Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 16, núm. 2, 2001. Pàg. 31–42

Allò que tenen a veure les finances amb la difusió de substàncies*

Àngel Calsina

1 Què tenen a veure els pèndols amb els linxs i les llebres?

L'any 1925 un americà d'origen polonès anomenat Alfred Lotka va publicar un llibre titulat *Elements of Physical Biology* ('Elements de biologia física') [3] que tractava de les interaccions que determinen l'abundància dels organismes (és a dir, d'ecologia).

El contingut més conegut del llibre de Lotka és un model per explicar les oscil·lacions observades a les poblacions de linxs i llebres de l'Àrtic al Canadà. Es tracta d'un sistema d'equacions diferencials força senzill que s'explica gairebé sempre en un primer curs d'equacions diferencials i també en els cursos de matemàtiques per a estudiants de Biologia. Concretament, el sistema pren la forma

$$\begin{cases} x' = ax - bxy\,, \\ y' = (-c + dx)y\,. \end{cases}$$

Aquí $x(t)$ i $y(t)$ representen, respectivament, el nombre d'individus de l'espècie presa i de la depredadora. Els nombres a, b, c i d són tots positius; a és el coeficient de creixement malthusià de les preses en absència de depredadors; bxy és el nombre de captures per unitat de temps, mentre que se suposa que el creixement relatiu de la població de depredadors $x'(t)/x(t)$ és una funció creixent (per simplificar, lineal) de la població de preses, de manera que és negatiu $(-c)$ quan no hi ha preses.

Cal dir en aquest moment que, simultàniament i independentment de Lotka, el matemàtic italià Vito Volterra va estudiar el mateix model i que per això el coneixem actualment amb el nom de model de Lotka i Volterra. Volterra estava interessat a explicar uns canvis en la qualitat de les captures pesqueres

*Lliçó inaugural del curs 2001–2002 a la Secció de Matemàtiques de la UAB.

al mar Adriàtic durant la Gran Guerra. Però aquesta és una altra història que ens apartaria del fil que desitjo seguir en aquesta exposició.

El tractament matemàtic del sistema anterior és relativament fàcil i aquesta és, a part de l'estreta relació entre els resultats que s'obtenen i les dades observades, la raó que explica l'èxit del model. En efecte, resulta que la funció

$$f(x,y) = a\ln y - by + c\ln x - dx \tag{1}$$

(definida per a valors positius de x i de y) té la propietat que si $(x(t), y(t))$ és una solució, llavors la funció $g(t) = f(x(t), y(t))$ és una constant, com es comprova derivant-la i utilitzant el sistema d'equacions diferencials.

Això té com a conseqüència que les corbes solució $(x(t), y(t))$ es troben sobre les corbes de nivell de f. Per tant, *basta* conèixer la gràfica de la funció f per a saber el comportament qualitatiu de les solucions. Com la funció $h(z) = \alpha\ln z - z$, $z > 0$ tendeix a $-\infty$ quan z tendeix a 0 i quan tendeix a ∞, i té un únic màxim, en el punt $z = \alpha$, resulta que la funció f té també un únic màxim, en el punt $(c/d, a/b)$, i tendeix cap a $-\infty$ sempre que ens acostem als eixos de coordenades.

Això fa que les corbes de nivell siguin totes corbes tancades simples que volten el punt de coordenades $(c/d, a/b)$, com es veu a la figura 1.

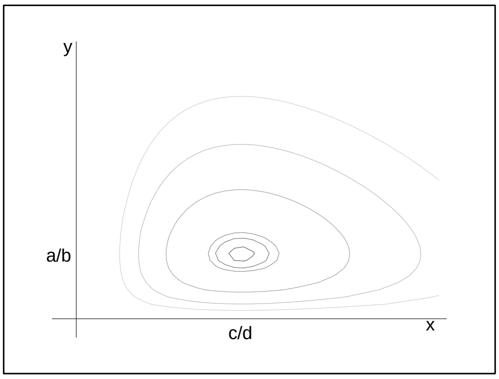

FIGURA 1

Per tant, les solucions $(x(t), y(t))$ corresponents a una condició inicial qualsevol (x_0, y_0) (diferent de $(c/d, a/b)$, que és un punt d'equilibri) són funcions periòdiques amb una diferència de fase igual a la quarta part del període. Dit d'una altra manera, les poblacions de preses i de depredadors oscil·len de forma que quan el nombre de preses és molt petit el nombre de depredadors disminueix ràpidament; a continuació la població de preses es recupera mentre el nombre de depredadors ateny un mínim; aquest nombre creix ràpidament quan la població de preses es troba en el seu màxim i finalment el nombre de preses torna a decréixer quan el nombre de depredadors és màxim, per recomençar el cicle (vegeu la figura 2).

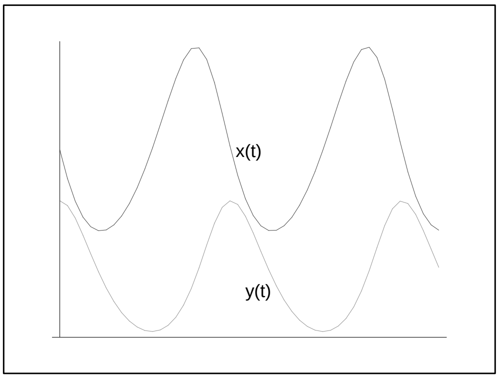

FIGURA 2

Arribats aquí, i sense oblidar la importància històrica d'aquest model en el món de l'ecologia jo voldria que ens fixéssim en un detall del que s'ha dit fins ara. I és aquest, el nom del llibre de Lotka: *Elements de biologia física.* Notem que les idees contingudes en els paràgrafs precedents certament pertanyen a la biologia, en tant que parlen d'interaccions entre espècies d'animals, però també a la matemàtica en tant que parlen de quantitats (d'individus) d'equacions, de funcions i de derivades. No hem parlat de masses ni de corrents elèctrics ni de gasos o líquids. Molt menys hem parlat de lleis físiques de cap mena. De fet l'única física que no ens podem evitar és la presència de la variable independent temporal i, naturalment, el fet que tots els objectes, fins i tot els éssers vius, són en definitiva objectes físics. Però em sembla que podem convenir que no hem fet física en cap dels sentits habituals de la paraula.

Malgrat això, el nom del llibre era *Elements de biologia física.* Per què? Doncs perquè el resultat final ha estat que les poblacions oscil·laven, i és ben conegut que molts sistemes físics oscil·len. De fet, no s'acaben aquí les analogies entre molts sistemes físics i el sistema de Lotka i Volterra. Considerem, a tall d'exemple, el moviment d'un pèndol. Si escrivim el sistema d'equacions per a la posició $x(t)$ (de fet es tracta de l'angle que forma el fil amb la vertical) i la velocitat angular $y(t)$, obtenim un sistema aparentment força diferent del de Lotka i Volterra:

$$\begin{cases} x' = y\,, \\ y' = -\dfrac{g}{l}\sin x\,. \end{cases}$$

Però això només és una aparença. De fet resulta que la funció $h(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{g}{l}\cos x$ gaudeix de la mateixa propietat que tenia la funció f anterior. És a dir, $h(x(t), y(t))$ és una funció constant sempre que $(x(t), y(t))$ és una solució del sistema i per tant les solucions són corbes parametritzades que es troben sobre les corbes de nivell de h. Afegim que un múltiple de la funció h, concretament ml^2h, s'anomena l'energia mecànica del sistema i el fet que no canviï amb el temps, puix que no ho fa h, es coneix com a (un cas particular del) teorema de conservació de l'energia. Certament ara la història segueix com abans i les solucions resulten funcions periòdiques desfasades com en l'exemple anterior (vegeu la figura 3).

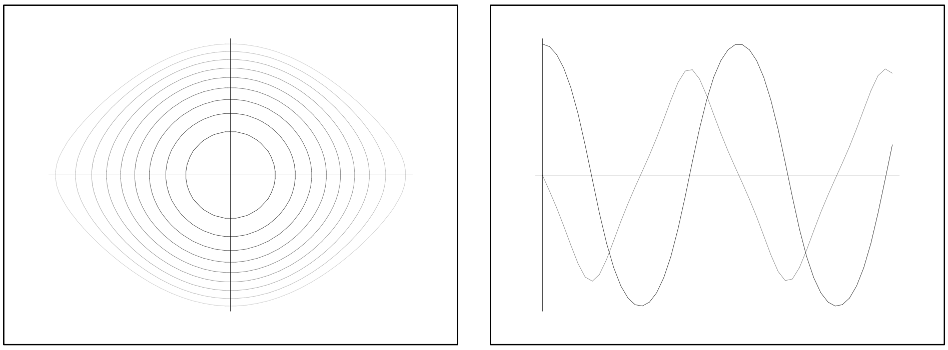

FIGURA 3

Així ens trobem amb un *isomorfisme* inesperat entre dos problemes de natura intrínseca absolutament allunyada. En el segon cas és obvi que parlàvem de física (el moviment d'una partícula) tot i que ho fèiem, com és habitual en tota la física, utilitzant el llenguatge matemàtic. Però, com això és tan habitual, gairebé ens passa desapercebut. Aleshores, donada la isomorfia entre els *tractaments i els resultats* dels dos problemes, potser inconscientment, i perquè la utilització del llenguatge matemàtic era relativament aliè a la biologia, Lotka va titular el llibre *Elements of Physical Biology*. Però és que *tot* el que tenia el seu model de física de fet eren matemàtiques. De fet, *tot* el que hi havia en comú entre el moviment d'un pèndol i l'ecologia de la interacció presa-depredador eren les matemàtiques. Si les poblacions biològiques oscil·laven *com un pèndol*, no era perquè s'assemblessin en absolut a un pèndol, sinó perquè les solucions de les equacions matemàtiques involucrades en cadascun dels models eren *funcions periòdiques*. Significativament, la reedició, de 1956, del llibre de Lotka, es titulava *Elements of Mathematical Biology*.

2 Què tenen a veure les finances amb la difusió de substàncies?

Deixeu-me ara que canviï de tema. Semblarà un canvi brusc però la meva intenció és presentar exemples de parelles, o més en general de famílies, de models allunyats des del punt de vista científic però molt relacionats des del punt de vista matemàtic. Vull doncs, més aviat, fer èmfasi en la unitat de problemes aparentment molt llunyans entre ells.

L'any 1997 es va concedir el premi Nobel d'Economia al professor Myron Scholes de la Universitat de Stanford, als Estats Units. La més important contribució de Scholes ha estat el seu treball als voltants de l'any 1970 amb Fischer Black sobre la valoració d'opcions financeres [1].

Un exemple d'opció financera és un document que dóna dret al seu posseïdor a vendre una acció en determinat moment T (a *termini o venciment*) a un preu també determinat que s'anomena *preu d'exercici*, independentment del preu de mercat de l'acció en aquell moment. És comprensible que aquest tipus d'opcions, que s'anomenen opcions de venda (n'hi ha d'altres, tot i que el tractament resulta sorprenentment semblant en totes), s'utilitzin per assegurar inversions. Algú (generalment un banc) ha de fer-se càrrec del compromís i comprar l'acció de què parlem en cas que el posseïdor de l'opció decideixi *exercir-la* en el moment del venciment, és a dir, utilitzar el document per vendre l'acció al preu d'exercici. Per cert, que només ho farà si la cotització és inferior a aquest preu d'exercici. Naturalment, el banc cobrarà, doncs, una *prima* a qui vulgui contractar una opció (de venda).

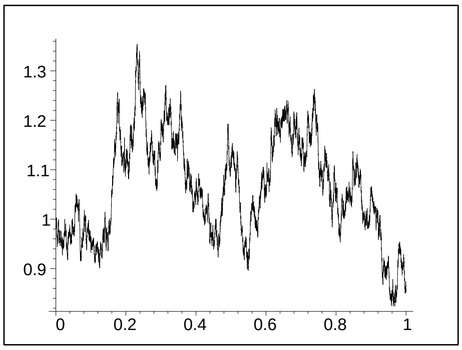

FIGURA 4

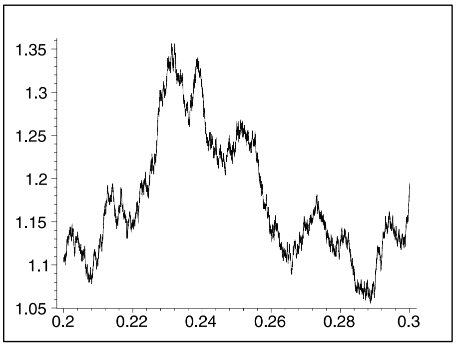

FIGURA 5

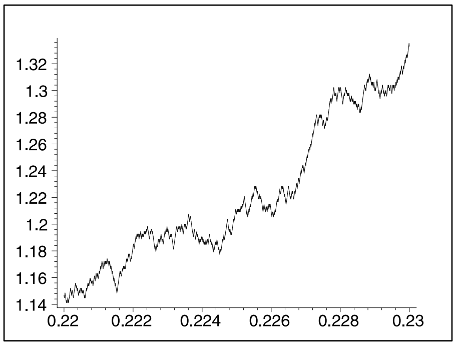

FIGURA 6

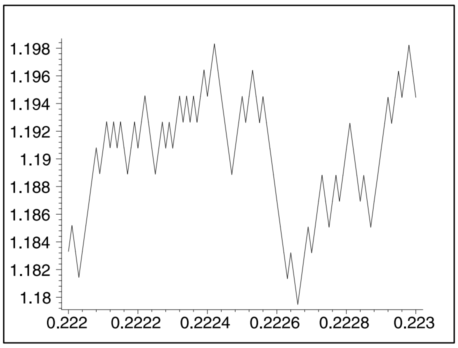

FIGURA 7

El problema que es planteja és, doncs, quina quantitat ha de cobrar el banc per aquesta prima. Més precisament, es vol conèixer $V(S,t)$ (el valor de l'opció) sent S la cotització de l'acció a temps t (equivalentment, quan falten $T-t$ unitats de temps per al venciment). Fixem-nos que, en el moment t de contractar una opció, l'única informació disponible serà precisament la cotització S de l'acció. A primera vista una resposta determinista a la pregunta sobre el valor de $V(S,t)$ sembla impossible perquè la cotització d'una acció és, pel que sabem, aleatòria o, com a mínim, impredictible.

De fet, el model que ens fem del preu S d'una acció a temps t, i que ara no pretenc discutir sinó només utilitzar-lo, és que els canvis relatius dS/S de S en un interval de temps petit de longitud dt es comporten com el que s'anomena procés brownià. Essencialment això consisteix a pensar en el límit quan δt tendeix a 0 d'un passeig aleatori en què, en l'interval de temps entre t i δt, el canvi relatiu del preu de S efectua un salt cap a dalt o cap a baix (positiu o negatiu, doncs) de valor $\sigma\sqrt{\delta t}$ amb la mateixa probabilitat, essent σ una constant anomenada volatilitat. Normalment, a aquest comportament aleatori indiferent s'afegeix una tendència determinista de la qual ara prescindirem per simplificar l'exposició. El fet que el canvi (relatiu) en S sigui de l'ordre de l'arrel quadrada de l'interval de temps (petit) d'observació és una novetat important respecte al que passa en la majoria de problemes en els quals els canvis en les magnituds en intervals de temps petits es produeixen de manera *aproximadament* proporcional a la longitud d'aquests intervals. En particular, fa que $(dS)^2$ tingui un valor determinista i aproximadament igual a σ^2S^2dt quan dt és molt petit. També té una conseqüència important sobre el comportament de la funció S_t que no podem esperar derivable, però la discussió d'això ens portaria molt enllà i no és el que jo vull destacar ara. A les figures 4, 5, 6, 7 es pot veure una simulació del comportament de S_t a diferents escales de temps. En cada cas s'ha passat d'una figura a la següent augmentant l'escala en un factor de 10. La trajectòria és sensiblement autosimilar i s'observa la falta de derivabilitat (la manca de recta tangent) en tots els punts.

Tornem a les opcions i comencem notant que les opcions es compren i es venen com els altres productes financers. Aleshores, la base de l'anàlisi de Black i Scholes consisteix en la hipòtesi que els mercats financers no permeten l'existència d'*arbitratge*, és a dir, de carteres de valors (combinacions de productes financers) que obtinguin guanys sense córrer risc. En efecte, s'admet que una cartera d'aquestes característiques pujaria ràpidament de preu per efecte de la demanda i això anul·laria els seus beneficis. Però, d'altra banda, i com s'ha comentat, les opcions permeten reduir els riscos de les inversions a Borsa i fins i tot, com ara veurem, fer-los desaparèixer.

Recordem que ens hem fet el model següent per al preu a temps t d'un actiu financer: (es tracta del límit quan dt tendeix a 0 d'un procés en el qual) el canvi relatiu en un interval de temps petit dt és:

$$\frac{S_{t+dt}-S_t}{S_t} = \sigma\sqrt{dt}\,X\,.$$

Aquí, dt no es tracta d'un infinitèsim, en principi, i potser fóra millor la notació Δt, però hi ha raons històriques que, en aquest camp, impedeixen d'utilitzar la lletra Δ en el sentit habitual en el càlcul diferencial. D'altra banda, X és una variable aleatòria que pren els valors 1 i -1 amb probabilitat $1/2$ i σ una constant anomenada volatilitat. A més, en els successius passos de temps, les v. a. són independents. En conseqüència, $(S_{t+dt} - S_t)^2 = \sigma^2 S_t^2\, dt$.

Ara volem valorar un *producte derivat* (una opció, per exemple). Això significa (si volem, per *definició*) que es tracta d'un producte financer el valor V del qual depèn només del temps t i del preu S_t de l'actiu *subjacent* a l'instant t. El que és el mateix, *postulem* l'existència d'una funció $V(S,t)$ per al valor d'aquest producte i ara derivem una equació diferencial que, per efecte de les lleis del mercat (la hipòtesi de *no-arbitratge*, és a dir, la impossibilitat d'existència de productes amb benefici i sense risc), necessàriament haurà de satisfer. Resulta xocant per a un matemàtic la utilització d'una lletra majúscula per designar una variable independent i semblaria natural de substituir S per s, però una altra vegada hi ha raons històriques que ho desaconsellen. De fet, la notació que apareix en els llibres de finances és la que estic utilitzant aquí.

Considerem una cartera de valors composta d'una unitat del producte derivat (una opció) i una quantitat $-\Delta$ d'accions (del producte subjacent) a l'instant fixat t i anem a calcular el canvi en el seu valor en un interval petit de temps dt (només ens guardarem els termes de primer ordre en dt). Reconec que tot això fa una ferum de càlcul diferencial clàssic-clàssic, però tinc entès que és aproximadament l'argument utilitzat per Black i Scholes en el seu treball original. Tindrem, utilitzant la fórmula de Taylor per a funcions de dues variables:

$$
\begin{aligned}
V(S_{t+dt}, t+dt) &- \Delta S_{t+dt} - (V(S_t,t) - \Delta S_t) = \\
&= (V(S_{t+dt}, t+dt) - V(S_t,t)) - \Delta(S_{t+dt} - S_t) = \\
&= \frac{\partial V}{\partial S}(S_t,t)(S_{t+dt} - S_t) + \frac{\partial V}{\partial t}(S_t,t)\,dt + \\
&\quad + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S_t,t)(S_{t+dt} - S_t)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial t}(S_t,t)(S_{t+dt} - S_t)\,dt + \\
&\quad + \frac{1}{2}\,\frac{\partial V}{\partial t}(S_t,t)\,dt^2 + \cdots - \Delta(S_{t+dt} - S_t) = \\
&= \left(\frac{\partial V}{\partial S}(S_t,t) - \Delta\right)(S_{t+dt} - S_t) + \frac{\partial V}{\partial t}(S_t,t)\,dt + \\
&\quad + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S_t,t)\,dt + o(dt)\,,
\end{aligned}
$$

on hem utilitzat el model sobre el canvi en el preu de l'acció.

Aquesta expressió és una variable aleatòria (només per la presència dels termes que contenen S_{t+dt}, perquè, en canvi, S_t és *conegut* a temps t) i en termes financers podem dir que té *un risc.* Ara bé, si en l'instant inicial t i, per tant, també en l'interval de temps $(t, t+dt)$ el nombre d'accions que formen la cartera és tal que $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}(S_t, t)$ (això a la pràctica financera es diu cobertura i consisteix en la compra i venda d'accions de manera continuada per a equilibrar la cartera), llavors l'expressió anterior no conté cap terme aleatori de primer ordre en dt i és en primer ordre *determinista* o *sense risc*. Usant ara la hipòtesi de no-arbitratge, no pot tenir cap benefici (ni pot tampoc perdre diners) de forma que, en primer ordre, el canvi relatiu en el seu valor ha de ser de la forma $r dt$, on r és el tipus d'interès d'un dipòsit bancari (suposadament sense risc). És a dir, també

$$V(S_{t+dt}, t) - \Delta S_{t+dt} - (V(S_t, t) - \Delta S_t) = r(V(S_t, t) - \Delta S_t)\, dt) + o(dt) =$$
$$= r(V(S_t, t) - S_t \frac{\partial V}{\partial S}(S_t, t))\, dt + o(dt)\,.$$

Per tant, arribem a la relació

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S_t, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S_t, t) = r(V(S_t, t) - S_t \frac{\partial V}{\partial S}(S_t, t))\,.$$

Aquesta relació entre les derivades de la funció $V(S, t)$ s'ha de complir en el punt (S_t, t), on suposàvem que S_t era el preu de l'actiu a temps t. Però, com això és cert per a qualsevol valor de S_t, de fet hem provat que V és solució de l'equació en derivades parcials de Black i Scholes

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S_t, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) + rS\frac{\partial V}{\partial S}(S, t) - rV(S, t) = 0\,.$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0\,.$$

Aquesta és (una versió lleugerament simplificada de) la famosa equació de Black i Scholes, que va valer el premi Nobel a Scholes, mentre Black ja no va poder rebre aquesta consideració perquè havia mort l'any 1995. Encara que l'equació anterior ja té un aspecte relativament familiar als físics i als matemàtics, de fet es pot tornar encara més senzilla mitjançant els canvis de variable següents:

$$T - t =: \tau\,, \quad \ln S =: x\,, \quad \text{i} \quad e^{(T-t)/4} S^{-1/2} V =: u\,.$$

Llavors resulta la coneguda equació de la difusió

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$

per a la concentració $u(x, \tau)$ d'una substància en un medi unidimensional. Cal fer constar que la mateixa equació apareix en l'estudi de la conducció de la calor i que sovint se la coneix com a equació de la calor. Una manera de justificar aquesta darrera equació és precisament la de recórrer a suposar que les molècules de la substància en qüestió efectuen un *passeig aleatori* de forma que en cada interval petit del temps de longitud h salten del punt x a punts situats a l'esquerra o a la dreta de x i a una distància $\Delta x = \sigma\sqrt{h}$ amb la mateixa probabilitat. Així, si pensem que, en un món discret, $u(x,\tau)$ representa el nombre de molècules situades en el punt x a l'instant τ, tindrem

$$U(x,\tau+h) = \frac{1}{2}u(x-\Delta x,\tau) + \frac{1}{2}u(x+\Delta x,\tau)\,,$$

i, per tant,

$$\frac{u(x,\tau+h)-u(x,\tau)}{h} = \frac{u(x-\sigma\sqrt{h},\tau)+u(x+\sigma\sqrt{h},\tau)-2u(x,\tau)}{2h}\,.$$

Suposant que la funció u es pot derivar convenientment, és un exercici d'aplicació de la fórmula de l'Hôpital, per exemple, obtenir l'equació de la difusió com a límit de l'anterior.

Altra vegada, doncs, ens trobem amb una relació inesperada (i força íntima) entre objectes de natura absolutament allunyada (aquí les finances, la difusió de substàncies i la conducció de la calor).

De fet, la diferència més important entre l'equació de Black-Scholes i la de la difusió és el signe menys que hem introduït per passar de l'una a l'altra en el canvi de variable temporal $\tau = T - t$. Dit intuïtivament, el que és futur per a l'equació de la difusió, és passat per a l'equació de les opcions financeres. Això és així en part perquè el coneixement *inicial* de la concentració d'una substància, abans que comenci a difondre's, correspon amb el coneixement *final* del valor d'una opció a venciment. Per exemple, en el cas de les opcions de venda que discutíem abans, el valor és 0 (són «paper mullat») si el preu de l'acció en el moment del venciment S és superior al preu d'exercici E (no en farem res d'un document que ens garanteixi la venda d'una cosa a un preu inferior al del mercat) i, en canvi, valen $E - S$ en cas contrari (podem vendre l'acció a preu E i recomprar-la a preu S, i guanyar la diferència).

Hi ha un munt de físics i d'enginyers treballant en matemàtica financera. Segur que heu sentit a parlar d'enginyeria financera. De fet, el treball original de Black i Scholes va ser fet al Massachusets Institute of Technology i el mateix Fischer Black és recordat per una fundació en la seva memòria de l'Associació Internacional d'Enginyers Financers (International Association of Financial Engineers).

Però, com abans parlant del model de Lotka i Volterra, vull fer èmfasi en el fet que no hi ha res de física en les finances. No hi ha res que es «mogui» en el sentit físic del terme, ni forces ni substàncies ni camps electromagnètics, ni matèria en general. Potser encara menys que en l'ecologia puix que les finances ens parlen d'un món fictici (de fet fins i tot per a molts economistes són «economia fictícia» o, per que alguns, «especulativa»), mentre que la biologia, al cap i a la fi, sí que ens parla, com deia abans, d'objectes físics. Aleshores, quina és la relació? Què explica que la valoració d'opcions i la difusió de substàncies siguin processos gairebé isomorfs? Certament, no la física, que no té res a veure amb les finances, sinó, òbviament, la matemàtica. Atribuir aquesta relació a la física és el mateix error d'abans, el que va portar a titular *Elements de biologia física* el llibre de Lotka. Com que la física utilitza el llenguatge matemàtic amb més freqüència que les «ciències toves», llavors, quan aquestes ho fan, caiem en l'error de pensar que estem fent física. Quan, de fet, tant en el cas de la física com en els altres, el que estem fent és matemàtiques. En cert sentit, doncs, sí que van tenir premi Nobel les matemàtiques, almenys l'any 1997, només que va ser d'economia.

3 Què tenen a veure les autopistes amb el creixement forestal?

Deixeu-me canviar de tema per última vegada. Certament que hi ha respostes immediates i *trivials* a la pregunta de què tenen a veure les autopistes amb el creixement forestal. Segur que podríem opinar que com més autopistes menys boscos. Però ara estic interessat a fer un exercici paral·lel als dos anteriors. Es tracta de trobar un *isomorfisme aproximat* entre problemes quantitatius sorgits en dos mons ben allunyats. I a veure que aquesta unitat inesperada és també purament matemàtica.

En el cas de les autopistes de trànsit intens, una quantitat amb sentit és el nombre de cotxes per quilòmetre al quilòmetre x i a l'instant t. Aquesta magnitud és una funció densitat $\rho(x,t)$ de la qual suposem que, integrada respecte a x en un interval $[a,b]$, ens dóna el nombre de cotxes que a l'instant t es troben entre els punts quilomètrics a i b i viatgen en un sentit dels dos possibles, posem, per exemple, cap a valors més grans de x. Una pregunta interessant és com canvia aquesta densitat al llarg del temps. Per respondre-la és convenient fixar-se en la *taxa* instantània de canvi del nombre de cotxes en un interval, per exemple $[a,b]$. Aquesta taxa instantània és igual a la diferència entre el nombre de cotxes per unitat de temps que travessen el punt a (i, per tant, entren a l'interval $[a,b]$) i el nombre de cotxes per unitat de temps que travessen el punt b (i, per tant, abandonen l'interval $[a,b]$). I, per la seva banda, aquests *cabals* són iguals al producte de la densitat per la velocitat dels vehicles. Això dóna, suposant diferenciabilitat de les funcions involucrades,

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho(x,t)\,dx = \rho(a,t)v(b,t) = -\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}(\rho(x,t)v(x,t))\,dx\,.$$

D'aquí, com la igualtat és certa per a tot interval $[a,b]$, se'n dedueix l'equació, anomenada de continuïtat, següent:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (v\rho)}{\partial x} = 0\,.$$

Aparentment aquesta és una equació amb dues incògnites, la ρ i la v. Però generalment se suposa que els vehicles circulen a una velocitat imposada per les condicions generals del trànsit, és a dir, circulen en caravana. Llavors la velocitat és una funció decreixent coneguda de la densitat i podem escriure l'equació anterior com

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (v(\rho)\rho)}{\partial x} = 0\,.$$

Una exposició molt completa i a un nivell elemental d'aquest tema pot trobar-se al llibre de R. Haberman *Mathematical models, mechanical vibrations and population dynamics* [2].

Imaginem ara que estem interessats per la distribució de les mides dels arbres d'un bosc en creixement. Si es tracta d'un bosc dens i amb molts arbres tindrà sentit parlar de la densitat $u(x,t)$ dels arbres que tenen mida x a temps t i un argument de l'estil de l'anterior, suposant que no hi ha morts i que, per tant, el nombre total d'arbres, com abans el de cotxes, *es conserva*, ens permetrà escriure una equació del tipus

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (gu)}{\partial x} = 0\,.$$

Ara, però, la velocitat de creixement individual g quan la mida d'un individu és x no serà funció només del valor de la densitat en el punt x per raons ben simples. Els factors que influeixen en la velocitat de creixement d'un arbre són sobretot, a part dels ambientals externs, com ara quantitat d'il·luminació total o quantitat total de nutrients en el subsòl, la competència per aquests recursos entre els individus de la població. I és clar que la competència s'estableix entre individus de diferents mides i no només entre els que en tenen la mateixa. Per exemple, una possibilitat senzilla és suposar que g depèn només de la població total. Això porta a una equació del tipus

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \left(g\left(\int_0^\infty u(s,t)\,ds\right)u\right)}{\partial x} = 0\,.$$

Un altre cas que en aparença és només una mica més complicat es presenta quan pensem que el factor limitador en el creixement forestal és sovint la competència per la llum i que l'ombra que «pateix» cada arbre depèn només dels arbres més alts que ell. La manera més senzilla de modificar l'última equació per tenir en compte aquest fenomen és canviar l'argument de la funció g, per incloure només els individus més grans que aquells de mida x:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \left(g\left(\int_x^\infty u(s,t)\,ds\right)u\right)}{\partial x} = 0\,.$$

Aquestes equacions són no locals en la variable no temporal x i això les fa força diferents des del punt de vista matemàtic de les altres que hem considerat. En particular, per exemple, hi ha problemes oberts sobre l'existència i unicitat de solucions, fins i tot locals, d'equacions com la darrera.

Malgrat això jo voldria insistir en el fet que problemes de natura intrínseca tan dispar com el flux de trànsit en una carretera i el creixement d'un bosc es modelen de manera molt semblant gràcies al fet que les idees *matemàtiques* que permeten de fer-ho són essencialment les mateixes en els dos casos. De fet podríem esmentar de passada encara un altre problema, aquest sí pertanyent a la física, que té una expressió matemàtica similar i és aquest: el moviment de gasos en tubs, el conegut problema de Riemann. Per a ser precisos, diem que, tot i que una equació del tipus llei de conservació com les anteriors és present en la modelització del moviment dels gasos, en canvi es necessita en aquest cas una variable d'estat addicional a la densitat. Ja que no és possible referir directament la velocitat a la densitat, com hem fet parlant dels cotxes, sinó que és l'acceleració la que depèn de l'estat del gas. Però les similituds són grans i el problema de la gasodinàmica és més antic. Així i tot penso que no és correcte afirmar que els models anteriors són física. Si de cas són anàlegs a problemes de la física, però aquesta analogia és precisament de caire matemàtic. Simplement, que les eines matemàtiques, però no només les eines, sinó els conceptes mateixos, s'han fet necessaris sovint abans en física que en altres disciplines.

Resumint, penso que les matemàtiques, igual que les altres ciències, estudien el món i tracten de descriure'l per entendre'l, però que, a diferència de les altres ciències, classifiquen els problemes, no per la natura dels objectes d'estudi, sinó per les relacions formals (sovint quantitatives, però no sempre) entre ells. En definitiva, crec que podem estar d'acord que allò que té a veure el pèndol amb les poblacions de linxs i llebres, allò que tenen a veure les finances amb la difusió de substàncies o la conducció de la calor i allò que té a veure el flux de vehicles en una autopista amb el creixement forestal, són matemàtiques. I, el que no és exactament el mateix, en la meva opinió, les matemàtiques són, precisament, allò que tenen a veure les finances amb la difusió de substàncies, per exemple.

Referències

[1] Black, F.; Scholes, M. «The pricing of options of corporate liabilities». *Journal of Political Economy*, 81 (1973), 637–659.

[2] Haberman, R. *Mathematical models, mechanical vibrations and population dynamics*. Prentice Hall, 1977.

[3] Lotka, A. J. *Elements of Physical Biology*. Baltimore: Williams and Wilkins. Reeditat com a *Elements of Mathematical Biology*. Nova York: Dover 1956.

Departament d'Informàtica i Matemàtica Aplicada
Escola Politècnica Superior
Universitat de Girona
Av. Santaló s/n, Campus Montilini
17003 Girona
acalsina@ima.udg.es