

DIAGRAMAS DE RELACIONES LÓGICAS EN TAREAS DE TRANSFORMACIÓN PARA PREESCOLARES

RUESGA RAMOS, P.¹, GIMÉNEZ RODRÍGUEZ, J.² y OROZCO HORMAZA, M.³

¹ Departamento de Didácticas Específicas. Facultad de Humanidades y Educación. Universidad de Burgos

² Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de la Matemática. Facultad de Educación. Universidad de Barcelona

³ Centro de Investigación en Psicología, Cognición y Cultura. Universidad del Valle. Cali. Colombia.

pruesga@ubu.es

morozco@univalle.edu.co

jgiménez@uoc.edu

Resumen. Se construyen los diagramas simbólicos representativos de las relaciones lógicas que niños de educación infantil de entre 3 y 5 años utilizan en el proceso resolutivo de una tarea de transformación presentada mediante código simbólico y planteada en dos formas: como aplicación del código y como descubrimiento del código. Los diagramas permiten explicar los resultados hallados en una experiencia con 211 niños preescolares.

Palabras clave. Razonamiento lógico, pensamiento lógico, matemática relacional, educación infantil.

Logical relations diagrams in transformation tasks for preschoolers

Summary. We construct symbolic diagrams that represent logic relations that preschool children from 3 to 5 years old use when they solve a transformation task that is being presented through a symbolic code in two different ways: as an application to the code and as a discovery of the code. The diagrams in the paper allow us to explain the results from an experience with 211 preschool children.

Keywords. Logical reasoning, logical thinking, relational mathematic, infant education.

JUSTIFICACIÓN

La matemática puede ser conceptualizada como la ciencia cuyo objetivo es el establecimiento de relaciones de muy diversos tipos (Alsina et al., 1996). El análisis de dos ejemplos paradigmáticos, concretamente del método demostrativo progresivo-regresivo (Solow, 1992) y de los procedimientos de análisis y síntesis introducidos por el matemático griego Pappus, que Polya (1984) recuerda, permiten poner de relieve, en una diversidad de situaciones del campo matemático, la coexistencia

de dos procesos relacionales, diferentes pero vinculados, a los que hemos llamado (Ruesga, 2004) *directo* e *inverso*.

Los procesos directo e inverso ponen en juego en el sujeto que razona itinerarios relacionales diferentes caracterizados por el objeto sobre el cual se centra la atención de quien razona que, en el caso del proceso o modo directo son los datos, las situaciones iniciales o las causas

y que progresa hacia las situaciones finales, soluciones o efectos. En el caso del proceso o modo inverso, son los resultados, las situaciones finales o los efectos, el punto de atención y el objetivo, las situaciones iniciales, datos o causas. Uno y otro modo se entremezclan continuamente en cualquier proceso resolutorio, constructivo o demostrativo constituyendo pasos de razonamiento que conforman conjuntamente el proceso completo y están sustentados por las formas de deducción lógica.

El paradigma constructivista, y más concretamente la visión piagetiana, identifica el fundamento de la construcción del conocimiento matemático en la práctica de procedimientos básicos como los de clasificar, seriar, ordenar o transformar (Flavell, 1982). Desde esta perspectiva, el conocimiento no se transmite sino que es el propio sujeto quien lo elabora a través de mecanismos de equilibración que se desencadenan como consecuencia de su interacción con el medio y de su acción sobre los objetos. Estos mecanismos requieren integrar, en una sola acción, cualquier operación, formal o no, y su inversa (Piaget, 1979) y se desencadenan mediante la llamada *abstracción semiempírica*, que el sujeto desarrolla por observación de los objetos y de las relaciones implícitas entre ellos.

Esta matemática no formal que caracteriza la etapa de educación infantil permite, sin embargo, atender las demandas que la matemática en el futuro va a presentar en relación con los procesos relacionales directo e inverso.

En efecto, las tareas relativas a cualquiera de los procedimientos anteriores son planteables desde la perspectiva de los dos modos. En el caso concreto de la transformación, el modo directo que conduce de las causas a los efectos se traduce en aplicar reglas expresas de transformación sobre una figura inicial, consiguiendo como efecto una figura imagen o final. En el caso del modo inverso, el efecto de haber aplicado una transformación, que es observable cuando vemos un original y su imagen, puede conducirnos a su causa cuando de esta observación descubrimos las reglas de transformación aplicadas.

Así pues, los modos directo e inverso se traducen en el ámbito de los procedimientos matemáticos no formales en tareas de aplicación de reglas y de descubrimiento de las mismas.

Sin embargo, los procesos relacionales de tipo lógico que tienen lugar en uno y otro modo de una misma tarea podrían ser diferentes.

No hemos encontrado experiencias previas con niños de educación infantil relativas a tareas de transformación, menos aún cuando éstas se plantean en modo inverso. Por tanto, hemos diseñado una prueba a través de la cual podemos analizar el comportamiento de los niños, sus posibilidades de éxito en las mismas y la argumentación que se presenta en uno y otro modo.

La presentación de tareas relativas a estos procedimientos, en ambos modos, puede ser considerada como un impacto externo que induce al sujeto a poner en práctica procesos relacionales de tipo lógico a través de abstracción semiempírica en la medida en que estas relaciones se abstraen de la situación planteada a través de objetos concretos que son observables.

Nos proponemos identificar las relaciones lógicas que el sujeto establece en la solución de tareas de transformación en ambos modos mediante la observación y el análisis de los pasos elementales que utiliza en los procesos resolutorios correspondientes y representarlos de forma simbólica con el fin de elaborar el diagrama relacional que desarrolla durante ambos procesos.

La comparación de los diagramas correspondientes a uno y otro modo contribuirá a establecer una relación entre ellos que permita explicar los resultados hallados.

DESCRIPCIÓN DEL EXPERIMENTO

Hemos llevado a cabo un estudio experimental descriptivo, de tipo exploratorio, con una sola medición, con la cual se realiza un análisis de proceso multivariado. Participan en la investigación 211 niños de aulas regulares de educación infantil, pertenecientes a siete colegios públicos y privados de la ciudad de Burgos, de los cuales 70 son de 3 años, 76 de 4 años y 65 de 5 años. Todos ellos son entrevistados individualmente efectuando grabación filmada.

Desarrollamos la investigación con el siguiente diseño esquemático:

OBJETIVO	SUBOBJETIVO	CÓMO	INSTRUMENTOS
Realización de una prueba	Diseño e implementación	Justificación casi experimental	Prueba piloto
Desarrollo	Resultados	Registro y análisis de variables	Tablas de frecuencias Gráficos
	Análisis	Éxito-Dificultad Procedimientos Argumentación	CHI cuadrado. Descripción, clases, codificación y tablas de frecuencias

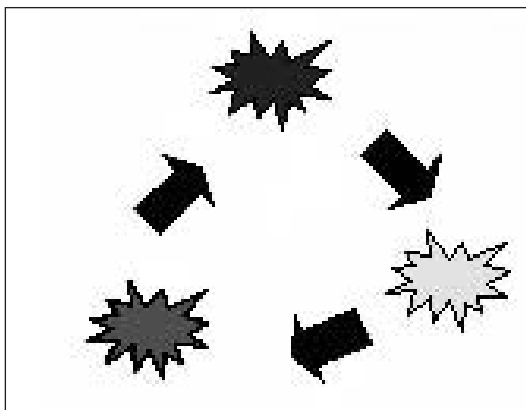
Sobre la tarea propuesta

Se diseña una tarea que utiliza un código de transformación cíclica de color, basado en Dienes (1976), para ser resuelta en dos modos: directo e inverso, es decir, aplicando y descubriendo el código respectivamente.

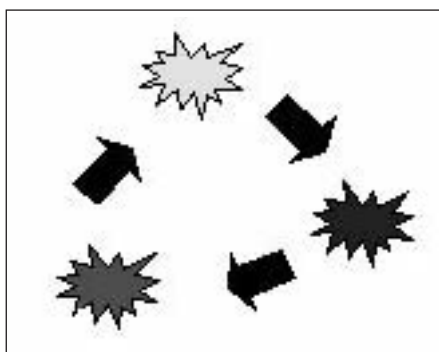
Concretamente, en modo directo, consiste en construir una figura, imagen de otra por aplicación de la transformación de color. Una vez presentada la figura original o inicial (llamada inicialmente construcción compleja o CC), el niño debe construir la figura imagen cambiando el color de las piezas que componen la figura original de acuerdo al código. La tarea en modo inverso consiste en presentar a los niños la figura original y la figura imagen y solicitar que el niño identifique el código empleado en la transformación.

Los resultados de la prueba piloto ponen de relieve que la falta de dominio del espacio de los niños de 3 a 5 años puede hacer aparecer problemas que no tienen que ver con la comprensión del operador transformación. Cuando esto sucede, la figura original se sustituye por otra compuesta por elementos separados. Este tipo de figura se denomina *construcción simple* (CS).

Los códigos de transformación de color utilizados son las dos tarjetas siguientes:



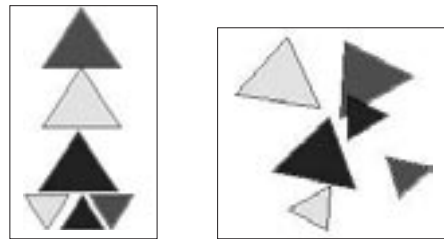
a



b

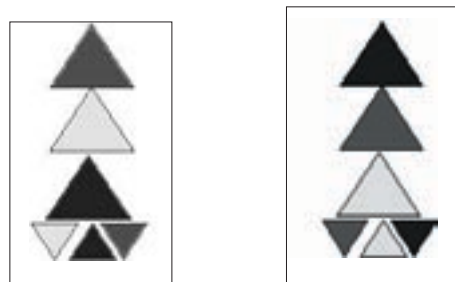
La tarea comienza explicando ambas tarjetas simbólicas y solicitando que el niño elija una de ellas para jugar.

Se presenta la siguiente figura (CC) y los triángulos a su derecha.



La tarea en modo directo sobre CC consiste en construir a la derecha, con las piezas que aparecen desordenadas, otro árbol, como el original, en el cual los colores de los triángulos integrantes estén cambiados como indica el código elegido.

La tarea en modo inverso (sobre CC), consiste en presentar las dos figuras.



El árbol de la izquierda se ha transformado en el de la derecha. Se pregunta cómo se ha transformado y se solicita que el niño identifique la tarjeta con el código de transformación que ha sido aplicado.

En el caso de la figura CS se realiza con el mismo operador elegido para CC y se plantea a los niños que no tienen éxito en modo directo sobre CC.

Se presenta una hilera de lápices de colores y otros tantos descolocados:

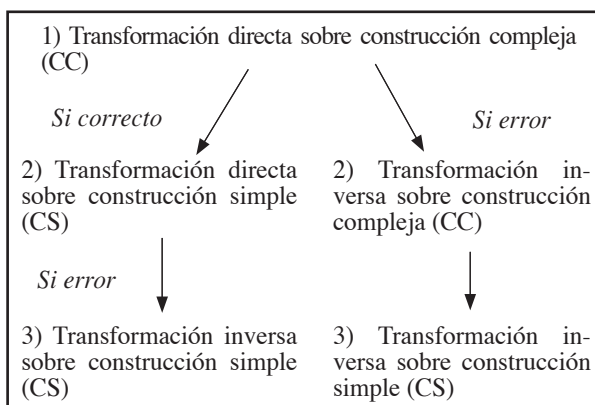
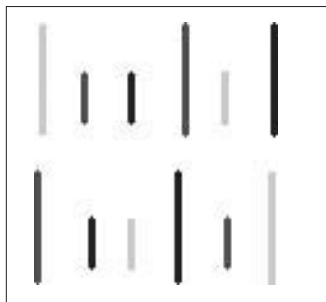


La tarea consiste en colocar debajo de cada lápiz aquel en el cual se transforma, de acuerdo con el operador de cambio de color.

El entrevistador va indicando en cada caso, con el dedo, el lápiz que se va a transformar.

La tarea en modo inverso consiste, como en el caso CC, en identificar el operador aplicado.

Se presentan dos hileras de lápices:



El diálogo tiene lugar como se indica en el anexo 1.

RESULTADOS

Cada uno de los de arriba ha cambiado por el que tiene debajo. Como en el caso de la figura CC, se pregunta cómo han cambiado los lápices de arriba por los de abajo y la identificación del código.

En la tabla 1 se muestran los resultados de acierto a la tarea en ambos modos y versiones CC y CS por grupo de edad.

Procedimiento empleado para la prueba

La prueba se comienza planteando la tarea de transformación en modo aplicación sobre CC. El resultado de acierto o error en esta tarea determina las siguientes de acuerdo con estas posibilidades:

Las condiciones de la investigación hacen que los resultados sobre la tarea en modo directo y versión CC determinen las restantes pruebas. En esta tarea sólo el 29,4% de los niños tiene éxito y muestra ser excesivamente difícil para el grupo de niños de 3 años, de los cuales sólo 5 tienen éxito. Sin embargo, de los 148 niños que fracasan (el 70,6% del total), 86 niños (el 58,1% de los 148) tienen éxito al resolverla sobre CS.

Tabla 1

Resultados de acierto a la tarea de transformación en sus dos versiones y modos y contraste de medias de resultados en función de la edad.

EDAD	ACIERTO							
	Modo directo				Modo inverso			
	CC (N = 210)		CS (N = 148)		CS (N = 62)		CS (N = 153)	
	N	% del grupo	N	% del grupo	N	% del grupo	N	% del grupo
3 años	5	7,2	30	46,9	5	100	21	33,9
4 años	27	35,5	29	59,2	23	85,2	28	52,8
5 años	30	46,2	27	77,1	27	90,0	24	63,1
Total	62	29,4	86	58,1	55	88,7	73	47,7
Significación ¹	$\chi^2 = 26,413$ $P \leq 0,001$		$\chi^2 = 8,550$ $P \leq 0,014$		$\chi^2 = 1,021$ $P \leq 0,600$		$\chi^2 = 8,951$ $P \leq 0,011$	

¹ El nivel de significación establecido es del 95%.

Conjeturamos que el incremento en el porcentaje de aciertos se debe, o bien al cambio adoptado en la presentación (versión CS), o bien a la mayor experiencia de los niños, que puede permitir mayor familiaridad y comprensión de la misma; ambos, aspectos de tipo metodológico.

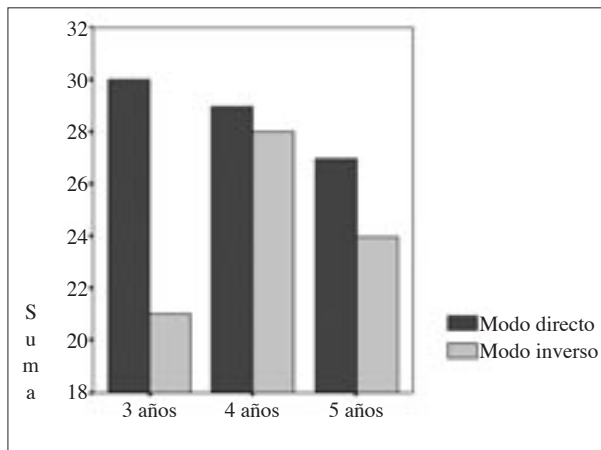
En ambas versiones, los resultados de acierto dependen significativamente de la edad: a medida que la edad incrementa se produce un aumento de los aciertos al resolver la tarea.

En el caso de los niños que aciertan en modo directo sobre CC y, por tanto, se les plantea en modo inverso también sobre CC (N = 62), se encuentra que 7 de ellos se equivocan en modo inverso. Por tanto, en este grupo resulta más fácil el modo directo que el inverso. Se puede destacar que todos los niños de 3 años que tienen éxito en modo directo también lo tienen en modo inverso.

El grupo más numeroso está compuesto por los niños que no tienen éxito en modo directo sobre CC (N = 148), a los cuales se plantea la tarea en ambos modos sobre CS. En esta versión, el modo inverso resulta significativamente más difícil que el directo ($\chi^2_1 = 51,774, P \leq 0,0001$).

El gráfico 1 muestra los resultados de acierto a la tarea en ambos modos sobre CS.

Gráfico 1
Aciertos relativos a la tarea de transformación en ambos modos sobre CS.



Estos datos permiten sostener la mayor dificultad de la tarea de transformación en modo inverso y muestra al grupo de niños de 3 años como el más beneficiado por el cambio de versión.

Entre las distintas categorías establecidas para analizar la argumentación que el niño aporta a sus acciones, se valora como mejor aquella a través de la cual verbaliza la relación de transformación entre colores que el código establece mediante expresiones como *el rojo cambia en azul*, por ejemplo. Sin embargo, mientras en modo directo se halla que hay un alto número de niños que argumentan de esta forma y no tienen éxito, en modo inverso, el éxito y este tipo de argumentación están relacionados.

Los gráficos 2 y 3 muestran la distribución de frecuencias hallada sobre la versión CC en modos directo e inverso respectivamente en función del acierto o error.

Gráfico 2
Distribución de las categorías de argumentos en transformación sobre CC: modo directo.

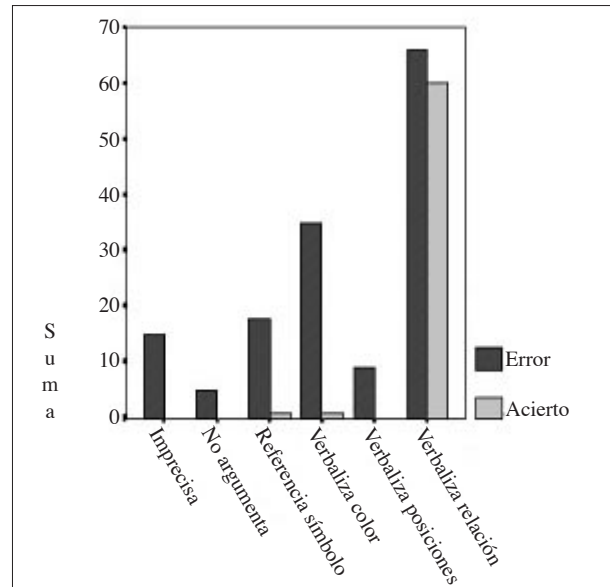
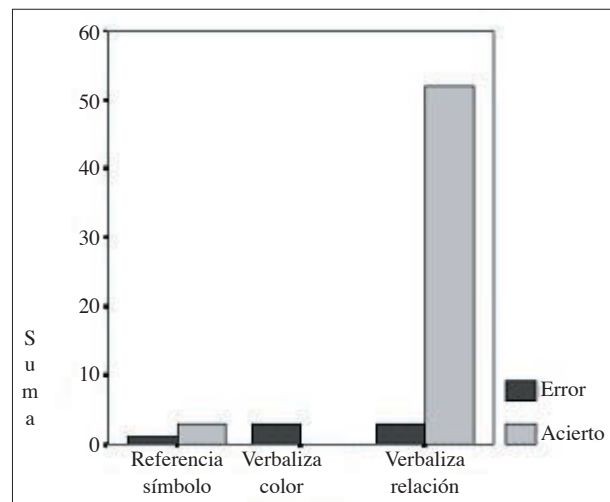


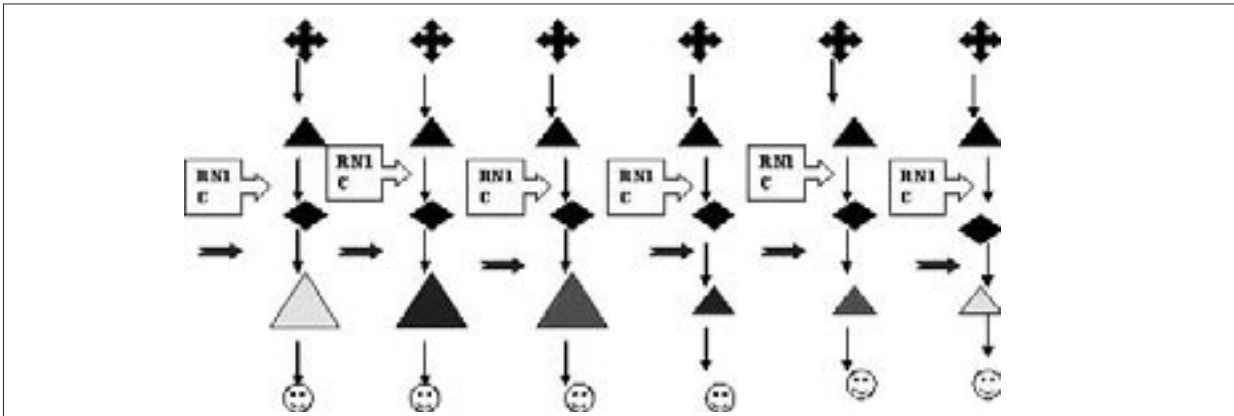
Gráfico 3
Categorías de argumentos en transformación sobre CC: modo inverso.



Diagramas relacionales

Las relaciones que es necesario establecer para resolver las tareas pueden ser simbolizadas en forma de diagramas relacionales (Ver significación de símbolos en el anexo 2).

Veamos cómo podemos representarlas en algunos casos a través de las acciones que los niños emprenden durante el proceso resolutivo.



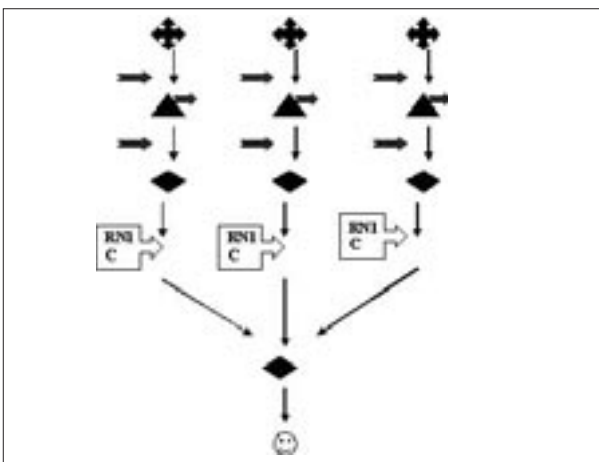
Cómo resuelve Iván (5:2) la transformación: modo directo (sobre CC) usando el código *b*

Reconoce cada elemento como perteneciente a la clase de color representada por el código de color y puede aplicar sobre éste la transformación representada. No confunde el color de destino con el original y finalmente puede ubicar cada pieza de la figura imagen en el lugar que corresponde sin confusiones. Verbaliza la relación de transformación que está aplicando.

Solamente este procedimiento puede conducir a la solución exitosa. La única variabilidad que el procedimiento admite es el orden en que las piezas pueden ser transformadas, por ejemplo, comenzando por las pequeñas, o bien otro; sin embargo, la direccionalidad que utilizamos en nuestra cultura favorece el orden que se muestra en este ejemplo. En otro sentido no existen procedimientos alternativos.

El procedimiento que usa para resolver la transformación: el modo inverso implica el establecimiento de las siguientes redes relacionales:

Cómo resuelve Iván (5:2) la transformación: modo inverso (sobre CC)



El niño identifica y verbaliza la transformación realizada sobre las tres piezas grandes, que ocupan la parte

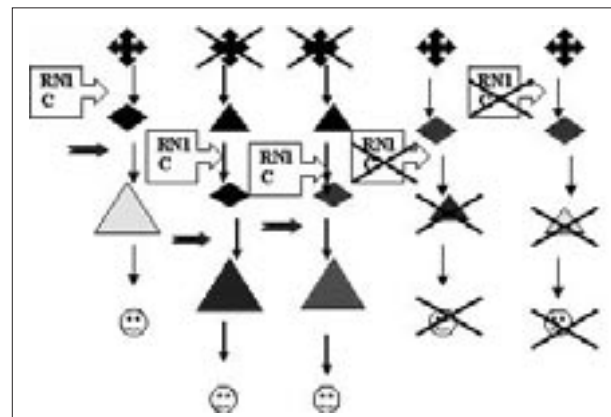
superior de ambas figuras, y posteriormente las reconoce sobre el código simbólico de transformación.

Veamos el procedimiento que utiliza una niña que no tiene éxito en transformación modo directo sobre CC, y sí lo tiene sobre CS.

Cómo intenta resolver Julia (5:4) la transformación: modo directo (sobre CC) usando el código *b*

La niña transforma correctamente el primer triángulo grande rojo por el amarillo, es decir, obtiene correctamente $f(\text{Rojo}) = \text{Amarillo}$. Coloca debajo el triángulo grande azul que corresponde de acuerdo con el operador *b* y argumenta que lo hace porque «amarillo cambia por azul» como indica el código, pero apunta con el dedo al triángulo amarillo que acaba de colocar como elemento de la figura imagen, es decir, olvida la construcción inicial y observa un objeto erróneo. Lo mismo ocurre con el siguiente triángulo grande, el rojo, el cual ella asigna como imagen del azul, que tiene inmediatamente por encima formando parte de la construcción imagen. Es decir, transforma: $f(\text{Rojo})$, $ff(\text{Rojo})$ y $fff(\text{Rojo})$ olvidando la construcción inicial. La diferente disposición espacial de las piezas pequeñas la hace volver a considerar la construcción inicial pero no logra identificar correctamente el color de la pieza original sobre el código al fallar la secuencia de colores respecto a la figura que venía construyendo. Esto la lleva al error.

Esta secuencia pone de relieve las relaciones lógicas, que podemos simbolizar así:



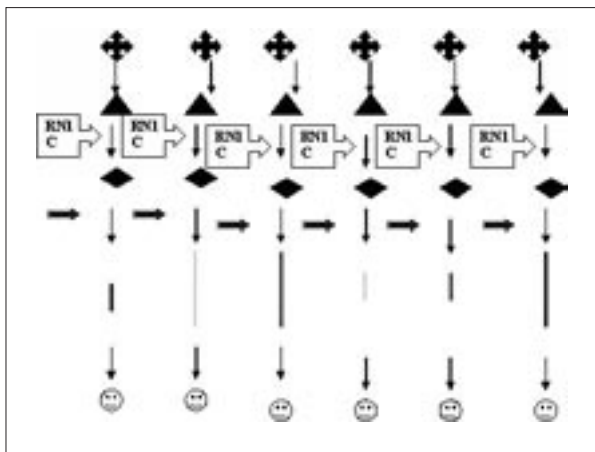
Este comportamiento nos indica que la niña comprende el código de transformación y que hubiera podido aplicarlo mejor si tuviera mejor dominio del espacio y pudiera considerar el tercer elemento que interviene, en este caso, la construcción inicial.

Veamos cómo se comporta sobre la figura CS.

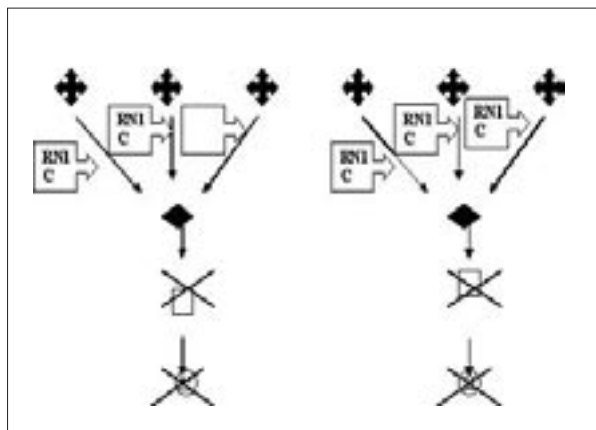
Cómo resuelve Julia (5:4) la transformación: modo directo (sobre CS)

Su atención, en cada paso, se centra sobre el lápiz de la figura inicial que el entrevistador va señalando. La enumeración uno a uno de cada lápiz de la figura origen, permite reconocer su código de color sobre la tarjeta de transformación y seleccionar el lápiz imagen sin dificultad. De esta forma se elimina el problema que presentó sobre CC.

Las relaciones que establece podemos simbolizarlas así:



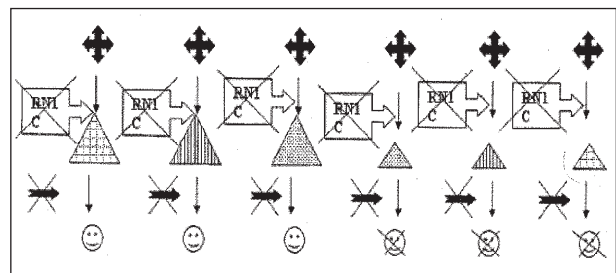
Cómo resuelve Julia (5:4) la transformación: modo inverso (sobre CS)



En ningún momento establece la relación entre elementos correspondientes. Como ocurrió con transformación: modo directo sobre CC, su falta de dominio del espacio hace que sólo considere una de las figuras. Esto hace que su atención recaiga sólo sobre la construcción inicial como si la transformación se hubiera efectuado, como entendió en CC, sobre los elementos componentes de una sola construcción, en este caso la inicial. Es decir, observa la sucesión de los tres primeros elementos de la hilera origen, como si el segundo fuera el transformado del primero, y el tercero, del segundo. Selecciona la tarjeta de transformación, pero la repetición del procedimiento sobre los siguientes tres elementos de la hilera, con la misma consideración, la lleva a seleccionar la otra tarjeta de transformación. Esto la lleva al bloqueo. No se produce, en este caso, una visión global suficiente, como la que exige la tarea en modo inverso, para permitir una solución exitosa.

Cómo resuelve Víctor (4:7) la transformación: modo directo (sobre CC)

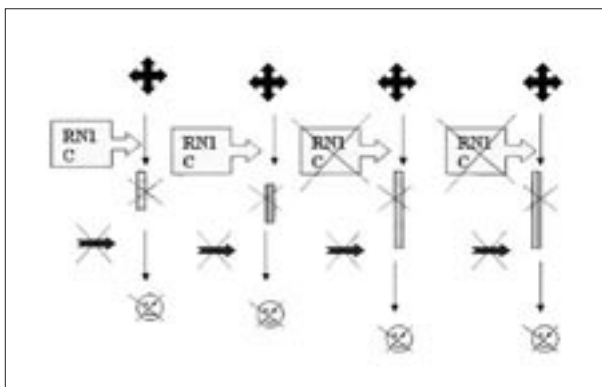
El niño comienza por copiar la figura origen y coloca las tres piezas grandes, de la figura imagen, idénticas a las de la original, olvidando por completo el papel del operador. Repite el ejercicio pero la colocación de las piezas grandes, correcta en este caso, es casual y no obedece al criterio marcado por el operador, al cual no mira en ninguna ocasión. Las piezas pequeñas son igualmente colocadas de forma arbitraria buscando como principal objetivo rehacer una figura con igual apariencia a la dada sin considerar el operador de cambio. El niño se fija en la figura global y trata de construir otra figura igual olvidando el cambio de color entre ambas sin lograr aplicar la transformación a los elementos que componen la figura inicial. La secuencia de acciones en la repetición puede simbolizarse así:



Cómo resuelve Víctor (4:7) la transformación: modo directo (sobre CS)

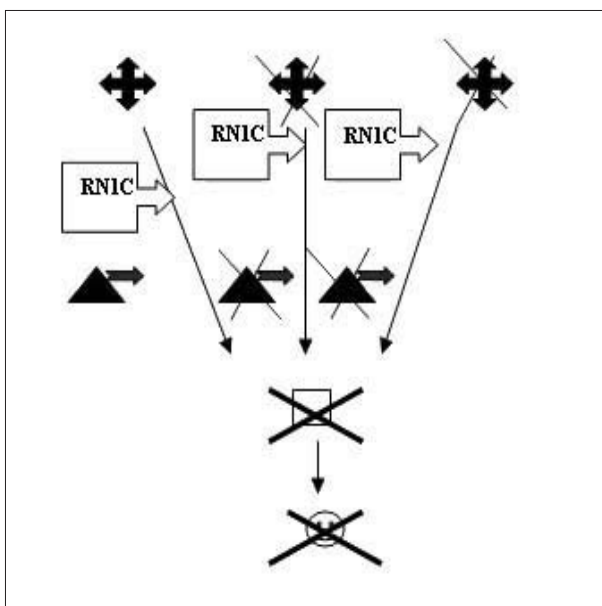
La tarea sobre la construcción simple no mejora los resultados. El niño continúa con la tendencia a repetir la construcción inicial haciendo corresponder a cada lápiz uno igual. Reconoce, en este caso, el color de cada elemento pero, cuando se le hace observar que lo debe cambiar, comienza a dudar y a asignar elementos en la imagen por puro azar. Sin embargo, si se le pregunta qué dice el código de transformación sobre el color al

que debe cambiar, por ejemplo, el rojo, puede identificar e incluso verbalizar el cambio expresado por la flecha pero, no consigue aplicarlo sobre los lápices de colores. Su atención se centra en construir una nueva hilera, coincidente al principio con la original y después al azar. Un punto más de atención, el que necesita sobre el operador, no es posible. La secuencia de acciones puede simbolizarse así:



Cómo resuelve Víctor (4:7) la transformación: modo inverso (sobre CS)

Reconoce un cambio de color entre ambas construcciones pero, cuando se le pide que verbalice, sobre los elementos, la forma en que éstos han cambiado, confunde las posiciones inicial y final de manera que a veces verbaliza desde un elemento original hacia una imagen y otras veces desde un elemento imagen hacia uno original. Esta confusión no le permite identificar el código. Las relaciones que establece pueden simbolizarse de la siguiente forma:



El niño establece relaciones, no siempre acertadamente, entre elementos dos a dos, pero no puede encontrar una relación de conjunto que afecta a todas las parejas de elementos presentes. Tanto en modo directo como en modo inverso, la tarjeta que representa el código de transformación no tiene para él valor simbólico general y es algo sin especial significación que no consulta más que cuando se le pregunta de forma directa.

DISCUSIÓN

Los árboles relacionales de los tres casos que hemos analizado permiten identificar sobre la expresión simbólica el comportamiento de los niños ante estas tareas de transformación. En el caso de Iván vemos cómo se pone en práctica el procedimiento de forma correcta respetando la igualdad de transformación que el código indica y sin confusión entre elementos origen e imagen. De igual forma, en el caso del modo inverso, establece correctamente la relación entre relaciones de elementos correspondientes y posteriormente las identifica sobre la tarjeta simbólica. Esta relación entre relaciones, que en los árboles se muestra confluyendo, es sólo propia del modo inverso y justifica la mayor dificultad frente al modo directo y con ello el desequilibrio en la construcción del conocimiento.

La influencia de la falta de dominio del espacio que conduce a Julia al error desaparece cuando se considera la versión CS. Sus errores se originan en la observación inadecuada de los objetos y no en el reconocimiento de los códigos correspondientes de color o de transformación, y éstos desaparecen en modo directo cuando la indicación del entrevistador la libera de mantener su atención sobre uno de los lugares, en este caso el que ocupa la construcción inicial. Este comportamiento es el habitual en el grupo de niños que no tienen éxito sobre CC en modo directo. El origen de su error está en la observación errónea a causa de la falta de dominio del espacio, no tiene que ver con la comprensión del procedimiento y, por esta razón, tienen éxito cuando se les ayuda en este sentido. Pero, en modo inverso, esto no es posible, ya que es necesario relacionar simultáneamente elementos correspondientes y, aunque puede establecer correctamente las relaciones de pertenencia, la elección errónea de los elementos relacionados no le permite encontrar una transformación compatible con todos los casos.

En el caso de Víctor es la visión global, no dominada, de las figuras origen e imagen la que impide establecer una secuencia relacional correcta. Los objetos que observa no son los correctos y tampoco establece la relación de pertenencia a través de los códigos de color ni comprende la transformación indicada por el código. El hecho de que, cuando se le pregunta sobre el propio código, prescindiendo de los elementos y sobre todo de la figura, argumente verbalizando correctamente la relación no contribuye a la mejor comprensión del procedimiento. Es el caso de los numerosos niños que hemos encontrado, que pueden verbalizar la transformación pero no aplicarla. En el caso del modo inverso, su visión global

de ambas figuras no le permite analizar el procedimiento a través del cual ambas se han generado. Sus observaciones erróneas no le permiten identificar un código único para todos los pares de elementos relacionados.

Esta característica de relación simultánea entre parejas de elementos relacionados que precisa el modo inverso para establecer e identificar el código transformador, no existe en modo directo. Esto hace que los árboles relacionales se muestren lineales, discretizados, en el caso del modo directo, y no en el caso del modo inverso, más exigente desde el punto de vista relacional. Esta exigencia mayor del modo inverso explica por qué la argumentación mejor es necesaria para el éxito en modo inverso pero no en modo directo.

CONCLUSIÓN

Los árboles relacionales permiten analizar las relaciones lógicas que el niño paso a paso establece en el proceso resolutivo así como identificar las causas de sus errores. Los resultados hallados en la experiencia, según los cuales el modo inverso resultó significativamente más complejo que su correspondiente directo, queda explicado a

causa de la mayor complejidad relacional que se refleja en los diagramas. El vínculo entre elementos, a su vez relacionados, necesario en modo inverso y que no existe en modo directo, es la causa por la que la tarea es más complicada. Los diagramas relacionales ponen de manifiesto esta diferencia al ser los correspondientes al modo directo lineales y los de modo inverso no.

De igual forma, la observación correcta que se indica en los diagramas, origen de la actividad resolutiva, se ve favorablemente reforzada con la estrategia metodológica consistente en cambiar la versión de la figura origen. Con ello se explica la mejora de resultados de éxito hallada.

La nula experiencia de los niños entrevistados en tareas de transformación y los resultados hallados cuando se eliminan dificultades no relevantes para la práctica del procedimiento de transformación mediante códigos, permite conjeturar que la práctica habitual de estas tareas permitiría a los niños abordarlas con mayor éxito.

El desequilibrio que se manifiesta en la desigual superación de ambos modos y su presencia en la posterior construcción del pensamiento matemático muestran que las tareas en modo inverso deben ser una actividad habitual en las aulas de educación infantil.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALCALÁ, M. (2002). *La construcción del lenguaje matemático*. Barcelona: Graó.
- ALSINA, C., BURGUÉS, C., FORTUNY, J.M., GIMÉNEZ, J. y TORRA, M. (1996). *Enseñar matemáticas*. Barcelona: Graó.
- DIENES, Z.P. (1987). *Los primeros pasos en matemática. Tomo I. Lógica y juegos lógicos*. Barcelona: Teide.
- FLAVEL, J. H. (1982). *La psicología evolutiva de J. Piaget*. Barcelona: Paidós.
- GORGORIÓ, N., DEULOFEU, J., BISHOP, A., ABREU, G., BALACHEFF, N., CLEMENTS, K., DREYFUS, T., GOFFREE, MILTON, P., NESHER, P. y RUTHVEN, K. (2000). *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Universidad de Barcelona: Graó.
- PIAGET, J. (1975). *L'équilibration des structures cognitives*. París: Presses Universitaires de France.
- PIAGET, J. (1979). *Investigaciones sobre la abstracción reflexionante I*. Buenos Aires: Huemul.
- POLYA, G. (1984). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- RUESGA, P. (2004). *El inicio del razonamiento en la infancia*. Burgos: Publicaciones de la Universidad de Burgos.
- SOLOW, D. (1992). *Cómo entender y hacer demostraciones en matemáticas*. México: Limusa.
- VUIK, R. (1984). *Panorámica y crítica de la epistemología genética de Piaget 1965-1980. I*. Madrid: Alianza.

[Artículo recibido en abril de 2004 y aceptado en junio de 2005]

ANEXO 1


Transcripción de una entrevista

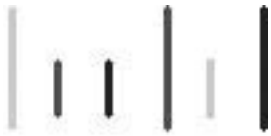
Niño: N.

Entrevistador: E

Tarea de transformación: Modo directo


Entrevista	Observaciones	Análisis	Argumentación
<p>E: –Ahora vamos a jugar a cambiar. Mira, yo tengo estas tarjetas que sirven para cambiar los colores. Te las voy a enseñar. Esta sirve para cambiar el color rojo por el azul [E indica con el dedo el color rojo, la flecha y el color azul en el extremo de la flecha] ...el azul por el amarillo... [E indica con el dedo el color azul, la flecha y el color amarillo al extremo de la flecha] ...y el amarillo por el rojo. [E indica con el dedo el color amarillo la flecha y el color rojo al extremo de la flecha].</p>			
<p>E: – Entonces mira cómo voy a jugar. Si yo tengo un triángulo rojo... [E coloca el triángulo rojo grande sobre la mesa] ...el rojo lo cambio por... [E indica en la tarjeta el rojo, la flecha y el amarillo] N: – Azul. E: – Entonces pongo el azul aquí. [E coloca el azul a la derecha del rojo inicial] E: – Y si tengo este azul... [E coge el azul pequeño y lo coloca debajo del rojo grande] ... pues, como es azul, lo cambio por...</p>	<p>Se explica el ejercicio con dos ejemplos para introducir los dos lugares destinados a construcción origen y construcción imagen.</p>		
<p>[E indica sobre la tarjeta el azul, la flecha y el amarillo] N: –Amarillo E: –Claro porque el azul cambia por amarillo. [E indica el triángulo pequeño azul y el pequeño rojo a su derecha]</p>			
<p>[E deja la tarjeta sobre la mesa y coge la otra tarjeta de cambio] E: – Y mira, ésta pone que el rojo lo cambio por el amarillo, el amarillo por el azul y el azul por el rojo. [E va indicando cada uno de los colores] ...La flecha indica por cuál lo cambio, ¿ves? [Asiente]</p>			

<p><i>E:</i> –Pero mira con esta otra: si tengo este triángulo... <i>[E señala el triángulo rojo grande que está sobre la mesa]</i> ... Como ahora el rojo se cambia por... <i>N:</i> –Amarillo <i>E:</i> –Entonces el azul ya no vale porque ahora tengo que poner éste... <i>[Quita el azul imagen del ejemplo y coloca en su lugar el amarillo]</i> <i>[E quita también el amarillo pequeño imagen del ejemplo anterior]</i> <i>E:</i> –Y si tengo este azul... <i>[E señala el pequeño azul situado bajo el grande rojo inicial]</i> ... Lo cambiaré por... <i>[E señala sobre la tarjeta el color azul, la flecha y el color rojo]</i> <i>N:</i> –Rojo.</p>	<p>Se explica la otra transformación con dos ejemplos.</p>	<p>Está muy atento.</p>	
<p><i>E:</i> –Elige una tarjeta de cambiar. <i>[Mira las dos y apunta una de ellas]</i></p>	<p>Elige <i>a</i>.</p>		
<p><i>E:</i> –¿Con ésta quieres jugar? <i>[Asiente. La mira].</i> <i>[Elige de rojo a azul, de azul a amarillo y de amarillo a rojo]</i></p>			
<p><i>E:</i> –Entonces, yo voy a hacer un árbol. <i>[E realiza la figura despacio]</i></p>	<p>Figura inicial:</p> 	<p>Figura compleja con bloques lógicos.</p>	
<p><i>E:</i> –Pues mira, ahora con estos otros triángulos, tú tienes que hacer un árbol como éste, aquí... <i>[E señala el espacio a la derecha de la figura]</i> ...Pero cambiando los colores como dice la tarjeta.</p>		<p>Se explicitan las reglas de juego.</p>	
<p><i>[Se queda parado]</i></p>		<p>Pausa.</p>	
<p><i>E:</i> –Mira, la ramita de arriba del pino de qué color es... <i>[E apunta el triángulo rojo grande].</i> <i>N:</i> –Rojo. <i>[Mira la tarjeta]</i> <i>[E apunta al rojo en la tarjeta]</i> <i>E:</i> –Y tu tarjeta de cambiar qué dice... que el rojo lo tenemos que cambiar por... <i>N:</i> –Azul. <i>E:</i> –Pues entonces, en el árbol nuevo, ésta... <i>[E apunta el triángulo rojo grande]</i></p>	<p>E explica el juego con un ejemplo.</p>		

<p>E: -La tenemos que cambiar por azul. [E coloca el azul grande a la derecha del rojo grande] E: -Sigue tu. [Se queda parado] E: -Esta otra, de qué color es... [E apunta al triangulo amarillo grande] N: -Amarilla. E: -Entonces...</p>			
<p>[Coloca el triángulo rojo debajo del azul en la figura imagen]</p>	<p>Cambia la amarilla según el operador.</p>	<p>Aplica correctamente el operador.</p>	
<p>[Coloca el triángulo amarillo debajo del rojo en la figura imagen]</p>	<p>Realiza sólo el tercer cambio. Cambia la azul según el operador.</p>	<p>Aplica correctamente el operador.</p>	
<p>E: -Y éste... [E señala el triángulo amarillo que N acaba de colocar en la figura imagen] ... Por qué le pones ahí? N: -Porque amarillo cambia a... [Mira las dos construcciones y el operador]</p>	<p>Ese amarillo es el color final.</p>		
<p>N: -Azul cambia a amarillo. [Mirando la tarjeta] [Mira las dos construcciones] [Se queda parado]</p>	<p>Se confunde entre las construcción es inicial y final.</p>	<p>No lo consigue. Problema de espacialidad.</p>	<p>Verbaliza la relación.</p>
<p>E: -Mira, con la tarjeta que tú has elegido, vamos a cambiar de color estos lápices. ¿Ves?</p>		<p>Se cambia a construcción compleja con material concreto.</p>	
<p>[E coloca los seis lápices verticalmente uno tras otro] E: -Mira están todos en fila y, ahora tú con estos otros... [E da al niño otros seis lápices iguales a los colocados] E: -Son iguales ¿a que sí? N: -Sí E: -Bueno, pues tienes que ir poniendo debajo de cada uno la pintura en la que cambia pero fijándote muy bien en lo que dice la tarjeta ¿vale? (Asiente). E: -Por ejemplo, la primera de qué color es... [E la apunta con el dedo] N: -Amarilla. E: -Pues ahora nos fijamos en la tarjeta. ¿Qué nos dice? N: -Cambia a roja. E: -Pues entonces, ponemos la roja debajo de ella. ¿Ves? [Asiente]</p>	<p>Figura inicial:</p>  <p>E explica el ejercicio con el nuevo material y la nueva disposición de las piezas.</p>		<p>Verbaliza la relación.</p>

[No se ha mencionado nada sobre el tamaño aunque en los ejemplos se conserva el tamaño en la transformación] E: -Sigue tú.			
[Coge la azul pequeña y la coloca debajo de la roja pequeña]		Aplica correctamente el operador.	
[Coge la amarilla pequeña y la coloca debajo de la azul pequeña] [Despacio] [Mira la tarjeta a cada cambio]		Aplica correctamente el operador.	
[Coge la amarilla grande] [Mira la tarjeta] [Mira los lápices] [Deja la amarilla grande, coge la azul grande y la coloca debajo de la roja grande]	Parece que ha seleccionado en primer lugar el tamaño.	Aplica correctamente el operador.	
[Muy despacio] [Coge la roja pequeña y la pone bajo la amarilla pequeña]		Aplica correctamente el operador.	
[Mira la tarjeta] [Coge la amarilla grande y la coloca debajo de la azul grande]	Todavía mira la tarjeta aunque es la única que le queda.	Aplica correctamente el operador.	
E: -¿Ya está? ¿Está bien? ¿Cómo has cambiado? N: -Amarilla, roja. [Apunta con el dedo, la de arriba y la de abajo] N: -Roja, azul. Azul amarilla... [Va apuntando la de arriba y la de abajo]	Señala el cambio que ha realizado. Transforma grande en grande y pequeña en pequeña.		Verbaliza el color inicial y final.

Transformación. Modo inverso

Entrevista	Observaciones	Análisis	Argumentación
E: -Ahora vamos a ver si tú adivinas. Mira, he puesto todos los lápices en fila. Y ahora cada uno lo voy a cambiar por otro y lo voy a poner debajo. A ver si tú adivinas cómo los cambio. [E hace la hilera transformada debajo, muy despacio] E: -¿Qué te parece?	Hileras inicial y final. 	Figura compleja con material concreto. El niño está atento.	
N: -Esta azul por ésta, ésta por ésta. [Señala la primera a la izquierda y la que está debajo, la segunda y la de abajo hasta el final, diciendo siempre: ésta por ésta] E: -¿Qué he cambiado? N: -Los colores.		Reconoce cambio en el color.	No verbaliza.

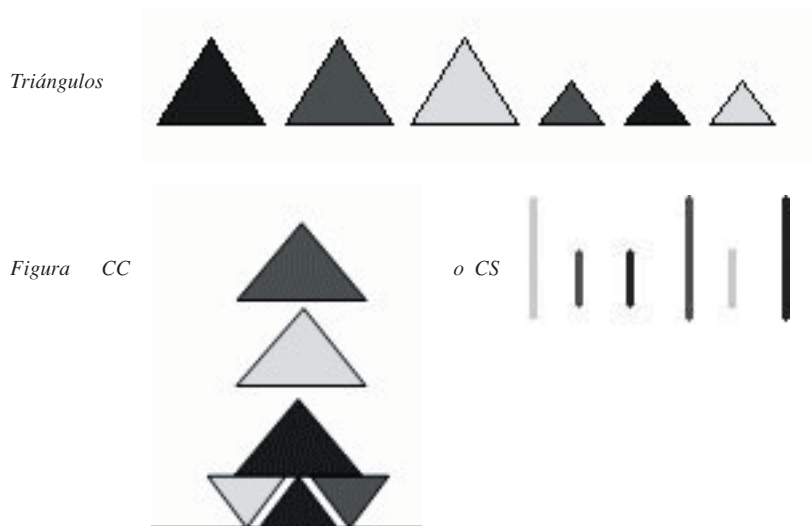
<p><i>E:</i> -¿Te acuerdas de las dos tarjetas de cambiar los colores que teníamos? [Asiente] <i>E:</i> -Mira, aquí están. Cógelas tú. [E le da las dos tarjetas de transformación de color] <i>E:</i> -¿Con cuál he cambiado los colores? (Pone el dedo en la pintura azul primera y luego en el azul de una de las tarjetas. Mira las hileras) <i>N:</i> -Con ésta. [Coge una de las tarjetas] <i>E:</i> -¿Seguro? ¿Lo comprobamos? [Asiente]</p>	<p>Tiene las dos tarjetas en la mano. Pone las dos tarjetas sobre la mesa.</p>	<p>Está muy atento.</p>	
<p><i>E:</i> -En la tarjeta pone que el rojo cambia por... [Mira la tarjeta] <i>N:</i> -Amarilla. <i>E:</i> -Y ¿es eso lo que he hecho yo? [Mira las hileras y asiente] <i>E:</i> -¿Dónde lo ves? [Apunta un rojo arriba y un amarillo abajo] <i>E:</i> -Muy bien.</p>		<p>Puede reconocer la representación simbólica del cambio.</p>	<p>Tiene buena expresión verbal pero habla poco. En cambio, resulta muy expresivo con la mirada y está muy atento.</p>

ANEXO 2

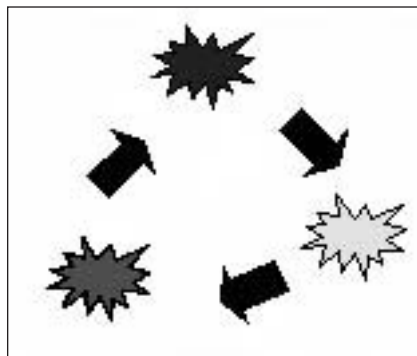
SIMBOLIZACIÓN DE DIAGRAMAS RELACIONALES

OBJETOS

Observables (Obs. O)






Coordinables (Coord.O)



SUJETO

Observables (Obs. S)

- Acciones de observación* de un triángulo o lápiz. Código: 
- Acciones de observación* del código de transformación. Código: 
- Acciones de observación* de las figuras inicial en cada momento. Código: 

Acciones de observación de un triángulo origen y su triángulo imagen (respectivamente un lápiz origen y su lápiz imagen). Código:



Coordinables (Coord. S)

Relaciones de pertenencia: Pertenencia de un elemento (triángulo o lápiz) a la clase cuyo código de color está representado en el código de transformación

Acciones de reconocimiento de esta relación. Código:



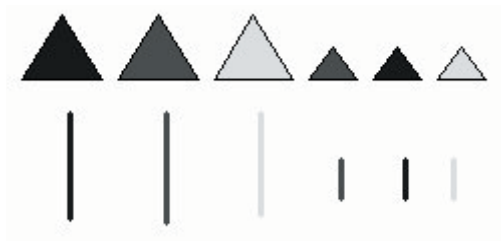
Relación de transformación: Comprensión de la transformación de un color determinado en otro. Código:



La sucesión de acciones que el niño ejecuta se simbolizan con el Código:



Acciones de selección de cada triángulo o lápiz particular. Códigos:



Acciones de colocación de un elemento como imagen. Código:



Acciones de selección de un código de transformación. Código:



Finalizada una cadena de acciones (lo que se indica con el código:



al final de la cadena vertical), las acciones siguientes se expresan a su derecha.

Errores. Código:

