

# LA RELATIVIDAD EN EL BACHILLERATO. UNA PROPUESTA DE UNIDAD DIDÁCTICA

ALONSO SÁNCHEZ, MANUEL<sup>1</sup> y SOLER SELVA, VICENT<sup>2</sup>

<sup>1</sup> IES Leonardo da Vinci de Alicante

<sup>2</sup> IES Sixto Marco de Elx

manuelalonso@inicia.es

vicentselva@telefonica.net

---

**Resumen.** En este artículo se argumenta a favor del mantenimiento de la introducción a la relatividad en el bachillerato. Se enumeran deficiencias en la enseñanza tradicional y se exponen las características básicas de una propuesta alternativa. A continuación se desarrollan algunas actividades del programa guía sugerido, destacando en él la definición del cuádrivector, el uso de los diagramas espacio-tiempo e impulso-energía, y el concepto de *masa invariante*. Se destaca así mismo la importancia de las actividades CTS y el papel de la evaluación o el uso de recursos como los *physlets* en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la relatividad. Los análisis cualitativos, la emisión de hipótesis de los alumnos y la comunicación de éstos adquieren un carácter relevante en esta propuesta.

**Palabras clave.** Bachillerato, relatividad, programa-guía, diagramas, *physlets*.

---

## The theory of relativity at high school: Proposal for a teaching unit

**Summary.** In this paper we argue in favor of keeping the introduction to the study of relativity in high school education. Deficiencies in the traditional teaching of the subject are noted and the basic characteristics of an alternative proposal are exposed. Also, some activities of the suggested teaching-guide are presented, with a special emphasis on the definition of 4-vectors, the use of space-time and momentum-energy diagrams, and also the concept of invariant mass. The importance of including CTSE activities and the role of the evaluation are also emphasized, as well as the use of resources such as «physlets» in the process of teaching and learning relativity. Qualitative analyses, hypotheses put forward by the students and the discussion of these achieve a relevant role in the proposed scheme.

**Keywords.** High school level, relativity theory, teaching-guide, diagrams, *physlets*.

---

## INTRODUCCIÓN

El 30 de junio de 1905 se publicó en la revista *Annalen der Physik* el artículo de Einstein «Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento». Aquél fue un trabajo emblemático que, siguiendo a Kuhn (1987), revolucionó la física, al propiciar alrededor de un paradigma diferente –la relatividad– la formación de un nuevo consenso en la comunidad científica: el aceptado en la actualidad.

Un repaso histórico breve nos permite recordar el papel que han reservado los programas oficiales a esta teoría. En el anterior sistema educativo BUP-COU la física moderna tenía muy poca presencia y no contemplaba un tema específico de relatividad, sino tan sólo las relaciones masa-energía en la física nuclear. Con la reforma LOGSE se dio por primera vez un peso relativamente importante a la física moderna y, en particular, a la re-

latividad. Los cambios que dictó el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (RD 1178/1992) reservaron a la física moderna aproximadamente un tercio del curso de segundo de bachillerato y a la relatividad se le dedicó un tema de una duración de entre tres y cuatro semanas. Sin embargo, en los primeros «retoques» que se hicieron de esta ley (RD 3473/2000) se retrocedió. Sin estar justificado, a nuestro parecer, se suprimió de los contenidos mínimos el tema de relatividad, al tiempo que las mismas instrucciones incluían un párrafo que aconsejaba tratar aspectos de esta teoría, y dejaba, al criterio de los gobiernos de las diferentes nacionalidades del Estado español, la decisión de incluir o no un tema específico sobre ella. En este momento, por ejemplo, Madrid, Galicia, Murcia o la Comunidad Valenciana lo incluyen, mientras que otras comunidades autónomas, no.

No consumiremos espacio para justificar que una programación de física de bachillerato ha de incluir un tema de introducción a la relatividad, y no sólo pensando en los estudiantes que tienen previsto continuar estudios superiores, también en quienes cursan el bachillerato como estudios terminales. A nuestro entender la relatividad ha de formar parte del bagaje de cultura general de, como mínimo, los ciudadanos y ciudadanas que cursan un bachillerato de ciencias, pues todos deberían conocer, por ejemplo, que la mecánica clásica que han estudiado durante tantos años se considera en la actualidad un caso particular de la mecánica relativista y sus implicaciones. Por otra parte, ¿se puede hablar de física moderna de forma coherente sin hacer mención a la relatividad? Obviamente, no; como parecieron reconocer los propios mentores de la desaparición del tema en las mismas instrucciones que lo derogaban.

Entonces, ¿cuáles pueden ser las causas de los intentos de excluirla del bachillerato? Quizá, el problema resida en que, por tratarse de un tema «novedoso» (al menos para buena parte del profesorado), no se dispone de un material didáctico idóneo y bien consolidado y, en consecuencia, algún docente podría llegar a no considerar suficientemente justificado incluir la relatividad en unos temarios cada vez más extensos.

El objetivo de este trabajo es argumentar y apuntar alternativas que refuercen nuestra hipótesis que afirma que *es posible desarrollar elementos importantes de introducción a la relatividad a través de un tema coherente, sin requerir un consumo excesivo de tiempo y promoviendo en los estudiantes un aprendizaje significativo de aspectos esenciales de la teoría*. Nos gustaría favorecer un nuevo perfil de estudiante de bachillerato de ciencias y aumentar el interés por esta área del conocimiento, y por la física en particular; a la baja en nuestro entorno, si tenemos en cuenta estudios recientes (Pintó, 2003).

Nos proponemos, en primer lugar, señalar algunos aspectos insatisfactorios que muestra la enseñanza habitual de la relatividad en este nivel. Seguidamente ofrecemos un material alternativo para impulsar la enseñanza y aprendizaje de la relatividad.

## 1. ALGUNAS CARACTERÍSTICAS DE LA INTRODUCCIÓN A LA RELATIVIDAD CON LA ENSEÑANZA TRADICIONAL

Durante los últimos años hemos podido ver publicados diversos trabajos que señalan limitaciones de la enseñanza de la relatividad en el bachillerato. Por ejemplo, Alemañ (1997) hace una relación y comenta errores comunes en la introducción de esta teoría, y, más recientemente, Pérez y Solbes (2003) concluyen que la relatividad se enseña en este nivel de forma poco clarificadora, sin tener en cuenta, por ejemplo, las concepciones alternativas de los alumnos y sin resaltar su posición en la estructura de la física. Por lo demás, bastantes de los problemas señalados en estos trabajos son similares a los detectados en otros países (Hewson, 1982; Villani y Pacca, 1987; Okun, 1989).

En resumen, distintos estudios apuntan a que la enseñanza de la relatividad, en la forma tradicional y en los niveles introductorios, debería ser revisada. Como quiera que los trabajos referidos, entre otros, ya analizan los inconvenientes de esta forma de presentar la relatividad, aquí nos limitaremos a aportar otros aspectos que emergen de nuestro análisis y práctica docente. Los enumeraremos de forma muy breve atendiendo a una estructura que nos ayudará después a señalar mejor virtualidades de la propuesta alternativa. Destacaríamos lo siguiente:

1. El tratamiento de la relatividad en los libros de bachillerato es, de forma generalizada, muy escaso, claramente insuficiente.

Llama la atención al consultar los libros de texto (Anexo I) cómo la relatividad es un tema muy breve, que sólo trata unos pocos aspectos, casi siempre de forma aislada y puntual. Parece, en muchos casos, que las expresiones operativas, que sí muestran los textos, se justifican por su funcionalidad en temas posteriores, más que por el papel que tienen dentro de la propia estructura del tema.

2. Los desarrollos habituales se presentan acabados y, en consecuencia, propugnan un tipo de aprendizaje meramente repetitivo de la relatividad, resultando muy escasa, si no nula, la presencia en este tema de aspectos de la metodología científica.

Desde luego, éste es un mal general de la enseñanza de la física. La deficiencia se acentúa más, si cabe, en el tema de relatividad. Es muy difícil encontrar en los libros de referencia para los profesores de bachillerato actividades, preguntas o cuestiones que soliciten a los estudiantes formular hipótesis sobre alguna situación, participar en la elaboración de algún diseño experimental, enfrentarse a algún problema planteado como una investigación o, al menos, analizar el resultado de un problema, de una expresión operativa, etc.

3. No se muestran los conceptos de *relatividad*, suficientemente, como un conjunto coherente de conocimientos; como una teoría estructurada sobre unos principios o postulados fundamentales y que obtiene de dichos principios unas leyes cinemáticas y dinámicas.

Quizá sorprenda esta valoración cuando todos los libros enuncian los postulados de la relatividad y bastantes exponen consecuencias de dichos postulados. Sin embargo, una lectura atenta, buscando otros signos de coherencia interna en la teoría que se presenta y fijando particular atención en los conceptos de *dinámica*, ayudará a comprender el punto de vista expuesto. En efecto: ¿se muestra alguna relación entre las expresiones dinámicas y los postulados relativistas? ¿Se puede entender el tipo de jerarquía existente entre las diferentes expresiones dinámicas introducidas, por ejemplo, la expresión del impulso, la ley de equivalencia entre la masa y la energía, la cuestionada ley de la masa variable con la velocidad, la ley que relaciona el impulso con la masa y con la energía? ¿Cuáles son leyes fundamentales y cuáles son expresiones particulares? ¿Cómo se relacionan estas expresiones con los conceptos de *cinemática*? No es posible responder a estas preguntas utilizando como referencia los libros de texto de bachillerato que hemos consultado.

4. Abundando en el punto anterior, observamos que no se trabaja sobre el hecho fundamental de que tanto los conceptos de *cinemática* como los de *dinámica* derivan de una misma imagen del mundo, consecuencia a su vez de los postulados de la relatividad especial. Esto contribuye a no dejar ver una continuidad entre la cinemática y la dinámica relativistas.

No es infrecuente que las críticas a los conceptos del *espacio absoluto* y el *tiempo absoluto* precedan a la presentación de los postulados de la relatividad especial. Pero, después de este inicio prometedor, se desaprovecha la ocasión para hacer emerger la imagen alternativa relativista (el espacio-tiempo cuatridimensional) y para sustentar los nuevos conceptos sobre esta concepción del mundo. En nuestra opinión, hacerlo contribuiría notablemente a arraigar dichos conceptos y, en particular, a establecer claramente las conexiones entre la cinemática y la dinámica. Es posible que algunas de las leyes de cinemática, como la ley de contracción de longitudes o la de dilatación de tiempos hagan intuir a los usuarios de los textos (docentes y alumnos) una aproximación a la mencionada imagen cuatridimensional del espacio-tiempo relativista. Si así fuera, esta imagen se desvanecería por completo al tratar con las expresiones dinámicas, es decir, con las leyes que involucran el impulso, la masa o la energía, pues, tal como se presentan estas leyes, parece que no tuvieran nada que ver con el mencionado espacio-tiempo.

5. Otra deficiencia se refiere a la manera de presentar el tránsito de la mecánica clásica a la relatividad. Dicho tránsito puede dar a entender al estudiante que es posible deducir la relatividad especial con el mero hecho de introducir modificaciones en los conceptos de la *mecánica clásica*.

En efecto, la secuencia típica de introducción de conceptos de *dinámica relativista* comienza señalando la incompatibilidad de los principios de la dinámica de Newton con la relatividad. Esto nos parece absolutamente necesario, como mínimo para conectar con ideas

arraigadas en los estudiantes sobre conceptos que no se podrán mantener en relatividad. Así, se muestra, por ejemplo, que el concepto newtoniano de *fuerza resultante* (proporcional a la aceleración) no es compatible con la existencia de un límite superior de velocidades. Ahora bien, una vez señalada la incompatibilidad de leyes de la mecánica clásica con la relatividad, casi todos los libros emprenden un proceso de modificación de esas leyes para «adecuarlas a los hechos relativistas», un proceso que parece un intento vano de mantener algo de los conceptos que se han de superar. A este respecto, conviene insistir en que la relatividad es una teoría autónoma con unos postulados propios de los que se deriva una visión del mundo y sus leyes. Es cierto, y resulta fundamental, que la relatividad especial incluye como caso límite la mecánica clásica (las leyes relativistas devienen en las de la mecánica clásica cuando el cociente  $v/c$  tiende a cero), pero no lo es en sentido inverso. Una presentación correcta de la relación entre ambas teorías debería deducir las leyes relativistas de los postulados de Einstein y mostrar también el grado de error o el margen de licitud que se puede tener al utilizar la mecánica newtoniana. Si no se muestran bien diferenciadas las dos teorías, los estudiantes acaban solapando los conceptos de una y otra, como si de una sola teoría fueran (Villani y Pacca, 1987; Toledo et al., 1997; Villani y Arruda, 1998).

6. La secuencia de introducción de conceptos de *relatividad* que comentamos en el punto anterior incorpora expresiones no compatibles con la terminología actual rigurosa de la relatividad que, además, pueden favorecer interpretaciones erróneas de algunos fenómenos.

Diversos trabajos, entre los citados, advierten de lo inapropiado de utilizar conceptos como el de *masa variable* con la velocidad (según la expresión  $m = m_0 \gamma$ ) y, asociada con ella, la ley que expresa la equivalencia entre la masa y la energía (al distinguir entre  $m$  y  $m_0$ , se escribe  $E = mc^2$  y  $E_0 = m_0 c^2$ ). Al igual que en los libros técnicos, queremos utilizar el concepto de una *masa invariante*  $m$  para una partícula, es decir, una masa cuyo valor no depende del sistema de referencia adoptado, escalar, y asociada al cuadrado del cuadrivector impulso-energía mediante la expresión  $(mc^2)^2 = E^2 - (pc)^2$ . En el sistema de referencia propio de dicha partícula –donde el impulso  $p$  es igual a cero– esta ley fundamental deriva hacia la siguiente relación entre la energía (propia) y la masa:  $E_0 = mc^2$ , expresión que tomamos como referencia para hablar de equivalencia entre la masa y la energía.

Éstas son las leyes que habría que utilizar en la enseñanza de la relatividad. No únicamente por buscar una fidelidad con la teoría formal, sino, sobre todo, porque utilizarlas contribuye a orientar la atención de los estudiantes hacia el entramado espacio-tiempo relativista. Por ejemplo, el uso de la ley de la masa variable puede hacer concebir la idea de que, al aumentar la velocidad de una partícula, aumentaría su inercia y, por eso, se diría, la partícula no puede alcanzar el límite superior de velocidades,  $c$ . Con este razonamiento, los estudiantes podrían llegar a pensar que algo le pasa a la partícula al aumentar «su

velocidad». Sin embargo, lo esencial en este proceso es que la velocidad no es una propiedad de la partícula sino una magnitud relativa, dependiente del sistema de referencia. Por eso, para entender mejor el concepto de una *velocidad límite* conviene imaginar la partícula en reposo (para un cierto sistema de referencia inercial) y estudiar su movimiento desde diferentes sistemas de referencia inerciales que se alejen de ella a velocidades crecientes. Así, los estudiantes pueden entender que a la partícula no le ocurre nada (por supuesto, a su masa invariante tampoco) y que la existencia del límite superior de velocidades es consecuencia del carácter relativo de las longitudes y los tiempos.

Aunque el debate sobre la oportunidad o no de utilizar conceptos como el de una *masa invariante* en la introducción a la relatividad continúa enriqueciéndose (Sandin, 1991), el consenso se amplía a favor de quienes llamaron la atención sobre la necesidad de usar una terminología rigurosa (Adler, 1987; Okun, 1989; Strnad, 1991; Taylor y Wheeler, 1992; Pérez y Solbes, 2003). Como muestra de ello se observa que algunos libros universitarios de física general, que en ediciones anteriores incluían la masa variable, en las ediciones más recientes la han descartado (Gettys, Sélner y Skove, 1993; Alonso y Finn, 1995; Tipler y Llewellyn, 2002). Nosotros (Alonso y Soler, 2002), como otros autores (Pérez y Solbes, 2003), nos sumamos a esta orientación. La cuestión pendiente, no obstante, es mostrar que es posible utilizar esta terminología, sin perjuicio de introducir los conceptos con un grado aceptable de justificación formal y, al mismo tiempo, de forma accesible para los estudiantes de secundaria.

Las cuestiones que acabamos de resumir colocan en una situación compleja la enseñanza de la relatividad en el bachillerato. Debemos añadir que otros textos disponibles, los libros técnicos que desarrollan la teoría formalmente y los libros de divulgación, no resuelven el problema. Los primeros resultan habitualmente inaccesibles para el profesorado porque estructuran los conceptos en torno a unos desarrollos matemáticos demasiado elevados y, también, porque tienen un enfoque diferente del pretendido, ya que están dirigidos a investigadores y no a estudiantes. Por su parte, algunos libros de divulgación contienen excelentes exposiciones y muy buenas ideas, pero, también, su enfoque es diferente del pretendido y no siempre resulta fácil trasladarlas a una unidad didáctica.

Finalmente, no contribuye a resolver el problema el hecho de que, en nuestro país, los profesores de física y de química sean los mismos, de modo que para una amplia mayoría de docentes (que no son licenciados en física) la relatividad no se incluía en los contenidos obligatorios de su licenciatura, por tanto, se trata de unos conceptos, en muchos casos, pendientes de ser aprendidos. La escasa formación docente en relatividad explicaría, en alguna medida, la actitud de comprensión que adopta una parte del profesorado ante la propuesta de la Administración de suprimir los contenidos de relatividad del bachillerato, pero ello no resuelve el problema de la enseñanza.

## 2. CARACTERÍSTICAS BÁSICAS DE LA PROPUESTA ALTERNATIVA

A continuación presentaremos los materiales y comentaremos algunas características de nuestra propuesta para la introducción a la relatividad en el bachillerato, que no aparecen en la enseñanza tradicional.

Durante la experimentación de la LOGSE en la Comunidad Valenciana, colaborábamos en el diseño y la docencia de planes de formación del profesorado de física y química. Entonces elaboramos un tema de «Elementos de relatividad» para bachillerato. Aquel material inicial se ha ido puliendo día a día, a la luz de nuevas aportaciones de la investigación en Didáctica de las Ciencias, a partir del resultado obtenido en nuestras propias clases y aprovechando, muy especialmente, las aportaciones de un amplio colectivo de profesores, con quienes hemos tenido el privilegio de trabajar en los cursos de formación docente impartidos durante estos diez años.

En este momento, nuestra propuesta se concreta en tres productos:

- El libro *Construyendo la relatividad* (Alonso y Soler, 2002), que tiene un doble carácter divulgativo y didáctico. Es accesible con un nivel de conocimientos equivalente a un segundo de bachillerato de ciencias y se dirige especialmente a profesores que puedan impartir este tema en el bachillerato o, a un nivel sencillo, en la universidad. Abarca desde el estudio de la solución que dio la mecánica newtoniana al problema de la relatividad de los movimientos, hasta una introducción cualitativa a la relatividad general.

- Un CD con materiales interactivos, también dedicado a los docentes, sin excluir otras personas amigas de la teoría relativista. Contiene: 1) Una unidad didáctica en dos formatos: el programa-guía para el alumno y el mismo tema comentado para el profesor. 2) Una presentación en *power* que resume de forma algo más visual conceptos importantes de esta teoría. 3) Textos, biografías, desarrollos, bibliografía, enlaces... vinculados al tema y a la presentación. 4) Treinta animaciones informáticas de elaboración propia, todas ellas interactivas y también enlazadas con la presentación y con el contenido del tema (Alonso y Soler, 2005).

- Un curso de formación docente, de una duración variable entre 12 y 30 horas, en el que procuramos que los profesores vivan *in situ* la propuesta; recreen las actividades del programa-guía sometidos a retos parecidos a los que tendrán que enfrentar a sus alumnos si deciden utilizar nuestros materiales.

Justificaremos ahora por qué nuestra propuesta puede contribuir a mejorar la enseñanza de la introducción a la relatividad.

Nuestro trabajo se incardina dentro del modelo de enseñanza y aprendizaje de la física por investigación (Gil, 1993; Rodrigo y Cubero, 2000; Furió, 2001), una orientación que, de forma resumida, la entendemos como

aquella que considera que para que los alumnos puedan elaborar nuevos conocimientos, los contenidos deben ser significativos, han de resultarles relevantes y han de tener correspondencia con su entorno. Dentro de esta orientación, planteamos una enseñanza problematizada (Martínez Torregrosa, Verdú y Osuna, 2002) de la relatividad, de tal modo que un gran problema científico dirige y orienta la estructura del tema entero, dejando ver un hilo conductor claro al que se remiten los contenidos. Lo denominamos el «problema de la relatividad», es decir, el problema que genera a la elaboración de teorías físicas el hecho de que los movimientos sean relativos y, en consecuencia, magnitudes necesarias para describirlos (por ejemplo, la posición, la velocidad, la energía cinética) tienen un valor diferente en cada sistema de referencia.

En coherencia con esta orientación metodológica, todos los materiales (la unidad didáctica, el libro de referencia y el curso de formación) se estructuran mediante programas-guía de actividades (Gil y Martínez Torregrosa, 1987; Sanmartí, 2000), que tratan de superar la transmisión de conocimientos acabados y favorecer un tipo de aprendizaje tentativo. La unidad didáctica avanza con la ayuda de una secuencia lógica de cuestiones que realizan los alumnos en clase bajo la tutela y la orientación del profesor. La clase se dispone en grupos de tres o cuatro estudiantes y, tras cada actividad, el docente dirige una puesta en común, aporta la información necesaria e introduce la siguiente actividad. Esto permite a los grupos cotejar sus producciones y enriquecerlas con las del resto de la clase y con la aportación del profesor o profesora. Así, los estudiantes van elaborando en su cuaderno unos apuntes bien estructurados del tema, incluidas las preguntas del programa-guía, y, como respuesta a ellas, los contenidos de la unidad (hipótesis, desarrollos teóricos, ejercicios...). Para los lectores del libro, esta misma estructura supone una invitación continuada a la reflexión, a realizar pausas en la lectura tratando de anticipar algo de la respuesta a cada cuestión o, simplemente, planteándose dichas cuestiones con objeto de que la lectura posterior sea más significativa. Para los asistentes al curso de formación, esta misma metodología les ayuda a vivir aspectos de la propuesta, a recrearla en un ambiente semejante al del aula.

Una característica de los materiales, íntimamente relacionada con los puntos anteriores, ha sido dar prioridad a los desarrollos cualitativos frente a los detalles matemáticos (sin eludir estos últimos siempre que nos ha parecido necesario). Es decir, procuramos verbalizar al máximo con el fin de ayudar a la (re)construcción de los conocimientos involucrados. Téngase en cuenta que la actividad de la ciencia considera fundamental el uso específico del lenguaje escrito, en tanto que posibilita el intercambio y la creación de un cuerpo de conocimiento común. Más concretamente, entre las demandas fijadas en la construcción de textos figura el dominio de habilidades cognitivo-lingüísticas como describir, explicitar, justificar y argumentar (Posner, 1982; Sanmartí, Izquierdo y García, 1999; Sanmartí, 2002). Se debe, pues, favorecer una aproximación hacia los términos y las representaciones científicas, más elaboradas que las utilizadas en la vida cotidiana, y así evidenciar el carácter del lenguaje científico como instrumento creador (Jorba, 1998): «se hace ciencia escribiendo ciencia».

Por otra parte, dado que este modelo de enseñanza y aprendizaje promueve un cambio conceptual, epistemológico y actitudinal de los estudiantes (Duschl, 1990; Gil et al., 1999), hemos intentado tener en cuenta de forma explícita los problemas principales que pueden actuar como obstáculos para el aprendizaje de elementos de la relatividad (Hewson, 1982; Villani y Pacca, 1987; Alemañ, 1998; Scherr et al., 2002; Pérez y Solbes, 2003) y hemos diseñado las actividades con especial cuidado para contribuir a superar esas dificultades, sin olvidar que las concepciones alternativas son persistentes, pero también que algunas pueden constituir un punto de apoyo en el acceso al conocimiento científico (Viennot, 1996; Furió, 2001).

Respecto a los elementos conceptuales que contempla la propuesta, en coherencia con lo expresado en el apartado anterior, queremos destacar la presentación, por ejemplo, de todas las implicaciones de la teoría relativista como consecuencia de sus postulados, mostrando sus relaciones de interdependencia. En particular, hemos dado un papel preponderante a los diagramas espacio-tiempo de Minkowski (Minkowski, 1908) y los correspondientes diagramas dinámicos impulso-energía (Taylor y Wheeler, 1992). Estos instrumentos muestran de forma sencilla, pero profunda, las implicaciones de la teoría manejando conceptos coherentes con la terminología precisa, como, por ejemplo, el concepto de *cuadrivector*. Sin embargo, estaban, hasta la fecha, ausentes en los libros de bachillerato.

Hemos procurado incluir todos los elementos metodológicos compatibles con nuestro modelo de enseñanza que, a requerimiento del hilo conductor, encajan en el tema. Así, por ejemplo, los estudiantes afrontan un largo e importante problema como investigación (Gil et al., 1989; Ramírez et al., 1991), sobre el movimiento de una nave hacia un planeta lejano; un trabajo bibliográfico sobre aspectos de las relaciones entre ciencia, tecnología y sociedad (Solbes y Vilches, 1992; Acevedo, 1995; Cajas, 2001; Solbes, 2003), referidos a la relatividad, una reflexión sobre avances técnicos que se han debido acometer para contrastar experimentalmente la teoría y varias actividades que demandan emisión de hipótesis (en problemas, introducción de magnitudes...), análisis de diseños experimentales y contrastación de hipótesis, como el del experimento de Michelson y Morley o la medida de la velocidad de la luz (Gülmez, 1997; Gimeno et al., 2000).

En cuanto a la evaluación de la unidad, consideramos dicha evaluación como un instrumento de aprendizaje (Jorba y Sanmartí, 1993; Alonso, Gil y Martínez Torregrosa, 1994). Cada actividad del programa-guía demanda a los estudiantes que pongan en juego sus conocimientos al servicio de la investigación en curso. Por tanto, se puede realizar una evaluación continua y formativa a lo largo del tema, simplemente pidiendo a los alumnos que resuelvan de forma individual algunas de tales actividades y dando un doble uso al producto de su trabajo: como elemento de evaluación y, en una sesión de corrección, como actividad de clase. Esto no excluye que se complete la evaluación haciendo un examen global y

con la valoración de otros trabajos que se pueden pedir a los alumnos (como, por ejemplo, el trabajo bibliográfico sobre implicaciones C/T/S de la teoría, unas reflexiones sobre los conceptos de *espacio* y *tiempo*, etc.). Por lo demás, al existir un problema que estructura el tema entero y tener en cuenta explícitamente aspectos que pueden actuar como obstáculo para avanzar, resulta sencillo establecer criterios de calificación en las actividades, refiriendo esos criterios justamente al grado de superación de tales obstáculos (Alonso, 1998).

Diremos, por último, que al desarrollar el trabajo en clase tratamos de incorporar, en buena medida, elementos de las tecnologías de la información y de la comunicación, TIC, (Brooks, 1997; Gras-Martí y Cano, 2000) para facilitar el trabajo del alumnado en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la relatividad. Tiene aquí un papel destacado el conjunto de animaciones que hemos elaborado usando el programa, de distribución gratuita, *Modellus* (Duarte, 1996). En el ámbito docente, estas animaciones pueden ayudar al profesor a mostrar de forma más clara y atractiva algunas cuestiones. También estimulan a los estudiantes a incrementar su interés por la relatividad y a avanzar con mayor autonomía en determinados momentos, pues su principal virtud ha sido aumentar el carácter interactivo del material, al incitar a los usuarios a intervenir en los procesos que se enseñan y/o aprenden.

Ésta es, en efecto, la cualidad de las animaciones que más queremos señalar. Las oportunidades de participar y de aprender se potencian notablemente porque las animaciones permiten a los estudiantes ponerse a sí mismos a prueba —en ocasiones en clase, otras veces en su propia casa— antes o después de trabajar determinados contenidos. Mencionamos sólo algunas posibilidades: los estudiantes pueden prever la respuesta a determinadas cuestiones antes de ejecutar una animación que la resuelve visualmente, pueden alterar el valor de las magnitudes involucradas y comprobar cómo afecta al problema mientras usan la aplicación informática, pueden alterar las condiciones iniciales del problema y ver qué consecuencias tiene sobre el hecho físico estudiado, e incluso pueden entrar en el modelo y alterar las mismas leyes relativistas que sustentan la animación (lo que, en definitiva, les da la oportunidad de modificar el *applet*). Bien tutelada, esta característica de las animaciones es una fuente añadida de aprendizaje para los alumnos o, más en general, para cualquier persona que desea profundizar sobre lo tratado en la animación. Esta cualidad también es muy útil para los docentes, no sólo porque ellos pueden interactuar con cada animación como luego lo harán sus alumnos; también porque, con poco esfuerzo, podrán, si lo desean, modificar la aplicación, adaptándola a sus necesidades. Con un poco de práctica también podrán llegar a crear otras animaciones complementarias de las disponibles en el CD o alternativas a algunas de ellas.

Finalmente, también se proporciona una selección de *applets* existentes en la red con las fichas correspondientes (Torres y Soler, 2003) y otras direcciones de páginas *web* con contenidos de relatividad.

### 3. DESARROLLO DE ALGUNAS ACTIVIDADES DEL PROGRAMA-GUÍA

Lo que pretendemos ahora es apoyar algunos de los comentarios, con el enunciado real de unas pocas actividades (una versión del programa-guía está disponible en <www.curiedigital.net>. Concretamente comentaremos las actividades iniciales, que utilizamos para plantear el problema que estructura el tema. Después veremos otras actividades de una parte más avanzada, elegidas para destacar uno de los aspectos novedosos del trabajo: la introducción de magnitudes de cinemática y de dinámica. Escribiremos el texto y las actividades del programa-guía en letra cursiva (éstas últimas, además, resaltadas en negrita) e intercalaremos unos comentarios sobre la resolución de las actividades en el aula.

#### 3.1. Actividades iniciales que plantean el problema de la relatividad y ayudan a justificar el índice del tema

*Habitualmente se relaciona la relatividad únicamente con la teoría que inventó el físico Albert Einstein a principios del siglo xx. Sin embargo, el problema científico de la relatividad, básico dentro de la física, se puede plantear con una reflexión sencilla acerca del posible estado de reposo o de movimiento de cualquier objeto.*

**A.1. ¿Está la pizarra de la clase en reposo o en movimiento? Si estuviera en movimiento, ¿qué tipo de movimiento tendría? ¿Qué trayectoria describiría?**

Comentarios: una vez resuelta por los alumnos, les trasladamos los interrogantes que plantea el carácter relativo de los movimientos con vistas a construir una teoría mecánica que los estudie: ¿se pueden aplicar las leyes de los movimientos en cualquier sistema de referencia? ¿Podrán dichas leyes dar cuenta de la diversidad de descripciones que tiene un movimiento (como el de la pizarra) al cambiar de sistema de referencia? Formulando estas cuestiones en la puesta en común, ayudamos a los grupos a entrever algo del problema. También se intuyen las ventajas que cabe suponer que tendría encontrar un objeto del Universo en reposo absoluto, enlazando así con la siguiente actividad.

**A.2. Teniendo en cuenta las conclusiones obtenidas en la actividad anterior, pensad qué interés puede tener para el estudio de los movimientos encontrar un objeto del mundo en reposo absoluto. Mencionad objetos a los que, en diversos momentos de la historia, se les haya atribuido este privilegio.**

Comentarios: cabe suponer que si existiera un objeto del mundo en reposo absoluto (una estrella, por ejemplo), se podría adoptar como un sistema de referencia privilegiado para estudiar los movimientos de todos los demás. Los alumnos saben que algunos objetos celestes (la Tierra, el Sol) han gozado durante un tiempo en el pasado de este privilegio; pero, al mismo tiempo, sus conocimientos de mecánica newtoniana les permiten reconocer que ninguno de ellos está en reposo absoluto.

### A.3. ¿Qué problema plantea a las leyes de la física el fracaso histórico en la búsqueda de un objeto en reposo en el Universo?

Comentarios: la imposibilidad de encontrar un objeto material en reposo absoluto en el Universo conduce a plantear enfoques alternativos en relación con el problema de la relatividad. El gran reto relativista del que queremos que tenga conciencia la clase es la búsqueda de unas leyes únicas y, al mismo tiempo, capaces de proporcionar descripciones diferentes de todo movimiento según cual sea el sistema de referencia que se adopte. Un reto que resumimos en el aula mediante las preguntas siguientes:

¿Se podrá elaborar una mecánica capaz de describir un movimiento desde diferentes sistemas de referencia?

¿Podrán ser comparadas las interpretaciones diferentes del mismo hecho realizadas por observadores ligados a sistemas de referencia distintos? ¿Se podrá dotar a la física de unas expresiones adecuadas para trasladar magnitudes como posiciones, velocidades, etc., al pasar de un sistema de referencia a otro?

Estas preguntas permiten introducir de forma justificada el índice del tema, pues dicho índice presenta una secuencia de problemas y respuestas cada vez mejor elaboradas en relación con el problema de la relatividad.

#### Índice del tema

1. El problema de la relatividad
2. Solución que aportó la mecánica newtoniana. Principio de relatividad de Galileo
3. La luz y la relatividad newtoniana
4. Solución que aportó la relatividad especial. Postulados de Einstein
5. Estudio de implicaciones cinemáticas de la relatividad especial
6. Estudio de implicaciones dinámicas de la relatividad especial
7. Breve introducción a la relatividad general

### 3.2. Actividades para introducir el concepto de cuadvectores espacio-tiempo

Comentaremos ahora unas actividades sobre un concepto central de la cinemática relativista: el *cuadvectores espacio-tiempo*. Lo elegimos aquí porque es un concepto ausente en los libros de este nivel a pesar de que, como trataremos de mostrar, puede contribuir de forma notable a una comprensión significativa de las leyes relativistas. Para contextualizar las actividades, téngase en cuenta que previamente los alumnos ya han completado los apartados 2, 3 y 4 del tema y han resuelto una parte importante del apartado 5.

**A.4. Pensad en un objeto desplazándose de izquierda a derecha con velocidad constante  $v$  (respecto de un cierto sistema de referencia inercial, SRI, K). Quere-**

**mos determinar su velocidad en otros SRI,  $K'$ ,  $K''$ ..., que avanzan en sentido opuesto (de derecha a izquierda) con velocidades crecientes. Teniendo en cuenta que existe un límite superior de velocidades,  $c$ , y la expresión de la velocidad ( $v=d\vec{r}/dt$ ), reflexionad sobre los valores que pueden tener las longitudes o intervalos espaciales  $d\vec{r}$  y los intervalos de tiempo  $dt$ , en cada uno de esos SRI.**

Comentarios: como los estudiantes ya han manejado la ley relativista de composición de velocidades, no tienen dificultad para entender que, a medida que aumenta el valor que puede tener la velocidad de un objeto, el cociente entre el desplazamiento espacial ( $d\vec{r}$ ) y el correspondiente intervalo de tiempo ( $dt$ ) no puede crecer indefinidamente, sino tan sólo aproximarse al límite superior de velocidades,  $c$ . Se comprueba así que las distancias espaciales y los intervalos temporales correspondientes a un movimiento son interdependientes, pues, por ejemplo, cuanto más deprisa se mueva un objeto respecto del SRI adoptado, menos puede aumentar la longitud recorrida para un intervalo de tiempo dado.

*La existencia de un límite superior de velocidades es coherente con una relación de dependencia mutua entre el espacio y el tiempo que, como hemos visto, también se pone en evidencia al trabajar con diagramas posición-tiempo relativistas. Así pues, en relatividad la longitud (o distancia espacial) y el intervalo de tiempo no son absolutos, como supuso la física clásica.*

**A.5. En la mecánica de Newton, el intervalo espacial y el intervalo temporal eran magnitudes absolutas o invariantes, y coherentes con los conceptos de espacio y de tiempo clásicos. Teniendo en cuenta la relación entre el espacio y el tiempo que rige en relatividad, ¿qué tipo de magnitud (formalmente similar a estos intervalos) podría ser invariante en relatividad?**

Comentarios: el texto que precede a esta actividad alude a otras actividades de este mismo apartado del tema donde los alumnos se familiarizan con los diagramas espacio-tiempo de Minkowski y los usan para obtener consecuencias importantes de cinemática relativista. Esas actividades enseñan a los estudiantes dos conceptos fundamentales: la relatividad de la simultaneidad y la relación que en relatividad se establece entre ese carácter relativo de la simultaneidad y el principio de causalidad de las leyes. Se pueden consultar en un trabajo anterior (Alonso, 2000). Informamos aquí a la clase de que, tomando sólo una dimensión espacial (algo que hacemos a lo largo de todo el tema), la mencionada distancia espacio-temporal,  $ds$ , es:  $ds = \sqrt{(cdt)^2 - (dx)^2}$ , siendo  $dx$  la distancia espacial recorrida por el móvil y  $dt$  el intervalo de tiempo transcurrido. Definimos también un vector espacio-tiempo, cuyo módulo es, justamente, esta distancia. En el caso simplificado el vector espacio-tiempo tiene dos componentes (la primera temporal y la segunda espacial) y se expresa así:  $d\vec{s} = (cdt, dx)$ . En general tiene cuatro componentes (uno temporal y tres espaciales) y se llama cuadvectores espacio-tiempo.

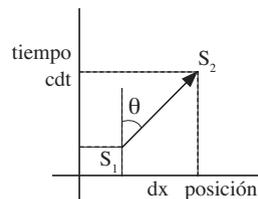
**A.6. (Opcional) Utilizad las ecuaciones de transformación de Lorentz para comprobar que el módulo del**

*cuadrivector espacio-tiempo, ds, es una magnitud invariante, es decir, tiene el mismo valor en todos los SRI.*

Comentarios: consideramos opcional la actividad porque poco aporta este desarrollo operativo a lo esencial, esto es, a que los estudiantes conozcan la invariancia de ds. Por eso, en nuestras clases muchas veces ahorramos el desarrollo (por otra parte, sencillo), en beneficio de tratar otros aspectos más cualitativos.

**A.7. Señalad en un diagrama de Minkowski dos eventos arbitrarios  $S_1$  y  $S_2$  y dibujad un vector que represente el intervalo espacio-tiempo entre ellos. Dad el significado de las proyecciones de este vector sobre cada eje y relacionad la inclinación,  $\theta$ , del vector entre los dos eventos con una posible relación causal entre ellos.**

La figura muestra el vector espacio-tiempo. Sus proyecciones sobre el eje espacial y sobre el eje temporal representan, respectivamente, la distancia espacial recorrida por un móvil y el intervalo de tiempo transcurrido para recorrer esa distancia, o más exactamente una cantidad proporcional a dicho intervalo de tiempo (en un cierto SRI). Los alumnos entienden perfectamente que, en esta representación, la inclinación,  $\theta$ , del vector espacio-tiempo no puede sobrepasar un determinado valor, pues dicha inclinación está relacionada con la velocidad del móvil:  $v = \frac{dx}{cdt} c$  (en unidades c).



**A.8. Una nave espacial realiza un viaje interplanetario desde la Tierra hacia un planeta lejano. Suponiendo una velocidad de crucero constante, representad en un diagrama de Minkowski el cuadrivector espacio-tiempo del viaje: a) Para un SR ligado a la nave,  $ds_n$ , b) Para un SR ligado a la Tierra,  $ds_r$ . ¿Qué conclusión se extrae acerca del valor que tiene la duración del viaje en la Tierra y en la nave?**

Comentarios: en el SRI ligado a la nave, ella está en reposo. Por tanto, el vector  $ds_n$  se dibuja sobre el diagrama vertical, paralelo al eje de tiempos, pues el desplazamiento espacial de la nave es nulo. En cambio, en el SRI ligado a la Tierra la nave avanza a una velocidad constante, por lo que el vector  $ds_r$  es inclinado. Ahora bien, como el módulo del cuadrivector espacio-tiempo es invariante [téngase en cuenta el signo menos de  $ds = \sqrt{(cdt)^2 - (dx)^2}$ ], la longitud aparente del vector inclinado (punto de vista de la Tierra) es mayor que la longitud aparente del vector vertical (punto de vista de la nave). Cuando los alumnos han llegado a estas conclusiones, utilizamos el *applet* adjunto (Fig. 1).

Figura 1

Applet sobre el análisis del movimiento de una nave hacia un planeta lejano.

**Cuadrivector espacio-tiempo**

En el SR de la nave, el desplazamiento espacial es nulo ( $dx=0$ ). Por tanto, el cuadrivector se proyecta íntegramente sobre el eje temporal.  $dsn=dt_0$

En el SR exterior, ligado a la Tierra, el cuadrivector tiene componente espacial y temporal

¿Por qué  $ds_T$  tiene una longitud aparente mayor que  $dsn$ ?

¿Qué tiempo está midiendo el control?

¿Cuánto vale la velocidad de la nave?

Esta aplicación informática va dibujando el movimiento de la nave mientras representa el cuadrivector espacio-tiempo para ambos SRI.

Resulta notable que de este diagrama se desprende directamente la dilatación del tiempo, expresada en términos cualitativos. En efecto, la duración del viaje resulta menor para el SRI ligado a la nave (representada directamente por la longitud del vector vertical) que para el SRI ligado a la Tierra (representada por la proyección sobre el eje vertical del vector inclinado). Para aprovechar este resultado hemos incorporado en el *applet* un reloj, situado en la Tierra, mientras el reloj de control avanza con el punto de vista de la nave. Esto permite añadir algunas cuestiones al *applet* y, una vez vista en clase la expresión operativa de la ley de la dilatación de tiempos, pedimos a los estudiantes que calculen la velocidad de la nave.

Este enfoque nos aproxima al concepto *cuatridimensional de la relatividad*. La importante ley de dilatación del tiempo se presenta así a los alumnos como una consecuencia de la invariancia del módulo del cuadrivector espacio-tiempo. Ellos pueden entender que esta ley no trata de «algo extraño que le ocurre al tiempo en relatividad», sino que es una consecuencia del hecho de que espacio y tiempo son interdependientes.

Ahora comentaremos unas actividades que mostrarán que es posible aplicar el mismo enfoque a la obtención de leyes y conceptos de dinámica relativista.

### 3.3. Actividades para introducir conceptos de dinámica y diagramas impulso-energía

Nos referimos ahora al apartado 6 del tema que nosotros también iniciamos mostrando que los principios de la mecánica de Newton y las definiciones de conceptos asociados a ellos (como, por ejemplo, la fuerza, el impulso o la energía cinética clásica) no son compatibles con la relatividad. Hay, no obstante, una diferencia fundamental en nuestro enfoque: no deducimos los conceptos de la dinámica relativista modificando los de la mecánica newtoniana, sino conectándolos con las magnitudes cinemáticas de relatividad y tratando de arraigarlos en el entramado espacio-tiempo que sustenta la teoría.

*Como acabamos de ver, los conceptos y las leyes de la dinámica de Newton no pueden ser correctos en relatividad. Es necesario, pues, definir nuevos conceptos de dinámica que sean compatibles con los postulados relativistas y con el entramado espacio-tiempo.*

**A.10. En la mecánica de Newton el impulso dinámico de una partícula de masa  $m$  se calcula usando la expresión  $\vec{p} = m\vec{v} = m \frac{d\vec{r}}{dt}$ . Teniendo en cuenta que en**

**relatividad el espacio y el tiempo son interdependientes, ¿qué tipo de magnitud, alternativa a ésta, cabe plantear?**

Comentarios: sobre los avances logrados en el apartado anterior, los estudiantes apuntan la idea de utilizar en

relatividad el vector desplazamiento espacio-tiempo  $d\vec{s}$  en lugar del desplazamiento espacial,  $d\vec{r}$ . Ahora bien, no sólo el desplazamiento espacial  $d\vec{r}$  es relativo; también lo es el intervalo de tiempo correspondiente  $dt$ . Por eso, la nueva magnitud asigna al intervalo de tiempo propio  $dt_0$ , invariante, el papel que la mecánica clásica reserva para el valor absoluto  $dt$ . Definimos, pues, un nuevo vector dinámico, de cuatro dimensiones,  $\vec{P} = m \frac{d\vec{s}}{dt_0}$ .

**A.11. Usad la relación entre vectores  $d\vec{s}$  y  $\vec{P}$  para expresar las componentes del vector dinámico. Ved también qué dimensiones tiene  $\vec{P}$  y cuáles tiene el producto de  $\vec{P}$ , es decir,  $\vec{P}$  por la velocidad de la luz.**

Comentarios: en el apartado de cinemática, los estudiantes desglosan varias veces el cuadrivector espacio-tiempo en sus componentes temporal y espacial. Aquí sólo les pedimos que lo hagan una vez más para obtener los correspondientes componentes del vector dinámico  $[\vec{P} = (mc \frac{dt}{dt_0}, m \frac{d\vec{r}}{dt_0})]$  y, usando la ley de dilatación del

tiempo ( $dt = \gamma dt_0$ ), expresarlo de la forma usual  $[\vec{P} = m\gamma c, m\gamma\vec{v}]$ . Cuando los grupos comprueban que tiene dimensiones de impulso (masa por velocidad) o, multiplicada por la constante universal  $c$ , de energía, entienden que el docente llame a esta magnitud cuadrivector impulso-energía, asimilando la energía relativista a la primera componente del vector (expresado en unidades de energía) y el impulso a las otras componentes (expresado el vector en unidades de impulso). En resumen, mediante un desarrollo sencillo y breve obtenemos las magnitudes dinámicas fundamentales de la relatividad: energía ( $E = m\gamma c^2$ ), impulso ( $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$ ) y cuadrivector impulso-energía  $[\vec{P} = (E, pc)$ , en unidades de energía]. El formalismo es muy accesible, pero acorde con los desarrollos rigurosos, porque no renuncia a tratar lo fundamental desde el punto de vista físico: la inserción de las magnitudes dinámicas en el espacio-tiempo.

A continuación, dos actividades mostrarán que esta conexión explícita que remarcamos entre las magnitudes dinámicas y el vector espacio-tiempo de la cinemática es un punto de apoyo adecuado para deducir las leyes fundamentales de la dinámica.

**A.12. Teniendo en cuenta la relación de proporcionalidad que hay entre el vector espacio-tiempo y el vector impulso-energía, ¿qué se puede decir del módulo de este segundo? Expresad dicho módulo (en unidades de energía) y calculadlo en el sistema de referencia propio de la partícula. Después, escribid una relación general entre la masa, el impulso y la energía de una partícula.**

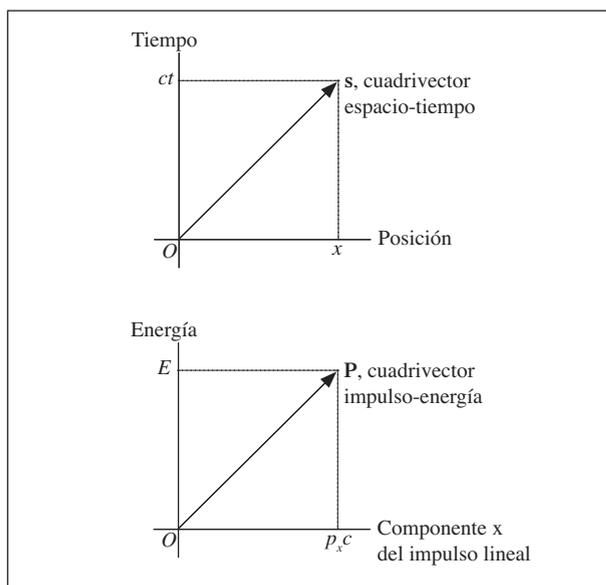
Comentarios: la definición introducida en la actividad 10 dice que el vector dinámico impulso-energía  $\vec{P}$  es proporcional al vector cinemático desplazamiento espacio-tiempo  $d\vec{s}$ , siendo  $m/dt_0$  la constante de proporcionalidad. Por tanto, los alumnos entienden que, al ser el módulo del vector espacio-tiempo invariante, también ha de ser invariante el módulo del vector impulso-energía.

Es inmediato expresar este módulo de  $\vec{P}$  ( $P = \sqrt{E^2 - (\vec{p}c)^2}$ ) y más sencillo aún calcularlo en el sistema de referencia propio de la partícula (ahí  $\gamma=1$ , y la velocidad y el impulso son cero, de modo que  $P = mc^2$ ). Simplemente igualando ambos resultados y elevando al cuadrado, los grupos obtienen la ley fundamental de la dinámica relativista de una partícula, es decir:  $(mc^2)^2 = E^2 - (\vec{p}c)^2$ .

**A.13. Usad otra vez la relación de proporcionalidad que hay entre el vector espacio-tiempo y el vector impulso-energía, en este caso para relacionar la velocidad de la partícula con sus propiedades dinámicas, impulso y energía.**

Comentarios: para ayudar a los grupos a resolver esta actividad, les pedimos que antes representen los vectores sobre sus ejes respectivos tiempo-espacio e impulso-energía (Fig. 2).

Figura 2  
Representación de los cuadvectores cinemático y dinámico sobre sus ejes respectivos.



Con esta representación delante resulta muy sencillo entender que, al ser estos vectores proporcionales, tienen la misma pendiente en estos diagramas. La inclinación del vector espacio-tiempo respecto del eje de ordenadas es  $\frac{dx}{cdt}$  mientras que la del vector impulso-energía es  $\frac{p_x c}{E}$ . Simplemente igualando ambas expresiones y usando la de la velocidad ( $v = \frac{dx}{dt}$ ) se obtiene una ley relativista fundamental, que muestra de forma explícita la conexión entre la magnitud cinemática velocidad y las magnitudes dinámicas masa, energía e impulso (para una dimensión espacial  $v = \frac{p_x c}{E}$ , en general  $\vec{v} = \frac{\vec{p}c}{E}$ ). En general, en los textos de bachillerato no se hace referencia a esta ley.

Vemos así que pueden ser suficientes cuatro sencillas actividades para introducir los conceptos y las leyes principales de la dinámica relativista conectando de forma explícita con los conceptos de cinemática. Consideramos esta base conceptual imprescindible para interpretar de forma adecuada la mayoría de fenómenos de la relatividad que se estudian en este nivel, saliendo al paso de errores frecuentes y aproximando a los estudiantes hacia concepciones que, algunos de ellos, encontrarán en etapas posteriores. Con objeto de apoyar esta afirmación, terminaremos comentando dos actividades más que aplican estos conocimientos a la comprensión de la ley de equivalencia entre la masa y la energía.

**A.15. Concretad la ley fundamental de la dinámica de una partícula en su SRI propio. ¿Qué significado se puede atribuir a la relación obtenida?**

Comentarios: en la actividad 12 se obtiene la expresión que relaciona la masa con la energía de una partícula en su sistema de referencia propio:  $E_0 = mc^2$ . Ahora la interpretamos diciendo que la masa y la energía propia de una partícula son magnitudes proporcionales, siendo la constante de proporcionalidad,  $c^2$ , una constante universal. Informamos a la clase de que esta relación entre la masa y la energía propia es aplicable a partículas individuales y a sistemas, de modo que si se aporta o resta energía a un sistema, su masa se incrementa o disminuye en una cantidad  $\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2}$ . Para visualizar el enorme orden de magnitud de la energía equivalente a una cantidad de masa, pedimos a los grupos que calculen la energía de una cantidad ordinaria de materia (por ejemplo, 1g de materia equivale a  $9 \cdot 10^{13}$  J) ayudando así a la clase a entender por qué esta ley generó la expectativa de aprovechar, mediante procesos adecuados, cantidades ingentes de energía. Quedan así los alumnos preparados para introducirse posteriormente en los temas de física nuclear y de partículas.

**A.16. Considerad un sistema formado por dos partículas iguales avanzando con la misma rapidez. Dibujad en un diagrama dinámico (E, p\_x c) los cuadvectores que representan los impulsos-energía de cada partícula (en su sistema de referencia propio) y el cuadvector que representa el impulso-energía total en los casos siguientes: a) las partículas avanzan en el mismo sentido, b) las partículas avanzan en sentidos opuestos. ¿Qué resultado se obtiene, en cada caso, al comparar la masa del sistema con las masas de las partículas?**

Comentarios: en el caso a) los vectores impulso-energía de las dos partículas tienen la misma inclinación en el diagrama. Recordando el signo menos de la expresión que calcula el módulo del cuadvector ( $P^2 = E^2 - (pc)^2$ ) se deduce que estos vectores son más largos que los del sistema de referencia propio. Como la inclinación de ambos es la misma, la del vector suma también lo es y su alargamiento respecto de la suma de los vectores proyectados sobre el eje de energías guarda la misma proporción que la que tiene por separado cada uno de ellos. Es decir, el módulo del impulso-energía del sistema es igual a la suma de los módulos de los impulsos-energía de cada

partícula. Cuando recordamos a los grupos que dicho módulo es proporcional a la masa ( $E=mc^2$ ), comprenden que acaban de comprobar que la masa de un sistema de dos partículas avanzando a la misma velocidad en el mismo sentido es igual a la suma de sus masas. Para la puesta en común de esta parte de la actividad, usamos una animación que va dibujando los vectores impulso-energía mientras reproduce el movimiento de las partículas. Un cursor permite al usuario dar a las partículas cualquier velocidad (por supuesto inferior a  $c$ ) (Fig. 3).

La conclusión más interesante de la actividad se obtiene cuando las dos partículas tienen velocidades del mismo valor pero avanzan en sentidos opuestos. En ese caso se obtiene la representación que muestra la figura 4, correspondiente al estado final del *applet* que va dibujando los vectores al tiempo que se desplazan las partículas.

Dicha representación muestra una consecuencia notable y sorprendente para alguien que aplique un razonamiento anclado en la física clásica: la masa del otro sistema (igual al módulo del cuadrivector resultante impulso-energía) no es igual sino mayor que la suma de las masas de las dos partículas (igual, cada una de ellas, a la suma de los módulos de los vectores impulso-energía).

Esta conclusión nos brinda la posibilidad de profundizar en aspectos muy importantes de la dinámica relativista. Por ejemplo, conviene señalar que el contexto cuatridimensional relativista impone a las magnitudes masa, energía e impulso ser interdependientes [mediante la ley  $(mc^2)^2=E^2-(pc)^2$ ]. Es inevitable, pues, que, al generalizar estas magnitudes a sistemas de partículas, al menos una de ellas (la masa) no sea acumulativa.

Otra aplicación del ejercicio consiste en interpretar la diferencia entre la masa del sistema y las masas de las partículas como ejemplo de aplicación de la ley de equivalencia entre la masa y la energía. La diferencia entre el sistema del caso *a*) y el del caso *b*) está en que en el primero las dos partículas están en reposo relativo, es decir

no tienen agitación, mientras que las del segundo están en movimiento relativo (sí tendrían agitación). Para «agitar» un sistema de partículas libres, como un gas, hay que aportarle energía interna (por ejemplo, calentándolo). Por tanto, se deduce que aportar energía positiva a un sistema equivale, como no podía ser de otro modo, a incrementar su masa (eso sí, sin alterar para nada las masas de sus constituyentes).

Siguiendo la estela que marcan estos razonamientos, interpretamos en clase otras situaciones de interés. Así, por ejemplo, tratamos el concepto de *energía de enlace*, confrontamos la masa de un átomo con las de sus constituyentes (en este caso es menor la masa del átomo); comparamos la masa de un sistema formado por un átomo y un fotón con la suma de las de cada uno de ellos, interpretando el concepto de *absorción o emisión de radiación gamma*, etc. Es oportuno comentar algún resultado experimental (Rainville et al., 2005) que abra un debate sobre las reiteradas pruebas a que la teoría de la relatividad, como cualquier otra, se somete, y que, hasta el presente, ha superado. En resumen, todos los conceptos y aplicaciones que requieren los programas oficiales, en este caso referidos a la dinámica, se han podido incorporar al tema, dándoles este nuevo enfoque.

#### 4. IMPLEMENTACIÓN Y PERSPECTIVAS

Como decimos en las primeras líneas, el proceso de elaboración y experimentación de la unidad sobre la relatividad se remonta aproximadamente a una década, desde las primeras propuestas que hicimos en cursos de formación docente hasta su experimentación exhaustiva en el aula y en la formación docente. El curso de formación, de entre 12 y 30 horas de duración, se ha impartido en centros de profesores, universidades..., estimando que no menos de trescientos docentes han tenido conocimiento bastante detallado de la propuesta (anexo II). Diremos ahora que al inicio del curso utilizamos con

Figura 3  
Estado final del *applet* para la puesta en común del apartado a) de la A.16.

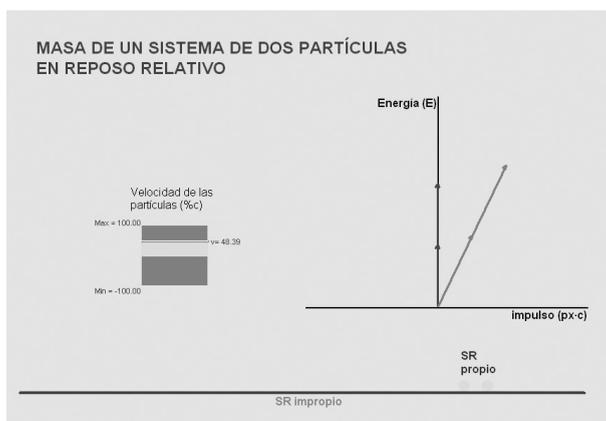
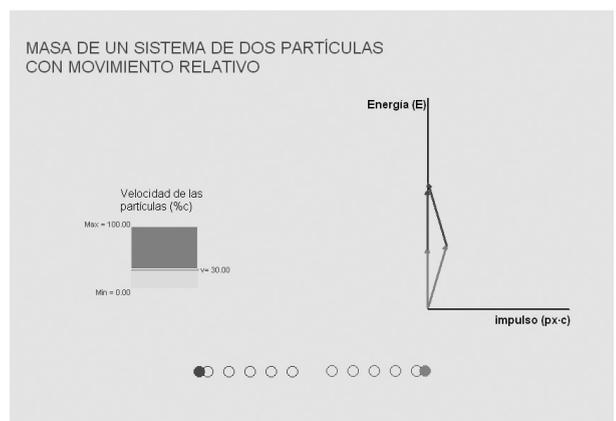


Figura 4  
Estado final del *applet* para la puesta en común del apartado b) de la A.16.



alguna frecuencia una pregunta abierta que interroga a los profesores acerca de su experiencia en el estudio de la relatividad y sobre las posibles dificultades a las que les gustaría que el curso diera respuesta. De una muestra de noventa profesores, una abrumadora mayoría (94,4%) dejó constancia de que apenas conocía el tema, más allá de los escasos apuntes encontrados en los libros de texto, y casi todos (96,3%) reconocieron que la enseñanza de elementos de esta teoría les parecía problemática.

Al finalizar el curso pedimos a los mismos profesores que valoraran once aspectos del tema o apartados del programa-guía en función de su capacidad para ayudar a comprender (a ellos y a sus alumnos) los puntos principales de esta teoría. Como muestra la tabla adjunta, su valoración fue muy positiva, casi unánime. Pero el dato más alentador, para nosotros, ha sido comprobar que el profesorado asume la importancia de esta teoría en el bagaje de formación de sus alumnos de bachillerato.

Para terminar nos gustaría destacar el carácter abierto y en permanente actualización de la propuesta. Resulta muy valiosa la retroalimentación que recibimos de los profesores asistentes a los cursos de formación y, más aún, la que nos proporcionan nuestros propios alumnos. Lo cierto es que son ellos quienes más y mejor nos

vienen ayudando a perfeccionar el programa de actividades, como demuestra el hecho de que resulta difícil recordar un curso en el que las llamadas de atención de la clase (explícitas o implícitas) no nos hayan inducido a introducir alguna modificación. Todo esto nos anima a abrir nuevas vías de investigación y, en particular, a completar el presente trabajo con un estudio cuantitativo que evidencie las ventajas y aquello que es susceptible de mejora. Especialmente deben evaluarse las implicaciones que en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la relatividad en el bachillerato tiene la introducción de aspectos novedosos como el uso de los diagramas y las aplicaciones informáticas.

Decimos esto porque recientemente los responsables de la coordinación de las pruebas de acceso a la universidad de la Comunidad Valenciana propusieron a los profesores de segundo de bachillerato «aligerar» el examen eliminando la pregunta que habitualmente se hace sobre este tema, primer paso para la supresión de la relatividad del bachillerato. Hasta el momento, en todas las ocasiones en que se ha hecho esta propuesta, el profesorado de física y química ha rechazado esta «tentadora» sugerencia y sus intervenciones al respecto han dejado constancia de la importancia que dan a la enseñanza de la relatividad.

Aspecto del programa-guía	Valoración media sobre 10
Estudio de solución de la mecánica newtoniana	8,6 (0,9)
Experimento de Michelson y Morley	8,3 (1,0)
Análisis cualitativo del experimento mental del tren de Einstein	8,6 (1,0)
Manejo de las leyes de transformación de Lorentz	8,0 (0,9)
Utilización del experimento mental del reloj de luz para obtener leyes de cinemática	8,5 (1,0)
Deducción de las leyes de dinámica	8,4 (1,2)
Problema como investigación sobre el viaje de la nave	9,4 (0,8)
Diagramas espacio-tiempo e impulso-energía	9,3 (0,9)
Utilización de los invariantes espacio-tiempo e impulso energía	9,0 (0,95)
Análisis del significado de la ley de equivalencia entre masa y energía	9,2 (0,9)
Principio de equivalencia e introducción a la relatividad general	8,8 (1,1)

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ACEVEDO, J.A. (1995). Educación tecnológica desde una perspectiva CTS. Una breve revisión del tema. *Alambique*, 3, pp. 75-84.
- ADLER, C.G. (1987). Does mass really depend on velocity, dad? *American Journal of Physics*, 55(8), pp. 739-743.
- ALEMAÑ, R.A. (1997). Errores comunes sobre la relatividad entre los profesores de enseñanza secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 15(3), pp. 301-307.
- ALEMAÑ, R.A. (2000). Enseñanza por cambio conceptual: De la física clásica a la relatividad. *Enseñanza de las Ciencias*, 18(3), pp. 463-471.
- ALONSO, M. y FINN, E.J. (1995). *Física*. Wilmington: Addison Wesley.
- ALONSO, M. (1998). La calificación en una evaluación como instrumento de aprendizaje. *Investigación e innovación en la Enseñanza de las Ciencias*, Vol. 1, pp. 17-28.
- ALONSO, M. (2000). Diagramas posición-tiempo para enseñar relatividad en el bachillerato. *Alambique*, 23, pp. 109-117.
- ALONSO, M., GIL, D. y MARTÍNEZ TORREGROSA, J. (1994). La evaluación de la enseñanza de la física como instrumento de aprendizaje (primer premio de tesis doctorales). *Premios Nacionales de Investigación e Innovación Educativa 1994*, CIDE, MEC, pp. 317-352.
- ALONSO, M. y SOLER, V. (2000). Reflexions sobre la forma habitual d'introduir els conceptes de la dinàmica relativista en batxillerat. *VI Jornades d'Intercanvi d'Experiències de Física i de Química AEFiQ-Curie*, pp. 44-55.
- ALONSO, M. y SOLER, V. (2002). *Construyendo la relatividad*. Madrid: Editorial Sirius. Edición en Catalán (2006). *Construir la relativitat*. Alacant: Universitat d'Alacant.
- ALONSO, M y SOLER, V. (2005). Materiales interactivos para la enseñanza de elementos de relatividad: unidad didáctica, *applets* y presentación *power*. ISBN 84-609-6708-5. El CD obtuvo el primer premio en el apartado de materiales didácticos del VI Concurso Nacional de Ciencia en Acción. <[http://www.fecyt.es/cienciaenaccion/bd\\_files/d\\_eventos/20\\_acta\\_premios\\_final.pdf](http://www.fecyt.es/cienciaenaccion/bd_files/d_eventos/20_acta_premios_final.pdf)>.
- BROOKS, D.W. (1997). *Web-Teaching. A guide to designing interactive teaching for the world wide web*. Innovations in Science Education and Technology, KA/PP.
- CAJAS, F. (2001). Alfabetización científica y tecnológica: la transposición didáctica del conocimiento tecnológico. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(2), pp. 243-254.
- DUSCHL, R.A. (1990). *Restructuring science education*. Nueva York: Teacher College Press, Columbia University. Trad. cast. (1997). *Renovar la Enseñanza de las Ciencias*. Madrid: Narcea.
- FURIÓ, C. (2001). La enseñanza-aprendizaje de las ciencias como investigación: un modelo emergente, en Guisasaola, J. y Pérez, L. *Investigación en Didáctica de las Ciencias Experimentales basadas en el Modelo de Enseñanza-Aprendizaje como Investigación Orientada*. Bilbao: Universidad del País Vasco.
- GETTYS, W.E., SÉLLER, R.J. y SKOVE, M.J. (1993). *Física*. Madrid: McGraw-Hill.
- GIL, D. (1993). Contribución de la historia y la filosofía de las ciencias al desarrollo de un modelo de enseñanza-aprendizaje como investigación. *Enseñanza de las Ciencias*, 11(2), pp. 197-212.
- GIL, D. (1999). ¿Puede hablarse de consenso constructivista en la educación científica? *Enseñanza de las Ciencias*, 17(3), pp. 503-512.
- GIL, D., DUMAS CARRÉ, A., CAILLOT, M., MARTÍNEZ TORREGROSA, J. y RAMÍREZ, L. (1989). La resolución de problemas de lápiz y papel como actividad de investigación. *Investigación en la Escuela*, 6, pp. 3-20.
- GIL, D. y MARTÍNEZ TORREGROSA, J. (1987). Los programas-guía de actividades: una concreción del modelo constructivista del aprendizaje de las ciencias. *Investigación en la Escuela*, 3, pp. 3-12.
- GIMENO, B., MARTÍ, I., SANCHIS, M.A. y VERGARA, M. (2000). Determinación indirecta de la velocidad de la luz en el vacío mediante un circuito resonante. *Revista Española de Física*, 14 (4), pp. 41-44.
- GRAS-MARTI, A. y CANO VILLALBA, M. (2000). Un entorn virtual per a l'ensenyament/aprenentatge. *Eines*, 18, pp. 61-66.
- GÜLMEZ, E. (1997). Measuring the speed of light with a fiber optic kit: An undergraduate experiment. *Am. J. Phys.*, 65(7), pp. 614-618.
- HEWSON, P. (1982). A Case Study of Conceptual Change in Special Relativity: The Influence of Prior Knowledge in Learning. *Eur. J. Sci. Educ*, 4(1), pp. 79-94.
- JORBA, J. (1998). La comunicació i les habilitats cognitivolingüístiques, en Jorba, J., Gómez, I. i Prat, A. (eds.). *Parlar i escriure per aprendre. Ús de la llengua en situació d'ensenyament-aprenentatge des de les àrees curriculars*. Barcelona: ICE-Universitat Autònoma de Barcelona.
- JORBA, J. y J. SANMARTÍ, N. (1993). La función pedagógica de la evaluación. *Aula de Innovación Educativa*, 20, pp. 20-30.
- KUHN, T.S. (1987). *La estructura de las revoluciones científicas*. México: FCE.
- MARTÍNEZ TORREGROSA, J., OSUNA, L. y VERDÚ, R. (2002). Enseñar y aprender en una estructura problematizada. *Alambique*, 34, pp. 47-55.
- MINKOWSKI, H. (1908). Space and Time, en *The principle of Relativity*. Dover Pub. Inc.
- OKUN, L.B. (1989). The concept of massa. *Physics Today*, 42(6), 31-36.
- OKUN, L.B. (1998). Note of the meaning and terminology of Special Relativity. *European Journal of Physics*, 15, pp. 403-406.
- PÉREZ, H. y SOLBES, J. (2003). Algunos problemas en la

- enseñanza de la relatividad. *Enseñanza de las Ciencias*, 21(1), pp. 135-146.
- PINTÓ, R. (2003). La problemàtica de l'ensenyament de la física i química. *Revista de física*, 3(4), pp. 50-57.
- POSNER, G.S. et al. (1982). Accomodation of scientific conception: Towards a the rory of conceptual change. *Science Education*, 66, pp. 221-227.
- RAINVILLE, S. et al. (2005). A direc test of  $E = mc^2$ . *Nature*, 438, pp. 1.096-1.097.
- RAMÍREZ, J.L. y GIL, D. (1991). La resolución de problemas de física y de química como investigación en la enseñanza media: un instrumento de cambio metodológico. *Resúmenes de premios nacionales de investigación e innovación educativas 1990*, pp. 206-247, Madrid: Centro de publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.
- RODRIGO, M.J. y CUBERO, R. (2000). Constructivismo y enseñanza de las ciencias, pp. 85-107, en Francisco Perales, J. y Pedro Cañal (dir.). *Didáctica de las Ciencias Experimentales. Teoría y Práctica de la Enseñanza de las Ciencias*. Alcoi: Marfil.
- SANDIN, T.T. (1991). In defense of relativistic mass. *Am. J. Phys.*, 59(11), pp. 1.032-1.036.
- SANMARTÍ, N. (2000). El diseño de unidades didácticas. pp. 239-266, en Francisco Perales, J. y Cañal, P. (dir.). *Didáctica de las Ciencias Experimentales. Teoría y Práctica de la Enseñanza de las Ciencias*. Alcoi: Marfil.
- SANMARTÍ, N. (coord.). (2002). *Aprende ciències tot aprenent a escriure ciència*, Grup LIEC, Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra.
- SANMARTÍ, N., IZQUIERDO, M. y GARCÍA, P. (1999). Hablar y escribir: una condición necesaria para aprender ciencia. *Cuadernos de Pedagogía*, 281, junio, pp. 54-58.
- SCHERR, R.E., SHAFFER, P.S. y VOKOS, S. (2002). The challenge of changing deeply held student about the relativity of simultaneity. *Am. J. Phys.*, 70(12), pp. 1.238-1.248.
- SOLBES, J. y VILCHES, A. (1992). El modelo constructivista y las relaciones ciencia/técnica/sociedad (CTS). *Enseñanza de las Ciencias*, 10(2), pp. 181-186.
- SOLBES, J. (2003). Las complejas relaciones entre ciencia y tecnología. *Alambique*. pp. 38, 8-20.
- STRNAD, J. (1991). Velocity-dependent mass or proper time? *Eur. J. Phys.*, 12, pp. 69-73.
- TAYLOR, E.F. y WHEELER, J.A. (1992). *Spacetime Physics. Introduction to special relativity*, Nueva York: W.H. Freeman and Co.
- TIPLER, P.A. y LLEWELLYN, R.A. (2002). *Modern Physics*, Nueva York: Freeman and Co.
- TOLEDO, B., ARRIASECQ, I. y SANTOS, G. (1997). Análisis de la transición de la física clásica a la relativista desde la perspectiva de cambio conceptual. *Enseñanza de las Ciencias*, 15(1), pp. 79-80.
- TORRES, A. y SOLER, V.F. (2003). Internet i Applets per a la Física de 2n de BAT. En els inicis d'una experiència didàctica, comunicació de la VII Jornades de l'AEFQ-Curie, <<http://www.curiedigital.com>>.
- VIENNOT, L. (1996). *Razonar en física. La contribución del sentido común*. Madrid: A. Machado Libros.
- VILLANI, A. y ARRUDA, S. (1998). Special Theory of Relativity, conceptual change and history of science. *Science and Education*, 7(1), pp. 85-100.
- VILLANI, A. y PACCA, J.L.A. (1987). Students' spontaneous ideas about the speed of light. *Int. J. Sc. Educ.*, 9(1), pp. 55-66.

[Artículo recibido en abril de 2004 y aceptado en enero de 2006]

**ANEXO I**

Relación de algunos de los libros de bachillerato consultados:

AA.VV. (2003). *Física 2º de bachillerato*. Barcelona: Edebé  
 GIL, J., DÍAZ, M.F., PARDO, P. (2001). *Física 2º de bachillerato*. Madrid: Santillana.  
 HERNÁNDEZ, J.L., GISBERT, M. (2003). *Física 2º de bachillerato*. Madrid: Bruño.  
 LOWY, E., ROBLES, J. L. (2002). *Física 2º de bachillerato*. Madrid: Akal ediciones.  
 PEÑA, A., GARCÍA, J.A., (2003). *Física 2º de bachillerato*. McGraw-Hill.  
 PUENTE, J., LARA, C., ROMO, N. (2003). *Física 2º de bachillerato*. Madrid: Ediciones SM.  
 SATOCA, J., TEJERINO, F., DALMAU, J.F. (2000). *Física 2º de bachillerato*. Anaya.

**ANEXO II**

Relación de talleres largos y cursos de formación sobre la propuesta para la enseñanza de elementos de relatividad

Lugar de realización del curso	Año	Nº profesores
Universidad de Alicante	1995	52
Centro de Profesores de Orihuela	1996	24
Centro de Profesores de Alcira	1996	32
Asociación de profesores Curie	1997	26
Centro de Profesores de Elx	1998	23
Centro de Profesores de Benidorm	2001	34
Asociación de profesores Curie	2002	26
XVI Congreso de Enciga	2003	25
Centro de Formación de Ferrol	2005	33
Universidad de Valencia	2005	12
Centro de Profesores de Alicante	2005	21
XVIII Congreso de Enciga	2005	23