BUTLLETÍ DE LA SOCIETAT CATALANA DE MATEMÀTIQUES
Vol. 16, núm. 1, 2001. Pàg. 7–42

Maths Quiz 2000: la història d'un repte

JAUME AGUADÉ I RAFEL SERRA

En el precís instant en què les busques electròniques dels rellotges d'Internet assenyalaven les 12.00 de temps mitjà de Greenwich del dia 4 de desembre de l'any 2000, centenars de matemàtics d'arreu del món afrontaven un repte que havia de durar vint-i-quatre hores ininterrompudes. En les seves pantalles apareixia una pregunta com, per exemple, aquesta:

> Trobeu el màxim valor de n tal que tota n-varietat compacta tancada i orientable és la vora d'alguna $(n+1)$-varietat orientable.

Això era l'inici del *Maths Quiz 2000*, una competició internacional de caràcter totalment inèdit que el Centre de Recerca Matemàtica (CRM) havia organitzat per a celebrar d'una manera matemàticament lúdica l'Any Mundial de les Matemàtiques. L'objectiu d'aquest article al BUTLLETÍ és informar de l'estructura interna i del desenvolupament d'aquest repte singular i mirar de transmetre al lector una part de l'emoció que els organitzadors van sentir durant els dotze mesos i vint-i-quatre hores que va durar la preparació i execució del *Math Quiz 2000*.

1 Una idea és només una idea...

... fins que es troba un *esponsor*. Aquesta és potser una manera una mica massa grollera d'explicar els inicis del *Maths Quiz 2000 (mq2000)*, però serveix per resumir en poques paraules com es va produir el pas d'una idea atractiva i lleugerament utòpica (com han de ser totes les bones idees) a un projecte ambiciós, però factible.

L'origen de tot plegat devia ser en una sobretaula, amb l'ajuda inestimable d'una ampolla de *Quinta de Baldias vintage*, en aquells moments en què la imaginació ens fa concebre projectes desassenyats que gairebé mai no superen el *test de l'endemà*. Manuel Castellet i Jaume Aguadé imaginen una mena de concurs de preguntes i respostes de matemàtiques, del màxim nivell, que s'havia de jugar per Internet, en temps real, seguint una estructura amb diversos nivells. Com a referència tenien una *gimcana matemàtica* que una vegada havia estat organitzada a la Universitat Politècnica de Catalunya, amb un bon èxit de participació. Acabada la sobretaula (i l'ampolla) el projecte —que havien batejat, sense pensar-ho massa, com a *Maths Quiz 2000*— va entrar en una fase de vida latent fins que un dia Manuel Castellet (persona, com molt bé sabem, d'infinita perseverança) parla amb Jaume Aguadé per dir-li que Joan Ramon Alegret, de *Sun Microsystems*, es mostra extraordinàriament interessat en la idea del *mq2000* i està disposat a prestar-li suport econòmic.

Sun ofereix cinc estacions de treball *Ultra 5* i el servidor que ha d'hostatjar el programa del *mq2000*. Les estacions de treball seran per als cinc primers classificats i el servidor, després de finalitzar el joc, s'utilitzarà per ajudar la recerca matemàtica en algun país menys afavorit. És un bon motiu per començar a posar fil a l'agulla. Thomas Hinterman, de l'editorial Birkhäuser —que manté una col·laboració molt important amb el CRM—, s'interessa també per la idea i ofereix quinze mil euros en llibres de la seva editorial, com a premis addicionals per als participants del *mq2000*. També es demana —i s'obté— l'ajuda del Departament d'Universitats, Recerca i Societat de la Informació de la Generalitat de Catalunya. Finalment, la Universitat Oberta de Catalunya posa a la nostra disposició la seva experiència en el món d'Internet i s'inicia així una col·laboració que serà fonamental per a l'èxit del joc. Fent un salt en el temps, diguem ara que quan el joc ja s'havia anunciat i començava a entreveure's el gran poder de convocatòria que podia tenir vam obtenir una col·laboració no sol·licitada, però que també vam agrair profundament: Paul R. Wellin, de Wolfram Res., ens escriu i ens diu que, si bé li hauria agradat participar en el grup de *sponsors* des de l'inici, espera que encara sigui a temps de poder oferir cinc llicències de *Mathematica*© per a repartir entre els millors classificats.

Finalment, el mateix CRM, com a entitat organitzadora, donava suport financer al joc i, en particular, oferia un premi de 400.000 PTA al millor classificat dels Països Catalans.

2 De la ficció a la realitat

En un primer moment, l'organització del *mq2000* s'encarrega a Albert Castellet i Jaume Aguadé, que comencen a redactar un primer esborrany de les *regles del joc*. Quan l'Albert Castellet deixa aquesta tasca, per motius laborals, l'organització passa a ser responsabilitat dels dos autors d'aquest article. Jaume Aguadé s'encarregarà de les qüestions més intrínsecament matemàtiques, mentre que Rafel Serra s'haurà d'ocupar de les qüestions informàtiques. De tota manera, la responsabilitat del joc, en la seva totalitat, recau sobre tots dos.

Això és el que cal fer:

- Crear un equip de matemàtics que prepararà una base de dades amb les preguntes del joc —i les seves respostes *correctes*.
- Crear un programa informàtic amb sortida html que controli el desenvolupament del joc a través d'internet, en temps real.
- Implementar el programa en un sistema concret i monitoritzar el seu funcionament.
- Desenvolupar la normativa precisa que ha de regir el joc i a la qual s'han d'adaptar les preguntes i el programa.
- Crear i mantenir la pàgina *web* del joc i dissenyar les seves interaccions amb el programa.
- Anunciar el joc a la comunitat matemàtica mundial i als mitjans de comunicació, gestionar les inscripcions, etc.

Cada un d'aquests sis punts va representar un autèntic repte per a les persones que van haver d'assumir-los. Parlem-ne una mica.

3 Les regles del joc

És clar que el *mq2000* havia de ser un joc de preguntes i respostes, però volíem vestir aquesta aridesa intrínseca amb una roba que el fes atractiu i lúdic. També volíem que el resultat del joc fos sensible a l'estratègia utilitzada pel jugador. Tot això ens va dur a dissenyar un joc amb algunes semblances amb el *bingo*. El jugador veia a la seva pantalla una graella de quatre per quatre caselles, cada una de les quals representava una pregunta desconeguda. En polsar qualsevol casella, el programa trametia al jugador una pregunta (escollida aleatòriament d'una base de dades) i aquest tenia les opcions següents:

1. *Passar*, és a dir, seguir jugant sense contestar la pregunta. Això només es podia fer dues vegades a cada graella.
2. *Donar una resposta* a la pregunta. En aquest cas, si la resposta era correcta, el jugador obtenia un determinat nombre (positiu) de punts, i si era incorrecta, s'assignaven al jugador un cert nombre de punts negatius.
3. *Donar dues respostes* a la pregunta. Si alguna d'aquestes era correcta, s'obtenien menys punts que en el cas anterior i, si cap ho era, es restaven més punts que en el cas anterior.

En cap cas es donava al jugador la resposta correcta a la pregunta. L'objectiu final era haver acumulat el màxim nombre de punts en el moment de cloure el joc.

Quan el jugador obtenia una fila, columna o diagonal completa d'encerts, passava a una graella d'un nivell superior. A cada nivell consecutiu, les preguntes valien més i més punts. De fet, la puntuació de cada nivell seguia la successió de Fibonacci:

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

Aquest increment tan ràpid de la puntuació en funció del nivell era molt important a l'hora d'establir l'estratègia de joc i introduïa un factor de no-linealitat molt interessant. Els dissenyadors del joc volíem evitar, de totes totes, els empats al capdamunt de la llista de participants i volíem forçar els jugadors a plantejar-se, fins a un cert punt, quina estratègia calia seguir. Penseu, per un moment, en la poca importància que té, per exemple, fallar una pregunta del primer nivell (penalització: 0,25 punts) quan cada pregunta del nivell 7 val 21 punts. Però, per arribar al nivell 7 s'han de superar els sis nivells anteriors!

Aquestes eren les línies mestres del joc, però l'esforç principal va residir en el disseny de la *lletra menuda* del reglament. Aquesta lletra menuda era totalment necessària perquè calia preveure totes les situacions possibles, evitar els atzucacs, impedir totes les formes raonables de joc fraudulent i, tanmateix, evitar al màxim el risc d'abandó dels jugadors per desencís o avorriment. En llargues hores de discussions vàrem intentar d'imaginar tots els escenaris possibles i trobar-los una sortida. Aquestes reflexions van anar conduint-nos a un reglament precís i minuciós, relativament complex. No és pas el moment ara de comentar-ne els aspectes més tècnics, però sí que ens agradaria ressaltar algunes de les solucions que vam donar als problemes que el disseny del joc ens plantejava.

Equips. Si el joc es fa per Internet, no hi ha cap manera de saber què hi ha realment darrere d'un *username*. Per tant, no té sentit legislar sobre això i, de bell antuvi, vam considerar els participants com a *equips* de matemàtics que treballaven coordinadament. De fet, la pròpia naturalesa de les preguntes feia molt improbable que una persona sola tingués l'amplitud de coneixements necessària per a jugar amb èxit al *mq2000*. Ara bé, vam exigir que cada inscripció —les inscripcions es realitzaven de manera automatitzada a través de la mateixa pàgina del joc— ho fos a títol individual i correspongués a una persona física (al final, calia saber a qui havíem d'entregar els premis!). Cada persona inscrita triava un *nom d'usuari* i una *contrasenya* que li havia de permetre, el dia del joc, entrar a jugar des de qualsevol terminal amb accés a Internet.

Confidencialitat. Donada la quantitat de brossa que rebem cada dia a través d'Internet, ens preocupava molt que l'anunci d'una estranya competició matemàtica per Internet fos presa seriosament pels que rebessin la nostra publicitat. Ens va semblar que era una mesura elemental prometre l'absoluta confidencialitat —abans del joc, durant el joc i després del joc— de les dades que els jugadors ens aportaven. Potser a posteriori aquesta mesura ens pot semblar excessivament dràstica, però l'hem seguida al peu de la lletra. En particular, vam comprometre'ns a no facilitar a ningú les dades dels jugadors llevat, naturalment, dels que haguessin obtingut algun premi. Durant el joc, cada equip (a partir d'ara els anomenarem equips) podia conèixer la seva posició relativa a la classificació, però res més que això.

Seguretat. En un proper apartat d'aquest mateix treball ja explicarem com ho vam fer per dissenyar un programa segur que pogués funcionar en les condicions del *mq2000*. Diguem ara que cada equip rebia les preguntes d'una manera aleatòria, de manera que dos equips no podien mai treballar en paral·lel, tot i que, evidentment, es podien ajudar entre ells. Cada equip, identificat per un non d'usuari i una contrasenya estava, en cada instant de temps, en un determinat estat i aquest estat era independent de l'entorn local de l'equip. Si un equip obria diverses finestres, canviava d'ordinador, polsava el botó *back*, etc., res no canviava i a cada nova connexió amb el servidor es reproduïa el seu estat actual, fins que l'usuari no executés un moviment vàlid segons les normes del joc. Des del nostre punt de vista, només restava un hipotètic problema de seguretat contra el qual res no podíem fer. Consistia en l'eventualitat de cridar l'atenció d'algun *hacker* que, pel motiu que fos, decidís bloquejar o destruir el *mq2000*. Com que aquesta possibilitat no es pot obviar, vam decidir ignorar-la i pensar que, fet i fet, no érem tan importants com per a convertir-nos en objectiu dels *hackers*.

Mundialització. Un joc que aspiri a la universalitat ha de durar, tanmateix, un nombre enter de revolucions del globus terrestre. Si volem que tothom pugui jugar en igualtat de condicions, independentment del fus horari on es trobi, s'imposa la necessitat de pensar en un joc de vint-i-quatre hores. A l'acceptació d'aquesta durada —que en un primer moment ens va semblar totalment exagerada— s'hi va arribar després de llargues reflexions i discussions. A banda de la igualtat de condicions, hi ha altres criteris que també afavorien una durada de vint-i-quatre hores. Per exemple, si estem pensant en preguntes realment difícils (ja parlarem més endavant de la mena de preguntes que volíem fer), podem imaginar un temps de resposta mitjà d'uns vint minuts i, si fixàvem una durada de sis hores, ens podíem trobar que la majoria d'equips es situessin a la franja de les 10–20 respostes, amb la qual cosa el joc quedava totalment «descafeïnat». D'altra banda, si parlem d'una competició de vint-i-quatre hores ininterrompudes, afegim al joc el factor resistència, que, en els temps actuals, pot representar un atractiu força interessant per als equips. L'elecció del dia (el 17 d'octubre) es va fer després de consultar un gran nombre de matemàtics de totes les parts del món per tal d'assegurar que no fos festiu a cap país matemàticament significatiu.

Metes volants. Els llibres de Birkhäuser ens van permetre una jugada molt interessant. En lloc d'atorgar-los als primers classificats —que ja tenien les estacions de treball i les llicències de *Mathematica*©— els vam dividir en 150 bons de 100 euros cada un, que es sortejaven cada hora entre els participants que, en la darrera hora, haguessin fet algun canvi de graella. Ho vam anomenar *metes volants*, per analogia amb el món del ciclisme i el seu objectiu era d'incentivar els equips a continuar jugant, especialment els que ja veien que no tenien opcions al premi final.

Validació de les respostes. Aquest va ser un punt francament difícil, sobre el qual els organitzadors i els membres de l'equip que va preparar les preguntes van haver de reflexionar profundament. Teníem clar que el joc havia de funcionar automàticament, sense intervenció humana. Per tant, el mateix programa era l'encarregat de validar les respostes dels jugadors, sense possibilitat de rèplica, impugnació o consulta. Els errors i imprecisions que hi hagués a les preguntes —i és clar que, malgrat tota la cura que volíem posar en l'elaboració de les preguntes, hi hauria errors i imprecisions— s'havien d'acceptar a priori com a part del joc. La sintaxi de les respostes s'havia de fixar de manera canònica, sense cap possible ambigüitat, de manera que la validació d'una resposta consistís a comparar una seqüència ascii enviada pel jugador amb una (o diverses) seqüències ascii emmagatzemades a la base de dades del programa. Parlarem d'aquest tema en un apartat posterior.

TEX versus Acrobat. La immensa majoria dels matemàtics creiem que tot text matemàtic ha d'escriure's en el llenguatge TEX. Però, tanmateix, els navegadors d'Internet no duen incorporat cap intèrpret de format dvi. Donat que no volíem (fins i tot diria que no podíem) renunciar a plantejar les preguntes del *mq2000* en TEX, calia estudiar la manera de transmetre les preguntes als equips en algun format universalment interpretable. Si hi penseu una estona, veureu que no és pas un problema fàcil. Hi ha diverses solucions possibles, però totes presenten algun problema. En primer lloc, podem trametre les preguntes en format dvi i indicar als equips, amb temps suficient, que els caldrà disposar d'un intèrpret de dvi. Aquesta ens va semblar que era una proposta poc realista i plena de riscos. Podíem fer una traducció TEX⇒html, però, ara per ara, els resultats d'aquestes traduccions són molt mediocres, sense tenir en compte les hores de treball que una traducció d'aquestes comporta. Ens vam inclinar per fer una traducció dvi⇒pdf, trametre als jugadors els arxius pdf i avisar a tothom que, per tal de jugar, els calia disposar de l'intèrpret gratuït *Acrobat Reader*, que, tanmateix, és fàcil d'aconseguir i pràcticament tothom que navega per Internet té ja instal·lat al seu ordinador. Pocs dies abans de la data del joc, però, vam començar a trobar problemes de compatibilitat entre *Acrobat* i algun dels navegadors més populars (parlarem d'aquest tema dels navegadors més endavant) i vam optar per prendre la decisió dràstica de traduir tots els arxius pdf a arxius gif. Hi havia pèrdua de qualitat i de prestacions, però amb els arxius gif eliminàvem, definitivament, tots els problemes de compatibilitat. Van ser moltes hores de feina de Maria Julià i Marcel Serra però al final vam disposar d'un arxiu gif i un arxiu pdf per a cada pregunta del joc i així vam poder oferir als jugadors l'opció d'accedir a les preguntes amb qualitat TEX i en el format que els fos més adient.

Exclusions. No va ser pas un tema fàcil el fet de poder arribar a decidir si calia excloure algú de participar en el *mq2000*. Al final prevalgué l'opinió —que ara trobem plenament justificada— de no excloure del joc a ningú llevat, evidentment, de les (poquíssimes) persones que tenien accés a les preguntes del joc.

4 Les preguntes

Les preguntes eren la part visible del *mq2000*, la seva raó de ser. Calia triar-les amb cura, rigor i imaginació. Principalment, amb molta imaginació. Volíem que fossin difícils, atractives, fins i tot divertides; que tinguessin la capacitat d'aconseguir que un bon nombre de matemàtics de tot el món passessin vint-i-quatre hores seguides intentant respondre-les. Que no se n'anessin a dormir, que no abandonessin el joc, que seguissin fins al final. I, per damunt de tot, que s'ho passessin bé. A l'entrevista que ens van fer per a la revista *Science*,[1] vam dir, en algun moment, que l'objectiu era *to have fun* i així va quedar reflectit a la nota que va sortir publicada a *Science*. Teníem clar, doncs, el que volíem fer, però també teníem clar que no era pas fàcil d'aconseguir. Nogensmenys, teníem al nostre favor el fet clar que als matemàtics, de manera natural, ens agraden els reptes intel·lectuals i ens agrada, d'una manera apassionada, contestar preguntes.

Per motius d'operativitat i de seguretat, vam pensar que calia que l'equip de matemàtics que creessin les preguntes fos molt reduït i molt concentrat en l'espai. Va estar format per només cinc persones, amb àrees de coneixement diverses: **Jaume Aguadé** (geometria, topologia, teoria de grups, àlgebres i grups de Lie), **Joan Josep Carmona** (anàlisi, topologia general, combinatòria, teoria analítica de nombres), **Enric Nart** (àlgebra, teoria de nombres, geometria algebraica), **Pere Puig** (probabilitat, estadística) i **Jaume Soler** (equacions diferencials, sistemes dinàmics, anàlisi numèrica, matemàtica aplicada). Cinc matemàtics amb personalitats i interessos ben diversos, que de cap manera creuen que se'ls pugui anomenar *savis* ni tampoc aspiren a poder abastar, ni tan sols entre els cinc junts, la immensitat de la matemàtica, però que van treballar febrilment durant molts mesos, individualment i en equip, per crear un conjunt de preguntes que atorguessin al *mq2000* el caràcter que volíem que tingués.

Com havien de ser aquestes preguntes? És clar que aquesta és la qüestió prèvia que calia respondre abans de començar la tasca i les primeres reunions del grup van anar en la línia de fixar uns criteris generals i un *estil* propi. Aquestes van ser les nostres directrius:

- Donada la durada del joc i les seves característiques, ens vam fixar la necessitat de preparar **400 preguntes**.
- Les preguntes havien de recórrer **tots els àmbits** de les matemàtiques, reflectits en la classificació de la AMS.
- Una quarta part de les preguntes havien de ser de tipus **històric**, entenent aquest adjectiu en un sentit molt ampli.
- Les preguntes havien de ser **molt difícils**, perquè anaven adreçades a equips de matemàtics professionals, als quals podíem pressuposar un nivell de coneixements extraordinari. (L'experiència va confirmar aquesta hipòtesi.)

1 *Science*, vol. 289, (15 set. 2000), p. 1835.

- No volíem plantejar problemes o càlculs ni recórrer a resultats de recerca accessibles només a mitja dotzena d'especialistes, sinó que volíem que les preguntes es poguessin classificar com a **coneixements clàssics per a un especialista en la matèria.** La majoria de les respostes s'havien de poder trobar en textos clàssics de matemàtiques. D'aquesta manera, ens allunyàvem diametralment de les competicions de tipus olimpíada i similars. No volíem plantejar problemes *d'enginy*, sinó que volíem anar al corpus de coneixements que formen el nucli central de la matemàtica.
- Havíem de tenir un nivell molt alt de confiança en la **correcció** de les respostes i això només ho podíem aconseguir amb un acurat i feixuc treball de correcció creuada de les preguntes, feta pels mateixos membres de l'equip.
- Cada pregunta havia de tenir una o més **respostes unívocament determinades** i la sintaxi de les respostes s'havia de fixar escrupolosament. Cada pregunta havia d'anar acompanyada d'un text on es justifiqués la resposta i es donessin les referències bibliogràfiques suficients perquè es pogués verificar la seva validesa.
- Havíem de poder garantir la total **confidencialitat** de les preguntes.
- Finalment, havíem de ser conscients que la perfecció absoluta no existeix i que havíem d'admetre que **alguna pregunta contindria errors.**

El resultat de tot aquest treball va ser un llibre de 400 pàgines. Cada pàgina conté una pregunta (en anglès), la resposta o respostes correctes (donades com a seqüències ascii de set bits) i una justificació (en català), més o menys extensa segons els casos, que conté, gairebé sempre, alguna referència bibliogràfica sobre el punt concret de la pregunta. Hi ha prop de cent preguntes de temàtica històrica i les altres es distribueixen entre tots els camps de la classificació de l'AMS, des del 03 (lògica i fonaments) fins al 94 (teoria de la informació). És clar que hi ha camps més extensos que altres i camps amb una tradició molt més llarga que altres i és per això que la distribució no és pas uniforme. Tenim, per exemple, 24 qüestions de teoria de nombres i 25 de geometria —són els dos camps amb un major nombre de preguntes— però només tres de transformacions integrals (número 44), mecànica de fluids (número 76) o lògica i fonaments (número 03). Malgrat això, tots els camps hi estan representats.

Francament, ens ho vam passar molt bé preparant les preguntes que estem anomenant, de manera massa genèrica, *històriques.* Vegem-ne alguns exemples:

> El 1821, l'Acadèmia de Ciències de Copenhaguen va oferir un premi a qui contestés la pregunta següent: "Generaliter superficiem datam in alia superficie ita exprimere, ut partes minimae imaginis archetypo fiant similes". Qui va rebre el premi?

> Qui va descobrir el palimpsest que contenia el *mètode* d'Arquimedes?

> Les primeres obres occidentals que es van traduir al xinès van ser dos llibres de matemàtiques que duia el missioner Matteo Ricci quan va visitar la Xina el 1582. El primer d'aquests dos llibres era —no cal dir-ho— els *Elements* d'Euclides. Qui era l'autor de l'altre llibre?

Mentre que aquestes preguntes són clarament històriques, n'hi havia d'altres d'un caràcter molt més anecdòtic o curiós, com ara:

> Quin matemàtic va escriure un poema el títol del qual va esdevenir, temps enllà, el títol d'un film de Monty Python?

> El matemàtic Persi Diaconis va treballar durant un temps com a mag professional i va canviar el seu nom Diaconis per un altre. Quin?

> El 21 d'agost de 1947, dos excel·lents escaladors van aconseguir la primera ascensió de la cara sud del Bietschhorn, als Alps suïssos. Un d'aquest escaladors era un matemàtic molt important. Quin any va llegir la seva tesi doctoral?

> El 4 d'octubre de 1621, Frau Katharina va ser alliberada després d'haver estat retinguda durant catorze mesos, acusada de bruixeria i encanteris. Aquesta va ser una de les moltes angoixes que va haver de sofrir, al llarg de la seva vida, el seu fill, un matemàtic brillant. Qui era?

> No sabem si hi ha matemàtiques més enllà de la mort, però podria ser que sí, perquè cap a mitjan segle vint una important revista de matemàtiques va publicar una carta d'un matemàtic que feia molt de temps que era difunt en la qual deia que estava molt content de veure com els seus resultats s'anaven redescobrint després de tant de temps. Qui signava la carta?

> L'any 1923, els estudiants que acabaven d'entrar a l'École Normal Supérieure van ser invitats a assistir a una classe magistral que havia d'impartir un cert professor estranger molt important. Es tractava d'una burla. Un estudiant dels cursos superiors va aparèixer amb una barba postissa i els va fer una simulació d'una classe que va cloure, emfàticament, amb un cert *teorema de Bourbaki*. Aquest va ser l'origen del nom de Bourbaki. Com es deia aquest estudiant?

A més de passar-nos-ho bé preparant aquestes preguntes, també vam patir-hi molt. El motiu principal del nostre patiment fou, ja us ho podeu imaginar, la por a l'error. Les quatre-centes preguntes que vam preparar havien de ser *correctes* «al peu de la lletra». Preparant-les ens vam adonar que els matemàtics estem acostumats a utilitzar en favor nostre l'extraordinària coherència interna del llenguatge matemàtic. Ens referim al fet que, generalment, no ens espanta la possibilitat de l'error puntual perquè sabem que, si les idees que estem utilitzant són correctes, qualsevol error material que es produeixi serà detectat al llarg del raonament. En el cas de les preguntes del *mq2000* això no era així, perquè les preguntes estaven, per definició, fora de context, eren unitats aïllades. Francament, quan vam revisar la primera entrega de preguntes

—preparades, en principi, amb una cura immensa— vam poder constatar un percentatge d'errors esgarrifós. Literalment, no ens en sabíem avenir. Per arribar a un corpus de preguntes que mereixés la nostra confiança (dèiem que un nivell d'error acceptable seria el 2 %) va caldre sotmetre's a un procés de revisió extraordinàriament sever en que cada pregunta era llegida minuciosament per diversos membres de l'equip, comprovada diverses vegades, criticada, modificada i, de vegades, eliminada. Quines eren les fonts d'aquests errors tan persistents? Podríem escriure un petit treball de psicologia matemàtica sobre l'experiència que vam adquirir durant la preparació de les preguntes. No ho farem pas, però com que creiem que l'experiència va ser, finalment, enriquidora, comentem breument quines eren les fonts d'errors i quins ensenyaments en vam treure.

Una font molt important d'errors procedia de la *descontextualització* de les preguntes. Els matemàtics, en general, tenim una visió platònica del nostre art. Creiem en la matemàtica com una disciplina perfecta, formada per una sèrie de proposicions, la validesa de les quals és independent de qualsevol context. La realitat, però, és una altra. La matemàtica és, tanmateix, una activitat humana i, com a tal, està sotmesa a infinites servituds, començant, naturalment, per la servitud del llenguatge comú, la semàntica del qual té un significat en un determinat context i un altre significat —o cap significat— en un altre context. Posem un exemple. Considerem la pregunta que obria aquest article, sobre les varietats que són vora d'altres varietats. Segons la formació del lector, aquesta pregunta pot ser molt fàcil, molt difícil o absolutament incomprensible. Si es tenen uns coneixements bàsics de geometria o topologia algebraica, s'entén immediatament que ens estan preguntant en quina dimensió màxima l'anell de cobordisme orientat s'anul·la. Aquest anell es va calcular ja fa molt anys i el resultat es pot trobar en molts textos ben coneguts, com per exemple el llibre de Milnor i Stasheff *Characteristic Classes*. Creiem que és una pregunta bonica i relativament senzilla. És correcta, aquesta pregunta? Aparentment ho és, però, si la mirem amb més detall, veiem que l'enunciat no diu que la $(n+1)$-varietat hagi de ser compacta. Si admetem varietats no compactes, tota varietat és vora d'una altra. Encara que la compacitat de la varietat «es dedueixi del context» (si admetem varietats no compactes, el problema del cobordisme és trivial), la pregunta, tal com està formulada, no és correcta. Però l'anàlisi no s'acaba aquí. Quan diem que una varietat orientable és vora d'una varietat orientable sempre entenem que això vol dir que l'orientació a la vora coincideix amb l'orientació induïda per l'orientació de la varietat gran, però això no es diu a la pregunta. També, la pregunta parla de varietats, sense especificar de quines varietats estem parlant. Naturalment, entenem que parlem de varietats *diferenciables*, però també podríem imaginar que ens referim a varietats topològiques o a varietats modelades en un espai de Banach, o… L'ensenyament que obtenim de tot això és que tota pregunta, fins una pregunta de matemàtiques escrupolosament plantejada, pressuposa una certa complicitat entre qui pregunta i qui ha de respondre.

Una altra font d'error important, estretament relacionada amb la que acabem de comentar, fou deguda a la tendència que tenim els matemàtics a passar per alt els casos trivials. Sovint, ens oblidàvem d'indicar que cert n havia de ser positiu, o que cert conjunt A havia de ser no buit. També quèiem sovint en l'omissió d'hipòtesis o en la utilització de certa nomenclatura o certa notació en un sentit lleugerament diferent del que li és habitual.

Uns errors molt interessants i difícils de detectar eren els que provenien de la utilització de referències errònies. Un cas especialment punyent fou el següent. Un membre de l'equip va proposar la pregunta següent:

> Quants subgrups finits conté $GL(3,\mathbb{Z})$ llevat de conjugació?

La resposta és 70 i la referència és la pàgina 181 del llibre *Integral matrices* de Morris Newman. Un altre membre de l'equip va repassar aquesta pregunta, va veure que, certament, el llibre de Newman dóna la resposta 70, però ho fa sense demostració, atribuint el resultat a Hermann Weyl. La comprovació podria haver acabat aquí, però, afortunadament, aquest membre de l'equip va voler anar més enllà. Seguint la referència de Newman, s'arriba al llibre $Symetry$, de Weyl, que no deixa gens clar d'on surt aquest nombre de 70 subgrups finits. Llegint llibres de cristal·lografia, es veu que hi ha una certa confusió en la notació i el llenguatge, però sembla deduir-se que la resposta no és 70. Posteriorment, una cerca a *Math. Rev.* ens va dur a un article de l'any 71 (*On the finite subgroups of* $GL(3,\mathbb{Z})$) que demostra que n'hi ha 74. Això sembla que tanca el procés de correcció, però en un repàs posterior, la cerca a *Math. Rev.* es va dur més enllà i es va trobar un article al *Nagoya* titulat «Comment on a paper by Tahara on the finite subgroups of $GL(3,\mathbb{Z})$», en el qual es troba un error en l'article anterior i s'estableix el nombre de subgrups finits en 73, llevat de conjugació. Aquest exemple és potser el més espectacular, però no és pas l'únic en què la formulació d'una pregunta ens va conduir a una llarga recerca bibliogràfica i àdhuc matemàtica. Per exemple, un altre membre de l'equip volia formular una pregunta sobre el conegudíssim *porisme de Poncelet*, però, per fer les coses més difícils, va voler preguntar el cas de l'hexàgon, citat, per exemple, al llibre de geometria projectiva de Santaló. Després de diverses hores de treball, aquest membre de l'equip va consultar un dels articles originals sobre el porisme en qüestió (un article de l'any 1926) i va arribar a la conclusió que contenia algun error important. La pregunta es va eliminar. En algun altre cas, vam optar per incloure en l'enunciat de la pregunta alguna hipòtesi que no es troba a les referències clàssiques, sense la qual no vam ser capaços de demostrar l'afirmació que es proposava.

Una altra font de dubtes i angoixes prové del fet que, en certs casos, és molt difícil verificar que una afirmació és realment correcta. Considerem l'exemple següent:

> Quin premi Nobel de literatura va ser professor de matemàtiques a una universitat politècnica?

La resposta, clarament, és *Echegaray*, el premi Nobel de literatura espanyol que, com tothom sap, fou un gran matemàtic i fou catedràtic de l'escola d'enginyeria. Però, estem absolutament segurs que aquesta és *l'única* resposta correcta? Francament, a una seguretat absoluta només podria arribar-s'hi després de llegir les biografies completes de *tots* els premis Nobel de literatura, i aquesta és una tasca irrealitzable.

Considerem aquest altre exemple: volíem formular una pregunta que retés homenatge a l'aritmètica de Sanctcliment, el segon llibre de matemàtiques imprès al món. Preguntar quin fou el segon llibre de matemàtiques imprès al món fora temerari, perquè, com podem estar segurs que no se n'hagi trobat un altre? A més, totes les referències que trobàvem parlaven de llibres d'aritmètica i no sabíem si això volia dir que hi havia altres llibres de matemàtiques més antics. Al final, vam redactar la qüestió així:

> La primera aritmètica *impresa* va ser una obra d'autor desconegut impresa a Treviso el 1478. Hi ha un empat per a la segona posició. Hi ha l'aritmètica de Bamberg de Ulrico Wagner i una altra aritmètica impresa en 136 folis que va ser redescoberta el 1936 per L. C. Karpinski. Qui n'era l'autor?

Aquesta redacció sembla que, certament, individualitzava l'aritmètica del nostre Sanctcliment, però encara hi havia algun membre de l'equip que no estava tranquil amb aquesta pregunta perquè sembla ser que hi ha estudis molt recents que posen en dubte l'autoria de Sanctcliment! Potser hauríem d'haver preguntat «qui figura com a autor?».

Teníem ben clar que les preguntes havien de tenir un cert atractiu i tots els membres de l'equip ens hi vam abocar amb el màxim interès. Nogensmenys, el concepte de bellesa matemàtica és molt personal i cada un de nosaltres reflectia la seva pròpia personalitat en la tria de les preguntes. Algunes preguntes eren extremadament breus:

> Quin és el gènere de la corba modular $X_0(11)$?

Mentre que n'hi havia d'altres que requerien, a més de coneixements matemàtics, una gran dosi de paciència:

> Considereu els polinomis:
>
> (1) $-\frac{1}{120}x^5 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 5x^2 - 5x + 1$
>
> (2) $\frac{3}{8}x^3 + \frac{9}{16}x^2 + \frac{1}{16}x$
>
> (3) $64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$
>
> (4) $\frac{231}{16}x^6 - \frac{315}{16}x^4 + \frac{105}{16}x^2 - \frac{5}{16}$
>
> (5) $x^6 - 3x^5 + 5x^3 - 3x$
>
> (6) $32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

(7) $16x^4 - 12x^2 + 1$

(8) $x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{6}x$

Considereu també les famílies següents de polinomis: (a) Bernoulli; (b) polinomis de Bernstein de la funció $f(x) = x^3$; (c) Euler; (d) Hermite; (e) Laguerre; (f) Legendre; (g) polinomis de Tchebyshev de primera espècie (T_n); (h) polinomis de Tchebyshev de segona espècie (U_n). Escriviu, per a cada un dels polinomis de la llista anterior, la classe a la qual pertany.

Algunes preguntes semblaven fins i tot massa fàcils:

Quants políedres regulars (convexos) hi ha a l'espai euclidià de dimensió quatre?

Mentre que n'hi havia d'altres que se'ns feia difícil imaginar com ningú les podia resoldre (ens equivocàvem):

Al segle XVII, Saint-Martin va preguntar de quantes maneres és 1803601800 la diferència entre els costats més llargs d'un triangle rectangle, en el qual el costat més curt difereix dels altres en quadrats. Quin matemàtic va resoldre aquesta pregunta i quina va ser la seva resposta?

Algun membre de l'equip fou el responsable de proporcionar-nos preguntes amb una formulació tan magnífica com aquesta:

O swear not by the moon, th'inconstant moon
That monthly changes in her circled orb,
Lest that thy love prove likewise variable.
Romeo and Juliet, Act II, Scene 2.

La desconfiança de Juliet envers la Lluna està prou justificada perquè durant molt de temps els astrònoms tingueren grans treballs per a predir el seu moviment amb una aproximació raonable i els seus esforços donaven resultats relativament pobres. A l'astronomia clàssica, el moviment de la Lluna s'explicava per superposició de *desigualtats* (petits moviments, periòdics o seculars) sobre una òrbita de referència. Si l'òrbita de referència és una el·lipse de Kepler, una de les desigualtats majors produeix que la Lluna estigui fora de la seva posició prevista tant com prop de dues vegades i mitja el seu diàmetre (en longitud geocèntrica), amb un període de 31,812 dies. Aquest moviment pot pensar-se com el resultat d'un canvi periòdic en l'excentricitat lunar degut a l'atracció solar. Quin és el nom d'aquest terme periòdic en el moviment de la Lluna?

O, també, problemes relativament simples però deliciosos, com aquest:

Imagineu que és el dia de Sant Valentí i us trobeu en un indret deliciós, 104,7 milles a l'oest de Greenwich (latitud 53° N). En el moment que el centre del disc solar creua el vostre meridià local, poseu el vostre rellotge a les 12.00 TID (Temps de l'Indret Deliciós). Més tard, aquell mateix dia, de tornada a Londres, teniu una cita a Claridge's a les 20.00 GMT (Temps Mitjà de Greenwich) i hi arribeu exactament a les 20.00 TID, just per constatar que, lamentablement, heu fet tard per... quants minuts? (Considereu una Terra esfèrica de radi 3963,11 milles i arrodoniu la resposta a un nombre enter de minuts.)

Algunes preguntes feien referència a coneixements de matemàtica elemental molt antics, com aquesta que reprodueix l'anomenat *problema de Fagnano*:

Considereu el triangle acutangle de vèrtexs $(0,0)$, $(1,11/3)$ i $(5,1)$. Trobeu els vèrtexs del triangle inscrit de perímetre mínim.

N'hi havia d'altres, en canvi, que utilitzaven un llenguatge només intel·ligible per a un reduït nombre d'experts:

Considereu la tercera diferencial de la successió espectral d'Adams clàssica, $d_3\colon E_3^{s,t} \to E_3^{s+3,t+2}$. Escriviu $t-s$ tal que d_3 és no trivial a $E_3^{s,t}$ i $t-s$ és minimal.

Sigui E un compacte del pla complex i $n \geq 1$. Definim

$$d_n(E) = \left[\max_{z_1,z_2,\cdots,z_n \in E} \prod_{1\leq k<j\leq n} |z_k - z_j| \right]^{\frac{2}{n(n-1)}},$$

i posem $d(E) = \lim d_n(E)$ (aquest límit sempre existeix). Sigui F el conjunt $\{z \in \mathbb{C} : |z^4 - 1| \leq 2\}$. Quant val $d(F)$?

Per la seva pròpia naturalesa, el *mq2000* i Internet estaven indissolublement units. Quan preparàvem les preguntes, però, vam tardar un cert temps a adonar-nos realment del paper que Internet podia jugar. Una de les primeres preguntes que se'ns va ocórrer de formular va ser aquesta:

Quin famós matemàtic es va casar amb una neta de Hegel?

Ens semblava que era una pregunta bonica i relativament difícil, fins que un dia un dels membres de l'equip va tenir la idea d'introduir les paraules mathematician, granddaughter, Hegel a un cercador d'Internet. Instantàniament, va obtenir una pàgina on s'explicava la vida de Felix Klein i, en particular, el seu casament amb una neta del filòsof Hegel! Aquesta notícia va representar una revolució al si de l'equip que estava preparant les preguntes del *mq2000*. Immediatament, vam passar totes les preguntes de tipus històric pel test d'Internet i els resultats van ser demolidors. Costa d'imaginar la ingent quantitat d'informació —en particular, d'informació sobre la història de les Matemàtiques— que hi ha a Internet, i la facilitat amb què els cercadors la poden localitzar. Va caldre eliminar moltes preguntes i, principalment, redactar-ne de nou moltes altres. Es tractava de buscar una redacció que fes que l'accés a la resposta a través d'Internet no fos immediat. Cal dir que, malgrat tots els nostres esforços, les respostes a una part molt considerable de les nostres preguntes de tipus històric podien trobar-se a Internet, si se sabia utilitzar la xarxa d'una manera prou intel·ligent.

Hi ha una anècdota simple que ens il·lustra bé la utilitat i els riscos d'Internet. Una bonica pregunta de geometria del *mq2000* deia:

> A més dels paral·lels i els meridians, un tor conté altres circumferències no tan òbvies. De fet, per cada punt del tor hi passen quatre circumferències. Les dues *menys òbvies* s'anomenen segons el nom d'una certa persona. Quin és aquest nom?

Es tracta dels *cercles de Villarceau* i es troben citats a molts llocs. Qui es refiï d'Internet per contestar aquesta pregunta, li serà força fàcil d'accedir a alguna pàgina on es parli dels cercles de Villarceau, però un dels equips del *mq2000* —de fet, l'equip guanyador— va tenir la dissort d'accedir a l'única pàgina d'Internet on es parla dels cercles de *Villarceaux* i així va ser com aquest equip va errar la resposta a aquesta pregunta.

Per acabar aquest comentari sobre els reptes amb què ens vam trobar a l'hora de preparar les preguntes del *mq2000*, voldríem parlar breument d'una qüestió que ja hem esmentat abans i que ens va obligar a llargues discussions fins que no vam trobar-hi una solució raonable. Ens referim al problema de la sintaxi de les respostes.

Si teníem clar que la validesa de cada resposta que enviaven els equips havia de ser contrastada de manera automàtica pel mateix programa, es deduïa que només podíem plantejar preguntes que tinguessin per resposta una paraula, un nombre o una opció a escollir entre diverses opcions. També, naturalment, una combinació d'aquests elements. Si ho penseu per un moment, veureu que aquesta restricció sobre les respostes posa unes limitacions molt estrictes al tipus de preguntes que es poden fer. Qüestions com ara «Què diu la conjectura de Poincaré?» o «Què podem afirmar dels cossos finits?» estan totalment fora de lloc perquè tota qüestió s'ha d'acabar reduint a un nombre o una paraula. I els problemes no s'acaben aquí, perquè cal fixar què se'n fa dels nombres no enters. I què se'n fa dels irracionals.

Als membres de l'equip que preparava les preguntes se'ns feia molt difícil de renunciar a preguntes com ara aquesta:

> Si $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $n > 1$, aleshores
>
> $$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}}\,dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \beta_n \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|\,dx,$$

on $|\nabla u|$ denota la norma euclidiana del gradient de u i on β_n denota la constant estricta per a aquesta desigualtat. Calculeu

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} (2k\beta_{2k})^{-2k}.$$

La resposta a aquesta pregunta és e^{π}. Com s'ha de codificar l'irracional e^{π}? Hi ha una opció natural que consisteix a demanar una expressió decimal d'una longitud fixada, però sembla com si aquesta solució fos estèticament poc satisfactòria (deixant de banda el fet que, si ens acontentem amb aproximacions decimals, aleshores hi ha moltes preguntes que es poden resoldre de manera numèrica, cosa que traeix completament l'esperit de la pregunta). Es va parlar d'admetre respostes en llenguatge TEX, però aquest llenguatge no és unívoc. Observem, també, que hi ha infinites expressions matemàtiques que són iguals a e^{π} i no les podem preveure totes ($e^{2\pi}/e^{\pi}$, etc.). Algú va suggerir d'admetre les respostes en algun dels llenguatges que utilitzen els manipuladors algebraics més habituals i, aleshores, fer que el manipulador comparés aquesta expressió amb la resposta correcta de la nostra base de dades. Els problemes que planteja aquesta opció són considerables.

Finalment, l'opció que es va prendre va ser fixar unes normes estrictes per als nombres racionals i decimals amb precisió fixada i establir una *llista* finita de noms de nombres reals de manera que, si la resposta a una pregunta era igual a un nombre de la llista, aleshores calia donar la resposta amb la sintaxi exacta que apareixia a la llista.

5 El programa

I, és clar, tot això s'havia de programar! I no s'hi valia comptar amb quasi res. No sabíem com serien les màquines amb les quals jugarien els participants: Mac's, PC's, estacions de treball UNIX; no sabíem quins serien els navegadors: Microsoft Explorer, Netscape Comunicator..., ni les seves versions ni els alfabets que tindrien instal·lats. Va haver-hi un moment de terror en pensar com serien els jocs de caràcters dels sistemes operatius de les màquines al Japó o a la Xina.

Podíem suposar que no havia de passar res perquè, en teoria, aquests problemes que hem esmentat són els que pretenia resoldre, en els seus inicis, el llenguatge html. Però el temps s'ha ocupat amb escreix de fer divergir les especificacions al llarg de les diverses marques i versions de navegadors, fins al punt que ara no n'hi ha dos que es comportin igual.

Volíem també que la plana del joc no fos massa pesada, que no incorporés gràfics grans que alentissin el temps de càrrega, de manera que es pogués participar en el joc amb un sistema informàtic i de comunicacions modest. No volíem ser excloents per raons tècniques.

Calia també preveure els intents dels participants d'obtenir preguntes a l'avançada. Penseu que si els presentàvem una pregunta amb format gif o pdf n'hi havia prou amb polsar el botó dret del ratolí per conèixer la seva adreça i a partir d'aquesta fer intents de trobar-ne d'altres.

Què passava si un pirata escoltava les línies de comunicació dels servidors i capturava contrasenyes i intervenia amb nom d'altres? Què hauria passat si els participants manipulaven el caixetí on s'escriu l'adreça de la plana intentant enganyar el programa.

Com es mantenia el fil del programa? No podíem comptar que la connexió dels jugadors es mantingués les 24 hores que durava el joc. De ben segur que alguna vegada es penjaria l'ordinador —*Este programa ha efectuado una operación ilícita y se cerrará*—, els jugadors potser canviarien de màquina, per error podien obrir més d'una vegada el navegador, alguns voldrien anar a dormir... En definitiva, un munt de variants.

La decisió final va ser adoptar una plana simple i espartana, feta bàsicament de text i botons estàndard dels navegadors. Els efectes estètics els vam aconseguir jugant amb els colors de les lletres i dels fons. Com que l'anglès era l'idioma del joc, els caràcters accentuats i altres espècimens tipogràfics no havien de ser cap problema. Vam posar als fitxers que contenien les preguntes uns noms prou complicats, formats per 20 caràcters triats a l'atzar, de manera que fos virtualment impossible trobar-ne d'altres per assaig d'adreces.

Vam construir una base de dades que conservava l'estat de cada equip i el programa no feia res a la màquina del participant, sinó que ho enviava tot al servidor que s'encarregava de comprovar la coherència de la intervenció del jugador amb el seu estat. Si era correcta, actualitzava l'estat i produïa la nova plana web; si no ho era, produïa una plana a partir de l'estat informava el jugador del que havia passat. Pel que fa a l'adreça que servia per trametre la informació, contenia paràmetres innecessaris i informació no rellevant que dificultava esbrinar què s'havia de manipular per obtenir noves preguntes o enganyar la màquina. Les contrasenyes només viatjaven una vegada i, després, cada plana rebia un àlies que li servia sols per a la propera intervenció, cosa que feia més difícil la captura de contrasenyes. Tot i les precaucions, encara vam tenir alguns problemes amb alguna resposta amb apòstrof. La sintaxi del llenguatge i el programa, segons quina era la circumstància, feien desaparèixer aquest apòstrof abans d'arribar a la base de dades i, així, en una ocasió, vam donar per errònia una resposta correcta.

6 L'anunci i l'expectació creixent

Si volíem tenir gent de tot el món calia fer-ho saber a tot el món. Com que el joc s'havia de jugar sobre Internet era natural usar el correu electrònic com a via principal de difusió. Vam enviar els missatges a 4.500 adreces obtingudes per moltes vies: la base de dades del CRM, llistes d'adreces de societats matemàtiques obtingudes capturant webs, llistes d'adreces personals dels organitzadors, adreces d'assistents a alguns dels actes de l'any mundial de les matemàtiques, etc.

Vam trametre dues convocatòries, un avís, diversos recordatoris, explicacions del primer fracàs (ja en parlarem més endavant), avisos de la nova convocatòria i confirmacions finals —i tot això unes 4.500 vegades cada cosa. Va passar un altre imprevist: tot aquest flux de correu va generar una quantitat desbordant de missatges d'error per adreces incorrectes, de respostes de tota mena, d'idees de diverses persones, de preguntes sobre més informació... Cada dia era una aventura obrir el correu! Per fortuna, una configuració adequada del correu electrònic ens va permetre ordenar i classificar tot aquest material.

El ritme d'inscripció va ser molt lent al principi; en un cert moment, fins i tot vam arribar a dubtar del projecte i vam arribar a dir que ens donaríem per satisfets amb cent equips inscrits, però de mica en mica la xifra d'inscripcions va arribar als cent, i als dos-cents... La xifra final de 382 equips ens va alegrar i alhora preocupar molt: allò que havia començat com una cosa petita esdevenia gran, potser massa gran. Vam notar força signes d'expectació als entorns matemàtics; rebíem correus d'arreu demanant aclariments sobre les normes; persones que havien dit del joc que no era una «cosa seriosa» figuraven a la llista dels inscrits...

I d'aquesta manera va arribar el dia del joc, el dia fatídic, el...

7 ... dia que tot es va ensorrar

Havíem confeccionat el programa i l'havíem provat moltes vegades. Havíem descobert que el lector de pdf, l'Acrobat Reader, i el Microsoft Internet Explorer no funcionaven satisfactòriament si l'ordre en què s'havien instal·lat les seves actualitzacions no era l'adequat i, com hem dit abans, vam passar totes les preguntes a format gif. No vam fer, però, proves de càrrega del servidor, en part per manca de temps i en part per no considerar-ho necessari. A més, vam cometre una ingenuïtat descomunal: unes hores abans de l'inici del joc vam posar a la plana web un rellotge de compte enrere que s'actualitzava contra el servidor cada vegada que un equip pitjava un botó. El que vam aconseguir amb això, sense voler-ho, va ser que tots els jugadors comencessin pràcticament al mateix moment. Si ho haguéssim fet deixant que cada u mirés l'hora del seu rellotge, les imprecisions naturals amb què tots portem els nostres rellotges haurien dissolt molt el problema.

Fatalment, el servidor no va poder suportar la pressió de l'inici del joc i va *caure*. N'hi hauria hagut prou amb poder començar perquè, després, la pròpia mecànica del joc ja s'hauria encarregat d'espaiar prou les intervencions, però no va ser possible. Cada cop que intentàvem recuperar el servidor, l'allau de peticions pendents que hi havia el feien caure un altre cop. Tampoc estàvem anímicament d'allò més bé i no se'ns acudien idees, ni brillants ni de cap mena. Passada una hora i mitja vam cancel·lar el joc, ho vam comunicar a tots els participants i vam indicar que el tornaríem a convocar. Va ser una llàstima. Estàvem abatuts.

Immediatament, vam posar fil a l'agulla i vam analitzar el problema. Vam decidir que calia millorar el servidor i usar un llenguatge més ràpid. Vam parlar amb SUN Microsystems i ens va prestar un servidor amb més processadors i amb més memòria. Vam tornar a escriure el programa: si inicialment l'havíem escrit en Perl —un llenguatge interpretat—, ara ho vam fer amb PL/SQL —també interpretat però amb més eficàcia. Vam millorar el mètode de connexió entre el programa i la base de dades. La UOC va ser una immillorable aliada en aquesta fase. Creiem sincerament que una sola d'aquestes accions hauria resolt el problema, però el que no ens podíem permetre era fracassar una segona vegada. Finalment, vam tornar a convocar el joc i vam obrir un període de cinc dies d'inscripció. I va arribar…

8 El gran dia del *mq2000*

Tot a punt, tots en tensió, es fan les dotze hora del sol, s'inicia el joc i… no passa absolutament res. Tot va bé. Des del lloc de monitorització veiem com entren els jugadors: ara en són deu, ara ja en són vint —ens preocupa que la primera fallida hagi desanimat molta gent—, ja en són trenta —uns per desconfiança—, anem pels quaranta —altres per impossibilitat a les seves agendes—, ja en són cinquanta —seguim pensant que són pocs, ens preocupa—, arribem a vuitanta —comencem a somriure—, estem tranquils en veure que 155 equips s'han connectat i demanat almenys una pregunta. Seguim clavats al davant de la pantalla que mostra l'estat del joc, comencem a gaudir del que passa, analitzem les preguntes que hi ha en curs i ens entra por: ens hem passat?, són massa difícils?, els equips no les sabran i al cap de dues o tres preguntes abandonaran?. Però amb això que comencen a arribar respostes; algunes de fallides, però moltes, sorprenentment moltes, de bones. Ens alegra i alhora ens sorprèn. A més, el temps de resposta no és llarg; no hi ha problemes de sintaxi; comprovem algunes de les fallides i realment ho són; no tenim problemes amb la interpretació de les regles.

Al nostre voltant es crea certa expectació. Les persones de la UOC que han col·laborat en el projecte ens demanen per la posició dels equips locals, de la UAB i de la UB; veiem com s'animen i segueixen els canvis de posició dels equips com si es tractés d'un partit de futbol en directe.

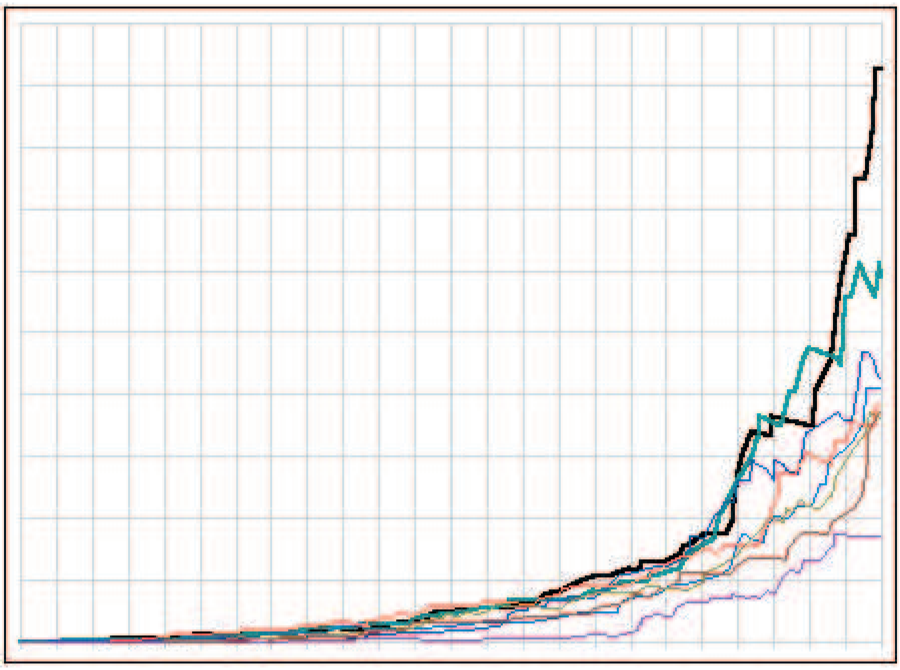
Sabem que a la UAB l'expectació al voltant dels equips és gran. Un dels equips deixa el joc per ajuntar-se amb l'altre i comencen a rebre ajut de tots els professors del departament. Si això és així a la UAB, com deu ser als altres llocs? Tenim una clara sensació d'èxit, d'haver aconseguit implicar molta gent i amb ganes; no hem tingut cap problema relacionat amb intents de boicotejar el joc; veiem que tothom qui juga ho fa seriosament. Anem a dormir una estona mentre la UOC ens facilita un servei de vigilància nocturna dels servidors. S'han preparat protocols per saber si tot funciona correctament i per localitzar immediatament els responsables en cas que passi alguna cosa.

Al matí següent, el nombre d'equips connectats és encara de 50 i ens sorprèn molt que hi hagi equips que encara continuïn tot i ser força evident que no tindran cap premi: el mateix gust pel joc els ha atrapat.

9 Estadístiques, reflexions i valoracions

Què s'entén per equip connectat? Com diferenciar un equip que ha abandonat d'un que tarda molt a respondre? Hem d'entendre que, si un equip respon una pregunta, ha estat pensant des que la va rebre? Si entenem que un equip ha estat jugant tot el temps que ha disposat d'una pregunta, si finalment l'ha contestada o passada, podem dir que hi va haver 52 equips que van jugar més de 18 hores. A la darrera hora hi va haver intervencions de 51 equips.

L'ordre de les 8 primeres posicions no va quedar determinat fins que només faltaven 9 minuts per acabar el joc. L'equip guanyador es va posar en primera posició 80 minuts abans del final i ja no va ser desbancat, però durant les 3 hores anteriors havia intercanviat 5 vegades la seva posició amb el que va quedar segon. Quan faltaven quatre hores pel final hi havia un empat virtual a les tres primeres posicions.



Evolució de la puntuació dels equips que van quedar a les 8 primeres posicions. L'eix horitzontal representa el temps en hores i el vertical la puntuació en centenes.

Pel que fa a les preguntes, totes van aparèixer almenys una vegada i 83 no les va respondre ningú correctament. Del total de 400 preguntes del nostre banc de dades, 188 van ser més vegades encertades que fallades, 33 van ser encertades tantes vegades com fallades i 249 van ser més fallades que encertades.

De les 3.631 peticions de preguntes, 1.139 es van respondre correctament, 1.807 incorrectament, 563 es van passar i 122 no es van respondre (per abandonament o finalització del temps).

Pel que fa a la cadència de sol·licituds de preguntes, va ser molt regular; a la 24a hora n'hi va haver 241 —el màxim si ho fragmentem per hores— i l'hora amb menys peticions fou la 17a, amb 95 intervencions; el major lapse de temps sense cap intervenció, sol·licitud o resposta; fou de 194 segons, amb una mitjana de 12,1 segons.

	Correctes						**Passades**				
Pos.	N	Punts	m(s)	mg(m)	M(m)	S(h)	N	m(s)	mg(m)	M(m)	S(h)
1	44	961,00	9	19	116	14,09	12	79	24	72	4,89
2	47	724,75	46	16	81	12,87	11	101	19	73	3,47
3	40	563,00	60	14	72	9,39	15	24	16	67	4,05
4	38	433,00	28	20	79	12,62	11	68	21	71	3,93
5	43	442,00	30	14	45	10,36	7	350	22	38	2,54
6	36	392,25	67	23	103	13,96	6	61	18	47	1,78
7	43	418,00	54	15	73	10,85	13	30	7	24	1,56
8	32	208,25	9	18	218	9,80	6	15	14	36	1,41
9	30	173,00	55	16	46	7,83	9	70	22	57	3,24
10	24	114,75	394	33	180	13,13	5	433	29	90	2,45
11	30	127,75	16	26	121	12,80	9	35	21	50	3,14
12	37	148,00	45	14	49	8,42	12	64	8	42	1,67
13	26	105,00	30	27	91	11,85	9	17	20	68	2,94
14	23	100,00	32	34	207	13,14	8	58	50	136	6,72
15	23	98,00	12	27	189	10,44	7	46	34	98	4,02
16	24	87,00	42	22	73	8,67	7	38	23	83	2,67
17	22	79,00	125	19	103	6,95	7	297	42	118	4,89
18	25	83,25	33	13	30	5,61	10	42	15	37	2,51
19	19	56,00	18	26	148	8,19	5	471	81	154	6,75
20	19	54,25	153	15	56	4,88	1	591	10	10	0,16
21	20	51,75	271	37	112	12,36	2	2602	57	70	1,89
22	16	35,00	39	31	141	8,37	4	542	59	151	3,96
23	21	47,00	293	23	82	8,16	6	44	11	33	1,12
24	14	27,00	7	23	92	5,28	6	1879	87	135	8,70
25	16	32,25	153	47	155	12,64	6	33	24	62	2,40
26	15	32,25	163	33	133	8,23	7	40	52	218	6,07
27	13	24,00	80	28	96	6,12	5	53	36	81	3,04
28	12	22,00	54	94	616	18,87	3	202	11	25	0,56
29	17	36,00	29	34	506	9,52	8	17	12	58	1,59
30	12	21,00	58	10	37	2,05	4	419	229	877	15,28

TAULA 1

La taula 1 ens permet veure les diferents estratègies seguides per cada equip;, hi reflectim les dades dels 30 pimers classificats.

Donem per a cada tipus de respostes —correctes, passades i incorectes— i pee al total, els valors següents: el nombre de preguntes (N), la puntuació que suposen les no passades, el temps mínim (m) en segons, el temps mitjà (mg) i el màxim (M) en minuts i la suma (S) en hores.

	Incorrectes						**Total**					
Pos.	N	Punts	m(s)	mg(m)	M(m)	S(h)	N	Punts	m(s)	mg(m)	M(m)	S(h)
1	9	-36,00	771	31	108	4,67	65	925,00	9	22	116	23,65
2	21	-135,50	145	21	62	7,44	79	589,25	46	18	81	23,78
3	30	-135,75	154	16	61	7,91	85	427,25	24	15	72	21,35
4	12	-21,75	317	32	76	6,45	61	411,25	28	23	79	23,00
5	21	-59,25	221	24	62	8,39	71	382,75	30	18	62	21,28
6	9	-20,00	278	34	83	5,11	51	372,25	61	25	103	20,86
7	28	-54,50	67	17	72	8,08	84	363,50	30	15	73	20,50
8	19	-38,00	199	38	208	11,89	57	170,25	9	24	218	23,10
9	22	-42,00	361	34	111	12,47	61	131,00	55	23	111	23,54
10	7	-4,25	872	52	117	6,11	36	110,50	394	36	180	21,69
11	11	-25,75	73	34	81	6,26	50	102,00	16	27	121	22,20
12	40	-46,25	26	19	184	12,90	89	101,75	26	15	184	22,99
13	13	-13,25	103	41	96	8,90	48	91,75	17	30	96	23,70
14	8	-10,75	152	28	77	3,68	39	89,25	32	36	207	23,54
15	12	-18,25	982	40	75	7,96	42	79,75	12	32	189	22,42
16	15	-21,00	75	49	490	12,33	46	66,00	38	31	490	23,68
17	17	-13,75	231	39	227	11,12	46	65,25	125	30	227	22,95
18	37	-32,25	66	24	70	14,82	72	51,00	33	19	70	22,94
19	9	-5,00	242	59	143	8,83	33	51,00	18	43	154	23,77
20	11	-10,50	247	86	680	15,68	31	43,75	153	40	680	20,73
21	9	-10,75	162	58	153	8,76	31	41,00	162	45	153	23,00
22	15	-9,50	623	46	124	11,47	35	25,50	39	41	151	23,79
23	30	-21,50	132	27	102	13,26	57	25,50	44	24	102	22,53
24	7	-2,50	151	84	204	9,79	27	24,50	7	53	204	23,78
25	10	-8,50	472	25	81	4,18	32	23,75	33	36	155	19,21
26	11	-10,25	1283	51	149	9,37	33	22,00	40	43	218	23,67
27	5	-3,25	136	48	163	4,00	23	20,75	53	34	163	13,15
28	3	-1,25	2072	39	41	1,93	18	20,75	54	71	616	21,35
29	28	-17,50	26	27	413	12,40	53	18,50	17	27	506	23,51
30	7	-3,25	109	18	59	2,14	23	17,75	58	51	877	19,47

TAULA 1 (CONTINUACIÓ)

S'observa que l'equip guanyador no va ser el que més respostes correctes va donar, però sí el que més punts en va obtenir i el que més temps hi va esmerçar. No entrarem en una discussió detallada de la taula, però és entretingut observar-hi detalls de tota mena, com ara els 394 segons —més de 6 minuts— de temps mínim a les respostes correctes del 10è equip, la celeritat dels 7 o 9 segons per respondre correctament una pregunta dels equips en 24a, 1a i 8a posició —la van llegir!?—, o la inversió en els punts obtinguts per respostes correctes a les posicions 6a i 7a i a les posicions 10, 11 i 12, la templança que demostren els primers equips gastant entre 3 i 5 hores per passar preguntes, etc.

Tot aquest seguit de xifres ens fa pensar que la mecànica i les regles del joc eren adequades per a mantenir l'interès dels jugadors i que les preguntes eren engrescadores. Del total de preguntes contestades incorrectament sols una ho va ser per error del sistema; podem, per tant, considerar que les respostes i el seu tractament també foren els adequats.

Un cop acabat el joc vam rebre missatges encoratjadors de molts dels participants. N'hi havia molts que demanaven quan seria la propera edició i ens vam plantejar si existiria mai...

10 Epíleg: *Maths Quiz 2002?*

Podem i volem fer-ne una nova edició? Per descomptat, tots els mecanismes informàtics són fàcilment repetibles; el programa sols s'ha de lliurar de petits detalls inherents a aquesta edició, com ara fer variable la data d'inici i fi o les preguntes anul·lades arran de la primera caiguda i algun altre detall menor.

El conjunt de preguntes, però, són figues d'un altre paner. Va ser un esforç considerable, no sols perquè són 400 preguntes, sinó perquè a més han de ser preguntes tals que les respostes siguin comprovables per una màquina. Recordem que les respostes van ser repassades una vegada i una altra.

Una altra qüestió n'és el patrocini. Les negociacions amb les institucions que van donar premis foren grates però laborioses. Requereixen temps i dedicació.

Té sentit repetir el joc en el si d'una institució, el CRM, que es dedica a la investigació? Si parlem d'una sola vegada i en el context de l'Any Mundial de les Matemàtiques, és clar que sí, però, pot esdevenir una activitat regular?

Totes aquestes reflexions qüestionen una possible repetició, però...

11 Apèndix: una tria de preguntes

Per tal que els lectors del BUTLLETÍ puguin passar, si ho desitgen, una bona estona jugant, ni que sigui *en diferit* al *mq2000*, acabem aquest article amb un recull de preguntes extret de la base de dades original del joc. Per tal de respectar l'enunciat precís de les qüestions, les reproduïm aquí en el seu format original, en anglès. Estan ordenades segons la classificació de l'AMS.

1. Eight men (or ghosts) gather on top of Mount Olympus. Let's call them a to h. They talk in this way:

   a) My name is Bernoulli and my thesis was on the action of the lungs.

   b) My name is Bernoulli and I discovered the St. Petersburg paradox.

   c) My name is Bernoulli and I studied the oscillating plate.

   d) My name is Bernoulli and I solved Huygens' fifth problem.

e) My name is Bernoulli and it was me and not my brother who first solved the brachystochrone problem.

f) My name is Bernoulli and I was director of the observatory in Berlin.

g) My name is Bernoulli and I studied orthogonal trajectories.

h) My name is Bernoulli and I was professor of rhetoric.

Put the men a to i in increasing chronological order (of birth).

2. One evening in 1916, while lying in jail scheduled to be shot by a firing squad the next morning, a teacher of mathematics wrote down a formula he was particularly fond of:
$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1.$$
The sentence was suspended (maybe because of fear of public outcry or maybe because of his american passport) and he was eventually set free a few months later, thus initiating a long political career.

   On June 21st 1972, the story was told by the man himself to a renowned physicist, who included it as a footnote in a treatise on relativity, written in collaboration with two colleagues.

   Who was the teacher of mathematics that was not shot the next morning?

3. My daughter! with thy name this song begun–
My daughter! with thy name thus much shall end–
I see thee not. –I hear thee not, –but none
Can be so wrapped in thee; thou art the friend
To whom the shadows of far years extend:
Albeit my brow thou never shouldst behold,
My voice shall with thy future visions blend,
And reach into thy heart, –when mine is cold, –
A token and a tone even from thy father's mould.

   These lines of lament were written by someone who separated from his daughter when she was not even one month old, and who never managed to see her again. The daughter was particularly gifted and showed mathematical precocity before she was fifteen but didn't attend university —an unlikely place for a woman at that time.

   Who was the well-known mathematician of the period that gave her private training in mathematics?

4. Which of these mathematicians have never appeared on the front cover of *The Mathematical Intelligencer*: a) Archimedes, b) Euler, c) Hopf, d) Killing e) Lang, f) Sierpinski, g) Struik, h) Wiener?

5. There has been some dispute about the paternity of the method of least squares, Gauss and Legendre being the main candidates. However, there has been a third, lesser known candidate. Who was that man?

6. Let f be the 2π-periodic function such that $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$ for $0 < x < 2\pi$. Consider the partial sums of its Fourier series $S_N(f,x) = \sum_{|n|\le N} \hat{f}(n)\, e^{inx}$. Then $S_N(f,x) \to (f(x^+) + f(x^-))/2$ but not uniformly near zero. At zero it presents some special phenomenon. This phenomenon was discovered and explained by a mathematician but his work was forgotten for a long time. What is the name of this mathematician and what is the year of publication of his work?

7. The length of the meter was to be based on the measure of the length of arc along the meridian starting in Barcelona and ending in, what city?
8. Francis Galton used a mechanical device to illustrate the principle of the Law of Error or Dispersion. It seems that this device survived for a long time at the Galton Laboratories. What is the name of this device?
9. There was an important neurologist, grandson of a well known mathematician, who wrote a richly illustrated 340-page monograph to demonstrate the correlation between mathematical ability and bumps on the head. He was able to get the grandfather's skull to illustrate the theory. Who was his grandfather?
10. The "compact exceptional simple Lie group of rank 8 and dimension 248, commonly called E_8" once wrote a letter to a mathematician. The mathematician published the letter in a paper in the Journal of Pure and Applied Algebra. In that letter, E_8 challenges many widespread opinions about this group, like holding world records for torsion. After arguing that *one can award a title to E_8 only by restricting the competition to simply-connected groups*, E_8 notes that it would be unfair to award a title for drinking beer having fixed the rules so as to exclude all citizens of three particular cities where they actually *brew or drink much of the stuff*. Two of the cities are Heidelberg and Munich. Which is the third?
11. > *So fängt denn alle menschliche Erkenntnis mit Anschauungen an, geht von da zu Begriffen und endigt mit Ideen.*

    This quotation from Kant's *Kritik der reinen Vernunft* appears at the beginning of a celebrated geometry book. The first edition of this classic work appeared in a *Festschrift* which contained also a work on electrodynamics by some other author. Who was the author of that companion work?
12. On 1534, a mathematics book was re-edited. In this new edition there was a list of approximations of square roots which originated a long controversy among historians of mathematics. For instance, the rather trivial approximation $\sqrt{300} \approx 17 + \frac{11}{35}$ which appeared in the first edition of the book was changed to $\sqrt{300} \approx 17 + \frac{25}{78}$. This optimal approximation suggested to some scholars that the author could solve Pell's equation, long before Fermat was born. Who was the author of that book?
13. On 1737 a book with the following title was published:

    > *Unwiderrufflicher Wohlgegründter Und Ohnendlicher Beweiss Der Wahren Quadratur des Circuls, oder des Durchmessers zu seinem Umcreyss. Zu Abermaligen und noch mehreren Ehren-Ruf der ganzen Hoch-Edlen Deutschen Nation und Aufnahm der edlen Mathematischen Wissenschafften, auch zum Besten des gemeinen Weesens und Nussens der studirenden Jugend, Besonders aber Zur Erfandtnuss der goldenen Wahrheit wider die sich anmassende und ungegründte Widerlegung Hn. J. J. Marionii. Berabsaffet, Und zu einem unpartheyischen Urtheil der gantzen Welt in offentlichen Druck befordert von Josepho Ignatio Carolo de Leistner. Der Römisch-Kayserlichen Majestät Rittmeistern, Inventore Quadraturæ Circuli. Cum Gratia & Privilegio S.C.R.C. Majestatis, & Licentia Superiorum.*

    Which was the *exact* value of π, according to this book?

14. *Sicque septum omnino circulis Mercurius currit, Venus quinque, Tellus tribus et circa eam Lun quatuor. Mars demum Juppiter et Saturnus singuli quinque. Sic igitur in Universum 34 circuli sufficiunt, quibus tota mundi fabrica totaque siderum chorea.*

    These are the closing words of a book with seven short chapters in which a striking (at that time) hypothesis concerning the universe is put forth. The book contains no proofs of any kind, as they were intended for a larger work, which was cautiously dedicated to Pope Paul III. What is the name of the book?

15. There was a legend told by Diogenes Laertios saying that Pythagoras once wanted to participate in the Olympic games but was excluded for being too young. Then Pythagoras disguised himself as an older man and was a winner. When Eratosthenes tried to determine the chronology of Pythagoras, he discovered that somebody called Pythagoras indeed appeared in the list of winners of a particular Olympic games. He concluded that the legend was a true one. Which year were these Olympic games held?

16. On May 3, 1940, André Weil was on trial accused of desertion. Which mathematician attended the trial and testified on Weil's behalf?

17. At the end of the XVI century the king of Spain, Philip II, learned from his own interception of French letters that the king of France, Henry IV, was able to decipher spanish letters written in a code that Philip's advisers had thought unbreakable. Irritated, Philip complained to the Pope that Henry could have read his ciphers only by black magic. Instead, a lawyer from Poitou, who had become a privy counselor of Henry, was responsible for this ability in breaking ciphers. Who was this man?

18. One of the bodies in our Solar System bears the name of a character in a well-known play by William Shakespeare. Some words from his/her last lines in the play became, some centuries later, the title of a novel written by the grandson of a well–known biologist, who strongly supported Darwin's theories. Which is the name of the character/solar–system–body?

19. Write the ordinal $(\omega+\omega+1)^2 2$ "to the base ω", i.e. find natural numbers a, b and c such that
$$(\omega+\omega+1)^2 2=\omega^2 a+\omega b+c.$$

20. A graph G has the following properties: 1) G does not contain any tree with 125 vertices; 2) any set of 125 vertices in G contains a pair of vertices which are joined by an edge; 3) no graph with more vertices than G satisfies 1) and 2). How many vertices are there in G?

21. Any map on a certain (closed connected compact orientable) surface S can be colored with n colors and less colors are not enough. If we add one handle to S, one more color is necessary. If we add 100 handles to S then $n+1$ colors suffice. If we subtract 99 handles from S then $n-1$ colors suffice while if we subtract 198 handles from S then $n-1$ colors are necessary. Give the genus of S.

22. Consider the identity
$$\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k}\binom{n}{k}^p=\sum_{k=0}^{[n/2]} x^k y^k (x+y)^{n-2k}\binom{n}{ak}\binom{ak}{k}\binom{n+k}{k},$$
where p, a are positive integers. Write p, a.

23. d is a square-free integer such that the integers in the number field $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ form a euclidean domain while the integers in $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ form a non-euclidean unique factorisation domain. Find d.
24. The fuchsian group $\Gamma(5)$ acts properly and discontinously over the upper half-plane $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. How many points is it necessary to add to the Riemann surface $\Gamma(5)\backslash H$ in order to make it compact?
25. Among the cyclic groups $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, for $1 \le N \le 12$, only one does not appear as the torsion group of the group of $\mathbb{Q}$-rational points of an elliptic curve defined over $\mathbb{Q}$. Write this value of N.
26. Let E be the elliptic curve defined by the Weierstrass equation: $y^2 = x(x-1)(x-26)$. Write the number of connected components of the special fiber at the prime 5 of the Néron model of E.
27. For any positive integer n, let $\omega(n)$ denote the number of different prime factors of n. The series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\omega(n)}}{n^2} = 1 + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{4^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{4}{6^2} + \cdots$$

is convergent and the sum is a rational number. Write this rational number.
28. Let k be a field and R a homogeneous algebra ($R = k \oplus \bigoplus_{n>0} R_n$ is a graded algebra generated by R_1). We can attach to R its Hilbert series:

$$H_R(t) = \sum_{n \ge 0} h(n)t^n, \quad h(n) = \dim_k(R_n).$$

Which of the following series are the Hilbert series of a homogeneous k-algebra?

a) $1 + 3t + 5t^2 + 8t^3$
b) $1 + 3t + 5t^2 + 7t^3$
c) $1 + t + 2t^2 + 3t^3 + 4t^4 + \cdots$
d) $1 + 2t + 3t^2 + 4t^3 + 5t^4 + \cdots$

29. Write the sequence of Weierstrass gaps at a ramification point of a hyperelliptic curve of genus 6.
30. Let $\mathcal{M}_g$ be the moduli space of complex projective smooth curves of genus g and let $\bar{\mathcal{M}}_g$ be the Mumford-Deligne compactification by adding isomorphy classes of stable curves. The boundary $\bar{\mathcal{M}}_g \setminus \mathcal{M}_g$ is a codimension one subvariety which is the union of $n(g)$ irreducible subvarieties. Write $n(13)$.
31. Let us consider the space $\mathbb{R}^n$ with the Euclidean scalar product. What is the maximal number of orthogonal operators $A_1, A_2, \cdots, A_m$ in $\mathbb{R}^n$ with $n = 215040$ satisfying $A_j^2 = -I$, $A_k A_j + A_j A_k = 0$, for all $1 \le k \ne j \le m$?
32. If $A = (a_{ij})$ is a square matrix, we consider

$$f(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Write the minimum value taken by the function f when A ranges on all 6×6 real matrices with non-negative entries such that each row and each column of A add to 1.

33. Let $\mathfrak{g}$ be the Kac-Moody Lie algebra associated to the generalized Cartan matrix
$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -18 & 2 \end{pmatrix}$$
and let W be the Weyl group of $\mathfrak{g}$. W is an infinite group but its abelianization is a finite group. Write down its order.
34. Determine
$$\dim_{\mathbb{Q}} \bigoplus_{i=1}^{170} \Big(K_i(\mathbb{Z}[\sqrt{-1}\,]) \otimes \mathbb{Q}\Big).$$
35. How many non abelian groups G of order ≤ 64 are there with the property that all subgroups of G are normal.
36. Consider all finite groups G which act on finite sets X (which have at least 8 elements) in such a way that G is not 4-transitive, but acts transitively on the set of all subsets of X of four elements. Give the order of the biggest such group G.
37. K is a finite field such that the twisted Chevalley group $G := {}^2G_2(K)$ is not simple. Write the order of G.
38. Consider these compact Lie groups: SO(125), G_2, Spin(22), SU(14), Sp(19), Spin(16). Write down the dimensions of the groups in this list which have a central element of order 4.
39. Among all the real polynomials of the form
$$p(x) = x^{10} + a_9x^9 + \cdots + a_1x + a_0,$$
there is $\mathcal{P}(x)$ such that $\max_{1\leq x\leq 5} |\mathcal{P}(x)|$ assumes the least possible value. What is the value of $\mathcal{P}(2)$?
40. Let us consider, for natural numbers u, v and k and integers m and n, the equation
$$\frac{k\pi}{4} = m\arctan(\frac{1}{u}) + n\arctan(\frac{1}{v}). \qquad (1)$$
One well-known example of a solution of the equation (1) is the formula:
$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239}). \qquad (2)$$
How many different and nontrivial solutions of (1) are there and what is the name of the mathematician that discovered formula (2)?
41. One has the following fact: there exists a constant β such that for any collection of points $z_1, z_2, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$ it is possible to find a subset $S \subset \{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$ such that
$$\left|\sum_{j\in S} z_j\right| \geq \beta \sum_{j=1}^{n} |z_j|.$$
This β cannot be replaced by any larger value. What is this β?
42. Let us consider the integrals
$$I_p = \int x^{\frac{5}{2}}(ax^{\frac{13}{3}} + b)^p\,dx,$$

where $a \neq 0, b \neq 0$ are real numbers and p is a rational number. Write the minimum value of $p > 0$ such that I_p can be expressed in terms of elementary functions.

43. One has the inequality

$$\int_0^3 f'(x)^2\,dx \geq c \int_0^3 f(x)^2\,dx,$$

for some constant c and for all real functions f that have a continuous derivative in $[0,3]$ and that $f(0) = f(3) = 0$. Write the value of the best constant for which above inequality is true.

44. Assume that we have a C^∞ function $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ such that $f^{(k)}(x)f^{(k+2)}(x) \leq 0$ for all $k = 0,1,2,\cdots$ and for all $x \in (-1,1)$. Then there exists an entire function such F that $F(x) = f(x), x \in (-1,1)$. The number α,

$$\alpha = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{r}, \text{ where } M(r) = \sup_{|z|=r} |F(z)|,$$

is called the degree of f. The degree of any function satisfying the conditions stated above is not greater than a number β. What is this number?

45. Let n be a positive integer. Consider the following result in measure theory: There exists a set function μ defined for all subsets of $\mathbb{R}^n$ such that

   a) $0 \leq \mu(E) \leq \infty$, for all $E \subset \mathbb{R}^n$.
   b) $\mu([0,1]^n) = 1$.
   c) μ is finitely additive.
   d) $\mu(A) = \mu(B)$ if A and B are isometric.

   Write (in increasing order) all n for which the stated result is true in $\mathbb{R}^n$.

46. Let f be an entire function of order $p \in \mathbb{R}^+$. A finite number $a \in \mathbb{C}$ is called an asymptotic value for f if there is a curve γ going out to ∞ with $f(z) \to a$ as $z \to \infty$ along γ. We have the following theorem: An entire function of order p (integral or not) cannot have more than $\alpha(p)$ asymptotic values. Write $\alpha(10)$.

47. Let z_1, z_2, z_3 be three non-collinear complex numbers. Consider the function F and the points ζ and η

$$F(z) = \frac{-2}{z - z_1} + \frac{5}{z - z_2} + \frac{3}{z - z_3},$$

$$\zeta = \frac{5}{3}z_1 - \frac{2}{3}z_2, \quad \eta = \frac{3}{8}z_2 + \frac{5}{8}z_3,$$

   and let a, b be the zeros of F. We present the following statements.

   a. a, b lie in the convex hull of $\{z_1, z_2, z_3\}$ (i.e. the triangle with vertices z_1, z_2, z_3).
   b. The angle $a\zeta z_1$ equals the angle $b\zeta z_1$.
   c. $|\zeta - b| + |\eta - b| = |\zeta - a| + |\eta - a|$.
   d. $|\eta - a| + |\eta - \zeta| + |\eta - b| \leq |a - b|$.

Which of the previous statements are (or is) not true?

48. Write the minimum value of p such that the following holds: For any meromorphic function $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ that is not a rational function and any disjoint Jordan regions $D_1, D_2, \cdots, D_p$ in $\mathbb{C}_\infty$ there exists at least one of them, D_j, for which a branch of f^{-1} is well defined on D_j.
49. A rational map of degree $d \geq 2$ has at most $p(d)$ non-repelling cycles, where $p(d)$ is a polynomial in d and this result is sharp. Write $p(d)$.
50. Given a compact set $K \subset \mathbb{C}$, we define

$$C(K) = \max_\mu \left\{ \mu(1) : \int_K \log \frac{1}{|x - y|} \, d\mu(y) \leq 1, \forall x \right\}$$

where μ ranges over all positive measures. We set $C_\ell(K) = e^{-C(K)^{-1}}$. Let $S_n(a)$ be a star consisting of n rays $\arg z = 2\pi \frac{k}{n}$, $|z| < a$, $k = 1, \cdots, n$. Write $C_\ell(S_4(2))$.

51. A homogeneous metallic ellipsoid

$$x^2/9 + y^2/4 + z^2 \leq 1$$

acquires an electrical charge E. According to the laws of electrostatics, the continuous potential U is constant inside the body, and it satisfies a Laplace equation outside the body, with the condition that $U \sim E/\rho$ at a great distance ρ from the origin. The density $\sigma(x, y, z)$ of charge at a point (x, y, z) on the surface is given by the diference of the derivatives of U along the vector normal to the surface taken from both sides. What is the exact value of the ratio $\sigma(0, 0, 1)/\sigma(3, 0, 0)$?

52. Let A be an analytic subset of the ball $\{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 4\}, n > 1$ of dimension p at all of its points, and assume that $d = 3$ is the distance of A from 0. Then $\sum_{k=1}^n m(\pi_k(A)) \geq c$, where c is some sharp constant, π_k are the projections onto $\mathbb{C}$ and m is the Lebesgue measure on $\mathbb{C}$. Write the value of c.
53. Let us present the following statements about the existence of functions of several complex variables:

    a. There exists a biholomorphic mapping $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ for which the set $\mathbb{C}^2 \setminus f(\mathbb{C}^2)$ contains a nonempty open set.
    b. There exist a bounded region Ω in $\mathbb{C}^n, n > 1$ and a holomorphic function $F : \Omega \to \Omega$ such that for some $p \in \Omega, F(p) = p$ and $F'(p) = I$ but $F \neq$ identity.
    c. There exist a domain $\Omega \subset \mathbb{C}^n, n > 1$, a compact subset K of Ω such that $\Omega \setminus K$ is connected and a holomorphic function $f : \Omega \setminus K \to \mathbb{C}$ with no holomorphic continuation to all Ω.
    d. There exists a bounded holomorphic function $f : B \to \mathbb{C}$, where B is the unit ball in $\mathbb{C}^n, n > 1$ such that $\lim_{r \to 1} |f(r\zeta)| = 1$ a.e. on ∂B, and the set $\{\zeta \in \partial B : f(r\zeta), 0 \leq r < 1$ is dense in the unit disc of $\mathbb{C}\}$ is dense on ∂B.
    e. There exists a holomorphic curve $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$, $n > 1$ for which the set of limits over all possible sequences (z_n) that converge to infinity coincide with all of $\mathbb{C}^n$

    Write in alphabetic order the items that are true statements.

54. The name of the French mathematician Eugène Catalan (1814–1894) is now associated to different questions as a constant, a ruled surface, a diophantic equation, some combinatorial problems, etc. We present several numbers:

    a) $\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\right) dk.$

    b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$

    c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}.$

    d) $-\frac{\pi^2}{4}\int_0^1 (x-\frac{1}{2})\sec(\pi x)\,dx.$

    e) $\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{t}{\cosh t}\,dt.$

    f) $\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{x^2}{e^x-1}\,dt.$

    Which of the previous numbers is (are) not the Catalan constant?

55. Consider the equation

$$y'' + (\lambda + \sin 2x + \cos 4x)y = 0,$$

where $\lambda \in \mathbb{R}$. It is known that there exists a monotonically increasing infinite sequence of real numbers $\lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 < \lambda_3 \le \lambda_4 < \cdots$ such that the equation has a solution of (least) period π if and only if $\lambda = \lambda_n$, for some n. For what value of k does the estimate

$$\lambda_{2n} = 4n^2 + \frac{k}{n^2} + o(n^{-2})$$

hold?

56. Consider a fundamental mode of vibration of a circular membrane of radius 1 having 5 nodal circles, including the center and the edge, and three nodal diameters (vibrations are governed by the equation $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$, where $u(x, y, t)$ is the vertical displacement of the point (x, y) of the membrane). What is the radius of the middle inner circle? Give the answer as a real number correct to four decimal places after the decimal point.

57. Let f be a continuous self-map of an interval I of the real line having, under iteration, points of least period n for any positive integer n except for three different integers a, b, c. What are these values a, b, c?

58. If $\{a_1, \ldots, a_k\}$ is a set of k distinct positive integers whose 2^k subsets all have different sums, then

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} < \alpha,$$

where α is a sharp constant independent of k. Write the value of α.

59. Let H_n be the $n \times n$ matrix whose k, j-th element is $\frac{1}{k+j-1}$. Let α be the number

$$\alpha = 2 \lim_{n\to\infty} 4^n (2 + 1/n)^{2n} \frac{\det H_{n+1}}{\det H_n},$$

where det H_n means the determinant of H_n. Write the number α.

60. Let us consider the integral equation

$$\lambda f(s) = -\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt, \qquad \operatorname{Re} s > 0. \quad (*)$$

For which value of λ the only solution of (*), up to a multiplicative constant, is

$$f(s) = A\left[\frac{\rho}{\sqrt{\pi s}} - \frac{2\log s}{\sqrt{s}}\right],$$

where ρ is a well determined real number?

61. Let A be a complex operator $A : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$. The set of all values $\langle Au, u\rangle$, where $\|u\| = 1$ is called the numerical range or the Hausdorff set of the operator A. Let us define the operator L by the matrix:

$$\begin{pmatrix} -1+i & 2\sqrt{2}i \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

Write $\frac{a}{2\pi}$, where a is the area of the Hausdorff set of L.

62. For each two dimensional real normed space E we consider the numbers $\beta(E) = L(\partial B_E)$ where $L(\partial B_E)$ is the length of the boundary of the unit ball B_E of E,

$$\alpha = \inf\{\beta(E) : E \text{ is a 2-dimensional normed space}\}$$

and

$$\beta = \sup\{\beta(E) : E \text{ is a 2-dimensional normed space}\}.$$

Write α, β.

63. Which is the least value of C such that the inequality

$$\|u\|_{L_4} \le C\|\nabla u\|_{L_2}$$

holds for any C^∞ function u with compact support in $\mathbb{R}^4$?

64. $\mathcal{P}$ is a (possibly non-desarguesian) finite projective plane in which each line contains a number of points which is $\equiv 3 \bmod 4$. $\mathcal{P}$ has an involution. Determine the number of lines of $\mathcal{P}$.

65. Let P be the perimeter of a convex quadrilateral of diameter d. What is the smallest value of the constant β such that $P \le \beta d$ for all such P? Give the answer with 10 decimal digits.

66. Let $E = [0,1] \times [0,1]$ be the unit square. For $\lambda \in (0, 1/2)$ define the transformation $f : E \longrightarrow E$

$$f(x,y) = \begin{cases} (2x, \lambda y) & (0 \le x \le \frac{1}{2}) \\ (2x-1, \lambda y + \frac{1}{2}) & (\frac{1}{2} < x \le 1) \end{cases}$$

Consider the set $A = \bigcap_{k=0}^\infty f^k(E)$. For which value λ is the Hausdorff dimension of A equal to $3/2$?

67. Let R, r and p be the radius of the circumcircle, the radius of the incircle and the perimeter of a triangle, respectively. For which value(s) of (R, r, p) in the following list does a triangle exist? (a) (6, 6, 12); (b) (10, 1, 25); (c) (15, 1, 34); (d) (7, 3, 4); (e) (12, 2, 42).

68. Some classical constructions which are impossible to do with ruler and compass become possible if one uses a compass and a *marked* ruler. Which one(s) of the following constructions cannot be done with only compass and marked ruler? (a) Trisection of any angle; (b) Cube duplication; (c) The regular heptagon; (d) The regular nonagon; (e) The regular 11-gon; (f) Division of any angle in five equal parts.
69. The *great icosahedron* is one of the Kepler-Poinsot polyhedra. It has 12 vertices, 30 edges and 20 faces. The faces are star-pentagons, also called *pentagrams*. Assume the edge of a great icosahedron has length 1. What is its volume?
70. Take two equal (hyper-)cubes in euclidean 4-space. Dissect one of them in 8 pyramids whose bases are the 8 solid faces of the cube and whose apex is the center of the cube. Glue each pyramid to one of the 8 solid faces of the other cube. You obtain in this way a new four dimensional polytope. Which one? (a) The tetrahedron. (b) The 16-cell. (c) The tessaract. (d) The 24-cell. (e) The 600-cell. (f) The 120-cell. (g) The star-polytope $\{5, 3, \frac{5}{2}\}$. (h) The star-polytope $\{\frac{5}{2}, 3, 3\}$.
71. There is a circle C centered at the origin and a circle c of radius 21 centered at $(20, 0)$. There is a triangle with vertices at C and sides tangent to c. Find the radius of C.
72. Let S be a finite set of points in $\mathbb{R}^2$ with minimun mutual distance 1. Let $f(n) = \min_{|S|=n} D(S)$, where $D(S)$ is the diameter of the set S. What is the number
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n}\,\sqrt[4]{3}}{f(n)}\,?$$
73. Let P and Q be 2-dimensional subsets of $\mathbb{R}^2$. Then P and Q can be separated (not necessarily strictly separated) by a line if and only if for each subset T of k or fewer points of $P \cup Q$ there exists a line that separates $T \cap P$ and $T \cap Q$. Write k.
74. A compact subset K of $\mathbb{R}^2$ is a universal cover in $\mathbb{R}^2$ if any subset S of $\mathbb{R}^2$ having diameter one can be covered by a congruent copy of K. Consider the following statements:

    a. the smallest square that is a universal cover in $\mathbb{R}^2$ has sides of length...,
    b. the smallest circle that is a universal cover in $\mathbb{R}^2$ has radius ...,
    c. the smallest regular hexagon which is a universal cover in $\mathbb{R}^2$ has sides of length ...,
    d. the smallest equilateral triangle that is a universal cover in $\mathbb{R}^2$ has sides of length ...

    Make a correspondence between each statement and the missing numbers, that can be: (1) $\sqrt{3}$; (2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; (3) 1.
75. Let R be a compact Riemann surface of genus $g \geq 2$. Then the order of the group of holomorphic transformations of R is at most $c(g-1)$ and this is the best possible estimate. Write the value of c.
76. Which of the following manifolds do not admit any contact structure:
(a) $SU(3)/SO(3)$. (b) The 3-torus. (c) The 5-torus. (d) The 15-sphere. (e) $\mathbb{R}P^{19}$. (f) The Poincaré sphere.

77. Let T be a maximal torus of the compact Lie group F_4 and consider the homogeneous space $M = F_4/T$. How many invariant almost complex structures are there on M? How many of these are integrable?
78. $\lambda = 114$ turns out to be an eigenvalue of multiplicity 9102 of the Laplacian on the unit sphere in $\mathbb{R}^m$. Find m.
79. We tessellate $\mathbb{R}^3$ by identical rectangular parallelepipeds with sides of lengths 2, 3 and 4. There is somewhere in $\mathbb{R}^3$ a needle of length 1. What's the probability that this needle does not intersect with any of the walls of the parallelepipeds? Give twelve decimal digits.
80. After submerging a wire frame in a soap solution, you obtain a system of soap films, consisting of several surfaces which meet at some edges. At each liquid edge exactly three surfaces of the system meet and any two of them enclose an angle of 120 degrees. But you also observe that there are some points where four liquid edges meet. What angle do any two of these edges form? Give the cosinus of the angle.
81. Consider the canonical Riemannian structure on the Cayley projective plane $\mathbb{K}P^2$ obtained as a quotient of the unit sphere. Give the volume of $\mathbb{K}P^2$.
82. Let $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \cdots$ be the eigenvalues of the Laplacian on a compact connected Riemannian n-manifold (M, g). It is well known that there is an asymptotic expansion

$$\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda_i t} \sim_{t \to 0_+} (4\pi t)^{-n/2}(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots).$$

Give the value of $-a_1$ when M is an orientable surface of genus 10.
83. Find the maximum number of orthonormal vector fields on the 139263-sphere.
84. Consider the homotopy groups of the compact Lie group SO(4). Find the smallest value of k such that $\pi_k(\mathrm{SO}(4))$ has an element of order 7.
85. What is the smallest number of crossings of a knot whose Jones polynomial is in $\mathbb{Z}[t]$?
86. Take a right-handed trefoil knot and do +1 Dehn surgery on it. Give the order of the fundamental group of the resulting three-manifold.
87. Consider the real projective space of dimension 97, $\mathbb{R}P^{97}$. Find the smallest N such that $\mathbb{R}P^{97}$ has an immersion into the euclidean space $\mathbb{R}^N$.
88. Let M be a compact oriented smooth 12-manifold and let p_1, p_2 and p_3 be the Pontrjagin classes of the tangent bundle of M. Then there is a universal (i.e. independent of M) polynomial on p_1, p_2, p_3 with rational coefficients such that the *signature* of M can be expressed as

$$\sigma(M) = \langle ap_3 + bp_1p_2 + cp_1^3, \mu_M \rangle$$

where μ_M is the fundamental class of M. Write the values of a, b, c.
89. If X is any random variable taking values on $[0, 1]$ and $V(X)$ is its variance, what is the smallest number M such that $V(X) \le M$?
90. Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be independent identically distributed random variables. Suppose that there exist constants $a_n > 0$ and b_n such that $\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n-b_n}{a_n}$ converges in law to a random variable X not concentrated at one point. Only one of the

following distributions can be a limiting distribution. Which one? 1) Laplace; 2) Cauchy; 3) Uniform; 4) Poisson; 5) Gamma; 6) Logistic; 7) Extreme-value.

91. Suppose that for any sample size of a continuous random variable X with expectation μ, the sampling mean and the sampling variance are independent random variables. Calculate $P(X > \mu)$.
92. Given the following 4 observations: 3.2, 3.5, 2.9, 2.4, coming from a normally distributed random variable, calculate the *best* estimate of its population standard deviation. The word *best* means that the minimum variance unbiased estimator must be used. (The answer must be written to 3 decimal places).
93. What is the minimum value of

$$2n \int_0^{\pi} |x - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \sin(kx)| \, dx$$

for all possible choices of α_k and arbitrary $n \geq 2$?

94. Consider the expansion for the solution $E(M)$ of the Kepler equation $M = E - e \sin E$, (where E is the eccentric anomaly, M is the mean anomaly and e is the eccentricity of an elliptic orbit)

$$E(M) = M + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dM^{n-1}} \sin^n M.$$

Which is the limiting value of e such that the series converges for all values of M? The answer should be given as a truncated (not rounded) real number with six decimal positions after the decimal point.

95. Consider the circular planar restricted three–body problem with primaries of masses $1 - \mu$ and μ, with $\mu \leq \frac{1}{2}$, at distance 1 from each other. What is the limiting value μ_0 such that if $\mu > \mu_0$ then the triangular equilibrium points of Lagrange are unstable, and stable otherwise? The answer should be given as a truncated (not rounded) real number with ten decimal positions after the decimal point.
96. A particle is moving with period 2π on a Keplerian ellipse of semi major axis $1/2$ around a center of Newtonian force at point O. We consider two points P_1 and P_2 on the ellipse such that the lengths of the segments OP_1, OP_2 and P_1P_2 are $OP_1 = 0.202589$, $OP_2 = 0.304098$, $P_1P_2 = 0.302285$. How long will it take for the particle to go from P_1 to P_2 along the arc which does not contain the pericenter? The answer is a positive real number, truncated to four decimal places after the point.
97. A homogeneous gravitating mass of incompressible liquid of density $\rho \equiv 1$ in the shape of an axially symmetric, oblate ellipsoid is rotating about its minor axis with constant angular velocity, in the absence of any gravitational field other than that created by the fluid itself. The particles of the fluid are at relative equilibrium in the rotating frame of reference and it is known that, in a given system of units, the angular velocity is unity when the eccentricity of a meridian section of the ellipsoid is $e = 0.2$. What is the value of the angular velocity if $e = 0.1$? The answer is a real number, truncated to 4 decimal places after the point.

98. Due to the slowing down of the Earth's rotation, a truly uniform scale of time, such as defined by electronic devices, will slowly deviate from a scale based on the rotation of the Earth. A new scale is defined by the introduction, when necessary, of one–second steps in a uniform scale in order to keep it within 0.9 seconds of the time scale associated to the angular position of the stars with respect to our planet. How many times has this operation been performed between February 1, 1980, and September 1, 1992?

99. In 1861 Thomas Hare proposed a voting procedure which was considered later by John Stuart Mill as being *among the greatest improvements yet made in the theory and practice of government.* This system, which is actually used in some countries, works as follows: a) Each elector produces an ordered list of candidates; b) If some candidate is on top of more than half of the lists, this candidate is the winner; c) If not, then the candidate which appears at the top of the fewest lists is deleted from all lists and the process is repeated at point b. (To simplify, we assume that there are no ties.)

    Which of the following properties could fail in such a voting system?

    a) If everyone prefers x to y then y can't win.
    b) If x is the winner and a voter changes his/her preferences and moves x up one spot then x is still the winner.
    c) If x is the winner and $x \neq y$ and some electors change their preferences without changing the relative position of x and y then y can't become the winner.
    d) If x is such that for any other alternative y one finds x occurring above y on more than half the lists, then x is the winner.

100. We pack unit balls in euclidean n-space inductively as follows: We start with the hexagonal packing of circles in the plane. Given a packing in $(r-1)$-space, we stack as close together as possible layers consisting of copies of this packing and get a packing in r-space. Consider the packing in $\mathbb{R}^{22}$ obtained in this way. How many balls touch a given ball?

Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
08193 Bellaterra
aguade@mat.uab.es

Servei d'Informàtica
Fundació Blanquerna
Universitat Ramón Llull
rafelsf@blanquerna.url.es