exige la resolución del problema 1, sobre todo por la línea del espacio básico que las dos parejas de alumnos implementan (Tabla I, línea 4) –fórmula del área de un triángulo, de un rectángulo, coincidencia de dos de las alturas de un triángulo rectángulo con sus catetos, etc.–, ha hecho que los procesos de resolución desarrollados sólo se hayan visto dificultados por la confusión producida para medir las longitudes en la trama de puntos (Fig. 2) –no saben si contar segmentos unitarios o puntos–, la cual coincide con una de las cinco concepciones erróneas sobre la medida del área de un rectángulo inmerso en una malla cuadrangular identificadas por Hirstein, Lamb y Osborne (1978) en alumnos de hasta 12 años de edad. En el caso de GT y MC, la confusión se produce inconscientemente dando lugar a un error en la medida de la longitud del segmento AD.

6.MC. [...] Calcula la altura; esto es la altura 1, 2, 3, 4 y 5 unidades [cuenta los puntos que tiene el segmento AD, fig. 2], y una de aquí [AE] , ya tienes un lado [ED]; uno de aquí , uno de aquí [indica los segmentos EB y BF], ya tienes el otro [EF] [...]

En el caso de MB y SP se produce una discusión que se inicia con las intervenciones 7 y 8.

7.SP. Quizás contamos eso por puntos [indica los puntos que bordean el rectángulo ABCD, fig. 2]

8. MB [...] 1, 2, 3 [cuenta los puntos del lado AB]; 1, 2, 3, 4, 5 [puntos del lado AD]; 3 por 5.

Eso les lleva a representar los cuadrados que componen el rectángulo ABCD (Fig. 3) para resolver el conflicto que se les presenta. Es a partir de esa discusión cuando se impone la visualización, calculando siempre el área del rectángulo al contar los cuadrados unitarios que lo componen.

Se ha de resaltar también la referencia que GT y MC hacen a la longitud de los lados del triángulo EFD (Fig. 2) –intervención 6– y, después, al perímetro del mismo, sin que a ninguno de los dos alumnos se les ocurra citar algunas fórmulas del área de un triángulo conocidas por ellos (fórmula de Herón y la que relaciona dos lados y el ángulo comprendido), aunque la aplicación de esas fómulas no sea la manera más recomendable de resolver el problema.

Por otra parte, el enfoque implementado por ambas parejas en el problema 1 (línea 4 del espacio básico) les conduce a una resolución en la que las características de la trama de puntos –cuadrangular– facilitan la visualización de la expresión del área del triángulo EFD (Fig. 2) en función de la del rectángulo ABCD y de la de los tres

Figura 2

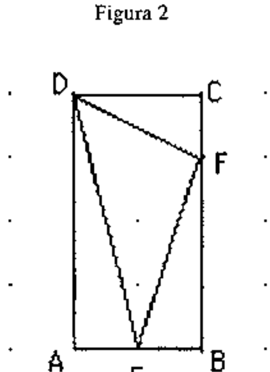


Figura 3

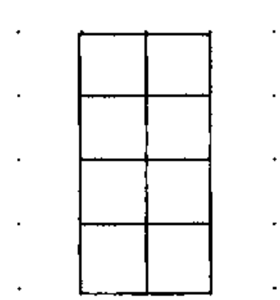


Figura 4

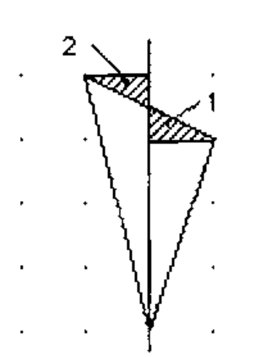


Figura 5

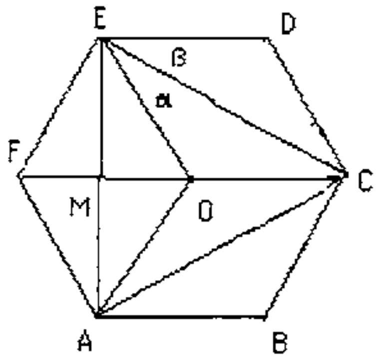
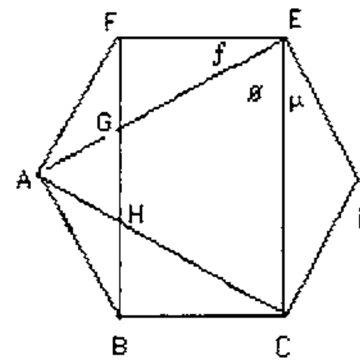


Figura 6



triángulos AED, EBF y FCD, no siendo necesario utilizar ningún tipo de argumentación para justificar esa relación.

En la resolución del problema 2, GT y MC no utilizan, o al menos no lo hacen explícitamente, todos los conceptos que conocen –según muestran los resultados de las pruebas previas de valoración de conocimientos–, aunque sean necesarios en las argumentaciones que han desarrollado. Nos referimos a que en ningún momento de la resolución asocian el hexágono regular con su circunferencia circunscrita ni hacen referencia a la igualdad de los segmentos OE y ED (Fig. 5). Esta relación es necesaria para justificar la igualdad de los triángulos COE y CDE, para probar, de esa forma, la conjetura que establecen de que el área del hexágono es el doble de la del triángulo ACE.

Así pues, observamos que hay conceptos que GT y MC recuerdan cuando se les piden explícitamente, pero no se les ocurre evocar cuando resuelven el problema.

Por otra parte, la transformación que GT y MC hacen del problema 2 –pasan de un problema de «encontrar» a otro de «probar»– (Polya, 1945), les obliga a realizar, durante el proceso, algunos razonamientos geométricos.

13.MC. [...] si estos ángulos son iguales [indica los ángulos *a* y ß, (Fig. 5)], está bien lo que tú has dicho [se refiere a la conjetura establecida por GT de que el área del hexágono es doble de la del triángulo], si no, no vale [los alumnos están considerando realmente, durante esta fase de la resolución, la figura 7]

Estos razonamientos son incompletos en todos los casos, como ocurre cuando llegan a probar que el ángulo interior del hexágono es el doble del ángulo interior del triángulo ACE (Fig. 6) –basándose, sin expresarlo, en el hecho de que el triángulo AHG es equilátero (GT y MC razonan en esta fase de la resolución sobre la figura 8)– o cuando no explicitan todos los argumentos necesarios en la justificación de la igualdad de dos triángulos, (intervención 13). Esa falta de explicitación dificulta la comprensión de dicha intervención, en la que no queda claro que lo que intenten hacer sea probar la igualdad de los triángulos COE y CDE (Fig. 5), habiéndolo interpretado nosotros así al basarnos en la idea de «cerrar las aletas» al referirse a la superposición de dichos triángulos, como se observa en una intervención anterior.

8.GT. Claro, si tú haces estas aletas [triángulos ABC, CDE y EFA, fig. 5] y las cierras, te dan aquí [triángulos ACO, COE y EOA]; es decir, que el hexágono es dos veces el triángulo[...]

Las deficiencias que GT y MC muestran en las argumentaciones que producen durante el proceso de resolución –sobre todo cuando dan por probado que los triángulos COE y CDE (Fig. 5) son iguales, justificando sólo que *a* y ß lo son, sin referir que tienen el lado EC común y que los lados EO y ED son iguales– pueden ser debidas a una falta de control del proceso seguido o simplemente a que los alumnos, cuando están inmersos en la resolución de un problema, no sientan la necesidad de explicitar determinadas relaciones que puedan considerar visualmente claras y que ellos conocen (saben la relación de igualdad que hay entre los segmentos EO y ED, y razonan de forma correcta la igualdad de los triángulos ABC y ACD

Figura 7

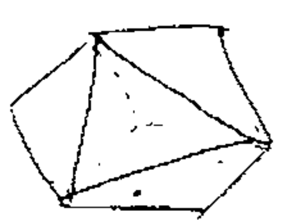


Figura 8

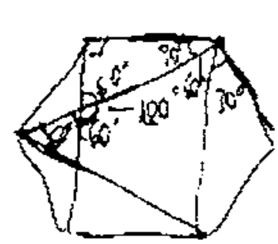
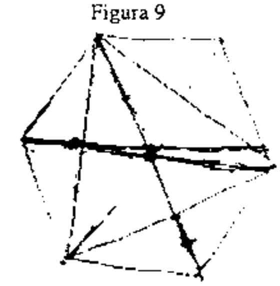


Figura 9



de la figura 1, como hemos puesto de manifiesto en el apartado de características de los alumnos).

En cambio, las continuas evocaciones, sin éxito, que MB y SP hacen de sus conocimientos sobre algunos conceptos geométricos como mediatriz, mediana, bisectriz, altura, etc., en la resolución del problema 2, y la búsqueda de una fórmula del área del hexágono como único recurso, ponen de manifiesto sus deficiencias cognitivas, dificultándose así el proceso de resolución.

A pesar de esas evocaciones infructuosas y de las dificultades que MB y SP tienen –producidas por la utilización incorrecta del vocabulario matemático–, llegan a un punto (intervención 114), en el que expresan la altura FM del triángulo AEF (Fig. 5) como la cuarta parte de la diagonal FC –que ellos llaman bisectriz (MB y SP se refieren realmente, durante esta fase de la resolución, a la figura 9).

114. MB [...] esto es una cuarta parte de la bisectriz [...]

En este momento podían haber utilizado algún razonamiento matemáticamente válido para probar esta relación, pero, en las sucesivas intervenciones, se limitan a repetirla reiteradamente como si ésa fuera la única forma de validarla. Esto nos puede servir como ejemplo de lo que la falta de conocimientos sobre hechos y conceptos –recuerdo de la fórmula del área de un polígono regular, confusión de conceptos geométricos, etc.– y la falta de práctica en el desarrollo de razonamientos matemáticos –suplida, tal vez, por apreciaciones visuales de los gráficos que hacen– puede influir negativamente en el proceso de resolución.

2) Identificación de enfoques

Nos interesa observar los enfoques aportados por cada pareja de alumnos durante la fase de exploración, siendo conscientes de que, con ello, no buscamos clasificar a las parejas como más o menos competentes en función del número de enfoques que identifican, sino ver, por una parte, cómo seleccionan el que implementan (ver apartado siguiente) y, por otra, observar las técnicas que manejan.

En la resolución del problema 1, GT y MC identifican tres enfoques (de los que sólo el tercero tiene que ver con la aplicación directa de una fórmula). El primero sigue la línea 4 del espacio básico (Tabla I), que consiste en circunscribir el rectángulo ABCD (Fig. 2) al triángulo dado EFD para expresar el área de éste en función de la de aquél y de la de los tres triángulos rectángulos de las esquinas (AED, EBF y FCD).

4.GT. O sea, que es todo este rectángulo [rectángulo ABCD] menos éste [indica los triángulos AED, EBF y FCD, fig. 2], ¿no?

El segundo, pretende seguir la línea 2 (Tabla I).

5.GT. Estos dos; éste es complementario de éste [indica, sobre la figura del enunciado, los triángulos rayados, fig. 4]. O sea, este trozo de triángulo, si lo metiéramos aquí... [trata de poner el triángulo 1 en la posición 2]

Utiliza la técnica de descomposición en triángulos y exige la justificación de la igualdad de los triángulos rayados de la figura 4. El tercero pretende seguir la línea 5 (Tabla I).

6.MC. Esto se puede hacer mucho más rápido. Calcula la altura. Esto es la altura: 1, 2, 3, 4 y 5 unidades [cuenta los puntos que tiene el segmento AD, fig. 2], y una de aquí [AE] ya tienes un lado [ED]; uno de aquí , uno de aquí [indicando los segmentos EB y BF], ya, el otro lado [EF]; uno de aquí, uno de aquí [indica los segmentos FC y CD, fig. 2], ya tienes el otro lado [FD]

8.MC. O sea, ya tienes el perímetro, ¿sabes lo que quiero decir?

Está relacionado con la aplicación de determinadas fórmulas del área de un triángulo.

Por su parte, MB y SP sólo identifican un enfoque en la resolución que hacen del problema 1, que corresponde a la línea 4 del espacio básico del problema 1 (Tabla I).

22. MB. Y si encontramos el área de todo esto [indica el rectángulo ABCD, fig. 2] y le restamos el área de aquí, de aquí y de aquí [indica los tres triángulos AED, EBF y FCD] y encontramos el área de esto [se refiere al área del triángulo EFD]

En las resoluciones del problema 2 se vuelve a producir una situación similar a las del problema 1 respecto de la diversificación de enfoques. La pareja GT-MC identifica dos de éstos –correspondientes a las líneas 2 y 1, respectivamente, del espacio básico del problema 2 (Tabla II)–, como podemos observar en las intervenciones 6 y 8, que utilizan, en el primer caso, técnicas relacionadas con la aplicación de fórmulas para el cálculo y posterior comparación de las áreas y en el segundo con la descomposición del hexágono en triángulos (Fig. 5) de los que se necesita probar su igualdad.

6.GT. El área del hexágono es el área del triángulo [indica el trianglulo ACE de la fig.5] más estas tres puntas [indica los triángulos ABC, CDE y EFA]

8.GT. Claro, si tú haces estas aletas [triángulos ABC, CDE y EFA, fig. 5] y las cierras, te dan aquí [triángulos ACO, COE y EOA] es decir, que el hexágono es dos veces el triángulo, ¿si o no?, ¿es eso seguro?

La pareja MB-SP sólo identifica un enfoque, que sigue la línea 2 del espacio básico del problema 2 y que es el que implementan.

54. MB. El área del hexágono es igual al área de este triángulo [ACE] más la de los tres triángulos [indica los triángulos ABC, CDE y EFA, fig. 5]

En resumen, podemos decir que GT y MC muestran una tendencia a ver y resolver los problemas de forma geométrica, ya sea utilizando técnicas de descomposición del triángulo del problema 1 –como en el segundo enfoque propuesto– o produciendo una resolución puramente geométrica del problema 2. Por el contrario, MB y SP sólo aportan ideas relacionadas con la aplicación de fórmulas para el cálculo de las áreas.

2. Metaconocimientos

El análisis de los metaconocimientos, lo hacemos considerando los cuatro aspectos del control que hemos indicado en la introducción: selección de enfoques, planificación, revisiones locales y verificación de la resolución.

Selección de enfoques

La aportación de los tres enfoques que GT y MC hacen en la resolución de problema 1 no va acompañada de un proceso de reflexión profundo sobre cada uno de ellos para elegir el más adecuado, ya que sobre el segundo, que trata de seguir la línea 2 del espacio básico del problema (Tabla I), no reflexionan nada y la única reflexión que hacen sobre el tercero es una breve referencia a una de las alturas del triángulo DEF (Fig. 2), que no tiene nada que ver con la línea 5 del espacio básico a la que parece referirse MC cuando en la intervención anterior hace referencia al perímetro del triángulo DEF. La duda que produce en MC la referencia que hace GT a esa altura provoca que continúen con el primer enfoque que han propuesto –línea 4 del espacio básico–, que es el que implementan.

9. GT. Sí, sí. ¿Tienes la altura? [se refiere a una de las alturas del triángulo DEF]

10. MC. ¿La altura del triángulo?

11. GT. ¡No! No sabes la altura.

En la resolución del problema 2 ocurre una cosa similar, ya que GT y MC descartan el primer enfoque propuesto, que pretende hacer una implementación algebraica –línea 2 del espacio básico– sin reflexionar nada sobre él.

Puesto que MB y SP sólo identifican un único enfoque en cada resolución, no se les presenta la oportunidad de elegir, entre varios, el que implementarán.

Planificación y decisión de implementarla

La experiencia que teníamos en el sentido de que las resoluciones de algunos tipos de problemas –sobre todo los que se resuelven utilizando el lenguaje algebraico– se resolvían sin planificaciones explícitamente establecidas nos ha llevado a comprobar si en los protocolos que analizamos podíamos identificar de forma explícita un plan de acción.

En las dos resoluciones del problema 1 identificamos intervenciones que expresan la existencia tanto de un plan de acción como la decisión de implementarlo. Por ejemplo, GT y MC verbalizan la planificación de la forma (de manera similar lo hacen MB y SP):

12. GT. O sea, sí que podemos calcular, deberíamos calcular las áreas de éstos, de los de fuera [indica los triángulos AED, EBF y FCD, fig. 2]. O sea, calculas los de fuera.

13. MC. Sí, sí se puede hacer así también; buscas el área del cuadrado de fuera [se refiere al rectángulo ABCD] y le restas los tres triángulos [AED, EBF y FCD]

Y también verbalizan la decisión de implementarla:

19. GT. Lo hacemos, ¿no?

20. GT. ¡Va!

También en el problema 2.

13. MC. A ver, hemos de buscar una relación entre este ángulo de aquí y éste de aquí [indica los ángulos a y ß, fig. 5]. Si estos ángulos son iguales está bien lo que tú has dicho; si no, no vale.

14. GT. ¡Vale!

Aunque GT y MC establecen una planificación en la resolución del problema 2, su planteamiento es incompleto ya que, como hemos indicado anteriormente, no hacen referencia a la igualdad de los lados homólogos que determinan ambos ángulos.

Revisiones locales

En el problema 1, GT y MC hacen un breve repaso de la planificación propuesta, volviendo a expresarla acompañada de algunos datos.

17. MC. Calculas el área del cuadrado de fuera [indica el rectángulo ABCD], que sería 2 per 5, 10. Ahora buscas el área de éste, de éste y de éste y... [triángulos AED, EBF y FCD]

18. GT. La restas.

MB y SP revisan la planificación propuesta de una forma bastante más rigurosa, según se pone de manifiesto en las intervenciones 23 a 34, hasta el punto de que se puede confundir con la implementación de no ser porque, al final de dicha revisión, MB expresa la idea de implementar el plan propuesto.

23. SP. ¿Cómo encuentras ésta? [señala los triángulos AED, EBF y FCD, fig. 2]

24. MB. Base por altura partido por 2, son triángulos. ¿Sabes esto cuánto hace? [altura y base del triángulo FCD]

34. MB. Esto es la base, base, base [indica los tres lados AD, BF y CD, fig. 2]

35. MB. ¿Lo hacemos así?

En ninguno de los dos procesos de resolución del problema 2 se producen revisiones de las planificaciones propuestas. En la resolución que hacen GT y MC, la ausencia de tal revisión influye en el desarrollo del proceso debido al planteamiento incompleto que hacen del plan que proponen.

Por otra parte, de acuerdo con el contenido que damos a las revisiones locales (ver apartado *b* de la introducción), los alumnos GT y MC corrigen, en las intervenciones 31 y 32, uno de los resultados erróneos obtenidos por MC, que afirmaba que los ángulos interiores de un hexágono medían 60 °.

31. GT. ¿Tú por qué has dicho que es 360 en total? [se refiere a la suma de los ángulos interiores del hexágono]. Lo que sí es 60 es el de aquí dentro, 6 por 3, 18 [señala el ángulo interior del triángulo], 60 es el de dentro, el de fuera no.

32. MC. Sí [escribe 60 en todos los ángulos interiores del triángulo].

Esta corrección tiene una incidencia positiva en el desarrollo posterior del proceso.

Las revisiones locales que los alumnos MB y SP hacen en la resolución del problema 2 tienen que ver con evocación de conocimientos: asociando los elementos del hexágono con los del triángulo para tratar de extender la fórmula del área de éste a la de aquél, como ocurre en las intervenciones 38 y 44, que tratan de recordar la fórmula del área del hexágono o en la que confunden conceptos como el de mediatriz, bisectriz, mediana, etc.

38. MB. La base del triángulo [lado CE, fig. 6] es igual que la base del hexágono

44. MB. ¿La altura del hexágono es la base del triángulo? [indica el lado CE del triángulo]

Ninguna de las revisiones anteriores aporta información nueva que puedan aprovechar y, en ellas, sólo repiten expresiones en las que impera la confusión de conceptos y la utilización errónea del vocabulario matemático.

Verificación de la resolución

Una verificación rigurosa de la resolución debe comprender aspectos relacionados con la revisión del proceso seguido –entendiéndolo como se define en la nota 2, con la revisión de la solución obtenida –asociando ésta a cada una de las líneas de los espacios básicos (Tablas I y II)– y con la comprobación del resultado –entendido como la respuesta a las preguntas formuladas en el enunciado de cada problema–, con independencia de que resolución, solución y resultado puedan coincidir en determinados procesos de resolución.

El resultado erróneo –área del triángulo EFD (Fig. 2) igual a 5 unidades cuadradas– que GT y MC dan del problema 1, producido al contar equivocadamente la longitud de los lados del triángulo AED (fig. 2), seguramente hubiera podido ser rectificado de haber hecho, al final de la resolución, algún tipo de verificación.

En cambio, la verificación final llevada a cabo por MB y SP, que se ve alargada por la desconfianza que muestran al haber encontrado una solución tan rápidamente, es un ejemplo de cómo los sistemas de creencias influyen sobre los mecanismos de control, en particular, y sobre el proceso de resolución, en general.

43. SP. Está bien. Es demasiado fácil, lo hemos sacado muy rápido, a ver...

En esa verificación podemos identificar cómo repasan, simultáneamente, la solución a la que han llegado –que en este caso coincide con la resolución, ya que sólo han identificado un enfoque que es el que implementan– y los cálculos que hacen para saber si el resultado ha sido erróneo, según se observa en las intervenciones siguientes:

41. SP. Primero hemos calculado el área del rectángulo, que hace 8 unidades cuadradas. Está bien, ¿no? 1, 2, 3... 8 [cuenta los cuadrados] Vale, ¡está bien! Después hemos hecho eso.

42. MB. Hemos contado las alturas y las bases de los triángulos exteriores [repasa las operaciones]

44. SP. Supongamos que esto es un metro cuadrado. Así serían 8 m^2, [vuelve a contar los cuadrados unitarios], el rectángulo menos [vuelve a contarlas] los tres triángulos. Supongo que el área del triángulo [EDF] es la del rectángulo [ABCD] menos la de los tres triángulos de fuera [AED, EBF y FCD]

La verificación de la resolución del problema 2 por parte de GT y MC queda reducida a un simple repaso de los ángulos que han calculado.

62. MC. Esto son 120, 120 [se refieren a la medida en grados de los ángulos interiores del hexágono]

63. GT. Esto, 30, 30, 180. Esto 60, 60 i 60, 180 [ángulos interiores del triángulo ACE, fig. 6] Pero ¿cómo es que da? [se refiere a la relación entre las áreas del triángulo y del hexágono]

64. MC. Sí; 30 y 30, 60 [ángulos f y μ, fig. 6]; 60 más 60 [ángulo $\emptyset$], 120 [ángulo interior del hexágono]

65. GT. Sí, ¿pero esto por qué justifica que éste [hexágono] es el doble de éste? [el triángulo ACE, fig. 6]

66. MC. ¡Hombre!, porque aquí hay 30; 30 más 30 hacen 60; 60 más 60, 120 [volviendo a indicar los mismos ángulos f, μ y $\emptyset$. Durante todas estas intervenciones, los alumnos realmente se refieren a la fig. 8]

Nombran cada uno de los ángulos sin entrar a revisar el proceso argumentativo que han seguido para calcularlos –que posiblemente les hubiera mostrado las deficiencias analizadas en el apartado 1– y sin llegar a considerar que lo que acaban de probar, resumido en la intervención 59, no es suficiente para justificar la igualdad de los triángulos COE y CDE (Fig. 5).

59. MC. O sea, que el ángulo es doble [refiriéndose a la relación entre el ángulo interior del hexágono y el del triángulo ACE, fig. 5]

En la resolución del problema 2, MB y SP no producen ninguna verificación final. Las razones por las que no lo hacen, dando por acabado el proceso cuando llegan a una fórmula que ellos consideran que soluciona el problema, pueden ser: la duración excesiva de la resolución –cerca de 20 minutos– para lo que ellos están acostumbrados, y las dificultades cognitivas que han encontrado a lo largo del proceso.

Por otra parte, las ganas y la necesidad de llegar a algo concreto, posiblemente para satisfacer al profesor –que era en este caso el observador–, es lo que les ha hecho permanecer tanto tiempo intentando resolver el problema.

CONCLUSIONES

Las conclusiones que mostramos a continuación se han de interpretar teniendo en cuenta el carácter local del presente estudio; o sea, no se han de hacer extensibles a cualquier población ni se han de aplicar a problemas ni en contextos que difieran de los que aquí hemos considerado. De cualquier forma, estas conclusiones, además de dar respuesta a las preguntas planteadas en la introducción y de aportar ideas que podamos tener en cuenta en nuestra práctica diaria –como las del apartado siguiente–, nos pueden sugerir hipótesis de trabajo que puedan ser contrastadas utilizando otros métodos de investigación.

Sobre la base de conocimientos:

– Las amplias posibilidades de resolución que ofrece el problema 1 y el bajo nivel de conocimientos conceptuales que exige su resolución, sobre todo, en la implementación del enfoque (línea 4 del espacio básico) que eligen las dos parejas, contribuye a que el desarrollo del proceso de resolución sólo se vea dificultado por la confusión entre contar puntos o segmentos unitarios para medir los lados del rectángulo ABCD (Fig. 2).

– Los alumnos GT y MC no utilizan todos los conocimientos que tienen sobre los contenidos matemáticos involucrados en las resoluciones de ambos problemas, no expresando, tampoco, todos los argumentos necesarios en las justificaciones que realizan durante el proceso de resolución del problema 2. Esto puede ser debido a que no sientan la necesidad de explicitar determinadas relaciones, que les puedan parecen visualmente claras, entre los elementos de las figuras. En cambio, la falta de conocimientos que los alumnos MB y SP tienen sobre los contenidos matemáticos de ese problema se manifiesta a lo largo de todo el proceso –confundiendo conceptos como mediatriz, mediana, bisectriz, altura, etc. o bien buscando durante la resolución una fórmula que exprese el área del hexágono–, lo que influye negativamente en la resolución.

– Observamos en GT y MC una tendencia a ver y resolver los dos problemas de forma geométrica, ya que identifican descomposiciones bastante imaginativas –línea 2 del espacio básico (Tabla I)– en el problema 1 y producen una resolución puramente geométrica del problema 2. En cambio, MB y SP sólo aportan ideas relacionadas con la aplicación de fórmulas para el cálculo de las áreas.

Sobre los metaconocimientos:

– La ausencia de reflexiones sobre todos los enfoques identificados –como ocurre con GT y MC en la resolución de los dos problemas– denota una falta de control del proceso de resolución. La influencia que pueden tener esas reflexiones en el desarrollo posterior del proceso es evidente si tenemos en cuenta que una elección adecuada del enfoque facilita su implementación. En cambio, la propuesta de un único enfoque por parte de MB y SP, en la resolución de los dos problemas, les impide elegir.

– En todos los procesos analizados hay una planificación verbalizada y, por tanto, perfectamente identificable, así como la indicación explícita de implementar la planificación propuesta.

– En las actuaciones de las dos parejas de alumnos observamos cómo revisan la planificación en los casos en los que el enfoque elegido queda claramente especificado (problema 1) y, por el contrario, ni siquiera intentan revisar las planificaciones en las resoluciones del problema 2, aunque sean incompletas, como la que hacen GT y MC en dicho problema.

Otras revisiones producidas sobre determinados aspectos –resultados locales, evocaciones de conceptos, revisiones aisladas de algunas fases, etc.– pueden incidir positivamente en el proceso de resolución si producen información nueva que pueda ser aprovechada posteriormente (como ocurre en la resolución que GT y MC hacen del problema 2) o, por el contrario, pueden evidenciar una falta de recursos y unas deficiencias cognitivas (como ocurre en la resolución que MB y SP hacen del problema 2).

– Observamos en GT y MC una tendencia a no producir verificaciones de la resolución, como ocurre en el problema 1 –debido a la confianza que muestran durante todo el proceso–, o a producirlas de forma muy superficial, como en el problema 2, donde la deficiencia de justificar la igualdad de dos triángulos sólo argumentando la de dos de sus ángulos no es analizada en profundidad ni durante ni al final de la resolución.

La desconfianza que MB y SP muestran al final de la resolución del problema 1, producida por no haber encontrado grandes dificultades durante el proceso, les lleva a insistir bastante en la verificación final. En cambio, en el problema 2, MB y SP se desentienden de la verificación debido al largo proceso de resolución desarrollado y a las dificultades cognitivas con las que se encuentran.

IMPLICACIONES DIDÁCTICAS

Centramos estas reflexiones sobre las implicaciones didácticas en el contexto de la enseñanza secundaria en el cual hemos desarrollado el presente estudio.

Al no haber recibido los alumnos ninguna instrucción previa específica respecto a la resolución de problemas y mucho menos respecto a la regulación de los mecanismos de control, surgen en su actuación aspectos dignos de resaltar por la importancia que pueden tener a la hora de programar actividades de enseñanza relacionadas con este tema. Comentamos a continuación algunos de estos aspectos.

1) En este trabajo, vemos claramente reflejada la importancia que tiene en la resolución de problemas la posesión de información –diferencia entre los dos niveles de rendimiento de los alumnos–, pero también la facilidad que tienen los alumnos de utilizarla. Esta facilidad se puede conseguir mediante adiestramientos específicos, no sólo insistiendo reiteradamente en la habilidad para calcular, sino en la comprensión de conceptos y procesos (NTCM 1969).

Así pues, las tendencias en la enseñanza de la resolución de problemas han de ir encaminadas hacia la integración de estos dos aspectos: «comunicación de información» y su «utilización».

Esta integración no se consigue mediante la transmisión de conceptos y posterior resolución reiterativa de ejercicios de aplicación –aunque esta estrategia pueda ser útil en algunas situaciones–, sino elaborando actividades de enseñanza-aprendizaje, relacionadas con contextos reales, que muestren a los alumnos la necesidad de asimilar los conceptos matemáticos que intervienen.

2) Se ha de dar al control de los procesos en la resolución de problemas -y a los aspectos metacognitivos en general– la importancia que tienen (Schoenfeld, 1985a, 1987, 1992; Garofalo y Lester, 1985; Lester, 1994, etc.) y que las conclusiones de nuestro estudio confirman.

Hemos de conseguir que los alumnos comprendan la naturaleza cíclica y dinámica que ha de tener la actividad de resolver problemas (Fernández, Hadaway y Wilson, 1994) y que sean conscientes de la importancia que tiene, en dicha actividad, la toma de decisiones, para hacerles ver la necesidad de su aprendizaje.

Se ha de insistir, por otra parte, en la elaboración de actividades instructivas –con el apoyo de los medios técnicos necesarios– que resalten la observación y la crítica de los propios procesos de resolución.

Fomentar en los alumnos hábitos concretos como la explicación –oral o escrita– y la reflexión sobre los procesos de resolución de problemas, que puede resultar pesado en las primeras fases del aprendizaje, pero absolutamente enriquecedor y formativo cuando han adquirido cierta práctica.

NOTAS

* Este artículo ha sido elaborado a partir del trabajo de investigación correspondiente a la Memoria del Tercer Ciclo del Programa de Doctorado del Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències de la UAB, presentada por P. Cobo Lozano y dirigida por el Dr. J.M. Fortuny. El autor agradece al Dr. L. Puig las correcciones y sugerencias hechas a un borrador de la citada memoria que contribuyeron a su mejora

[1] Es aplicable al presente estudio la definición que hacen L. Puig y F. Cerdán (1988) sobre el proceso de resolución: «la actividad mental desplegada por el resolutor desde el momento en que, siéndole presentado un problema, asume que lo que tiene delante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea» (p. 21).

[2] Damos al «espacio de un problema» una interpretación diferente a la de Newell y Simon (Mayer, 1983) considerándolo como «el conjunto de posibilidades que tiene el resolutor de resolver el problema», que dependerán, entre otros factores, de los conocimientos que tenga y de los enfoques que sea capaz de generar. Al espacio de un problema hecho por un resolutor experto lo llamaremos «espacio básico del problema».

[3] Durante las resoluciones –sobre todo las que corresponden al problema 2–, los alumnos construyen sus propias representaciones del hexágono y del triángulo y hacen referencias a sus elementos con indicaciones como: esto, este ángulo, este lado, etc. Para facilitar al lector la comprensión de los diálogos utilizamos representaciones construidas por nosotros (excepto las figuras 7, 8 y 9) en las que hemos identificado sus elementos con la finalidad de usarlos como referentes en las explicaciones que introducimos en las intervenciones de los alumnos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CALLEJO DE LA VEGA, M.L. (1994). *Un club matemático para la diversidad.* Madrid: Ed. Narcea, S.A.

COBO, P. (1995). *Anàlisi comparativa de les actuacions d'alumnes de 3r de BUP en la resolució de problemes que relacionen àrees de figures geomètriques.* Memòria del tercer cicle. Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències de la UAB (no publicada).

FERNÁNDEZ, M.L., HADAWAY, N. y WILSON J.W. (1994). Problem solving: Managing It All. *Mathematics Teacher*, 87(3), pp. 195-199.

GAROFALO, J. y LESTER, F.K. (1985). Metacognition, Cognitive Monitoring and Mathematical Performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, pp. 163-176.

HIRSTEIN, J., LAMB, CH. y OSBORNE, A. (1978). Student Misconceptions About Area Measure. *Arithmetic Teacher*, 25(6), pp. 10-16.

LESTER, F. K. Jr. (1994). Musing about mathematical problem-solving research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, pp. 660-675.

MAYER, R.E. (1983). *Thinking, Problem Solving, Cognition.* Nueva York y Oxford: W. H. Freeman y Co. (Traducción castellana, *Pensamiento, resolución de problemas y cognición.* Barcelona: Paidós, 1986).

NCTM (1969). *Topics in Mathematics Elementary School Teachers.* Booklet number 17. Hints for Problem Solving. Washington: The National Council of Teachers of Mathematics. (Traducción castellana, *Sugerencias para resolver problemas.* México: Trillas, 1970).

POLYA, G. (1945). *How to Solve It.* Princeton, NJ: Princeton University Press. (Traducción castellana, *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas, 1975).

POSTIC, M. y DE KELETE, J. M. (1988). *Observer les situations éducatives.* París: Presses Universitaires de France. (Traducción castellana, *Observar las situaciones educativas.* Madrid: Narcea, 1988).

PUIG, L. (1993). *Elementos para la instrucción en resolución de problemas de matemáticas.* Tesis doctoral. Universitat de València.

PUIG, L. y CERDÁN, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares.* Madrid: Síntesis.

SCHOENFELD, A. H., 1985a. *Mathematical Problem Solving.* Orlando: Academic Press, Inc.

SCHOENFELD, A.H. (1985b). Metacognitive and Epistemological Issues in Mathematical Understanding, en *Teaching and Learning Mathematics Problem Solving: Multiple Research Perspectives,* editado por Silver, E.A. pp. 361-379. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 361-379.

SCHOENFELD, A.H. (1987). What's all the fuss about metacognition? en Schoenfeld, A. H. (ed.). *Cognitive science and mathematics education.* Hillsdal, NJ: Lawrence Erlbaum, pp. 189-215.

SCHOENFELD, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense Making in Mathematics, en *Handbooks of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Nueva York: D. A. en Grouws Ed., McMillan, pp. 334-370.

[Artículo recibido en junio de 1995 y aceptado en abril de 1996.]