Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 12, núm. 1, 1997. Pàg. 17–25.

Grafs aplicats a la resolució de jocs

Josep M. Basart i Pere Guitart

1 Conceptes previs

Un *graf* $G(V, A)$ (o simplement G si no hi ha ambigüitat) és una estructura formada per un conjunt finit de *vèrtexs* V i un conjunt finit de línies A, de manera que cada línia relaciona dos dels vèrtexs. Les línies s'anomenen *arcs* si estan orientades, és a dir, si tenen determinat el sentit de recorregut; en cas contrari, s'anomenen *arestes*. Un arc que va del vèrtex x al vèrtex y es representa com una parella ordenada (x, y). Si el graf és simètric (x, y) és equivalent a (y, x). Una aresta del tipus (x, x) s'anomena *llaç*. Un graf format per arcs s'anomena *dirigit*, si està format per arestes s'anomena *simètric* i no considerarem grafs mixtos. Si G és dirigit i $x \in V$ el conjunt dels *antecessors* de x ve donat per

$$\Gamma^{-1}(x) = \{y \mid (y, x) \in A\}.$$

Igualment, el conjunt dels *successors* de x ve donat per

$$\Gamma(x) = \{y \mid (x, y) \in A\}.$$

Si G és simètric, $\Gamma(x) = \Gamma^{-1}(x)$ i aquests elements són els *veïns* de x. En un graf dirigit,

$$\textit{grau\_interior}(x) = \#\{\Gamma^{-1}(x)\}$$

$$\textit{grau\_exterior}(x) = \#\{\Gamma(x)\}.$$

Si el graf és simètric es parla simplement de *grau* (x).

El graf *subjacent* corresponent a un graf dirigit s'obté de prescindir de l'orientació imposada a cadascun dels arcs, dit d'una altra manera, el graf passa a ésser considerat com si fos simètric. Un *multigraf* és tot graf que admet arestes repetides una o més vegades, en aquest tipus de graf cada aresta incident en $x \in V$ contribueix en una unitat al grau(x). Un *camí* de x a y $(x, y \in V)$ és una llista d'arestes (d'arcs) que comença en x, tal que el vèrtex final de cada aresta (arc) és l'inicial del següent, tret del darrer que és y. Un graf simètric és *connex* si conté un camí entre cada parella de vèrtexs. Un camí en què coincideixen el vèrtex inicial i el final és un *circuit*. Un circuit que no repeteix cap aresta (arc) s'anomena *simple*. Un circuit és *eulerià* si és simple i recorre totes les arestes (tots els arcs) del graf. Un graf és *eulerià* si té un circuit eulerià. Un *factor* en un graf (multigraf) simètric de n vèrtexs és tot conjunt de n arestes que formen un o més circuits disjunts simples. Final ment, el *nucli* d'un graf dirigit és un subconjunt de vèrtexs tal que:

i) no hi ha cap arc entre dos vèrtexs del nucli, i

ii) hi ha un arc des de cada vèrtex fora del nucli cap a un vèrtex del nucli.

2 Tres jocs

Considerarem tres dels jocs paradigmàtics en què un graf (diferent en cada cas) serveix per modelitzar la situació i analitzar-ne el desenvolupament. Així, amb l'ús adequat d'algun concepte o propietat del graf resultant es podrà resoldre el joc. Els jocs progressius finits —il·lustrats en el primer joc— foren estudiats, en un context més general, en [2], mentre que el model de resolució del trencaclosques amb cubs —corresponent al segon joc— aparegué en [5]. Tant [1] com [3] són obres generals sobre la formulació i l'anàlisi matemàtica de jocs. Pel que fa al darrer joc, els circuits eulerians —tal com llur nom indica— van ser estudiats per L. Euler ara fa dos-cents seixanta anys. Les seqüències de De Bruijn foren introduïdes en [4] i generalitzades en [6].

2.1 Primer joc

«Es disposen vint-i-una cerilles damunt d'una taula. Dos jugadors, al seu torn, en van prenent una, dues, tres o quatre cada vegada. Guanya el jugador que pren la darrera.»

Considerem aquells jocs per a dos jugadors en què, al seu torn, cadascun fa una jugada o moviment fins que un d'ells acaba guanyant. Si el nombre d'opcions per a cada jugada és sempre limitat i el joc acaba necessàriament en un nombre finit de moviments, el joc s'anomena *progressiu finit*. És el cas, per exemple, del joc proposat més amunt, mentre que el joc de les dames no ho és. Un joc progressiu finit pot ésser modelitzat mitjançant un graf dirigit G en què cada estat del joc ve representat per un vèrtex i cada transició d'un estat x a un altre y es denota per (x, y). En el cas del joc enunciat tindríem un graf de 22 vèrtexs (des de vint-i-una cerilles fins a zero cerilles) indexats $v_0, v_1, \ldots, v_{21}$. De v_{21} sortirien (v_{21}, v_{20}), (v_{21}, v_{19}), (v_{21}, v_{18}) i (v_{21}, v_{17}), a v_0 arribarien (v_4, v_0), (v_3, v_0) (v_2, v_0) i (v_1, v_0), i en els altres vèrtexs hi hauria els arcs corresponents d'arribada i de sortida.

Una *posició guanyadora* és aquella que dóna la victòria al jugador que l'assoleix. Una *estratègia guanyadora* és aquella que, en cada estat del joc, condueix el jugador que la segueix cap a una posició guanyadora. Com que els vèrtexs de grau exterior nul en el graf corresponent a un joc progressiu finit es corresponen a posicions guanyadores, s'anomenen *vèrtexs guanyadors*. En el joc de les cerilles tindrem com a posició guanyadora la representada pel vèrtex guanyador v_0, mentre que pot comprovar-se fàcilment que l'estratègia guanyadora consisteix a fer sempre una jugada que deixi el joc amb un nombre de cerilles múltiple de cinc, és a dir, moure sempre cap a v_{20}, v_{15}, v_{10} o v_5. D'aquesta manera, el primer jugador s'assegura la victòria si comença prenent una única cerilla. En general, a partir dels vèrtexs guanyadors podem establir l'estratègia guanyadora analitzant les possibilitats en la tornada enrere des dels vèrtexs guanyadors cap a l'estat inicial, tot detectant quins són els vèrtexs «bons» que cal assolir per poder guanyar la partida. En el nostre cas, per assegurar v_0 cal haver assegurat abans v_5 i, prèviament, v_{10}, v_{15} i v_{20}. Notem que el nucli de G corresponent al joc està format precisament per aquests cinc vèrtexs.

Passem ara a formalitzar la idea de vèrtexs bons i a situar-los en el graf G que hem definit.

1 Proposició *Si G té un nucli N, una estratègia guanyadora consisteix a situar-se, en cada moviment, en un vèrtex de N.*

Prova: Atès que els vèrtexs que no estan en N han de tenir un arc cap a algun vèrtex en N i que els vèrtexs guanyadors han de tenir grau exterior nul, és clar que tots els vèrtexs guanyadors estaran en N. D'altra banda, per la definició de nucli tenim que, si el primer jugador fa una jugada cap a un vèrtex de N, el segon jugador haurà de moure cap a un vèrtex de fora de N i, a continuació, el primer jugador podrà tornar a entrar-hi. Així, mantenint aquesta alternança de vèrtexs dins i fora de N el joc acabarà amb la victòria del primer jugador. Notem que si el vèrtex inicial del joc està en el nucli, és el segon jugador qui es pot apoderar de l'estratègia guanyadora. □

Ara cal veure que el graf G de tot joc progressiu finit té un nucli (no tot graf dirigit en té) i que aquest pot ésser localitzat fàcilment. Per a això ens cal abans estructurar els vèrtexs de G en funció de com es troben de propers d'un vèrtex guanyador. Definim per a cada $x \in V$ el seu nivell $d(x)$ en G i construïm els conjunts D_t de vèrtexs a nivell $\le t$ com:

$$\begin{aligned}
&d(x) = 0 \Leftrightarrow \Gamma(x) = \{\} \\
&D_0 = \{x | d(x) = 0\}; \\
&d(x) = 1 \Leftrightarrow x \notin D_0 \text{ i } \Gamma(x) \subseteq D_0 \\
&D_1 = D_0 \cup \{x | d(x) = 1\}; \\
&\cdots\cdots \\
&d(x) = t \Leftrightarrow x \notin D_{t-1} \text{ i } \Gamma(x) \subseteq D_{t-1} \\
&D_t = D_{t-1} \cup \{x | d(x) = t\}.
\end{aligned}$$

És clar que cada vèrtex a nivell 0 és un vèrtex guanyador, mentre que moure cap a un vèrtex a nivell 1 porta a la derrota. Arribar a un vèrtex de nivell 2 també hi porta, si és adjacent a un vèrtex de nivell 0, mentre que és un vèrtex que porta a la victòria si tots els seus successors estan a nivell 1. I anàlogament per als vèrtexs en els nivells superiors. Observem també que, per construcció, cada vèrtex a nivell $t > 0$ tindrà un arc cap a un altre vèrtex a nivell $t - 1$ però mai un arc cap a un altre vèrtex de nivell t o superior.

2 Proposició *En tot joc progressiu finit el graf associat té un únic nucli.*

Prova: Per inducció sobre els D_t. Sigui N_t el conjunt de vèrtexs del nucli que estan en D_t. Pel cas base, el conjunt D_0, sabem que tots els vèrtexs guanyadors es troben en el nucli, per tant, $N_0 = D_0$. Prenem com a hipòtesi d'inducció que N_{n-1} és el conjunt de vèrtexs del nucli que es troben en D_{n-1}. Hem de trobar un conjunt únic de vèrtexs a nivell n tal que afegit a N_{n-1} formi el nucli N_n per a D_n. Ara, si un vèrtex x a nivell n no és adjacent a cap vèrtex del nucli en N_{n-1}, aleshores, x ha d'estar en N_n; d'altra banda, si x és adjacent a algun vèrtex del nucli en N_{n-1}, aleshores, x no pot estar en el nucli. Per tant,

$$N_n = N_{n-1} \cup \{x | d(x) = n \text{ on } \Gamma(x) \cap N_{n-1} = \{\}\}$$

és el conjunt de vèrtexs del nucli en D_n. Per inducció, G té un nucli i aquest és únic. □

Tenim, doncs, per la demostració inductiva de la proposició 2, un esquema per a formar el nucli. Començant el nucli amb els vèrtexs guanyadors, anem afegint-hi —seguint l'ordre dels nivells— els vèrtexs que no són antecessors de cap dels vèrtexs del nucli en l'estat actual. Per aconseguir això d'una forma sistemàtica pot seguir-se el procediment següent d'etiquetatge numèric dels vèrtexs. A cada vèrtex x li assignem una etiqueta $E(x)$ definida com l'enter més petit no negatiu que encara no ha estat assignat a cap vèrtex en $\Gamma(x)$. Així, tot vèrtex x a nivell 0 rep $E(x) = 0$; a continuació, determinem $E(x)$ per als vèrtexs x a nivell 1, després el mateix per als de nivell 2, etc. Aquest procediment acaba generant el nucli del graf. Finalment,

3 Proposició *L'etiquetatge $E(x)$ dels vèrtexs x del graf G associat a un joc progressiu finit és únic.*

Prova: És clar que cada vèrtex del graf rep una i només una etiqueta. Per la definició de l'etiquetatge, si x té $E(x) = 0$ no pot existir un (x, y) en G tal que $E(y) = 0$ ja que, si fos així, x hauria rebut una etiqueta diferent. Igualment, tot vèrtex y amb $E(y) > 0$ ha de ser vèrtex antecessor d'un vèrtex z amb $E(z) = 0$ ja que, en cas contrari, tindríem $E(y) = 0$. Per tant, l'etiquetatge satisfà les dues propietats que caracteritzen el nucli. □

2.2 Segon joc

«Disposem de quatre cubs pintats amb un dels quatre colors, blanc, vermell, negre o groc, en cadascuna de les sis cares. Es demana de formar una columna apilant els quatre cubs de manera que aparegui una vegada cadascun dels quatre colors en cadascun dels quatre costats de la columna.»

Si tenim cada cub pintat sencer amb un únic color, diferent del color de cadascun dels altres tres cubs, els podem apilar de qualsevol manera i obtindrem una solució. En el cas general, però, determinar si el trencaclosques té solució o no, és força més complicat. Pensem que el cub presenta 24 simetries i que, per tant, tenim en principi 24^4 configuracions possibles, tot i que —segons els colors assignats— moltes podrien ésser descartades directament.

Durant l'anàlisi usarem la notació següent: cub1, cub2, cub3, cub4 seran els quatre cubs del joc; B, V, N i G els quatre colors, mentre que $\hat{f}_i$, $\hat{r}_i$, $\hat{d}_i$, $\hat{e}_i$ denotaran, respectivament, els colors del i-èsim cub ($1 \leq i \leq 4$) en els costats front, rere, dret i esquerre de la columna formada.

La solució del trencaclosques verifica la que anomenarem propietat de *separabilitat* o *independència* entre els costats adjacents en la columna de cubs. Aquesta propietat recull el fet que podem resoldre per separat el joc considerant únicament dos costats oposats de la columna (com ara el dret i l'esquerre), la resolució dels altres dos costats (front i darrere) es pot obtenir mitjançant la rotació de cadascun dels cubs (al voltant d'un eix horitzontal, en aquest cas). Aquesta possibilitat de descomposició del problema en dos subproblemes serà explotada a continuació.

El model per representar i analitzar el joc és un multigraf G amb les arestes etiquetades. Assignarem un vèrtex a cadascun dels colors (B, V, N, G) i una aresta entre dos vèrtexs x i y etiquetada k si el k-èsim cub té els colors x i y en cares oposades. En total, doncs, quatre vèrtexs i dotze arestes. Il·lustrem en la figura 3 el multigraf corresponent als quatre cubs representats en les figures 1 i 2.

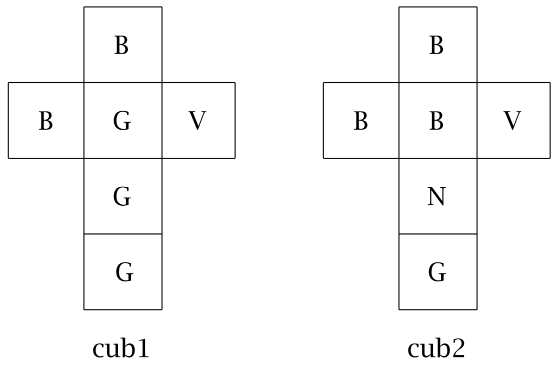

Figura 1: cub1 i cub2.

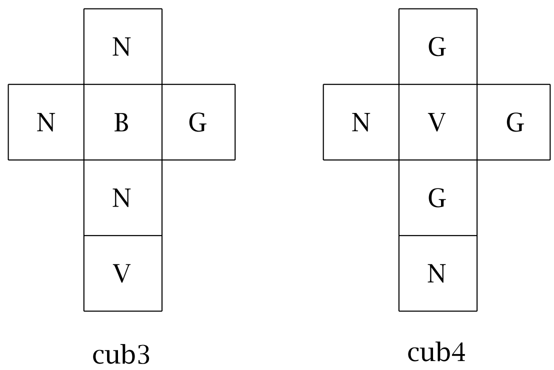

Figura 2: cub3 i cub4.

Per la propietat de separabilitat considerarem únicament els costats esquerre i dret de la columna de cubs, és ací on volem obtenir —en cada costat— una cara amb cada color. De fet, podem començar rebaixant una mica més el propòsit: demanem, per ara, d'obtenir vuit cares oposades dels quatre cubs que en total facin aparèixer dues vegades cadascun dels quatre colors. Més tard ja veurem com assegurar que cada color apareix un cop en cada costat (esquerre i dret) de la columna.

En termes de grafs, volem determinar en el multigraf del joc quatre arestes, una amb cadascuna de les etiquetes 1, 2, 3, 4, de manera que en el subgraf format cadas-

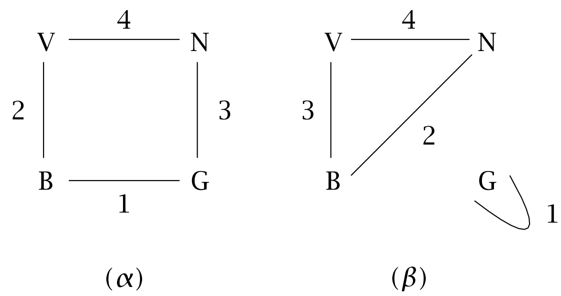

FIGURA 3: Multigraf associat.

cun dels quatre vèrtexs tingui grau dos (per convenció, cada llaç contribueix en dues unitats al grau del vèrtex corresponent). Això és el mateix que determinar un factor que tingui les quatre etiquetes possibles en les arestes; en direm un factor *canònic*. En la figura 4 tenim representats dos dels cinc factors canònics corresponents al multigraf de la figura 3.

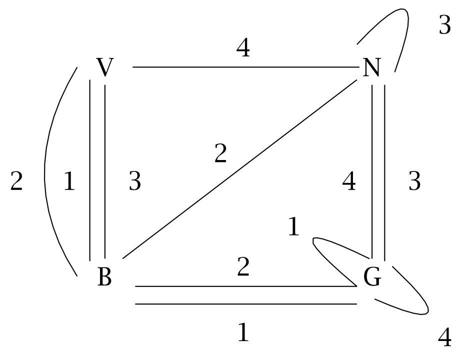

FIGURA 4: Dos factors canònics.

El pas següent és veure com per a cada factor canònic podem obtenir la resolució parcial del joc, és a dir, els costats esquerre i dret de la columna de cubs amb els quatre colors alternats. Considerem el factor canònic α de la figura 4. Si en fem un recorregut al llarg del circuit començant per un qualsevol dels vèrtexs, podem obtenir una disposició dels cubs en la columna si fixem com a costat esquerre el primer vèrtex de cada aresta trobada i com a costat dret el segon. Així, d'aquest factor, començant pel vèrtex V obtindrem: $\hat{e}_4$ = V, $\hat{d}_4$ = N; $\hat{e}_3$ = N, $\hat{d}_3$ = G; $\hat{e}_1$ = G, $\hat{d}_1$ = B i $\hat{e}_2$ = B, $\hat{d}_2$ = V. En el cas del factor β de la mateixa figura, obtindrem: $\hat{e}_4$ = V, $\hat{d}_4$ = N; $\hat{e}_2$ = N, $\hat{d}_2$ = B; $\hat{e}_3$ = B, $\hat{d}_3$ = V i $\hat{e}_1$ = G, $\hat{d}_1$ = G.

Arribats ací, podem donar el trencaclosques per resolt. Efectivament, només cal inspeccionar el multigraf associat als cubs i determinar si hi ha dos factors canònics disjunts d'arestes. Si aquest és el cas, per la propietat de separabilitat, cadascun d'ells ens permetrà —seguint el procediment acabat de veure— obtenir la disposició de dos costats oposats de la columna. Atès que el multigraf $G(V, A)$ del joc és sempre prou reduït ($\#\{A\} = 12$, $\#\{V\} = 4$) la recerca d'aquests dos factors no presenta cap dificultat computacional.

2.3 Tercer joc

«Disposem d'un nombre il·limitat de pedretes blanques i negres, i volem formar un braçalet enfilant-les una rere l'altra. Quantes n'hi podrem col·locar sense que es repeteixi cap agrupació de k pedretes consecutives?»

Atès que podem formar fins a 2^k seqüències diferents de longitud k, és clar que aquest és el nombre màxim de pedretes que podrem enfilar. Cal tenir present que el braçalet és circular, és a dir, que la darrera pedreta enfilada quedarà entre la penúltima i la primera. A continuació, veurem com un graf ens permetrà de generar braçalets amb 2^k pedretes que verifiquen la condició enunciada. Usarem un 0 o un 1 per a representar cada pedreta segons sigui, respectivament, blanca o negra, mentre que $k \geq 2$ és un nombre natural. Per al cas $k = 4$ una solució és la seqüència 0000100110101111, la qual té longitud 2^4.

La resolució del joc passa per estudiar els anomenats diagrames de De Bruijn, una família de grafs dirigits que contenen circuit eulerià. Comencem, però, presentant una caracterització dels grafs dirigits eulerians.

4 Proposició *Un graf dirigit $G(V, A)$ és eulerià si, i només si, té el graf subjacent connex i $grau\_interior(x) = grau\_exterior(x)\ \forall x \in V$.*

Prova: És clar que si el graf subjacent no és connex no podrem formar un circuit eulerià. La condició d'igualtat entre grau interior i grau exterior en cada vèrtex és també immediata. Efectivament, cada vegada que el circuit visita un vèrtex qualsevol necessita un arc per arribar-hi i un altre per sortir-ne. Queda per veure que aquesta condició és, alhora, suficient. Aquest resultat s'obté construint un circuit eulerià. Començant per un vèrtex x qualsevol, formem un circuit simple C_1 que acabi en x. Si C_1 ha usat tots els arcs, hem acabat obtenint el que volíem. En cas contrari, eliminem els arcs usats en C_1; amb això cada vèrtex y del graf continua amb $\text{grau\_interior}(y) = \text{grau\_exterior}(y)$. Prenem un vèrtex z qualsevol que formi part d'algun dels arcs no eliminats i repetim el procediment seguit per a x formant així un nou circuit C_2. Si $C_1 \cup C_2 = A$, hem acabat i la unió dels dos circuits forma un circuit eulerià. En cas contrari, eliminem també els arcs de C_2 i repetim el procés amb un altre vèrtex t pertanyent a algun arc romanent. Finalment, de la unió de tots els circuits n'obtindrem un d'eulerià. □

Sigui ara $G^*(V^*, A^*)$ el graf dirigit amb 2^{k-1} vèrtexs definits per totes les seqüències binàries de longitud $k - 1$ i 2^k arcs etiquetats per totes les seqüències binàries de longitud k, de manera que l'arc etiquetat $s_1, s_2, ..., s_k$ $(s_i \in \{0, 1\})$ va del vèrtex $s_1, s_2, ..., s_{k-1}$ al vèrtex $s_2, s_3, ..., s_k$. G^* s'anomena un *diagrama de De Bruijn*. En la figura 5 tenim el G^* corresponent a $k = 3$.

5 Proposició *G^* és eulerià per a tot natural $k \geq 2$.*

Prova: Per construcció, G^* té el graf subjacent connex. El vèrtex $s_1, s_2, ..., s_{k-1}$ és assolit pels dos arcs etiquetats $0, s_1, s_2, ..., s_{k-1}$ i $1, s_1, s_2, ..., s_{k-1}$. D'altra banda, el vèrtex $s_1, s_2, ..., s_{k-1}$ és el vèrtex de sortida dels dos arcs $s_1, s_2, ..., s_{k-1}, 0$ i $s_1, s_2, ..., s_{k-1}, 1$. D'aquesta manera, tenim $\text{grau\_interior}(x) = \text{grau\_exterior}(x) = 2$ en cada $x \in V^*$. □

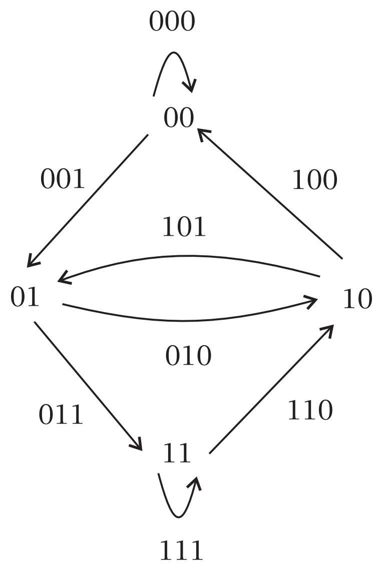

FIGURA 5: G^* per $k = 3$.

Ara ja tenim la feina feta. Efectivament, tal com hem definit el graf, si formem un circuit eulerià en G^* i prenem el primer símbol (s_i) de l'etiqueta de cadascun dels arcs que el formen, obtenim una seqüència (*seqüència de De Bruijn*) de longitud 2^k, que representa un dels braçalets desitjats. Així, en el graf de la figura 5, podem considerar el circuit eulerià que comença en el vèrtex 00 i és donat pels arcs

000
001
010
101
011
111
110
100

De la primera columna n'obtenim la seqüència 00010111. Notem que, tant la segona columna com la darrera produeixen també seqüències de De Bruijn, atès que no són altra cosa que desplaçaments circulars consecutius dels símbols de la primera columna.

Finalment, destacar que la generalització per a braçalets amb $n \geq 2$ tipus de pedretes és directa a partir del que hem vist. Per analogia, obtindrem una seqüència de De Bruijn amb n^k símbols a partir d'un circuit eulerià en un graf G^* amb n^{k-1} vèrtexs i n^k arcs, de manera que per a cada $x \in V^*$ $\text{grau\_interior}\,(x) = \text{grau\_exterior}\,(x) = n$.

Referències

[1] BERLEKAMP, E.; CONWAY, J.; GUY, R. *On Winning Ways*. New York: Harcourt Brace, 1978.

[2] Bonton, C. L. «Nim, a game with a complete mathematical theory». *Ann. Math.* 3 (1902), p. 35–39.

[3] Conway, J. H. *On Numbers and Games*. New York: Academic Press, 1976.

[4] De Bruijn, N. G. «A combinatorial problem». *Ned. Akad. Wet.* 49 (1946), p. 758–764.

[5] De Carteblanche, F. «Pile of cubes». *Eureka*, (April 1947).

[6] Good, I. J. «Normal Recurring Decimals». *J. Lond. Math. Soc.* 21 (1946), p. 167–169.

Departament d'Informàtica
Universitat Autònoma de Barcelona
08193 Bellaterra
jmbasart@ccd.uab.es