

BUTLLETÍ DE LA SOCIETAT CATALANA DE MATEMÀTIQUES
Vol. 14, núm. 1, 1999. Pàg. 31-61

Representació i mostratge de funcions: de les sèries de Fourier a la teoria d'ondetes*

JOAQUIM BRUNA

1 Introducció

Les *ondetes* (*wavelets* en anglès, *ondelettes* en francès i *ondículas* en castellà) són una eina matemàtica moderna —apareixen al començament dels vuitanta— que ha protagonitzat una petita revolució en diferents camps del que s'anomena genèricament *tractament del senyal*: tractament d'imatges i so, enginyeria nuclear, neurofisiologia, imatges mèdiques (tomografies, ressonàncies magnètiques), òptica, geologia, radar, modelitzacions de la visió humana, visió per computador, etc. També són ara una eina corrent en moltes branques de les matemàtiques: anàlisi harmònica, anàlisi funcional, equacions diferencials, equacions en derivades parcials, fractals ...

Les ondetes van aparèixer com a resultat d'una primera síntesi d'idees provinents, d'una banda, de la teoria del senyal i, de l'altra, de certs desenvolupaments de l'anàlisi harmònica dels darrers anys, concretament la *teoria de Littlewood-Paley* i les *descomposicions atòmiques* en espais de funcions. La idea original fou de Morlet i Grossman, el 1981 ([6], [12]), en uns treballs sobre tractament de senyals d'origen geològic. Fou principalment el matemàtic francès Yves Meyer qui s'adonà de les connexions amb els desenvolupaments esmentats i va donar cos, estructura i popularitat dins de la comunitat matemàtica a la nova teoria d'ondetes, a través de molts articles de recerca i obres de divulgació ([10], [11]). Posteriorment, el 1986, hi va haver una segona síntesi, deguda a Stéphane Mallat ([7], [8]), d'idees provinents de la telefonia digital (*quadrature mirror filters* de Esteban-Galand, [4]), del tractament d'imatges (els *algorismes piramidals* de Burt i Adelson, [1]) i de la pròpia teoria (*les bases ortonormals* d'ondetes, [2]) que ha portat a la noció de l'*anàlisi multiresolució* (MRA), que és ara el marc habitual on es desenvolupen la major part de les aplicacions. Per tot això, el recent desenvolupament de la teoria d'ondetes és un exemple d'*interdisciplinarietat* en el progrés científic, i el matemàtic en particular.

La finalitat d'aquest article és donar una idea del què són les ondetes. Per fer-ho, he triat com a eix vertebrador el tema de la *representació i mostratge de funcions* del qual en donaré una perspectiva històrica.

* Conferència pronunciada a la Primera Trobada Matemàtica de la Societat Catalana de Matemàtiques, març 1998.

I què vol dir *representar funcions*? Totes les representacions de les quals es parlarà tenen en comú una cosa: es tracta d'expressar funcions generals en termes de funcions senzilles, particulars. Una bona representació de funcions ha de ser senzilla i útil, tant per manipular-ne les transformacions com per fer-ne una implementació numèrica. Un dels objectius principals que es persegueixen és el de *digitalitzar*, *discretitzar*, passar d'allò *analògic o continu* al *discret, digitalitzable*. Això s'aconsegueix en particular amb *bases discretes* de funcions, perquè permeten identificar una funció amb una successió finita o numerable de coeficients. Això per si sol ja és útil, però encara ho és més si els coeficients de la representació tenen una *interpretació*.

Les funcions i les transformacions entre elles poden ser de tipus molt diversos. Per exemple, podem pensar que un so és una funció $f(t)$ del paràmetre temps — $f(t)$ mesura la pressió de l'aire al timpà a l'instant t — deixant de banda com es transforma aquesta pressió en impulsos nerviosos que el nostre cervell transforma en la sensació auditiva. Una imatge, plana i en blanc i negre, és una funció $f(x, y)$ de dues variables (per a cada punt (x, y) , $f(x, y)$ representa el nivell de gris en el punt). La distribució de temperatures $F(\cdot, t)$ en una barra en l'instant t conforma una funció de dues variables que voldriem conèixer sabent la distribució inicial de temperatures i les restriccions imposades a la difusió de la calor. Exemples de transformacions entre aquestes funcions són filtrar soroll, augmentar el contrast, delimitar contorns, analitzar com varien en el temps les discontinuïtats, etc. També podem pensar en totes les operacions que tenen a veure amb la transmissió de la informació continguda en la funció: digitalització, codificació, compressió, reconstrucció etc. En definitiva, tenir a l'abast formes útils de *manipular* funcions permetrà dur a terme algun tipus d'*anàlisi o procés* sobre les mateixes.

Aquesta perspectiva històrica, ni molt menys exhaustiva, tindrà tres parts: primerament tractarem de *sèries i integrals de Fourier*, que constitueixen el que podríem anomenar *part clàssica* (començament del segle XIX), per a la qual les funcions «senzilles» són els sinus i cosinus. Després veurem les *integrals de Fourier amb finestra mòbil* (WFT, cap al 1950). I, finalment, tractarem de l'*anàlisi amb ondetes*, part que desenvoluparem amb un xic més de detall matemàtic que les dues anteriors. Per conveniència en l'exposició, alguns cops es faran afirmacions que en termes matemàtics estrictes són incorrectes o imprecises i que no s'han de treure, doncs, del context acadèmic.

2 Sèries i integrals de Fourier

2.1 Sèries de Fourier

Fourier formulà les seves idees sobre representació de funcions en una memòria del 1807 que publicà el 1822, anomenada *Théorie analytique de la chaleur*, on estudiava el problema de la difusió de la calor. La forma pedagògicament més eficient d'introduir les sèries de Fourier és en relació amb el *mètode de separació de variables* per a tractar equacions en derivades parcials lineals. Aquí m'interessa més considerar el *problema de la corda vibrant*. Es tracta de determinar en cada instant t la posició $u(\cdot, t)$ d'una corda que vibra coneixent-ne la posició i velocitat inicials i les forces que hi actuen. És a dir, tenim condicions inicials $u(x, 0) = f(x)$ i $u_t(x, 0) = g(x)$ per a $0 \leq x \leq L$, on L és la longitud de la corda. El moviment està regit, en unitats adequades i en l'absència de forces, per l'*equació d'ona* $u_{xx} = u_{tt}$. També cal tenir en compte les condicions de contorn $u(0, t) = u(L, t) = 0$, que expressen que la

corda té els extrems fixats durant el moviment. Si s'aplica el mètode de separació de variables (és a dir, s'assagen solucions $u(x, t) = X(x)T(t)$) es troba que les funcions $\sin(n\pi x/L) \cos(n\pi t/L)$ i $\sin(n\pi x/L) \sin(n\pi t/L)$ són ambdues solucions de l'equació i de les condicions de contorn, i per tant també ho són llurs combinacions lineals

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right). \quad (1)$$

Si a més s'han de complir les condicions inicials caldrà triar els coeficients a_n, b_n de forma que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Fourier va enunciar que això era sempre possible de forma que (1) era la solució general del problema. En particular s'observa que la solució és $2L$ -periòdica en t . Canviant d'escala, i sense restringir-se a funcions que s'anul·len en els extrems, l'enunciat de Fourier es reformula dient que tota funció 1-periòdica s'expressa com a superposició (suma) de les funcions 1-periòdiques més senzilles, és a dir, $\sin 2\pi n x$, $\cos 2\pi n x$,

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin 2\pi n x + b_n \cos 2\pi n x).$$

Resulta més senzill treballar en el camp complex, i amb la identitat $e^{2\pi i n x} = \cos 2\pi n x + i \sin 2\pi n x$, una formulació equivalent de l'enunciat de Fourier és que

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n x} \quad (2)$$

per a tota funció 1-periòdica f , on ara tant $f(x)$ com els c_n poden prendre valors complexos.

És clar que en (2) cal considerar en general sumes infinites, altrament és impossible que superposant sinus i cosinus es puguin obtenir funcions «arbitràries». Justament aquesta era la principal objecció a l'enunciat de Fourier en el seu temps; precisar en quin sentit l'enunciat de Fourier és correcte, amb tot el que això representa sobre les nocions mateixes de funció, convergència, etc., ha estat certament un problema històricament important. Una part de l'*anàlisi harmònica* consisteix precisament en veure en quins espais de funcions hi ha un determinat tipus de convergència de la sèrie. Llevat d'aquest tipus de detalls tècnics, l'enunciat de Fourier és correcte (i fou provat rigorosament per Dirichlet), i així el considerarem aquí sense entrar en precisions: tota funció 1-periòdica f s'expressa, d'una manera única, en la forma (2), on interpretarem que la convergència és puntual, és a dir per a tot x , es té $f(x) = \lim_n \sum_{k=-n}^n c_k e^{2\pi i k x}$. Els coeficients són

$$c_n = c_n(f) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx.$$

Observeu que per periodicitat pot substituir-se l'interval $[0, 1]$ per qualsevol altre període, és a dir, qualsevol interval de longitud 1. Els punts següents recullen les idees principals contingudes en aquest enunciat que ens interessa destacar:

a) Les funcions $e_n(x) = e^{2\pi i n x}$, $n \in \mathbb{Z}$ constitueixen una *base* de funcions 1-periòdiques, ja que tota altra funció f s'expressa d'una forma única $f = \sum_n c_n e_n$. A més a més, tenim també un *teorema de Pitàgores*, que aquí s'anomena *igualtat de Parseval*,

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \sum_n |c_n|^2.$$

Aquesta relació ens diu de quin espai són les $\{e_n\}$ una base: de les funcions 1-periòdiques que fan finita la integral de l'esquerra, l'espai $L^2([0, 1])$. Cal mirar-se la integral de l'esquerra com el quadrat de la *norma euclidiana* de f , la suma (integral) dels quadrats de tots els coeficients $f(x)$ de f , talment com en els espais euclidians de dimensió finita. Així com el producte escalar de dos vectors $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)$ és $\sum_i a_i \overline{b_i}$, el producte escalar o *correlació* entre dues funcions 1-periòdiques f, g es defineix

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Com tots els productes escalars definits positius, té la propietat (desigualtat de Schwarz) que

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|,$$

i val la igualtat si i només si f, g són proporcionals, és a dir, $f(t) = c g(t)$ per a una certa constant c . En aquest sentit, aquest producte escalar o més aviat el *coeficient de correlació*

$$\rho(f, g) = \frac{|\langle f, g \rangle|}{\|f\| \|g\|}$$

mesuren el *pes* que té g dins f . Observeu que $c_n = \langle f, e_n \rangle$, per tant c_n mesura el pes que té e_n en f i (2) es reescriu

$$f = \sum_n \langle f, e_n \rangle e_n,$$

tal com en les bases ortonormals de l'àlgebra lineal en dimensió finita.

b) Hi tenim aquí un primer exemple de *discretització*. Passem, sense perdre res a nivell teòric, d'un *continu* d'informació $\{f(x), x \in [0, 1]\}$ a unes dades *discretes* c_n . El pas de f als coeficients c_n pot mirar-se com una *codificació* o *anàlisi* i el pas contrari dels coeficients (c_n) a f mitjançant la sèrie com una *descodificació* o *síntesi*. A la pràctica només podrem guardar un nombre finit dels coeficients (deixant de banda que a la pràctica no coneixem tampoc $f(x)$ per a tot x). Ara bé, com que $\lim_{|n| \rightarrow \infty} c_n = 0$ (per exemple, a causa de la convergència de la sèrie $\sum |c_n|^2$), si substituïm f per $\tilde{f} = \sum_{k=-N}^N c_k e_k$, on N és gran, podríem pensar en principi que tenim una bona aproximació. Això però no és ben bé així perquè la velocitat amb la qual c_n tendeix a zero pot ser molt lenta. Hi ha un principi general segons el qual quan més suau o regular és f , en el sentit d'absència de canvis sobtats en intervals petits, més ràpidament $c_n \rightarrow 0$. Per comprendre aquest principi, comparem una e_n (és a dir, un sinus o cosinus) amb una freqüència n alta amb una altra de freqüència baixa; la primera té grans oscil·lacions en intervals petits —això és justament la freqüència— mentre que l'altra no. Si tenim una funció sense canvis sobtats és prou natural

esperar que els e_n amb altes freqüències hi tinguin poc pes en la representació (2) de f , és a dir, els coeficients c_n han de ser més petits quan més regular és la funció, si n és gran.

c) Si tenim una funció f amb un període $a \neq 1$, canviant d'escala (és a dir, considerant $g(x) = f(ax)$), obtenim

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{a}x}, \quad c_n = \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x) e^{-in\frac{2\pi}{a}x} dx. \quad (3)$$

d) Les funcions sinus i cosinus estan caracteritzades per una *freqüència*. Habitualment treballem amb funcions reals i, si $c_n = A_n e^{2\pi i \alpha_n}$ és la representació polar del número c_n , escrivim la representació en sèrie de Fourier sota la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \cos 2\pi(\alpha_n + nx).$$

El nombre positiu A_n s'anomena *amplitud* i l'angle α_n *fase inicial* de la freqüència n . La successió de coeficients c_n (o d'amplituds i fases) s'anomena *contingut en freqüència* o *espectre* de f , c_n dóna el pes del component de f de freqüència n . També s'acostuma a dir que coneixem f en el *domini freqüencial*, en contraposició al *domini espacial o temporal* de les x . És clar que cadascuna de les informacions determina l'altra. En cada cas concret, un dels dos aspectes tindrà potser més significat que l'altre. Pensem per exemple en la corda que vibra segons (1). Origina una ona longitudinal de so —la vibració és transmesa per les molècules d'aire— que arriba al nostre timpà produint una oscil·lació $F(t)$ en la pressió que, igual que $u(x, t)$, serà $2L$ -periòdica en t ,

$$F(t) = \sum_n M_n \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right).$$

Més que la mateixa $F(t)$, són els coeficients —el contingut freqüencial— els que tenen un significat, auditiu en aquest cas. El so que sentim és una superposició de sons. Els components en $\cos \frac{\pi t}{L}$, $\sin \frac{\pi t}{L}$ s'anomenen els *harmònics fonamentals* de període $2L$ i els altres els *harmònics secundaris*. Una determinada nota, per exemple un la d'una octava, té associada una determinada freqüència, la dels harmònics fonamentals. Els altres harmònics són els que donen al so les seves altres característiques i diferencien per exemple la mateixa nota emesa per dos instruments diferents.

2.2 Integrals de Fourier

Què es pot fer amb una funció $f(x)$ sense períodes? Es pot representar també en termes d'altres funcions més senzilles? És clar com es pot procedir: apliquem (3) a la funció a -periòdica que coincideix amb f en l'interval $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$,

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(u) e^{-in\frac{2\pi}{a}u} du \right) e^{in\frac{2\pi}{a}x}, \quad |x| \leq \frac{a}{2},$$

i fem tendir a a $+\infty$. El resultat que s'obté és

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega x} d\omega, \quad (4)$$

on

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx.$$

La funció \hat{f} s'anomena la *transformada de Fourier* de f i (4) la *representació de f en integral de Fourier*. Resumim les idees que hi ha en aquesta representació:

a) Les funcions senzilles continuen essent els sinus i cosinus, o les $e_{\omega}(x) = e^{2\pi i \omega x}$, però ara totes les freqüències són lògicament necessàries i les sumes finites o numerables es transformen en sumes contínues, integrals,

$$f = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e_{\omega} d\omega.$$

En el cas que considerem, sense períodes, l'espai on treballem és l'espai $L^2(\mathbb{R})$ de senyals d'energia finita

$$\|f\| = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Com en el cas periòdic, la correlació de dues funcions f, g és

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx,$$

i s'interpreta anàlogament, és una mesura de la *semblança* entre f, g .

Observem que $\hat{f}(\omega) = \langle f, e_{\omega} \rangle$ i així (4) es reescriu

$$f = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f, e_{\omega} \rangle e_{\omega} d\omega \quad (5)$$

que diu que les funcions e_{ω} fan el paper de *base ortonormal contínua* de $L^2(\mathbb{R})$ (si pensem en la integral com una combinació lineal infinita). Tanmateix, hi ha quelcom curiós que no es dona en el cas periòdic: $e_{\omega} \notin L^2(\mathbb{R})$! En aquest sentit, la representació (4) té quelcom de *màgic*, no del tot natural.

El teorema de Pitàgores-Parseval és aquí:

$$\begin{aligned} \|f\|^2 = \langle f, f \rangle &= \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e_{\omega} d\omega, f \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \langle e_{\omega}, f \rangle d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \|\hat{f}\|^2. \end{aligned}$$

Per polarització, l'equació anterior és equivalent a

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle, \quad (6)$$

b) També en l'aspecte codificació-decodificació s'ha perdut quelcom, ja que passem d'un continu d'informació $f(x)$ a un altre continu $\hat{f}(\omega)$. Aquest aspecte negatiu està relacionat amb l'anterior, ja no tenim cap *base discreta* de $L^2(\mathbb{R})$. Igual que en el cas periòdic, $\hat{f}(\omega) \rightarrow 0$ quan $|\omega|$ es fa gran i com més regular és f globalment,

més ràpidament $\hat{f}(\omega)$ tendeix a zero quan $|\omega| \rightarrow \infty$ (menys incidència tenen les freqüències altes).

c) Per iteració s'obté una versió n -dimensional:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \int \dots \int \hat{f}(\omega_1, \dots, \omega_n) e^{2\pi i(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n)} d\omega_1 \dots d\omega_n,$$

on

$$\hat{f}(\omega_1, \dots, \omega_n) = \int \dots \int f(x_1, \dots, x_n) e^{-2\pi i(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n)} dx_1 \dots dx_n.$$

d) Es pot considerar el cas periòdic, és a dir, la representació en sèrie de Fourier d'un senyal periòdic, com un cas particular de la representació en integral de Fourier: si f és a -periòdica tan sols cal considerar en la representació (4) els e_{ω} que són també a -periòdics, és a dir, $\omega = n/a$ amb $n \in \mathbb{Z}$ i aleshores (4) esdevé (3).

2.3 Per a què és útil la transformació de Fourier?

En primer lloc, el món és ple de fenòmens oscil·latoris i és per tant del cas disposar d'una manera de manipular funcions adaptada a aquest fet com és la representació de Fourier, que utilitza sinus i cosinus, les funcions oscil·latòries més senzilles. Ara bé, la transformació i representació de Fourier no són solament eines matemàtiques, sinó que tenen una *existència real*. Per exemple, en cristal·lografia, en la difracció de raigs X per cristalls, la funció d'ona resultant és la transformació de Fourier de la funció de densitat electrònica del cristall; en òptica, si estudiem la difracció produïda per petites obertures en una pantalla, hi apareixerà en una primera aproximació (difracció de Fraunhofer) la transformada de Fourier de la funció característica de l'obertura; o també es parla d'*espectres característics* dels elements. En moltes d'aquestes situacions s'hi dona un problema interessantíssim, que és el *problema de la fase*, que consisteix en que els aparells mesuren en general tan sols el mòdul $R(\omega) = |\hat{f}(\omega)|$; si $\hat{f}(\omega) = R(\omega)e^{i\alpha\omega}$, es perd la fase $\alpha\omega$ que cal per determinar \hat{f} i per tant f . Es tracta d'un problema matemàticament mal formulat, però que tanmateix els cristal·lografs resolen! No és senzill descriure matemàticament les solucions que es donen a aquest problema; alguna d'elles va valdre als seus autors el Premi Nobel de Química (Hauptman i Karle).

En última instància, la raó de la ubiqüitat de la representació de Fourier en física i en la ciència en general té una explicació matemàticament senzilla. I és que és inherent a tot allò que és *invariant per translacions*. Per explicar-ho amb un cert detall, introdueixo una mica de notació. Sigui T una transformació lineal entre funcions, és a dir, per a cada funció f tenim una altra funció Tf i $T(af + bg) = aT(f) + bT(g)$ si a, b són constants. Per exemple, f pot ser la posició inicial d'una corda vibrant (amb velocitat inicial zero) o la distribució inicial de temperatures d'una barra i Tf la posició o distribució de temperatures en un instant determinat. Qualsevol operador diferencial amb coeficients constants és també un exemple de T . L'operador T es diu *invariant per translacions* si $T(\tau_y f) = \tau_y(Tf)$, on $\tau_y(g)$ denota la funció $\tau_y(g)(x) = g(x - y)$. Canviar un origen de mesura, de temps o d'espai, representa fer una translació τ_y en les funcions, i per tant tots els operadors que no depenguin d'una elecció arbitrària d'origen seran invariants per translacions.

Considerem un operador lineal invariant per translacions T i calculem $T(e_\omega)$. Les funcions e_ω tenen una propietat característica, $e_\omega(x+y) = e_\omega(x)e_\omega(y)$, que expressat de forma més compacta, diu que $\tau_{-y}(e_\omega) = e_\omega(y)e_\omega$. Aplicant ara T i utilitzant la invariància per translacions trobem $\tau_{-y}(T(e_\omega)) = T(\tau_{-y}(e_\omega)) = e_\omega(y)T(e_\omega)$, és a dir, $T(e_\omega)(x+y) = e_\omega(y)T(e_\omega)(x)$. Fent $x = 0$, arribem a $T(e_\omega)(y) = m(\omega)e_\omega(y)$, amb $m(\omega) = T(e_\omega)(0)$, la qual cosa vol dir que $T(e_\omega) = m(\omega)e_\omega$. Totes les funcions e_ω són doncs vectors propis de tots els operadors invariants per translacions. La funció $m(\omega)$ s'anomena *multiplicador* de T . Per exemple, si $T = D$ és l'operador de derivació, $De_\omega = i\omega e_\omega$. La forma com T opera sobre una funció arbitrària és molt senzilla si s'utilitza la representació de Fourier:

$$T(f) = T\left(\int \hat{f}(\omega)e_\omega d\omega\right),$$

i utilitzant linealitat

$$= \int \hat{f}(\omega)T(e_\omega) d\omega = \int \hat{f}(\omega)m(\omega)e_\omega d\omega.$$

Dit d'una altra forma, tots els operadors invariants per translació diagonalitzen en la base $\{e_\omega\}$. Aquesta és la raó principal per la qual la representació de Fourier —l'expressió en aquesta base— té una importància especial. En el domini freqüencial, l'operador T no és res més que un operador de multiplicació, $(T(f))^\wedge = m\hat{f}$.

Així, genèricament parlant, hi ha tants operadors invariants per translacions com funcions multiplicadors. També pot entendre's bé el funcionament de T en el domini temporal mitjançant una sola funció. Si δ designa la massa unitat en 0,

$$f(x) = \int f(y)\delta(x-y) dy, \text{ o bé, } f = \int f(y)\tau_y(\delta) dy,$$

i utilitzant les propietats de T , si $K = T(\delta)$,

$$\begin{aligned} T(f) &= \int f(y)T(\tau_y\delta) dy = \int f(y)\tau_y(T\delta) dy \\ T(f)(x) &= \int f(y)\tau_y(K)(x) dy = \int f(y)K(x-y) dy. \end{aligned}$$

La funció K s'anomena *resposta-impuls* de T i l'operació anterior *convolució* $f * K$ de f i K . Observeu que $\hat{K} = (T(\delta))^\wedge = m\hat{\delta} = m$ i en conseqüència

$$K(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(\omega)e^{2\pi i\omega x} d\omega.$$

Els dos paràgrafs anteriors expliquen per què de l'anàlisi harmònica, se'n diu en ocasions *anàlisi d'allò invariant per translacions*. Més generalment que en els espais euclidians, pot fer-se anàlisi harmònica en grups més generals, grups dotats d'una topologia i d'una mesura invariant per l'operació del grup, per exemple en els grups finits i grups de matrius. Els sinus i cosinus e_ω són substituïts pels *caràcters* del grup, els morfismes (continus) del grup en el grup multiplicatiu dels complexos.

Els operadors que corresponen a aparells que funcionen en temps real (és a dir, que $T(f)(x)$ només depèn dels valors de $f(y)$ per a temps $y \leq x$ anteriors a x i no del futur) són, utilitzant $Tf = f * K$, exactament aquells tals que $K(x) = 0$ si $x \leq 0$. Això porta a l'estudi dels corresponents multiplicadors, funcions m que tenen transformada de Fourier nul·la en un semieix. Aquestes funcions, que tenen extensions analítiques en un semiplà, constitueixen els *espais de Hardy* que per aquesta raó són el pont entre l'anàlisi complexa i la teoria del senyal.

2.4 Discretització de funcions. El cas de senyals de banda limitada

En primer lloc introduïrem algunes nocions generals sobre discretització que s'utilitzen en aquest apartat i en d'altres posteriors.

En termes generals, un *procés estable de discretització* en un espai X de funcions $f(x)$ d'energia finita és una aplicació lineal

$$f \rightarrow (a_\gamma(f))_\gamma,$$

que associa a cada $f \in X$ una família de coeficients a_γ dependents d'un paràmetre discret γ amb la propietat d'*estabilitat*: hi ha dues constants A, B tals que l'energia $\|f\|$ del senyal es controla mitjançant

$$A\|f\|^2 \leq \sum_\gamma |a_\gamma|^2 \leq B\|f\|^2. \quad (7)$$

En particular l'aplicació és injectiva, i el senyal f queda completament determinat per (a_γ) . La *representació* de f mitjançant els coeficients (a_γ) és doncs *completa* en X .

Si (b_γ) correspon a la funció $g(x)$,

$$A\|f - g\|^2 \leq \sum_\gamma |a_\gamma - b_\gamma|^2 \leq B\|f - g\|^2.$$

Això significa que petits errors en el càlcul dels coeficients porten a petits errors en les funcions; per aquest fet es diu també que el procés de discretització és *robust*, suporta bé els errors. Si $A = B$ i val la igualtat en (7) diem que el procés és *rígid o exacte*.

Per exemple, els coeficients de Fourier d'una funció periòdica en constitueixen una representació exacta, amb constant 1. En aquest cas disposem també d'una forma concreta de recuperar f , sumant la sèrie de Fourier. Sempre que tinguem una base ortonormal $\{e_\gamma\}$ de X , el conjunt de les correlacions $a_\gamma = \langle f, e_\gamma \rangle$ donen, per definició, una representació completa i exacta amb reconstrucció $f = \sum \langle f, e_\gamma \rangle e_\gamma$. Però, llevat del cas periòdic, coneixem *explícitament* ben poques bases discretes dels espais funcionals. En particular, coneixem una base discreta de l'espai $L^2(\mathbb{R})$ de *totes* les funcions d'energia finita? Les funcions $\{e_\omega\}$ tenen alguna de les propietats, com ara (5), però tenen —a part del que es comentarà a la secció 2.5— dos inconvenients: no és una família discreta i no estan en l'espai!

Tornant al cas general, com que $f \rightarrow a_\gamma(f)$ és continu, el teorema de Riesz de representació dona l'existència d'una funció ϕ_γ d'energia finita tal que $a_\gamma(f)$ és la correlació $\langle f, \phi_\gamma \rangle$, per a tota $f \in X$. S'arriba així a un sistema discret $\{\phi_\gamma\}$ de funcions que és estable en el sentit que

$$A\|f\|^2 \leq \sum_\gamma |\langle f, \phi_\gamma \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, f \in X,$$

El sistema $\{\phi_\gamma\}$ s'anomena *marc de referència*, o breument, *marc (frame, en anglès)* per a X . Les bases ortonormals són els marcs rígids de constant 1. Així en un marc tota $f \in X$ queda determinada de manera estable per les correlacions $\langle f, \phi_\gamma \rangle$.

El procediment de discretització més habitual és mitjançant *mostres*. Una mostra d'una funció f és la successió de valors $\{f(nh), n \in \mathbb{Z}\}$, on h és el pas de *mostratge*. Podem substituir la successió nh per una general (x_n) ; quan d'aquesta

manera s'obté una discretització estable de X es diu que la successió (x_n) és *de mostratge per a X (sampling)*.

Considerem ara la qüestió de la reconstrucció. La funció f està determinada per les correlacions $\langle f, \phi_\gamma \rangle$; però, com? Pot provar-se que tot marc té associat un altre marc $\{\phi_\gamma^*\}$, anomenat *marc dual*, tal que

$$f = \sum_\gamma \langle f, \phi_\gamma \rangle \phi_\gamma^*, \quad f = \sum_\gamma \langle f, \phi_\gamma^* \rangle \phi_\gamma.$$

Hi ha algorismes iteratius, i per tant programables, que a la pràctica permeten calcular aproximacions arbitràriament precises de f a partir de les correlacions $\langle f, \phi_\gamma \rangle$, tant si es coneix el marc dual com si no. Quan el marc és rígid de constant A aleshores $\phi_\gamma^* = \frac{1}{A} \phi_\gamma$, i per tant $f = \frac{1}{A} \sum_\gamma \langle f, \phi_\gamma \rangle \phi_\gamma$; en el cas de bases ortonormals, $A = 1$, tenim la reconstrucció habitual. Quant més properes són les constants A, B del marc més *rigid* és, més s'assembla ϕ_γ^* a $\frac{1}{A} \phi_\gamma$ i menys error representa utilitzar la fórmula de reconstrucció anterior.

D'altra banda, cal fer notar que $\langle f, \phi_\gamma \rangle$ no són en general els únics coeficients a_γ tals que $f = \sum a_\gamma \phi_\gamma^*$. Això porta a una altra qüestió important a considerar parlant de discretització, que és la *redundància*. Sense precisar: que un procés, o el marc corresponent, sigui redundat vol dir que sobra quelcom als coeficients $\langle f, \phi_\gamma \rangle$ per determinar f de manera estable, i no redundat vol dir que no hi sobra res, que totes les correlacions fan falta. Per exemple, està clar que una base ortonormal no és redundat. Si ajuntem dues bases ortonormals s'obté un marc rígid de constant 2 que és òbviament redundat. Un altre exemple, aquest per a l'espai R^2 , és el marc rígid de R^2 format pels tres vectors $(1, 0)$, $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. La redundància significa que hi ha relacions entre els coeficients $\langle f, \phi_\gamma \rangle$, que provenen de possibles relacions entre els ϕ_γ . Podem veure que les dues propietats següents són equivalents:

- La successió de coeficients $\langle f, \phi_\gamma \rangle, f \in X$ pot ser qualsevol de quadrat sumable, és a dir, per a tota família de nombres (a_γ) complint $\sum |a_\gamma|^2 < +\infty$ hi ha una *única* $f \in X$ tal que $\langle f, \phi_\gamma \rangle = a_\gamma$.
- El sistema $\{\phi_\gamma\}$ és linealment independent (topològicament), és a dir, cap ϕ_γ és una combinació lineal dels altres.

Quan això és cert, diem que el marc és *no redundat*. En aquest cas també ho és el marc dual. Un marc no redundat per a X és, doncs, aquell tal que tota $f \in X$ té una única expressió

$$f = \sum_\gamma b_\gamma \phi_\gamma,$$

amb $\sum |b_\gamma|^2$ comparable a $\|f\|^2$, i aleshores l'expressió anterior és l'expressió *general* de $f \in X$. Per aquest fet, els marcs no redundants s'anomenen també *bases de Riesz*.

En el cas que s'estigui considerant una successió de mostratge, $\langle f, \Phi_n \rangle = f(x_n)$, la propietat anterior estableix que per a tota família (a_n) de quadrat sumable hi ha una única $f \in X$ tal que $f(x_n) = a_n$, i es parla aleshores de *propietat d'interpolació*. Així, les successions de mostratge no redundants són les que, a més, tenen la propietat d'interpolació.

El resultat de mostratge més conegut és el que s'anomena *teorema de Nyquist-Shannon de mostratge sense pèrdua d'informació*. De fet, es tracta, com ara veurem, d'un resultat matemàticament *equivalent* al fet que les funcions e_n formen una base de l'espai de funcions 1-periòdiques, i per tant prou ben conegut molt abans de Shannon, però ell fou qui en mostrà la rellevància en la teoria de la comunicació ([13]). L'enunciat precís és el següent:

Suposem que la funció f té un espectre contingut en $[-\lambda, +\lambda]$, és a dir, que en la seva representació de Fourier només hi intervenen funcions sinus i cosinus de freqüències inferiors a λ . Aquestes funcions s'anomenen *de banda limitada*, tenen extensions enteres, i constitueixen l'espai $X = B_\lambda$ de *Paley-Wiener*. Aleshores, si $h = \frac{1}{2\lambda}$, la mostra $\{f(nh), n \in \mathbb{Z}\}$ determina completament f mitjançant la fórmula

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nh) \operatorname{sinc}(2\lambda x - n).$$

Aquí la funció *sinus cardinal* sinc és la funció $\operatorname{sinc}(y) = \frac{\sin \pi y}{\pi y}$ i el desenvolupament anterior és uniformement convergent sobre compactes. A més a més, hi ha una igualtat de Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(nh)|^2.$$

Per provar el teorema tan sols cal combinar la representació (4) de f amb

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{\lambda}\omega}, \quad c_n = \frac{1}{2\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} \hat{f}(\omega) e^{-in\frac{\pi}{\lambda}\omega} d\omega = \frac{1}{2\lambda} f\left(-\frac{n}{2\lambda}\right),$$

que s'obté de (3) estenent \hat{f} com a funció 2λ -periòdica.

El teorema de Nyquist-Shannon estableix que les funcions traslladades del sinus cardinal, $\operatorname{sinc}(2\lambda x - n)$, $n \in \mathbb{Z}$, constitueixen una base ortonormal de l'espai B_λ , i $f(nh)$ els coeficients. Es tracta per tant d'una representació exacta. Cal fer notar el fet, *a priori* prou clar, que com més gran és λ —i per tant com menys informació sobre el suport de \hat{f} tinguem— més petit és el pas h i per tant més sovintejat és el mostratge. Si es pren un pas de mostratge superior es produeix el fet conegut com l'*aliasing* o de solapament d'espectre. Si, al contrari, es mostreja més sovintejat de que teòricament cal, es parla de *sobremostratge (oversampling)*, que permet utilitzar fórmules de sumació diferents de la del sinus cardinal i més ràpidament convergents.

Fins recentment no s'han descrit completament les successions de nombres reals $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ que tenen la mateixa propietat, és a dir, que són simultàniament de mostratge i d'interpolació per a l'espai B_λ . D'acord amb el que s'ha dit abans, i atès que

$$f(x_n) = \int \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x_n \xi} d\xi = \langle \hat{f}, e_{x_n} \rangle,$$

això és equivalent a la descripció de les famílies de caràcters $\{e_{x_n}\}$ que constitueixen una base de Riesz de l'espai $L^2[-\lambda, +\lambda]$. La caracterització és complicada i no la donarem aquí; un resultat més senzill però il·lustratiu és el teorema de Kadec: si $|x_n - n| \leq d < \frac{1}{4}$, els $\{e_{x_n}\}$ formen una base de Riesz de $L^2[0, 1]$. Aquest tipus de resultats constitueixen un camp actiu de recerca en anàlisi. Com a exemples de problemes atractius oberts es poden citar el de donar versions multidimensionals del teorema de Shannon —relacionat amb problemes de visió (com veu l'ull humà?)— o bé

l'anomenat *problema multibanda*, que constitueix en substituir l'interval $[-\lambda, +\lambda]$, on es troben totes les freqüències, per dos o més intervals disjunts. Aquesta fóra la situació que es dona per exemple si canten simultàniament una soprano i un tenor.

Un enunciat equivalent al de Nyquist-Shannon s'obté permutant els papers de f, \hat{f} : si la funció f viu només en $[-T, +T]$, la transformada \hat{f} queda determinada pel seus valors en els punts $\frac{n}{2T}, n \in \mathbb{Z}$. I el càlcul d'aquests es realitza mitjançant sumes de Riemann

$$\hat{f}\left(\frac{n}{2T}\right) = \int_{-T}^{+T} f(x) e^{-2\pi i x \frac{n}{2T}} dx \sim \frac{1}{M} \sum_{-M}^M f\left(\frac{kT}{M}\right) e^{-\pi i \frac{kn}{M}}.$$

Es tracta d'una versió discreta de la transformada de Fourier, de fet en el grup d'arrels de la unitat. L'algorisme per implementar de manera òptima aquests càlculs es coneix en anàlisi numèrica com *transformada ràpida de Fourier* (FFT), i ha estat d'una enorme importància. Tot i que ja fou apuntat per Gauss, no fou fins al 1965 que va ser reintroduït per J. Cooley i J. Tukey en un article de gran transcendència. En paraules de T. Körner, es tractava «d'una solució que buscava un problema», en aquest cas la implementació ràpida de la transformació de Fourier en els naixents ordinadors.

2.5 Per a què no serveix la transformació de Fourier?

En primer lloc, hi ha evidentment moltes transformacions entre funcions que o bé no són lineals o bé no són invariants per translació, especialment en l'àmbit del tractament d'imatges. Des d'un punt de vista més tècnic, la transformació de Fourier té l'inconvenient que fora de l'espai $L^2(\mathbb{R})$ calen eines matemàtiques més sofisticades.

Però, sens dubte, el principal inconvenient està en la pobra *localització temps-freqüència*. Per explicar això utilitzaré un exemple extrem. Considerem un so, una peça musical, que té un principi i un final, és a dir, una funció $f(t)$ que té un suport compacte i representació de Fourier

$$f(t) = \int \hat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega t} d\omega.$$

Pensem en una funció $e_\omega(t) = e^{2\pi i \omega t}$ com una nota d'una certa octava, per exemple un do. Què significa la correlació

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt?$$

És quelcom que depèn de totes les amplituds de tots els dos emesos durant la interpretació de la peça, quelcom que òbviament no té cap significat musical. A efectes de codificació o gravació, fóra absurd pretendre utilitzar \hat{f} , caldria esperar a que acabés la interpretació per començar a fer quelcom! Aquest símil mostra clarament que la transformació de Fourier dóna una informació *global* en el temps o espai sense reflectir aspectes locals, completament localitzada en freqüència. A més a més, estem representant una funció amb suport compacte utilitzant les e_ω que no el tenen. El que $\int \hat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega t} d\omega$ sigui zero per a t fora del suport és degut a cancel·lacions degudes a causa de les fases dels coeficients, en cert sentit és *màgic*; el que coses no necessàriament petites $-\hat{f}(\omega)$ pot ser gran per a tot ω — es superposin

per donar zero és una característica numèricament no desitjable. Un cas extrem és quan considerem la massa unitat en un punt a , per a la qual la transformada de Fourier és $e^{-2\pi i a \omega}$, que té mòdul constant 1.

El que això significa és que la transformada de Fourier no capta en absolut *aspectes locals* del senyal, com per exemple els canvis sobtats, els salts, o l'autossimilaritat local. En termes de la transformació de Fourier és impossible saber, sense fer la reconstrucció, si un senyal té per exemple un pic o una discontinuïtat en un punt, o si creix ràpidament o lentament a l'entorn d'un punt. Resumint, la teoria de Fourier ens ensenya que cada funció té una altra cara, la freqüencial, però, com en una moneda, si mirem una cara no veiem l'altra.

El llenguatge musical, el solfeig, és en aquest sentit una forma superior de representar funcions, perquè diu *quines* freqüències (notes) intervenen i també en *quin* moment. El solfeig dona informació del *contingut local en freqüència*.

3 Integrals de Fourier amb finestra (WFT)

3.1 Per què finestres?

Als anys cinquanta es van desenvolupar, principalment gràcies a D. Gabor i la seva escola ([5]), algunes eines matemàtiques, modificacions de la transformació de Fourier que intentaven resoldre l'anterior inconvenient. Es tracta doncs de dissenyar quelcom que doni informació del contingut local en freqüència. En una primera aproximació, aquesta anàlisi local seria la que fa la nostra oïda. Si tenim un so $f(t)$, és raonable suposar que la sensació auditiva en un moment determinat u depèn només de $f(t)$ per a $u - T \leq t \leq u$, T seria com el temps límit de memòria. El que sentim en l'instant u es conformaria amb el contingut freqüencial d'aquesta part del so

$$\tilde{f}(u, \omega) = \int_{u-T}^u f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt.$$

Potser és més del cas substituir la funció característica de l'interval $[u - T, u]$ per $G(t - u)$, on G és suau, té suport diguem en $[-T, 0]$ i val 1 en $[-T + \epsilon, -\epsilon]$. En el que segueix, G pot ser però qualsevol funció real ben localitzada en l'espai, d'energia finita (que suposarem 1), i considerem

$$\tilde{f}_G(u, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) G(t - u) e^{-2\pi i \omega t} dt.$$

La funció \tilde{f} s'anomena *transformada de Fourier de f amb la finestra G (windowed Fourier transform*, en terminologia anglesa). Com a funció de ω , no és res més que la transformada de Fourier de $f \tau_u(G)$ i per tant és obvi que \tilde{f} continua determinant f unívocament. Això mateix mostra que hi ha una *redundància* d'informació, cosa d'esperar perquè passem d'un continu d'informació $f(t)$ a un doblement continu. Quant més ben localitzada és G més precisa és la informació sobre f al voltant de u que porta $\tilde{f}(u, \cdot)$.

Per quantificar la localització d'una funció $h \in L^2(\mathbb{R})$ d'energia 1 és costum utilitzar la noció de *variància* en probabilitats,

$$\sigma(h)^2 = \int (t - \mu)^2 |h(t)|^2 dt, \quad \text{on } \mu = \mu(h) = \int t |h(t)|^2 dt.$$

El paràmetre $\mu(h)$ dona la posició del centre de la distribució d'energia de densitat $|h|^2$ i $\sigma(h)$ n'indica la dispersió. Convé pensar que en l'interval $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ hi ha concentrada la major part de l'energia de h (per exemple, en $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ hi ha almenys les tres quartes parts de l'energia total). Suposarem aquí que G, \hat{G} estan centrades en zero; per Parseval, també \hat{G} té energia total 1. Aleshores, si $\sigma = \sigma(G)$,

$$\tilde{f}(u, \omega) \sim \int_{u-\sigma}^{u+\sigma} f(t)G(t-u)e^{-2\pi i\omega t} dt,$$

que ve a dir que $\tilde{f}(u, \cdot)$ depèn principalment de f en $[u - \sigma, u + \sigma]$.

Observeu que, si $G_{u,\omega}(t) = e^{2\pi i\omega t}G(t-u)$,

$$\tilde{f}(u, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{G_{u,\omega}(t)} dt = \langle f, G_{u,\omega} \rangle.$$

Així $\tilde{f}(u, \omega)$ ens indica *quin pes* té $G_{u,\omega}$ en f , de la mateixa manera que $\hat{f}(\omega)$ indica el pes de e_{ω} . Aquestes funcions $G_{u,\omega}$, que no són sinó sinus o cosinus localitzats amb la finestra $G(t-u)$, s'anomenen *àtoms temps-freqüència* o *àtoms de Gabor* i substituiran els e_{ω} .

Per (6), i utilitzant també que $(G_{u,\omega})^\wedge(\xi) = e^{2\pi i(\omega-\xi)u}\hat{G}(\omega-\xi)$,

$$\tilde{f}(u, \omega) = \langle \hat{f}, (G_{u,\omega})^\wedge \rangle = e^{-2\pi i\omega u} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\hat{G}(\xi-\omega)e^{2\pi i\xi t} d\xi.$$

Aquesta expressió és pràcticament igual a l'anterior canviant f per \hat{f} i G per \hat{G} . Això significa que, com a funció de u , $\tilde{f}(\cdot, \omega)$ diu com és \hat{f} al voltant de ω , i més precisa és aquesta informació quant més ben localitzada és \hat{G} . Si $\hat{\sigma} = \sigma(\hat{G})$, podem dir que la *precisió temporal* de \tilde{f} està quantificada per σ i la freqüencial per $\hat{\sigma}$.

3.2 La localització temps-freqüència

Ara és el moment de parlar del *principi d'incertesa* en anàlisi harmònica, que afirma que per a qualsevol funció de $L^2(\mathbb{R})$,

$$\sigma(G) \times \sigma(\hat{G}) \geq \frac{1}{2\pi},$$

i es dona la igualtat si i només si G (i per tant també \hat{G}) és una gaussiana $G(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$. Aquest principi és una de les moltes maneres, potser la més coneguda, d'expressar la idea que una funció G i la seva transformada \hat{G} no poden ser ambdues *petites* al mateix temps. Un altre exemple: si f té *molts zeros* en el sentit que té suport compacte, i no és idènticament zero, \hat{f} n'ha de tenir molt pocs ja que en aquest cas és una funció entera, la *transformada de Fourier-Laplace*. Ja s'ha comentat abans que en aquest exemple, la fórmula per a t fora del suport de f $0 = \int \hat{f}e^{i\omega t} d\omega$, és deguda a cancel·lacions que depenen de les fases dels coeficients. La idea intuïtiva del principi és, aproximadament, que per aconseguir més i més cancel·lació calen més i més sinus i cosinus. En part a causa de la relació amb el principi d'incertesa de Heisenberg de la mecànica quàntica, està envoltat d'una aurèola especial; però matemàticament no és un resultat profund i des d'un cert punt de vista és fins i tot un xic tautològic.

Tornant a \tilde{f} , tenim, doncs, que és impossible que siguin simultàniament precises les dues informacions locals sobre f , \hat{f} que \tilde{f} porta. Novament, cal destacar que aquest fet és prou clar intuïtivament parlant, tant si s'utilitza la WFT com una altra cosa. És a dir, sigui quina sigui l'eina matemàtica que s'utilitzi per obtenir informació local en temps i freqüència, sempre hi haurà un *principi d'incertesa* que expressi la incompatibilitat fonamental entre la precisió d'ambdues mesures, senzillament perquè la freqüència no pot ser mesurada instantàniament. Així, si volem afirmar que un senyal té freqüència ω , aquest haurà de ser observat com a mínim durant un període, és a dir, durant un interval de temps $\geq \frac{1}{\omega}$, i quan més períodes s'observin més *confiança* tindrà aquesta afirmació. És clar que no es pot afirmar en *quin* moment un senyal té un determinat període, senzillament per la definició de període! Cal mirar-se la WFT com un *compromís* entre ambdues informacions: la informació temporal està dispersada en finestres de mida σ i la freqüencial en finestres de mida $\hat{\sigma}$.

D'una manera simbòlica s'associa a cada àtom $G_{u,\omega}$ el rectangle del pla temps-freqüència centrat en el punt (u, ω) , de mida σ horitzontal i mida $\hat{\sigma}$ vertical; $\tilde{f}(u, \omega)$ depèn principalment de $f(t)\hat{f}(\xi)$ en aquest rectangle.

De la precisa quantificació del principi d'incertesa abans formulada, resulta que el millor *compromís* s'obté quan es tria com a finestra G una gaussiana. En aquest cas, hom parla de la *transformació de Gabor*.

3.3 La fórmula de reconstrucció.

Com que $\tilde{f}(u, \cdot)$ és la transformada de Fourier de $f\tau_u G$ hom té

$$f(t)G(t-u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(u, \omega)e^{2\pi i\omega t} d\omega.$$

Multiplicant per $\overline{G(t-u)}$ i integrant després en u s'obté la fórmula d'inversió o de reconstrucció

$$f(t) = \iint G_{u,\omega}(t)\tilde{f}(u, \omega) d\omega du. \quad (8)$$

Tornant al símil musical, hom podria pensar en les funcions $G_{u,\omega}$ com en les *notes musicals*, ara sí localitzades en el temps, que amb les respectives amplituds \tilde{f} donen f per superposició. En termes matemàtics, s'ha resolt un dels problemes que tenia la transformació de Fourier, perquè ara sí que les funcions *senzilles*, els àtoms $G_{u,\omega}$ són a $L^2(\mathbb{R})$ i l'equació (8) s'escriu

$$f = \iint \langle f, G_{u,\omega} \rangle G_{u,\omega} d\omega du,$$

que és de la mateixa forma que (5) i significa que les funcions $G_{u,\omega}$ formen una «base ortonormal» contínua de $L^2(\mathbb{R})$. Hi ha un comentari de tipus tècnic important a fer aquí, i és que les notes $G_{u,\omega}$ no són necessàriament dos a dos perpendiculars. Novament, el que valguin les fórmules anteriors és quelcom un xic màgic, depèn de cancel·lacions subtils.

La WFT és robusta en el sentit que hi ha una *conservació d'energia* o teorema de Parseval que afirma que val Pitàgores per a la descomposició (8),

$$\int |f(t)|^2 dt = c \iint |\tilde{f}(u, \omega)|^2 d\omega du.$$

La funció $Sf(u, \omega) = |\tilde{f}(u, \omega)|^2$ és, per tant, una densitat d'energia en el pla temps-freqüència; la *zona d'influència* de $Sf(u, \omega)$ és el quadrat centrat en (u, ω) de mides $\sigma, \hat{\sigma}$. La representació de Sf segons nivells de gris s'anomena *espectrograma*. Considerem per exemple un impuls, una delta en a ; si la precisió temporal fos absoluta, l'espectrograma tindria una línia vertical negra en el punt d'abscissa $u = a$. Amb una finestra, veurem com aquesta línia negra es dilueix proporcionalment a σ , obtenint una banda que es va aclarint en els extrems. Si, en lloc d'un impuls, en tenim dos, un en a i un altre en b , veurem dues bandes; si el paràmetre de precisió temporal σ és petit en relació $|b - a|$, aquestes dues bandes estaran nítidament separades, però no en cas contrari. D'una manera anàloga, si tenim una freqüència pura, un e_α , l'espectrograma seria una línia horitzontal $\omega = \alpha$ en el cas de precisió freqüencial absoluta (Fourier) i una banda horitzontal en el cas en finestrat. El principi d'incertesa s'il·lustra amb el següent exemple: si $f = \delta_a + \delta_b + e_\alpha + e_\beta$, i $|b - a|, |\alpha - \beta|$ són petits, l'espectrograma mai no podrà aconseguir separar nítidament, discriminar simultàniament els dos impulsos i els dos sons purs.

En relació amb la transformació de Fourier tradicional, l'avantatge de la WFT és la introducció d'una escala, la mida de la finestra, que és fixa; aspectes locals, temporals, del senyal f sobre intervals més curts que la finestra, es reflecteixen, són sintetitzats en freqüència, i combinen notes $\tilde{f}(u, \omega)$ amb valors similars de u i diferents ω , mentre que aspectes temporals sobre intervals molt més llargs que la finestra necessiten combinar moltes notes amb diferents valors de t .

3.4 Discretització de la WFT

La fórmula de reconstrucció pot interpretar-se en el sentit que els àtoms de Gabor $G_{u,\omega} \in L^2(\mathbb{R})$ constitueixen una base ortonormal *continua* de $L^2(\mathbb{R})$. És clar que és redundant, perquè passem d'un continu $f(t)$ a un doblement continu $\tilde{f}(u, \omega)$; de fet podem veure que les funcions \tilde{f} compleixen una equació integral del tipus

$$\tilde{f}(u, \omega) = \iint \tilde{f}(v, \xi) K(u, \omega; v, \xi) dv d\xi.$$

Cal plantejar-se la qüestió: és possible triar una xarxa discreta Γ de punts $\gamma = (u_\gamma, \omega_\gamma)$ del pla tals que $\{\tilde{f}(\gamma)\}$ discretitzi f de manera estable? Dit d'una altra manera (recordem que $\tilde{f}(u, \omega) = \langle f, G_{u,\omega} \rangle$), tals que la família discreta d'àtoms G_γ sigui un marc de $L^2(\mathbb{R})$? Si X és el subespai de $L^2(\mathbb{R}^2)$ format per les funcions $\tilde{f}(u, \omega)$ el que es demana és que la successió Γ sigui de mostratge per a X . I quan és un marc no redundant, és a dir, una base de Riesz?

No és difícil exhibir marcs discrets d'àtoms de Gabor. Suposem, per exemple, que la finestra G té suport compacte dins $[a, b]$, i posem $\tau = \frac{1}{b-a}$. Procedim com a la prova del teorema de Shannon: la funció $f(t)G(t-u)$ té suport de longitud $\leq (b-a)$ i pot ser estesa a una funció $(b-a)$ -periòdica, els coeficients de Fourier de la qual són

$$c_k = \tau \int_a^b f(t)G(t-u)e^{-2\pi i k \tau t} dt = \tau \tilde{f}(u, k\tau).$$

Per tant,

$$f(t)G(t-u) = \tau \sum_k \tilde{f}(u, k\tau) e^{2\pi i k \tau t},$$

i multiplicant per $G(t - u)$,

$$f(t)|G(t - u)|^2 = \tau \sum_k \tilde{f}(u, k\tau) G_{u, k\tau}(t).$$

Discretitzem ara el paràmetre de posició, $u = nh$, i sumem en $n \in \mathbb{Z}$:

$$f(t)h \sum_n |G(t - nh)|^2 = \tau h \sum_{n,k} \tilde{f}(nh, k\tau) G_{nh, k\tau}(t).$$

Designem per $A_h(t)$ l'expressió de la dreta, $h \sum_n |G(t - nh)|^2$. Hom té

$$\int |f(t)|^2 A_h(t) dt = \langle f A_h, f \rangle = \tau h \sum_{n,k} |\tilde{f}(nh, k\tau)|^2.$$

Veiem així que si es vol una representació estable de f mitjançant els coeficients $\tilde{f}(nh, k\tau)$ cal triar h de manera que

$$A = \inf_t A_h(t) > 0, \quad B = \sup_t A_h(t) < +\infty.$$

Observeu que això implica en particular que $h \leq (b - a)$, això és $h\tau \leq 1$, i que $\lim_h A_h(t) = \int |G|^2 dt$ per la qual cosa si per exemple G és una funció contínua no nula en (a, b) la condició es complirà per a h prou petit. Aleshores hom tindrà

$$f(t) = \tau h \sum_{n,k} \tilde{f}(nh, k\tau) \frac{G_{nh, k\tau}(t)}{A_h(t)}$$

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{n,k} |\langle f, G_{nh, k\tau} \rangle|^2 \leq B \|f\|^2$$

que mostren que els àtoms G_y corresponents a $y = (nh, k\tau)$ formen un marc de $L^2(\mathbb{R})$ amb marc dual $G_y^*(t) = \frac{G_y(t)}{A_h(t)}$.

Observeu també que en el cas que G sigui la funció característica de $[0, 1]$ serveix $h = 1$ i, trivialment, els àtoms $G_{n,k}(t) = G(t - n)e^{2\pi ikt}$ constitueixen una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Una xarxa del tipus $(nh, k\tau)$ s'anomena *regular*. És intuïtivament clar que com més punts hi hagi en una xarxa discreta, és a dir quant més densa és, més possible és que sigui una successió de mostreig per a X i per tant els G_y un marc d'àtoms de Gabor per a $L^2(\mathbb{R})$. La condició trobada anteriorment, $h\tau \leq 1$, és sempre necessària per a un marc. D'altra banda, com més densa és més probable és que hi hagi redundància; dit d'una altra manera, a fi que una successió sigui de mostratge cal que sigui *prou densa*, i a fi que sigui d'interpolació cal que sigui *prou dispersa*. En el punt just d'equilibri hi hauria les successions que són simultàniament de mostreig i d'interpolació, que corresponen a bases de Riesz. Això s'il·lustra amb el resultat següent de Daubechies: si A, B són les constants del marc, aleshores $A \leq \frac{1}{h\tau} \leq B$. En particular, si $\{G_{nh, k\tau}\}$ és una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, forçosament $h\tau = 1$, com en el cas (n, k) per a G la funció característica de $[0, 1]$.

En aquest punt, però, sorgeix un resultat *negatiu*, el *teorema de Balian-Low*: si $h\tau = 1$ i $\{G_{nh, k\tau}\}$ és un marc per a $L^2(\mathbb{R})$ (en particular si $\{G_{nh, k\tau}\}$ és una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$), aleshores o bé $\sigma(G) = +\infty$ o bé $\sigma(\hat{G}) = +\infty$, i per tant hi ha

una pobra localització en temps o en freqüència. Aquest fet implica que si G és una finestra derivable amb $tG, G' \in L^2(\mathbb{R})$, *aleshores no pot haver-hi bases ortonormals de $L^2(\mathbb{R})$ del tipus $\{G_{nh, k\tau}\}$.*

Aquest és el cas per a finestres gaussianes, per al qual la situació està perfectament entesa després dels treballs de Daubechies, Seip i Lyubatchi; l'anàlisi passa per una identificació de l'espai X de les \tilde{f} . Si $G(t) = e^{-\pi t^2}$, i $z = u - i\omega$, hom té

$$\tilde{f}(u, \omega) = e^{-i\pi u\omega} e^{-\frac{\pi}{2}|z|^2} e^{-\frac{\pi}{2}z^2} \int f(t) e^{-\pi t^2} e^{2\pi tz} dt.$$

Si

$$Bf(z) = e^{-\frac{\pi}{2}z^2} \int f(t) e^{-\pi t^2} e^{2\pi tz} dt,$$

hom té $|\tilde{f}(u, \omega)|^2 = e^{-\pi|z|^2} |Bf(z)|^2$, és a dir, l'aplicació $f \rightarrow Bf$ és una isometria de $L^2(\mathbb{R})$ sobre l'espai de les funcions enteres $F(z)$ que compleixen

$$\int_{\mathbb{C}} |F(z)|^2 e^{-\pi|z|^2} dA(z) < +\infty.$$

Aquest espai s'anomena *espai de Fock*. Totes les qüestions sobre discretització en la representació de Gabor són, doncs, equivalents a qüestions sobre successions de mostratge i d'interpolació en l'espai de Fock, amb el canvi de llenguatge associat a l'aplicació B . Mitjançant aquesta transferència, Seip i Lyubarskii provaren que una xarxa arbitrària Γ de punts $\gamma = (u_\gamma, \omega_\gamma)$ és de mostratge per a l'espai de Fock, (que equival a dir que els àtoms G_γ formen un marc de $L^2(\mathbb{R})$) si i només si la densitat inferior de Γ és estrictament més gran que 1. La densitat inferior és definida per

$$D^-(\Gamma) = \liminf_r \inf_z \frac{\text{card}(\Gamma \cap D(z, r))}{\pi r^2},$$

on $D(z, r)$ designa el disc de centre z i radi r . I és d'interpolació si i només si la densitat superior, definida anàlogament substituint inf per sup, és estrictament inferior a 1. En particular, no hi ha successions que siguin simultàniament de mostratge i d'interpolació, això és, no hi ha cap xarxa discreta Γ de manera que $\{G_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$, sigui una base de Riesz de $L^2(\mathbb{R})$, tal com diu ja el teorema de Balian-Low per a xarxes regulars. En el cas de xarxes regulars, hom té un marc si i només si $h\tau < 1$. El cas límit de densitat igual a 1 porta a una situació interessant; per exemple, per a una xarxa regular $(nh, k\tau)$ amb $h\tau = 1$, els coeficients $\tilde{f}(nh, k\tau)$ són de quadrat sumable i determinen f completament, però no d'una manera estable. En altres paraules, hi ha una desigualtat

$$\sum_{n,k} |\langle f, G_{n,k} \rangle|^2 \leq B \|f\|,$$

però, malgrat que $\langle f, G_{n,k} \rangle = 0$ implica $f = 0$, no hi ha cap desigualtat en el sentit contrari $\sum_{n,k} |\langle f, G_{n,k} \rangle|^2 \geq A \|f\|$ amb $A > 0$. Per a valors de $h\tau$ més petits que $\frac{1}{4}$, les constants A, B del marc són pràcticament iguals i es pot tractar-lo, doncs, com si fos rigid, cosa que facilita la reconstrucció.

La conclusió més important de la situació que acabem de descriure és que per a la WFT, i amb finestres que donin una bona localització tant en temps com en freqüència, *és impossible discretitzar d'una manera estable i no redundant*. Per exemple, amb la transformació de Gabor, és possible discretitzar-la de manera estable, hi ha marcs d'àtoms de Gabor, però *sempre hi haurà redundància*.

4 Anàlisi amb ondetes

4.1 La transformada contínua en ondetes

Ja hem dit a la introducció que la teoria d'ondetes té precedents en teoria del senyal i en anàlisi harmònica, però ara hi ha un consens general en posar l'origen de la teoria en els treball de Morlet i Grossman. Ja hem vist a la secció anterior que la WFT introdueix un paràmetre d'escala, la mida de la finestra. La idea fonamental de l'anàlisi amb ondetes és el de *processar funcions a totes les escales*. En la WFT els «àtoms» que feien l'anàlisi eren $G_{u,\omega}(t) = e^{2\pi i \omega t} G(t - u)$, amb $(G_{u,\omega})^\wedge(\xi) = e^{2\pi i(\omega - \xi)u} \hat{G}(\omega - \xi)$, i les corresponents correlacions $\tilde{f}(u, \omega)$ localitzen informació en temps al voltant de u , i en freqüència al voltant de ω , amb els paràmetres $\sigma, \hat{\sigma}$. Morlet substitueix la finestra G per una funció real Ψ compleix

$$\int |\Psi(t)|^2 dt = 1,$$

que s'anomena *ondeta bàsica* (també s'utilitzen els termes *ondeta mare* i *ondeta analitzant*). També suposarem que

$$\int \Psi(t) dt = 0,$$

per raons que després explicaré. Cal pensar que Ψ està ben localitzada en t o que decreix bastant ràpidament en l'infinit. Com que també ha d'oscil·lar a l'entorn de l'eix x (per tenir integral zero), la seva gràfica serà quelcom semblant a una onda que s'amortigua en infinit, d'on el perquè del terme *ondeta*. Seguidament, substituïm les notes $G_{u,\omega}$ per les ondetes

$$\Psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{t-u}{s}\right).$$

Aquí $s > 0$ és un paràmetre d'escala i $u \in \mathbb{R}$ és un paràmetre de *posició*. El factor està per obtenir la normalització

$$\int |\Psi_{u,s}(t)|^2 dt = \int |\Psi(t)|^2 dt = 1.$$

Si s és petit el gràfic s'estreny i s'allarga, mentre que si s és gran s'eixampla i s'aplana (vegeu la figura 1). Si Ψ està centrada en 0 amb dispersió $\sigma = \sigma(\Psi)$, $\Psi_{u,s}$ està centrada en u amb dispersió $s\sigma$. Així s'obté una família d'ondetes $\{\Psi_{u,s}\}$, que substitueixen els àtoms $G_{u,\omega}$ de la WFT.

La *transformada contínua en ondetes* (*continuous wavelet transform*, CWT) d'un senyal f es defineix ara correlacionant el senyal amb les ondetes,

$$Wf(u, s) = \langle f, \Psi_{u,s} \rangle = \int f(t) \overline{\Psi_{u,s}(t)} dt.$$

La part principal d'aquesta correlació és

$$\int_{u-s\sigma}^{u+s\sigma} f(t) \overline{\Psi_{u,s}(t)} dt,$$

és a dir, $Wf(u, s)$ depèn essencialment de com és f en $(u - s\sigma, u + s\sigma)$. D'una manera semblant a \hat{f} , també Wf es pot expressar en freqüència: utilitzant (6) i que $\hat{\Psi}_{u,s}(\omega) = e^{-2\pi i \omega u} \sqrt{s} \hat{\Psi}(s\omega)$,

$$Wf(u, s) = \langle \hat{f}, \hat{\Psi}_{u,s} \rangle = \int \hat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega u} \sqrt{s} \overline{\hat{\Psi}(s\omega)} d\omega. \quad (9)$$

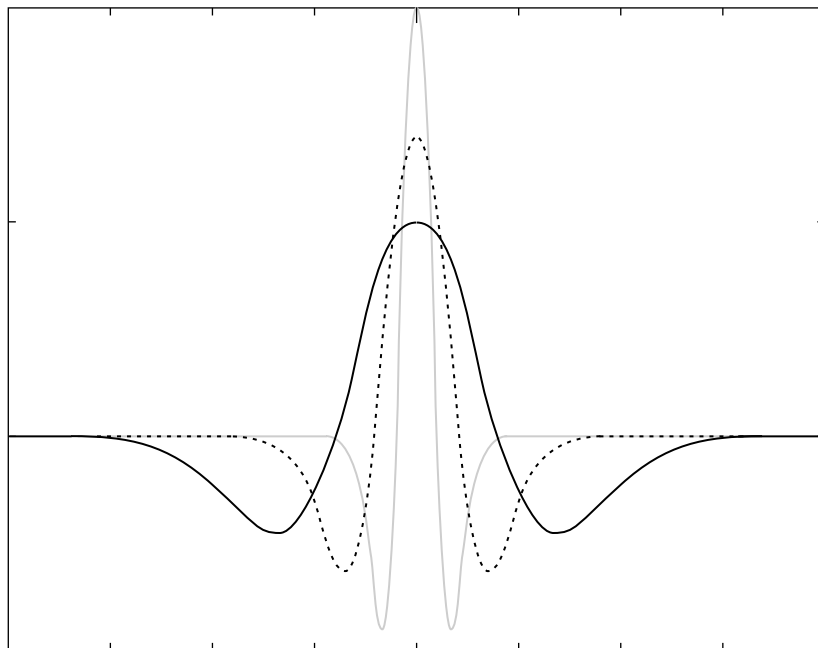


FIGURA 1

Posem que $\hat{\Psi}$ està centrada en η amb dispersió $\hat{\sigma} = \sigma(\hat{\Psi})$. Llavors l'anterior integral ho és essencialment sobre l'interval centrat en $\frac{u}{s}$ d'amplada $\frac{\hat{\sigma}}{s}$. Si $\eta \neq 0$, o sempre que $\hat{\Psi}$ estigui ben localitzada lluny del zero, Wf porta també informació local en freqüència. Aquest és el cas per a les ondetes *analítiques*, que són aquelles tals que $\hat{\Psi}(\omega) = 0$ per a $\omega < 0$. Cada ondetes $\Psi_{u,s}$ ocupa simbòlicament un rectangle del pla temps-freqüència, el centrat en $(u, \frac{u}{s})$ de mida horitzontal $s\sigma$ i vertical $\frac{\hat{\sigma}}{s}$.

Els coeficients $Wf(u, s)$ porten informació local de f a escala $s\sigma$ al voltant de u i de \hat{f} a escala $\frac{\hat{\sigma}}{s}$ al voltant de $\frac{u}{s}$. Observeu que, tal com mana el principi d'incertesa, el producte de les dispersions

$$(s\sigma) \times \left(\frac{\hat{\sigma}}{s}\right) = \sigma \times \hat{\sigma} \geq \frac{1}{2\pi}.$$

L'aspecte nou, la nova idea, és la següent: les ondetes s'adapten automàticament a tots els components del senyal. Utilitzen una finestra estreta per mirar els components transitoris, que corresponen a freqüències altes, i una finestra més ampla per mirar els components de més llarga durada, de baixa freqüència. És aquesta manera de fer la que s'anomena *multiresolució*, i també per això sovint es diu que les ondetes constitueixen una mena de *microscopi matemàtic* o *zoom* a totes les escales.

Des del punt de vista de la localització en freqüència, l'òptim fóra que $\hat{\Psi}$ tingués suport compacte disjunt de zero. És clar que aleshores Ψ és una funció gens ben localitzada (és entera) i, en lloc de demanar aquesta propietat, s'acostuma a demanar en canvi que $\hat{\Psi}$ tingui algunes derivades nul·les en zero,

$$\hat{\Psi}^{(j)}(0) = (-2\pi i)^j \int \Psi(t) t^j dt = 0, \quad j = 0, 1, \dots, M,$$

i també que es faci petita ràpidament en infinit. D'aquesta propietat, se'n diu *tenir els M primers moments nuls*. Aquesta condició també està relacionada amb una propietat molt important de l'anàlisi amb ondetes, la *detecció de la regularitat local en un punt*. Quan es diu que una funció f és *regular* en un punt a fins a l'ordre M , la idea és que la diferència entre $f(t)$ i un polinomi en $t - a$ (el polinomi de Taylor) és un residu R petit per a $t - a$ petit, en un sentit o un altre

$$f(t) = P(t - a) + R(t).$$

Per exemple, si $R(t) = O(|t - a|^\alpha)$, amb M la part entera de α , hom diu que f és *lipschitz d'ordre α* en a . La transició, els canvis, de $f(t)$ quan t passa per a són llavors suaus. Si l'ondata analitzant Ψ té M moments nuls, no *veurà* P i podem aleshores substituir f per R en Wf . En conseqüència, si Ψ està ben localitzada en el temps, per exemple si té suport compacte, els coeficients $Wf(u, s)$, per a u prop de a tindran un decreixement en $O(s^\alpha)$ per a escales s petites. El recíproc també és vàlid (essencialment) de manera que una funció és lipschitziana d'ordre α en un punt a si i només si $|Wf(u, s)| = O(s^{\alpha+\frac{1}{2}})$ per a $|u - a| \leq s$ i escales s petites. La idea és, doncs, que el comportament asimptòtic dels coeficients $Wf(u, s)$ per a escales petites detecta la regularitat local. Per a escales petites, els coeficients són més petits en les zones regulars, de canvis suaus, i en canvi són més grans en les zones on hi ha singularitats o canvis sobtats de f (vegeu la figura 2).

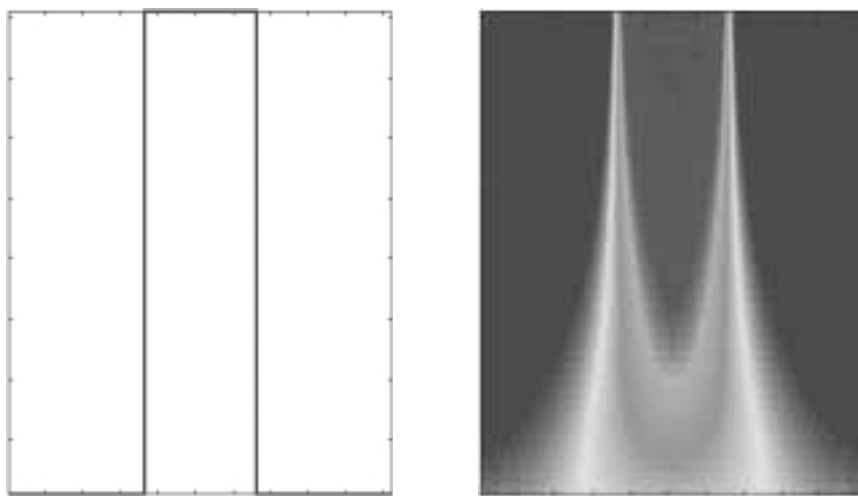


FIGURA 2

4.2 La representació contínua en ondetes

Fins aquí s'ha associat a f uns coeficients, que mesuren la correlació entre f i totes les dilatades-traslladades de l'ondeta analitzant Ψ , i hem vist el significat d'aquests coeficients. A diferència de la WFT, no és pas gens clar aquí que *tota la informació* sobre el senyal f estigui en aquests coeficients, és a dir, que almenys teòricament, f es recuperi de Wf . Ara veurem que aquest és sempre el cas, si Ψ compleix una condició prou general. Per (9), fix s , Wf com a funció de u és la cotransformada de $\sqrt{s}\hat{f}\hat{\Psi}(s\omega)$ i, per tant,

$$\sqrt{s}\hat{f}(\omega)\overline{\hat{\Psi}(s\omega)} = \int Wf(u,s)e^{-2\pi i\omega u} du.$$

Multiplicant per $\hat{\Psi}(s\omega)s^{-\frac{3}{2}}$, integrant en s i cotransformant altre cop s'arriba a la fórmula de representació

$$f(t) = c \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} Wf(u,s)\Psi_{u,s}(t) \frac{du ds}{s^2}, \quad (10)$$

on c és l'invers de

$$\int \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega.$$

Cal doncs suposar que la integral anterior és finita. Observeu que això implica que $\hat{\Psi}(0) = \int \Psi(t) dt = 0$, cosa que explica la condició que es considera per a les ondetes analitzants. La fórmula (10) és essencialment equivalent a la que en anàlisi harmònica es coneix com *identitat de Calderón*.

La fórmula (10) està acompanyada de la corresponent versió del teorema de Parseval o conservació de l'energia,

$$\|f\|^2 = c \iint |Wf(u,s)|^2 \frac{du ds}{s^2} \quad (11)$$

que diu que la CWT és estable i robusta. La funció $Pf(u,\omega) = |Wf(u,\frac{\omega}{s})|^2$, on hem fet el canvi $s = \frac{\omega}{s}$ compleix, per tant,

$$\|f\|^2 = c \iint Pf(u,\omega) du d\omega.$$

És una densitat d'energia en el pla temps-freqüència; la seva representació amb nivell de gris s'anomena *escalograma*.

Com a funció de u amb s fix, $Wf(u,s)$ s'acostuma a interpretar com el *detall* que hi ha a escala s . Aquest és el punt de vista del cas discret i de l'*anàlisi multiresolució* del qual parlarem més endavant; ara explicarem breument això en el cas continu tot relacionant la transformada en ondetes amb les *aproximacions de la identitat*. Suposem que tenim una densitat centrada en zero i de variança 1, és a dir, Φ és una funció no negativa d'integral 1 i tal que

$$\int x\Phi(x) dx = 0, \quad \int x^2\Phi(x) dx = 1.$$

Suposem també que Φ és infinitament derivable i que totes les derivades són nul·les en infinit. Les funcions

$$\Phi_s(t) = \frac{1}{s}\Phi\left(\frac{t}{s}\right),$$

s'anomenen *aproximació de la identitat* perquè les convolucions

$$(f * \Phi_s)(t) = \int f(x)\Phi_s(t-x) dx,$$

tendeixen a $f(t)$ quan s tendeix a zero (observeu que Φ_s té variança s). Aquesta convolució és una mitjana de f al voltant de t a escala s , és f al nivell de resolució s (mirada amb l'òptica Φ) perquè f s'ha dispersat amb dispersió s . El detall o pèrdua d'informació al passar de l'escala s a l'escala $b = s + \Delta s$ és la diferència $(f * \Phi_b) - (f * \Phi_s)$. Amb un increment fix Δs , aquesta diferència és més important com més petit és s , de forma que és més natural mirar aquesta diferència multiplicada per s (en altres paraules, com que l'escala és quelcom multiplicatiu, treballem amb la mesura ds/s , que és invariant per multiplicacions). Així doncs, la *pèrdua instantània* o detall instantani a resolució s és

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{(f * \Phi_s)(t) - (f * \Phi_{s+\Delta s})(t)}{\frac{\Delta s}{s}} = -s \frac{\partial}{\partial s} (f * \Phi_s)(t).$$

Això és el mateix que convolucionar f amb $-s \frac{\partial}{\partial s} \Phi_s$. Ara bé,

$$-s \frac{\partial}{\partial s} \Phi_s(t) = \frac{1}{s} \left(\Phi\left(\frac{t}{s}\right) + \left(\frac{t}{s}\right) \Phi'\left(\frac{t}{s}\right) \right) = \Psi_s(t),$$

amb $\Psi(t) = \Phi(t) + t\Phi'(t)$. Observeu que $\int \Psi(t) dt = 0$, per tant Ψ és una ondetada analitzant i hem vist que per a aquesta ondetada $Wf(u, s)$, és llevat d'un factor el detall a escala s . Podem veure que tota ondetada és, de fet, d'aquesta manera.

4.3 Exemples d'ondetes

Abans de veure els principals exemples d'ondetes recapitem les condicions que voldríem per a una ondetada analitzant Ψ :

- En primer lloc volem que Ψ estigui ben localitzada en el temps o que tingui un bon decreixement en infinit del tipus

$$|\Psi(t)| = O((1 + |t|)^{-n}).$$

La localització temporal és òptima si Ψ té suport compacte.

- També volem que tingui una acceptable localització en freqüència del mateix estil:

$$|\hat{\Psi}(\omega)| = O((1 + |\omega|)^{-m}),$$

i és òptima la situació en aquest sentit si $\hat{\Psi}$ té suport compacte.

- També volem que Ψ tingui (quants més millor) moments nuls.

En relació amb el decreixement en infinit de Ψ , $\hat{\Psi}$, cal recordar que aquesta és una propietat relacionada amb la *regularitat global* de $\hat{\Psi}$, Ψ , respectivament. D'altra banda, com ja sabem, el principi d'incertesa fa impossible optimitzar les dues localitzacions.

Un primer exemple és l'ondetada de *Haar*, que val 1 en l'interval $[\frac{1}{2}, 1]$, -1 en l'interval $[0, \frac{1}{2})$ i zero arreu. La transformada de Fourier decreix com $\frac{1}{|\omega|}$, una pobra localització en freqüència, que reflecteix la falta de regularitat en els punts 0, 1.

Un altre exemple que cal citar és el que correspon a l'aproximació de la identitat donada pel nucli de Poisson del semiplà

$$\Phi(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}, \quad \Phi_s(t) = \frac{1}{\pi} \frac{s}{s^2+t^2}.$$

L'ondeta $\Psi = \Phi + t\Phi'$ corresponent és l'ondeta de Littlewood-Paley.

Un altre exemple important s'obté prenent com a Φ la gaussiana normalitzada. S'obté l'ondeta

$$\Psi(t) = c(1-t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Aquesta ondeta s'anomena *funció barret-mexicà* perquè el gràfic en té la forma; aquesta ondeta representa el millor compromís possible entre les dues localitzacions (és fàcil veure que $\hat{\Psi}(\omega) = c\omega^2 e^{-\frac{\omega^2}{2}}$), i a més té dos moments nuls.

4.4 La transformada discreta en ondetes

Tal com en la WFT, en la CWT hi ha una gran redundància d'informació, com ho indica el fet que passem d'una funció d'una variable real a una de dues. La fórmula d'inversió, la representació contínua en ondetes, és doncs també un xic *miraculosa* i es deu a que Wf no és una funció qualsevol en el semiplà $s > 0$ de les variables (u, s) , té incorporades moltes correlacions. Tractar d'eliminar aquesta redundància porta a la *transformada discreta en ondetes*, que és la segona idea fonamental de la teoria.

El que es tracta és d'eliminar la redundància de Wf restringint els paràmetres (u, s) a valors discrets. La discretització del paràmetre d'escala s , està clar com cal fer-la: prendrem totes les potències enteres (positives i negatives) d'un nombre fix, s_0 : $s = s_0^k$. Per a $k = 0$ també sembla natural discretitzar el paràmetre de posició u a múltiples enters d'un fix u_0 , $u = nu_0$ i també sembla clar que aquest u_0 haurà de dependre de la *dispersió* σ ; com més petita és σ més petit ha de ser el pas u_0 . Per a un k general, la corresponent ondeta té dispersió $2^k\sigma$ i per tant multipliquem el pas per la mateixa quantitat, $u = nu_0s_0^k$. Les ondetes corresponents a aquests paràmetres són

$$\Psi_{n,k}(t) = s_0^{\frac{k}{2}} \Psi(s_0^k t - nu_0).$$

La qüestió que es planteja és la mateixa que per a la WFT: es poden triar els paràmetres u_0, s_0 de manera que els coeficients $Wf(nu_0s_0^k, s_0^k)$ discretitzin f d'una manera estable, i si és possible, no redundants? És possible això per a totes les ondetes analitzants? Dit altrament, de manera, de forma que $\{\Psi_{n,k}\}$ sigui un marc de $L^2(\mathbb{R})$, una base de Riesz o fins i tot una base ortonormal?

Suposem que $s_0 = 2, u_0 = 1$. Una funció $\Psi \in L^2(\mathbb{R})$ per a la qual les funcions $\Psi_{n,k}(t) = 2^{\frac{k}{2}} \Psi(2^k t - n), n, k \in \mathbb{Z}$ formen una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ s'anomena *ondeta ortonormal*. L'ondeta de Haar és ortonormal i la base corresponent s'anomena *base de Haar*, que es coneix des del 1910. Abans hem vist que el teorema de Balian-Low estableix que per a la major part de finestres, regulars i ben localitzades, incloent-hi les gaussianes, no hi ha bases ortonormals d'àtoms WFT.

També Daubechies provà que si $\{\Psi_{n,k}\}$ és un marc de constants A, B , aleshores

$$A \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{\Psi}(2^k \omega)|^2 \leq B.$$

En particular, la suma anterior és 1 per a una ondeta ortonormal. La tria més evident per aconseguir això és prendre Ψ com la funció característica de $[-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$, que correspon a

$$\Psi(t) = \frac{\sin 2\pi t - \sin \pi t}{\pi t}.$$

No és difícil veure que efectivament aquesta Ψ és una ondeta ortonormal; s'anomena *ondeta de Shannon*.

Al començament de la teoria d'ondetes, als anys vuitanta, l'ondeta de Haar era l'únic exemple que es coneixia d'ondetes ortonormal ben localitzada en el temps. Després del teorema de Balian-Low, més aviat l'expectativa era que no podia haver-hi ondetes ortonormals amb $\sigma, \hat{\sigma}$ finites. Va ser Yves Meyer qui, precisament intentant provar això, va construir en canvi el primer exemple d'una ondeta ortonormal Ψ en la classe de Schwartz (això és, infinitament derivable amb derivades ràpidament decreixents, per tant bastant ben localitzada) amb $\hat{\Psi}$ de suport compacte (J. Strömberg n'havia construït d'altres menys regulars abans). L'*existència* de bases ortonormals d'ondetes ben localitzades en el temps i regulars és la primera diferència important amb la WFT, on el teorema de Balian-Low diu que no és possible. No totes les ondetes són ortonormals, per exemple el barret mexicà no ho és pas. Tchamitchian va construir bases de Riesz d'ondetes. Totes aquestes construccions són força delicades i *artesanals*. La noció d'anàlisi multiresolució, com veurem, dóna un *mètode* per construir-ne.

4.5 La segona síntesi: l'anàlisi multiresolució

En aquest estat del tema, l'any 1986, un investigador francès de vint-i-tres anys, Stephane Mallat, va fer una observació fonamental. Va aportar una d'aquelles idees unificadores, senzilles i fructíferes que marquen una fita. Ell s'adonà que les ondetes dels matemàtics, els algorismes piramidals dels especialistes del tractament d'imatges, la codificació en subbandes del tractament del senyal i els filtres de quadratura en el processament del so, *era tot la mateixa cosa*. Amb l'ajut i el *savoir faire* matemàtic d'Yves Meyer, creà la teoria de l'*anàlisi multiresolució* ([7], [8]). La noció d'anàlisi multiresolució (MRA) formalitza, en versió discretitzada, la idea ja apuntada abans que un senyal s'expressa com a superposició de tots els detalls a totes les escales.

Per motivar-ne la definició, considerem una ondeta ortonormal, pensem en la de Haar, per exemple. Recordem que $\Psi_{n,k}(t) = 2^{\frac{k}{2}}\Psi(2^k t - n)$. Els coeficients $f_{n,k} = \langle f, \Psi_{n,k} \rangle$ porten les variacions del senyal a escala 2^{-k} , resolució 2^k (convenim d'anomenar *resolució* l'invers de l'escala; les altes resolucions corresponen a escales petites). Per a k fixat, la suma

$$\sum_n \langle f, \Psi_{n,k} \rangle \Psi_{n,k}$$

s'interpreta com el *detall* a la resolució 2^k , i la suma de tots els detalls a les resolucions anteriors,

$$\sum_{j=-\infty}^k \sum_n \langle f, \Psi_{n,j} \rangle \Psi_{n,j} = P_k f$$

és l'aproximació de f a la resolució 2^k . L'espai de les aproximacions a la resolució 2^k constitueixen l'espai V_k , generat per les ondetes $\Psi_{n,j}$ amb $j \leq k, n \in \mathbb{Z}$, i $P_k f$ és

la projecció de f sobre V_k . Aquests subespais V_k creixen amb k i $P_k f \rightarrow f$, és a dir, el límit dels V_k és tot $L^2(\mathbb{R})$.

Un *anàlisi multiresolució* de $L^2(\mathbb{R})$ és una successió $\{V_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de subespais tancats de $L^2(\mathbb{R})$ que compleixen les propietats:

1. $V_k \subset V_{k+1}$.
2. $f(\cdot) \in V_k$ si i només si $f(2\cdot) \in V_{k+1}$.
3. La intersecció de tots els V_k es redueix a la funció zero.
4. La reunió dels V_k és densa en $L^2(\mathbb{R})$.
5. Hi ha una funció $\phi \in V_0$ tal que les traslladades enteres de ϕ , $\phi_{0,n}(t) = \phi(t-n)$ formen una base de Riesz de V_0 .

La darrera condició és la més important, i és la que permetrà *discretitzar*; recordem que significa que tota $f \in V_0$ té una única expressió del tipus $f(t) = \sum_n a_n \phi(t-n)$ amb $\sum_n |a_n|^2$ comparable a $\|f\|^2$. La funció ϕ s'anomena *funció d'escala* de la MRA i observem que pot ser modificada de manera que les $\phi_{0,n}$ siguin una base ortonormal de V_0 ; observem que ϕ determina tota la MRA. Cada V_k és una versió escalada de V_0 , i les condicions impliquen que $\phi_{k,n}(t) = 2^{\frac{k}{2}} \phi(2^k t - n)$, $n \in \mathbb{Z}$, amb k fix, formen una base de V_k .

Com abans, el subespai V_k ha d'interpretar-se com el conjunt de totes les possibles aproximacions a la resolució 2^k ; si $f \in L^2(\mathbb{R})$, la seva aproximació a la resolució 2^k és la projecció $P_k f$ de f en V_k . Tot allò que es veu a una resolució es veu a la següent amb resolució doble. Els *detalls* corresponents a la resolució 2^{k+1} constitueixen W_k , el complement ortogonal de V_k dins V_{k+1} . Per passar d'una resolució a la següent afegim aquest *detall*: $P_{k+1} f = P_k f + Q_k f$, en què $Q_k f$ és la projecció sobre W_k . El significat de les condicions tercera i quarta és que P_k tendeix a f quan k tendeix a $+\infty$ (això és, es pot aproximar f de la manera tan precisa com es vulgui) i a zero quan k tendeix a $-\infty$. O també, la suma dels espais W_k és tot L^2 , tota funció és la suma de tots els detalls.

En certa manera, aquesta estructura és el mateix que fem quan escrivim un nombre en el sistema decimal, però per a funcions. La base, 10, seria la funció d'escala. La més senzilla de les MRA, la de Haar, correspon a prendre com a V_k el subespai de les funcions de $L^2(\mathbb{R})$ que són constants en els intervals diàdics $[2^{-k}n, 2^{-k}(n+1)]$ de longitud 2^{-k} , i una funció d'escala pot ser la funció característica de l'interval $[0, 1]$. La projecció $P_k f$ d'una funció f és la funció que en cada interval I diàdic de longitud 2^{-k} val el valor mitjà de f en aquest interval, $\frac{1}{|I|} \int_I f$. Un altre exemple és la MRA dels splins lineals, el qual correspon a triar com a V_k el subespai de les funcions contínues que són lineals en cada interval diàdic $[2^{-k}n, 2^{-k}(n+1)]$. Una funció d'escala per a aquest darrer és la funció $\psi(t)$ que val $1 - |t|$ en $[-1, 1]$ i zero arreu. D'una manera anàloga es poden considerar splins d'ordre superior. Si V_k és el subespai de les funcions de banda limitada a $[-2^{k-1}, 2^{k-1}]$ s'obté la MRA de Shannon. El teorema de mostreig de Nyquist-Shannon (secció 2.4) diu que la funció sinus cardinal és una funció d'escala per a aquesta MRA.

El primer dels resultats de Mallat és que associada a cada MRA hi ha *sempre* una ondeta ortonormal. Més precisament, prova l'existència de $\Psi \in W_0$ tal que les $\Psi_{0,n}$ formen una base de W_0 ; per tant les $\{\Psi_{k,n}\}_n$ formen una base de W_k i totes juntes, $\{\Psi_{k,n}\}_{k,n}$, una base ortonormal de tot l'espai. A més a més, dóna un *mètode* per a

construir Ψ . La funció Ψ té una expressió explícita en termes de la funció d'escala ϕ

$$\Psi(t) = \sqrt{2} \sum_k \beta_k \phi(2t - k), \quad (12)$$

on $\beta_k = (-1)^{k-1} \alpha_{1-k}$ i els coeficients α_k són els de la fórmula

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_k \alpha_k \phi(2t - k). \quad (13)$$

La vàlua d'aquest resultat està en que és relativament fàcil exhibir una estructura de MRA, per exemple els splins d'ordre arbitrari. En el cas de la MRA de Haar, l'ondeta ortonormal associada és la considerada abans, i anàlogament passa amb la MRA de Shannon.

En termes freqüencials, si $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ designen respectivament les funcions 1-periòdiques $\sum \alpha_k e^{2\pi i k \omega}, \sum \beta_k e^{2\pi i k \omega}$, hom té

$$(\phi_{-1,0})^\wedge(\omega) = \sqrt{2} \hat{\alpha}(\omega) \hat{\phi}(\omega), (\Psi_{-1,0})^\wedge(\omega) = \sqrt{2} \hat{\beta}(\omega) \hat{\phi}(\omega).$$

Aquestes funcions compleixen les equacions

$$|\hat{\alpha}(\omega)|^2 + |\hat{\beta}(\omega)|^2 = 2, \quad \hat{\beta}(\omega) \overline{\hat{\alpha}(\omega)} + \hat{\beta}(\omega + \frac{1}{2}) \overline{\hat{\alpha}(\omega + \frac{1}{2})} = 0.$$

Aquests s'anomenen *filtres passa baixa i passa alta* associats a la MRA (l'equació anterior implica que $\hat{\alpha}(0) = 1, \hat{\alpha}(\pm \frac{1}{2}) = 0$). El paper d'aquests filtres es comprèn millor en relació amb l'algorisme FWT. Sota aquesta formulació les MRA són essencialment equivalents als filtres en quadratura introduïts per Esteban i Galand en 1977. Hi ha procediments per definir la MRA en termes de la funció d'escala o del filtre passa baixa directament.

La majoria d'ondetes ortonormals conegudes provenen d'una MRA, de fet en un cert sentit això és genèricament cert. Utilitzant l'esquema de les MRA, Daubechies aconseguí construir, per a cada N , una ondeta ortonormal amb suport compacte, regular i amb N moments nuls. La regularitat (el nombre de derivades que té) depèn de N i tendeix a $+\infty$ quan N es fa gran. A més a més el filtre corresponent té un nombre finit de coeficients no nuls (filtre FIR), la qual cosa és important en relació amb l'algorisme FWT. Podem veure fàcilment, però, que no pot haver-hi ondetes ortonormals amb suport compacte i de classe C^∞ .

4.6 L'algorisme FWT

L'estructura de les MRA no solament és interessant des del punt de vista teòric i conceptual, sinó que també és una valuosíssima eina de tipus pràctic. En efecte, Mallat també s'ha preocupat dels aspectes pràctics, i ha desenvolupat algorismes ràpids que transformen els conceptes teòrics en quelcom útil en el processament del senyal. Un d'aquests algorismes és la *transformada ràpida en ondetes* (*fast wavelet transform* o FWT), que correspon a la transformada ràpida de Fourier en aquesta teoria, i que s'emparenta amb els algorismes piramidals de Burt-Adelson.

El que es pretén és calcular els coeficients $\langle f, \Psi_{k,n} \rangle$. Es suposa que es coneix una aproximació de f a una certa resolució, és a dir, una $P_J f$ determinada pels coeficients $\langle f, \phi_{J,k} \rangle$, que poden pensar-se com mostres del senyal f , obtingudes

amb pas $2^{-J}\sigma(\phi)$. En cada nivell de resolució el senyal $P_k f$ es descompon en una aproximació a la resolució anterior $P_{k-1}f$ i un detall $Q_{k-1}f$. Si $a_k(n) = \langle f, \phi_{k,n} \rangle$, $d_k(n) = \langle f, \Psi_{k,n} \rangle$ les relacions (12) i (13) impliquen que

$$a_{k-1}(p) = \sum_n a_k(n) \alpha_{n-2p}, \quad d_{k-1}(p) = \sum_n a_k(n) \beta_{n-2p}.$$

Es tracta de convolucions discretes; signifiquen que l'aproximació i el detall (llurs coeficients) s'obtenen aplicant respectivament els filtres $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$ i prenent un de cada dos coeficients. El procés es reitera N cops a partir de l'aproximació $P_J f$, arribant a una descomposició

$$P_J f = P_{J-N} f + Q_{J-1} f + \cdots + Q_{J-N} f,$$

en una versió N cops més dolenta i N detalls corresponents a les escales intermèdies. La reconstrucció exacta s'obté reiterant N cops la reconstrucció en cada etapa

$$a_k(p) = \sum_n (\alpha_{p-2n} a_{k-1}(n) + \beta_{p-2n} d_{k-1}(n)).$$

En la pràctica, la mostra de sortida $\{a_J(n)\}$ és finita de mida M . L'algorisme transforma les M dades en $\frac{M}{2} + \frac{M}{4} + \cdots + \frac{M}{2^N} + \frac{M}{2^N} = M$ dades. Un aspecte important és la complexitat d'aquest algorisme, que depèn del nombre de α_k no nuls. Si el filtre $\{\alpha_k\}$ és finit (FIR) amb K elements no nuls la complexitat resulta ser $O(KM)$. L'algorisme FFT, en canvi, té una complexitat de l'ordre de $M \log M$.

4.7 Altres bases. Senyals bidimensionals

Els filtres α, β serveixen, doncs, per descompondre cada espai d'aproximació V_k en V_{k-1} i W_{k-1} . Partint de $\phi_{k,0}$, que amb les seves traslladades amb pas $2^{-k}n$ generen V_k , les fórmules

$$(\phi_{k-1,0})^\wedge(\omega) = \hat{\alpha}(2^{-k}\omega) \hat{\phi}_{k,0}^\wedge(\omega), \quad (\Psi_{k-1,0})^\wedge(\omega) = \hat{\beta}(2^{-k}\omega) \hat{\phi}_{k,0}^\wedge(\omega)$$

produeixen les funcions que, amb les traslladades amb pas $2^{-k+1}n$ generen respectivament V_{k-1}, W_{k-1} .

Ara bé, també poden utilitzar-se per descompondre un espai de detall W_k . A cada nivell de resolució, hom pot triar entre si descompondre l'aproximació, el detall o tots dos. En tot cas, s'arriba sempre a una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$; les bases obtingudes d'aquesta manera s'anomenen *paquets d'ondetes*. Descompondre en cada etapa l'aproximació i deixar el detall, que porta a la base d'ondetes, correspon a la partició diàdica $[2^{-k}, 2^{-k+1}]$, $k \in \mathbb{Z}$ de l'eix de freqüències; en essència, hi ha un paquet d'ondetes per a cada partició de l'eix de freqüències en intervals diàdics qualssevol.

Hi ha un altre tipus de bases, les anomenades *bases locals de sinus o cosinus* o *ondetes de Malvar*. No es tracta d'ondetes del tipus $\Psi_{k,n}$, sinó del tipus $G_n(t) \cos(b_{k,n}t + a_{k,n})$, és a dir, del tipus de Gabor però canviant les exponencials per sinus o cosinus. En aquest cas, el grau de llibertat està a triar la partició de l'eix temporal a la qual s'adaptin les finestres G_n .

A partir d'una MRA de $L^2(\mathbb{R})$ i la corresponent base d'ondetes, pot obtenir-se una base de $L^2(\mathbb{R}^2)$. En efecte, les funcions

$$\phi_{k,n,m}(x, y) = \phi_{k,n}(x) \phi_{k,m}(y) = 2^k \phi(2^k x - n) \phi(2^k y - m),$$

formen una base ortonormal d'un subespai V_k^2 de $L^2(\mathbb{R}^2)$ que compleixen les propietats d'una MRA. Simbòlicament, $V_k^2 = V_k \otimes V_k$; el que cal afegir a V_k^2 per tenir V_{k+1}^2 , el detall bidimensional W_k^2 , té tres parts: $V_k \otimes W_k$, $W_k \otimes V_k$ i $W_k \otimes W_k$. En conseqüència, si

$$\Psi^1(x, y) = \phi(x)\Psi(y), \Psi^2(x, y) = \Psi(x)\phi(y), \Psi^3(x, y) = \Psi(x)\Psi(y),$$

les funcions $\Psi_{k,n,m}^i(x, y) = 2^k \Psi^i(2^k x - n, 2^k y - m)$, $i = 1, 2, 3$, $n, m \in \mathbb{Z}$ són una base de W_k^2 , i variant també $k \in \mathbb{Z}$ una base de $L^2(\mathbb{R}^2)$. Aquest tipus de bases s'anomenen *separables*. Les tres ondetes Ψ^i corresponen a tres tipus de detalls: horitzontals, verticals i els associats a *cantonades*. La versió bidimensional de l'algorisme de Mallat descompon una aproximació $P_J f$ d'una imatge en una aproximació pitjor $P_{J-N} f$ i $3N$ detalls.

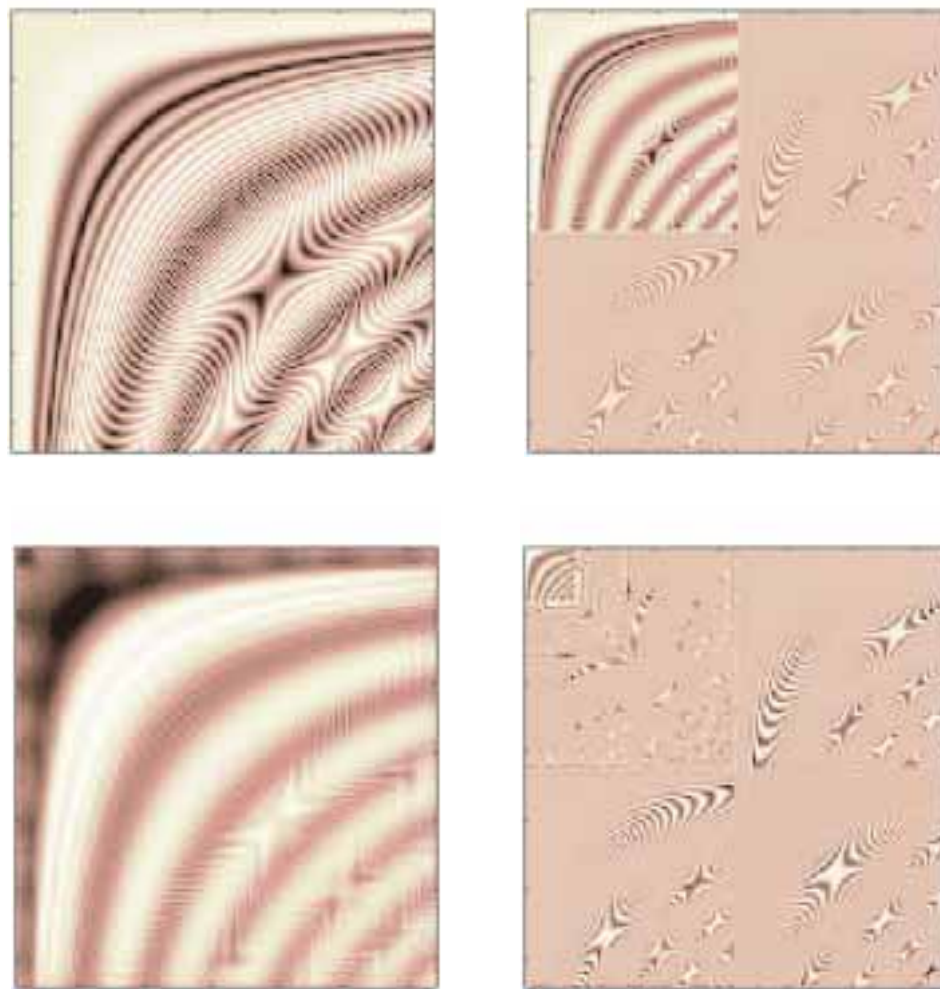


FIGURA 3

4.8 Aplicacions de les ondetes. Consideracions finals

La majoria d'aplicacions de les bases d'ondetes es basen principalment en dos fets:

- La capacitat d'aquestes bases per a *aproximar eficientment*, amb error petit, classes particulars de senyals amb *pocs coeficients significatius*.
- El fet que els coeficients tenen un significat local i estan jerarquitzats per escales.

La capacitat de *revelar estructura a totes les escales* i també les *variacions locals* fa que estiguin adaptades a una varietat molt àmplia d'aplicacions. Per exemple, semblen estar particularment adaptades a l'estudi dels fractals. Una altra aplicació és el que es coneix com eliminació del soroll blanc; es transforma el senyal en ondetes i s'eliminen, a totes les resolucions, els coeficients inferiors a un valor de tall. En compressió, però, un altre aspecte important és el de la *quantització* dels coeficients, independentment de si s'utilitzen ondetes o una altra cosa.

Hi ha, a més, el fet que per a cada aplicació hom pot triar la base d'ondetes (o el paquet d'ondetes) més ben adaptada al senyal que es manipula. Pel que fa a la tria de l'ondeta, hom vol que el màxim de coeficients $\langle f, \Psi_{k,n} \rangle$ siguin molt petits. Com que els coeficients són *grans*, quan el suport de l'ondeta toca les singularitats de f , això depèn de la regularitat local de f , del nombre de moments nuls de Ψ i de la mida del suport de Ψ . En la reconstrucció, els errors són múltiples d'ondetes $\Psi_{k,n}$ i seran menys apreciables com més regular és l'ondeta Ψ . Ara bé, algunes d'aquestes característiques són incompatibles entre si. Per exemple, com més moments nuls té Ψ més gran ha de ser el suport; i si Ψ té suport compacte i té k derivades en L^2 , aleshores té k moments nuls. Segons el senyal s'opta per una característica o una altra. Hi ha algorismes que, donat un senyal, trien la base millor adaptada —en el sentit de minimitzar una certa funció de cost dels coeficients— entre una biblioteca de bases.

En l'àmbit més específic del tractament d'imatges, les ondetes s'utilitzen sobretot en compressió, detecció de contorns i anàlisi de textures. La majoria d'imatges són funcions que en zones molt extenses (lluny dels contorns) tenen molta regularitat local i produeixen per tan pocs coeficients significatius. Han resultat particularment útils quan es tracta d'eliminar soroll sense destruir contorns, situació que es dona, per exemple, en imatges mèdiques. Altres àrees d'aplicació són la modelització del procés de visió i oïda humanes, visió per computador, reconeixement de la paraula, etc. El lector interessat pot trobar informació molt més detallada en [3] i [11] i en l'excel·lent llibre de S. Mallat [9].

En alguns aspectes, la teoria d'ondetes resulta més útil que la transformació de Fourier, però és incorrecta la idea que una teoria substitueix l'altra; senzillament, són útils en coses diferents. Òbviament, la transcendència de l'anàlisi de Fourier en la matemàtica moderna és molt superior. Ja hem vist que la teoria d'ondetes utilitza molt fonamentalment l'anàlisi de Fourier, pot dir-se que n'és el més modern desenvolupament. Les ondetes simplifiquen les proves d'alguns resultats en anàlisi harmònica, però no hi ha pràcticament resultats nous trobats amb ondetes. L'ur principal importància està en les aplicacions.

Referències

- [1] BURT, P., ADELSON, E. «The laplacian pyramid as a compact image code», *IEEE Trans. Comm.*, 31 (1983), 482-540.
- [2] DAUBECHIES, I. «Orthonormal bases of compactly supported wavelets», *Comm. Pure Appl. Math.*, 41 (1988), 909-996.
- [3] DAUBECHIES, I. *Ten lectures on wavelets*. SIAM, 1992.
- [4] ESTEBAN, D., GALAND, C. «Application of quadrature mirror filters to split-band voice coding schemes», *Proc. IEEE*, 1977.
- [5] GABOR, D. «Theory of communication», *J. Inst. Electr. Engrg.*, (1946), 429-457.
- [6] GROSSMAN, A., MORLET, J. «Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape», *SIAM J. Math. Anal.*, 15 (1984), 723-736.
- [7] MALLAT, S. «Multiresolution approximation and wavelets», *Trans. Amer. Math. Soc.*, 315 (1989), 69-88.
- [8] MALLAT, S. «A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation», *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11 (1989).
- [9] MALLAT, S. *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press, Nova York, 1998.
- [10] MEYER, Y. *Ondelettes et operateurs*. Hermann, París, 1990.
- [11] MEYER, Y. *Les ondelettes, algorithmes et applications*. Armand Colin, París, 1992.
- [12] MORLET, J. *Sampling theory and wave propagation*. NATO ASI Series Issues in Acoustic signals/Image processing and recognition, Springer-Verlag, Berlín, 1983.
- [13] SHANNON, D., WEAVER, W. *The mathematical theory of communication*. The Univ. of Illinois Press, Urbana, 1964.

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
08193 BELLATERRA
bruna@mat.uab.es