CONCEPTOS NUCLEARES EN LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE *ÁNGULO*

Casas García, Luis M. y Luengo González, Ricardo
Universidad de Extremadura
mjimenez06@enfermundi.com
rluengo@unex.es

Resumen. Este artículo presenta una investigación sobre la evolución, durante su escolaridad, de la estructura cognitiva de 458 alumnos, en lo que se refiere al concepto de *ángulo*.
Se ha utilizado la técnica de redes asociativas Pathfinder, que nos proporciona representaciones gráficas de la relación entre los conceptos empleados durante el proceso de aprendizaje y enseñanza de este concepto. Los resultados han mostrado cómo evolucionó la estructura cognitiva de los alumnos y cuáles fueron los conceptos más relevantes para ellos.
Sobre la base de los resultados obtenidos, presentamos también conclusiones para la práctica educativa y la investigación.
Palabras clave. Ángulo, estructura cognitiva, representación del conocimiento, conceptos nucleares, redes asociativas Pathfinder.

Nuclear concepts when building the concept of angle
Summary. This paper presents an investigation about the evolution of the cognitive structure of 458 students, during their years in school, in reference to the concept of angle.
We have used the technique of the Pathfinder Associative Networks, that provides us graphic representations of the relationship between the concepts employed during the process of learning and teaching of this concept. Results have showed how the pupil's cognitive structure evolved and what were the most relevant concepts for them.
We present also, on the basis of the results, some conclusions for educational practice and investigation.
Keywords. Angle, cognitive structure, representation of knowledge, nuclear concepts, Pathfinder Associative Networks.

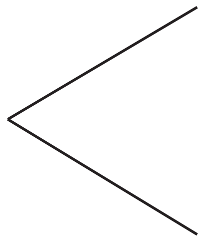
INTRODUCCIÓN

Definición y construcción personal del concepto de *ángulo*

El concepto de *ángulo* está lleno de matices y dificultades: resulta ser un concepto difícil de aprender y, por tanto, de enseñar y es una fuente de errores relacionados tanto con su conceptualización como con su medida o con las operaciones angulares, que se mantienen incluso en la edad adulta.

Estas dificultades han sido tratadas desde perspectivas amplias como las de Piaget (1948) y Freudenthal (1983) o más en detalle por Holloway (1982), Noss (1987), Magina y Hoyles (1991), Contreras (1993), Matos (1994), Mitchelmore (1990, 1996, 1998), Martínez Recio, (1999) y en nuestros propios trabajos anteriores (Casas y Luengo, 2000; Casas, 2002).

Un ejemplo sencillo puede bastarnos para introducirnos en la dificultad del concepto de *ángulo*.



¿Cuánto mide este ángulo?

No hay una única respuesta. Este ángulo puede medir 60°. Pero también puede medir 300°, y lo mismo puede ser -60° o -300°. Pudiera ser que también midiera 420°. Pero, además, si lo miramos desde el punto de vista de la programación LOGO, un autómata que lo recorriera debería girar en el vértice 120° o -120°. ¿Cuál es la medida correcta? ¿Cuántos ángulos estamos considerando? ¿A qué ángulo nos estamos refiriendo?

Definiciones matemáticas del concepto de *ángulo*

El origen de la dificultad de este concepto radica, en primer lugar, en su propia definición. Básicamente, manejamos tres tipos de definición para un mismo concepto en apariencia simple. Estos tres tipos aparecen ya históricamente, y han resultado ser puntos controvertidos en la fundamentación y desarrollo de la geometría, y origen de un problema que aún hoy no está resuelto.

Euclides, en sus *Elementos*, establece la siguiente definición (en realidad dos definiciones):

«Definición 8: Un ángulo plano es la inclinación entre dos líneas en un plano, que se unen la una a la otra y que no están sobre una línea recta.

»Definición 9: Y, cuando las líneas que contienen al ángulo son rectas, el ángulo se llama rectilíneo.»

Como podemos observar, ya desde los *Elementos*, la definición de ángulo parece poco precisa. Mientras la primera de estas definiciones refleja una concepción de ángulo, considerado como la «inclinación» entre dos rectas, en la segunda se considera ahora ángulo no como la inclinación entre dos líneas, sino como algo contenido «entre» ellas.

Ambas definiciones encierran, además otras particularidades dignas de destacar, como la exclusión de los ángulos de 0º y 180º o la posibilidad de que los lados del ángulo puedan ser líneas curvas.

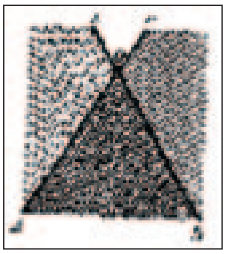
Las diferentes concepciones de ángulo estuvieron presentes en los matemáticos griegos posteriores a Euclides y, de ellas, por la evolución cultural, proceden directamente las que manejamos hoy en día.

Aunque existen otras concepciones tales como las que citan Contreras (1993) o Magina y Hoyles (1991), podríamos clasificar las definiciones en tres categorías: ángulo como región del espacio, ángulo como par de líneas y ángulo como giro.

Ángulo como región del espacio

Existe un primer tipo de definiciones como las de Severi (1962, p. 31), que considera los ángulos como conjuntos de puntos o porciones del plano.

«[...] conjunto de los puntos comunes a dos semiplanos, de un mismo plano, cuyos contornos se encuentran en un punto».



Esta definición, aunque parece tan sencilla, tiene algunas dificultades. En primer lugar, por sí sola no define un único objeto, sino al menos cuatro objetos diferentes, cuatro ángulos, con lo que la única forma de saber a qué conjunto de puntos nos referimos es señalándolo de un modo especial en el dibujo, pues la definición, por sí sola, no lo aclara.

Otra dificultad es que esta definición no sirve para los ángulos de 0º, de 180º, de 360º o mayores. Tampoco sirve para los ángulos negativos.

Las mismas dificultades presentan las definiciones de ángulo como conjunto de semirrectas de origen común, o las de tipo conjuntista como las de Roanes (1973) que además tienen otras dificultades añadidas de tipo conceptual, que analizamos en nuestro trabajo (Casas, 2002).

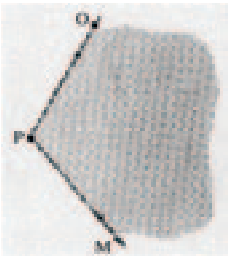
Es un tipo de definición muy extendida en los libros de texto de nuestro entorno cultural.

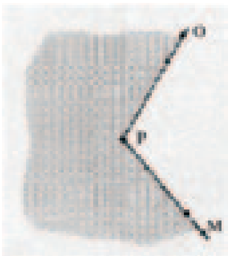
Ángulo como par de rayos o par de semirrectas

En estas definiciones se hace uso de una concepción de *ángulo* semejante a las anteriores, pero destacando los bordes, las líneas que limitan los ángulos, y considerando el ángulo como un par de rayos o de semirrectas con origen común.

La definición propuesta por Lang y Murrow es de este tipo (1983, p. 20):

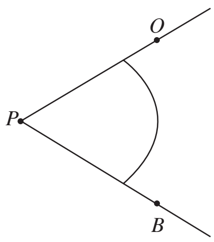
«Consideremos dos rayos Rpq y Rpm que parten del mismo punto P. Estos rayos separan el plano en dos regiones tal como se muestra en la figura.

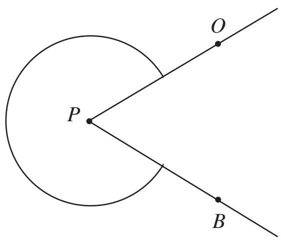




»Cada una de esas regiones se llamará ángulo determinado por los rayos.»

Esta concepción tiene también sus limitaciones: las referidas a la identificación de a qué ángulo nos estamos refiriendo. Si consideramos el ángulo como par de semirrectas que confluyen en un punto, ¿cómo se define un ángulo cóncavo o un ángulo convexo?, ¿y cómo se diferencian los dos ángulos que se forman en el vértice?, ¿y un ángulo negativo? Para hacerlo hay que recurrir a ayudas en el dibujo, tales como los pequeños arcos que suelen añadirse, a veces con flechas en el extremo, y que podemos observar en muchos libros de texto:





Ángulo como cantidad de giro

Un tercer tipo de definiciones son las que, a partir de dos líneas que se unen en un punto, definen ángulo como «la cantidad de inclinación entre las dos líneas» o «la cantidad de giro necesaria para trasladar una línea a la posición de otra».

Esta clase de definiciones no presenta los problemas que tienen las anteriores a la hora de considerar ángulos mayores que 360°, permitiendo además la expresión de ángulos positivos y negativos, aspecto este último que de ninguna manera quedaba contemplado en las definiciones que hemos visto antes.

Pero, frente a ellas, presenta una diferencia sustancial, y es que no implica algo material o representable, visualmente al menos, como lo puede ser una porción del plano o un par de rectas, sino que es una abstracción que no se conceptualiza fácilmente en edades tempranas.

Esta definición de ángulo representa, además, una visión diferente del concepto, una visión «dinámica», de algo en movimiento, frente a las anteriores visiones «estáticas» de ángulo como región del espacio o como par de rayos.

Construcción del concepto de *ángulo*

A la dificultad en la definición del concepto y no sólo en el caso del de *ángulo* sino en el de otros muchos conceptos matemáticos, se une otra dificultad: la derivada de la diferencia entre la definición formal y el proceso cognitivo de construcción que siguen los alumnos.

Tall y Vinner (1981) hacen una distinción entre «definición del concepto» e «imagen del concepto», aludiendo a esta última como la estructura cognitiva total que se asocia con el concepto y que incluye todas las imágenes gráficas y las propiedades y procesos asociados a él, insistiendo en la complejidad que supone la construcción de una definición personal del concepto.

El problema del aprendizaje del concepto de *ángulo*, como en el caso de otros, radica en que los alumnos deben integrar distintas experiencias educativas, pero además deben integrar definiciones muy diferentes. Esto es lo que indican Mitchelmore y White (1998, p. 4):

«[Los alumnos] Deben llegar a darse cuenta de que es un concepto de ángulo más amplio que la suma de las diferentes definiciones de ángulo. No es posible expresar este concepto en palabras –y si lo fuera no habría tal plétora de definiciones– pero ciertamente implica dos líneas unidas en un punto y alguna relación entre ellas. La relación se expresa de forma diferente en diferentes circunstancias; puede ser, por ejemplo, una cantidad de giro, la inclinación de dos rayos, o lo puntiagudo de una región angular.»

A partir de estas definiciones, y a partir de las experiencias educativas, entre las que, en nuestra opinión, juegan un importantísimo papel los ejemplos utilizados durante la enseñanza, se construye el concepto de *ángulo*, a partir de conceptos parciales, como una estructura en la que entran a formar parte la propia definición, la imagen mental y los procesos asociados a la experiencia consciente o inconsciente.

Esta idea es clave, pues precisamente en ella se centra nuestra investigación: nos interesa conocer cuáles son los procesos mentales a través de los que el alumno construye, a lo largo del aprendizaje, su propio concepto y su propia definición, como una estructura compleja en la que entran a formar parte elementos diversos que constituyen conceptos parciales. Y para ello hace falta disponer de herramientas que permitan identificar cuáles son dichos elementos, cuáles son los más importantes y cuáles las relaciones entre ellos.

Nuevas técnicas en la investigación del concepto: redes asociativas Pathfinder

El estudio de los procesos mentales a los que antes nos hemos referido ha sido tradicionalmente abordado, en la didáctica de las matemáticas, en particular, y en muchos otros campos en general, desde diferentes enfoques y con diversas técnicas, entre las que podemos mencionar el uso de cuestionarios, los protocolos de pensamiento en voz alta, las entrevistas a profesores y alumnos o los mapas conceptuales.

Pero el gran problema de estas técnicas es que todas ellas exigen la realización de tareas que suelen ser difíciles de llevar a cabo y también un elevado esfuerzo y consumo de tiempo por parte de alumnos e investigadores. Ello obliga en la mayor parte de los casos a efectuar estudios con muestras muy pequeñas y análisis casi exclusivamente de tipo cualitativo.

Por otra parte, su aplicación exige un elevado nivel de introspección del alumno, que no siempre es posible en edades tempranas, ni con todos los alumnos, y que limita sus posibilidades de empleo.

Exigen, por último una inferencia, en algunos casos excesiva, del investigador a la hora de obtener y analizar resultados, lo que puede restarles validez.

Necesitamos, pues, utilizar nuevas técnicas que eviten estos inconvenientes y, en ese sentido, creemos que las redes asociativas Pathinder pueden suponer un avance.

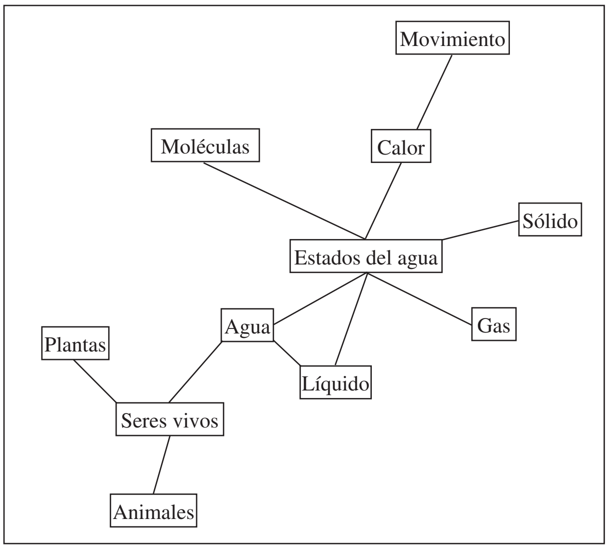
Las redes asociativas Pathfinder (Schvaneveldt, Durso y Goldsmith, 1985) pueden ser incluidas entre los métodos de representación del conocimiento que hacen uso de la puntuación de similaridad entre conceptos. Estos métodos asumen que se puede utilizar una representación espacial entre los conceptos, que describirá el patrón de relaciones entre ellos en la memoria. La representación se obtiene a partir de una puntuación numérica que se adjudica a la similaridad o diferencia entre los conceptos percibida por un sujeto y que corresponde a su distancia semántica. La distancia semántica pasa a ser considerada como si fuera una distancia geométrica y los conceptos semánticamente más próximos se representarán más próximos en el espacio y análogamente los más distantes. Dado que se pide al sujeto la realización de una tarea extremadamente simple y en la que no influyen la madurez o los conocimientos previos, se espera que los datos obtenidos reflejen la estructura profunda de su memoria.

Aunque existen algunas variantes, la técnica más general de puntuación de similaridad entre conceptos comienza, primeramente, por la elección de conceptos que pueden ser simples o más elaborados, y después presentando todos los posibles pares en orden aleatorio.

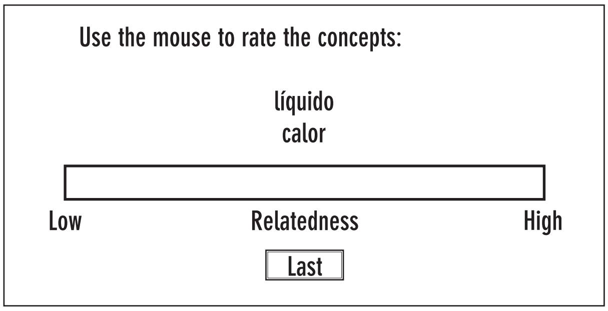
En ese momento se pide al alumno que, dados dos de ellos, asigne una puntuación a la similaridad o a la diferencia que exista. Las puntuaciones se resumen en una matriz de distancias que describe el grado de similaridad o diferencia, y que habitualmente son transformados en coeficientes de relación entre 0 y 1, de modo que los conceptos muy relacionados se puntúan con valores próximos a 1, y los que no lo están se puntúan próximos a 0.

Las matrices de datos de puntuación o coeficientes de relación obtenidos se tratan mediante técnicas estadísticas como la de análisis de componentes principales, análisis de Cluster, escalamiento multidimensional o redes Pathfinder. Estos métodos estadísticos transforman los datos de interrelación entre conceptos en distancias entre puntos en un espacio de dimensiones mínimas, de tal manera que se obtiene una representación espacial o se determina la estructura subyacente de los datos. Muchos investigadores están de acuerdo en que estos procedimientos hacen posible definir operativamente la estructura cognitiva (Fenker, 1975; Jonassen, 1987; Preece, 1976; Shavelson, 1972, 1985; Wainer y Kaye, 1974)

Las redes asociativas Pathfinder son representaciones en las cuales los conceptos aparecen como nodos y sus relaciones como segmentos que los unen, de mayor o menor longitud según el peso o fuerza de su proximidad semántica. Veamos un ejemplo referido a conceptos de ciencias naturales:



Para obtener estas redes, como antes hemos indicado, se parte de un conjunto de conceptos seleccionados dentro de un campo de conocimiento y se pide al sujeto que evalúe cuál es la proximidad que considera que existe entre cada par de ellos. Esto puede llevarse a cabo mediante el programa informático KNOT (Schvaneveldt, 1989), que presenta en pantalla de forma aleatoria todos los pares posibles y permite asignar el nivel de relación mediante, por ejemplo, el deslizamiento del cursor.

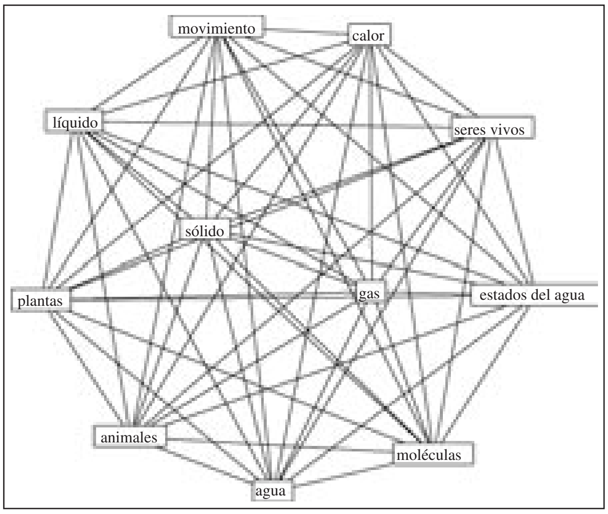


A partir de los datos obtenidos, el programa calcula una matriz de correlaciones como la siguiente –referida al ejemplo del gráfico anterior– y que representa los «pesos» de los enlaces entre conceptos:

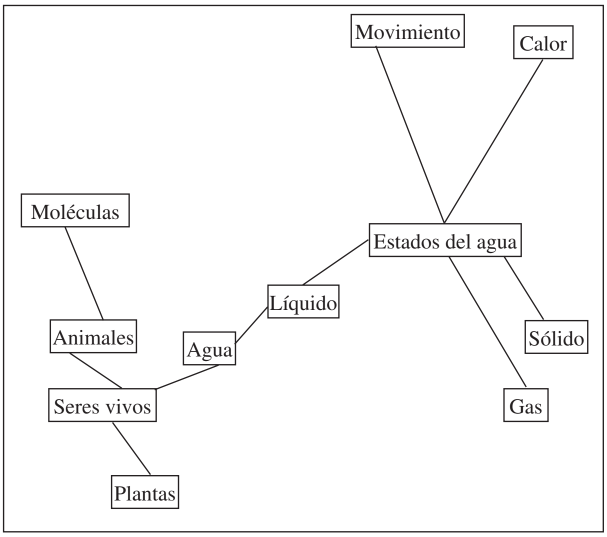
	Agua	Seres vivos	Animales	Plantas	Molécu-las	Movi-miento	Calor	Estados del agua	Sólido	Líquido	Gas
Agua											
Seres vivos	0,8000										
Animales	0,7500	0,8733									
Plantas	0,6400	0,7867	0,7533								
Moléculas	0,2400	0,2367	0,4667	0,2333							
Movimiento	0,3900	0,4067	0,3800	0,2267	0,3033						
Calor	0,2733	0,5533	0,2700	0,2600	0,3300	0,5067					
Estados del agua	0,7067	0,2800	0,2267	0,3100	0,2533	0,5167	0,6867				
Sólido	0,2367	0,2033	0,2933	0,2500	0,1667	0,2167	0,1633	0,7567			
Líquido	0,7767	0,2267	0,2633	0,2300	0,2167	0,4367	0,2267	0,7867	0,4933		
Gas	0,1600	0,2567	0,1900	0,2000	0,3000	0,2600	0,3000	0,7800	0,4667	0,4667	

A partir de esta matriz, y utilizando otro algoritmo (Kamada y Kawai, 1989), ofrece una representación gráfica.

Dado que, en la matriz de datos, todos los conceptos están relacionados en mayor o menor grado, aparecerían unidos todos:



Pero esta red no ofrece información útil, e interesa que sólo aparezcan los enlaces más significativos. El mecanismo básico para determinar qué enlaces se incorporan consiste en que un enlace sólo se incorpora a la red si no existe un camino indirecto a través de otros nodos cuya suma de pesos sea menor que la de dicho enlace directo. De este modo, en la red resultante, no todos los conceptos están necesariamente relacionados entre sí, sino que sólo se representan aquéllos enlazados por senderos de peso mínimo, de manera que aparecen sólo las relaciones más fuertes tal como se expone en la siguiente figura:



Para seleccionar los enlaces, el algoritmo Pathfinder, utiliza un procedimiento iterativo que, teniendo en cuenta dos parámetros (q y r), busca entre los nodos para encontrar el camino indirecto más próximo entre ellos y conservar sólo los enlaces con un sendero de peso mínimo entre dos conceptos.

Los parámetros q y r determinan, pues, el número de nodos que aparecerán en la red, haciéndola más o menos compleja.

Por lo que respecta al parámetro q, su finalidad es limitar el número de enlaces que están presentes en la red y, disminuyendo su valor, aumenta la complejidad. Si se quiere que, en una red con n nodos, sólo aparezcan los enlaces más importantes, se utiliza $q = n - 1$. Suele ser el valor más usual en las investigaciones y es el valor empleado en nuestro trabajo.

Con respecto al parámetro *r*, su importancia práctica radica en que, eligiendo *r* = infinito, y en virtud del algoritmo matemático empleado, podemos utilizar datos que no estén medidos en escalas de razón. Evidentemente, la proximidad que un sujeto estima que existe entre dos conceptos no se mide en una escala de razón, por lo que en muchos estudios, el nuestro incluido, se utiliza dicho valor de *r*.

Para una exposición detallada de los aspectos anteriores, puede consultarse Schvaneveldt (1989) y nuestro trabajo (Casas, 2002).

En estos trabajos también puede obtenerse más información acerca del programa KNOT, que ofrece varias posibilidades no sólo de representación gráfica, sino de cálculo de parámetros numéricos, tales como la coherencia de las redes obtenidas o la similaridad entre ellas, de gran interés para la investigación cuantitativa, pero a los que no haremos referencia en este artículo por limitaciones de espacio.

La gran aportación que suponen las redes asociativas Pathfinder es que permiten crear representaciones en forma de redes de la estructura cognitiva de un sujeto a partir de datos empíricos, y pueden ser generadas de forma totalmente automática.

Las redes asociativas Pathfinder tienen campos de utilización muy amplios (Jonassen, Beissner y Yacci, 1993; McGaghie, 1996; Barab et al., 1996; Eckert, 1997; Chen, 1998; Ramey et al., 2001). En nuestro trabajo Casas (2002) hacemos una revisión bibliográfica detallada de la utilización de esta técnica, en la que, básicamente, se pueden observar cinco grandes líneas:

• Los primeros trabajos están dedicados a la investigación básica sobre la representación de la estructura del conocimiento, con trabajos como los de Gonzalvo (1994), Wilson (1998) o McClure (1999) dedicados a la validación de la técnica y a su comparación con otras ya conocidas.

• Una segunda línea de investigación es la dirigida a la formación del profesorado, con trabajos que tratan de identificar cómo se pueden analizar las estructuras de conocimiento de los alumnos y profesores, en qué manera van evolucionando y cómo se van haciendo más similares unas a otras conforme avanza el proceso de instrucción. Entre ellos podemos señalar el de McGaghie (1996) y, particularmente, el de Kokoski y Housner (1994), con alumnos y profesores de matemáticas y ciencias.

• En tercer lugar están los trabajos enfocados hacia el diseño y evaluación de productos hipermedia educativos, en los que, haciendo uso de esta técnica, se trata de estudiar cuál es el proceso de utilización de estos productos en campos tales como la enseñanza de la química (Berger y Dershimer, 1993) o de los idiomas (Nelson y Bueno, 1999). También en la misma línea hay trabajos que tratan de diferenciar las características del uso por parte de usuarios expertos o novatos (Koneman y Jonassen, 1994; Ramey et al., 2001).

• Podemos señalar, después, un buen número de investigaciones que utilizan las redes asociativas Pathfinder para recuperar y representar datos cuando se tienen grandes cantidades de información. Entre ellas destacamos las de Fowler (1992) o Byrne y McCracken (1999), sobre creación de tesauros basados en la proximidad semántica de documentos, o la de Fabrikant (2001), que genera un modelo de realidad virtual con todas las noticias aparecidas en un período en una agencia de noticias.

• Por último hay un grupo de investigaciones muy variadas que tratan de estudiar la estructura cognitiva de los sujetos en campos tan diferentes como las de distintos tipos de enfermos mentales (Lindsay y Goldsmith, 1995; Paulsen et al., 1996) o las de personas en distintas situaciones sociales o de trabajo (Manguno, 1998; Haslinger, 2001; Schvaneveldt, 2001).

De los trabajos anteriormente presentados queremos destacar dos importantes aspectos relativos a esta técnica:

– Su capacidad de representación gráfica, cada vez más valorada y utilizada en las ciencias sociales.

Estos trabajos destacan, además, que las propiedades de una red gráfica resultan importantes, pues tanto la colocación de los nodos en la figura como la longitud de los enlaces proporcionan por sí solos información importante. Mientras más centralmente aparece colocado un nodo, más «central» es el concepto asociado en la estructura cognitiva y, en cambio, la longitud de los enlaces significa similaridad de los conceptos. Estas representaciones permiten destacar cuáles son, dentro de la estructura cognitiva de un alumno, los conceptos clave y las relaciones más importantes entre los mismos (Jonassen, Beissner y Yacci, 1993; Bajo y Cañas, 1994).

– La facilidad de obtención de datos.

La forma de obtención de datos en las redes asociativas Pahfinder permite conseguir una gran cantidad de información, que puede ser analizada con diferentes técnicas, y para diferentes propósitos, sin que ello suponga, ni un gran esfuerzo para el investigador, ni para el sujeto de investigación, por supuesto.

Estos datos, como puede verse en las investigaciones anteriormente citadas, no solamente pueden ser obtenidos interrogando directamente al sujeto de investigación, sino también de forma automática registrando sus interacciones durante un trabajo o a partir de la información contenida en documentos, lo cual la hace sumamente interesante.

OBJETIVOS

El objetivo de este trabajo es realizar un estudio descriptivo de la evolución del concepto de *ángulo* en alumnos desde 3º de educación primaria hasta la edad adulta, identificando cuáles son los conceptos parciales a partir de los que se construye el concepto general de *ángulo* y cuáles son los más importantes dentro de la estructura cognitiva de los alumnos.

Para ello utilizaremos una técnica que permita obtener datos suficientes de una muestra amplia y con mínima interferencia por parte del investigador.

HIPÓTESIS

Por tratarse de un estudio descriptivo, no se formulan hipótesis que hayan de ser contrastadas posteriormente. Se trabaja con la hipótesis general de que las redes asociativas Pathfinder van a permitir identificar, dentro de la estructura cognitiva de un sujeto, los conceptos parciales más importantes de un área de conocimiento, entre los que destacarán algunos más significativos que otros.

MUESTRA

Se utilizó una muestra formada por 458 alumnos de centros educativos de la Comunidad Autónoma de Extremadura, de los cuales 440 correspondían a los cursos desde 3º de primaria, hasta 4º de educación secundaria obligatoria y 18 a alumnos de 5º curso de la carrera de Matemáticas.

Del total de la muestra, 410 alumnos fueron seleccionados mediante un diseño aleatorio, utilizando un procedimiento multietapa, desde los niveles más generales hasta los más específicos, combinando muestreo aleatorio por conglomerados, muestreo aleatorio por estratos y muestreo aleatorio simple. La afijación se hizo de forma proporcional a la población total.

Se añadió, a esta muestra aleatoria, una muestra intencional formada por 30 alumnos de elevado rendimiento, de 4º de educación secundaria obligatoria, participantes en la Olimpiada Matemática de Extremadura y por 18 estudiantes de 5º curso de la carrera de Matemáticas.

En el caso de los centros de primaria, para realizar la prueba se seleccionaron los cursos 3º, 4º, 5º y 6º de primaria y, en el de los centros de secundaria, los de 1º, 2º, 3º y 4º de ESO.

Este criterio fue establecido así pues, es en el curso 3º de primaria en el que se inicia el estudio del concepto de *ángulo* y se define como tal, puesto que, con anterioridad se trabaja, lógicamente, pero incluido en otros conceptos, como puede ser el de *giro*, que es tratado desde el primer curso de primaria.

En el curso 4º se incide de nuevo en el concepto de *ángulo* y se profundiza más en la formalización de las definiciones y la ampliación de situaciones en que aparece.

Prácticamente, del análisis de los programas escolares, se deduce que, en los sucesivos cursos de enseñanza obligatoria, el estudio de este concepto se amplía tan sólo a tres grandes capítulos: las operaciones con ángulos, su medida y la caracterización de algunos tipos de ángulos según su posición.

Los fundamentos de la enseñanza de este concepto quedan, en nuestra opinión, establecidos en los cursos 3º y 4º de primaria, en los que se introduce de manera formal y se inicia su estudio sistemático, lo que justifica iniciar nuestro trabajo con estos cursos.

Con respecto a la muestra intencional, la primera parte, constituida por 30 alumnos de 2º curso de ESO, participantes en una prueba de alto rendimiento en matemáticas, la Olimpiada de Matemáticas en Extremadura, fueron elegidos para representar un grupo de alto nivel dentro de los escolares de su edad.

En cuanto a la segunda parte de la muestra intencional, los alumnos de 5º curso de la Facultad de Matemáticas fue elegida por tratarse de adultos que, al igual que los alumnos anteriores, tienen un elevado rendimiento y, puesto que han elegido la carrera de Matemáticas, una elevada motivación hacia las mismas.

El número de alumnos de la muestra, distribuidos por grupos, resultó como se indica a continuación.

4º primaria	52
4º ESO	46
Matemáticas	18
Olimpiada	30
1º ESO	52
5º primaria	54
2º ESO	52
6º primaria	55
3º primaria	54
3º ESO	45
Total	458

MÉTODO

Este estudio fue llevado a cabo por el método de encuesta, aunque difiere de la tradicionalmente entendida, ya que fue sustituido el cuestionario que caracteriza a esta técnica por un instrumento informático, el programa KNOT, que sirve para la formulación de preguntas, la recogida de datos y la presentación de resultados.

Dentro del tipo de investigación por encuesta, llevamos a cabo un diseño, transversal (Buendía, 1999), pues los datos fueron recogidos de varios grupos de sujetos en un determinado corte en el tiempo.

Para este trabajo en el que se hizo un estudio de la evolución del concepto de *ángulo* en distintas edades, se tomaron muestras que representaban los distintos momentos evolutivos en la adquisición y desarrollo de este concepto, desde que se inicia su aprendizaje hasta el final de la educación secundaria, con referencias a la edad adulta. Estudiando los resultados de los distintos momentos evolutivos, podemos obtener una idea global del desarrollo del proceso.

Elección de los conceptos parciales empleados

Como ya hemos explicado, esta técnica parte de un conjunto de conceptos dentro de un área de conocimiento, que se presenta al sujeto para que éste establezca el grado de similaridad que considera que existe entre ellos. Evidentemente, y dadas las características de la técnica que hemos explicado, no se puede hacer que el propio alumno elija los conceptos, y ello por dos razones:

En primer lugar, no podemos suponer que los alumnos conozcan cuáles son los conceptos parciales más importantes para la construcción del concepto general de *ángulo*.

En segundo lugar, y aún suponiendo que cada alumno eligiera sus propios conceptos parciales, sería imposible comparar los resultados de unos alumnos con los de otros.

La dificultad se centra, entonces, en seleccionar los conceptos adecuados que hemos de comparar. Decisiones tales como cuáles son los contenidos relevantes para el tema objeto de estudio o quien debe hacer la selección requieren un estudio detallado antes de empezar.

En nuestro caso, para elegir cuáles serían los conceptos seleccionados, partimos de dos fuentes: entrevistas a profesores con experiencia y revisión de libros de texto.

Con la información recogida tanto de las entrevistas como de los libros de texto, se procedió a elegir una primera lista de dieciocho conceptos.

Tras esta primera selección, se procedió a una segunda, para la que se utilizaron dos criterios:

1) En primer lugar, un criterio de orden práctico relacionado con el programa Knot y con su utilización. A la hora de usar este programa, el tiempo que el alumno emplea es determinante, pues hay un límite máximo en que puede mantener la atención, antes de perder interés por la tarea que está realizando (Rohrer y Hoi, 1999).

Así pues, y también por nuestro conocimiento anterior en la utilización de este programa, determinamos que el número máximo de conceptos debería estar entre diez y doce.

2) Un segundo criterio lo obtuvimos a partir de la literatura científica relacionada con el tema. En esta literatura, los conceptos parciales relacionados con el de ángulo suelen aparecer agrupados de acuerdo con dos tipos de concepciones, que podemos denominar *dinámica* y *estática* del ángulo.

De acuerdo con los criterios enunciados, seleccionamos once conceptos parciales asociados al de *ángulo*, agrupados en la forma que sigue.

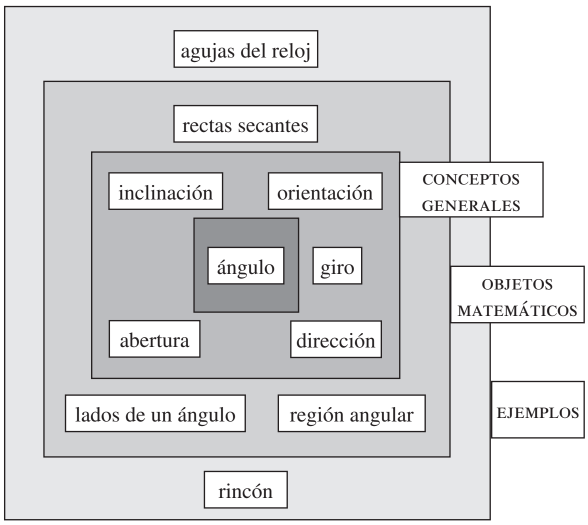
– Concepción «estática» de ángulo
Rincón
Región angular
Lados de un ángulo
Rectas secantes

– Concepción «dinámica» de ángulo
Orientación
Giro
Dirección
Agujas del reloj

– Conceptos que participan de las dos concepciones
Águlo
Abertura
Inclinación

Estos «conceptos parciales», que forman el concepto general de *ángulo*, debemos entenderlos en el sentido de las imágenes evocadas de los conceptos a que se referían Tall y Vinner (1981) –de las que tratamos anteriormente– y abarcan distintos niveles de generalidad. Por ello, otra clasificación de los conceptos relacionados con el de *ángulo* que hemos seleccionado y que puede resultarnos útil es la que puede hacerse atendiendo a su mayor o menor nivel de generalidad, en el sentido de las jerarquías que emplea Novak a la hora de clasificar los conceptos de un mapa conceptual.

Atendiendo a este criterio, podemos clasificar los conceptos anteriores como sigue:



En esta clasificación podemos observar cómo, según nuestra concepción, existen conceptos generales, empleados por gran parte de la población, de los cuales el más general de todos (desde el punto de vista matemático, aunque quizá no lo sea desde el del lenguaje de la calle) es el de *ángulo*.

A este concepto se han de añadir los de *inclinación*, *dirección*, *orientación*, *giro* y *abertura*, que son de modo casi exhaustivo los términos empleados en las distintas definiciones de *ángulo* que aparecen en los libros de texto.

En el siguiente nivel de generalidad hemos situado lo que denominamos *objetos matemáticos*, y que son conceptos utilizados en la definición y descripción de los conceptos anteriores: *región angular*, *lados del ángulo* y *rectas secantes*.

Por último, al menor nivel de generalidad están los que utilizamos como ejemplos, y de los cuales sólo hemos seleccionado dos: rincón y agujas del reloj.

Realización de la experiencia

El investigador se desplazó hasta cada uno de los centros, pues de esta manera se quiso garantizar que la aplicación de la prueba fuera igual en todos los casos.

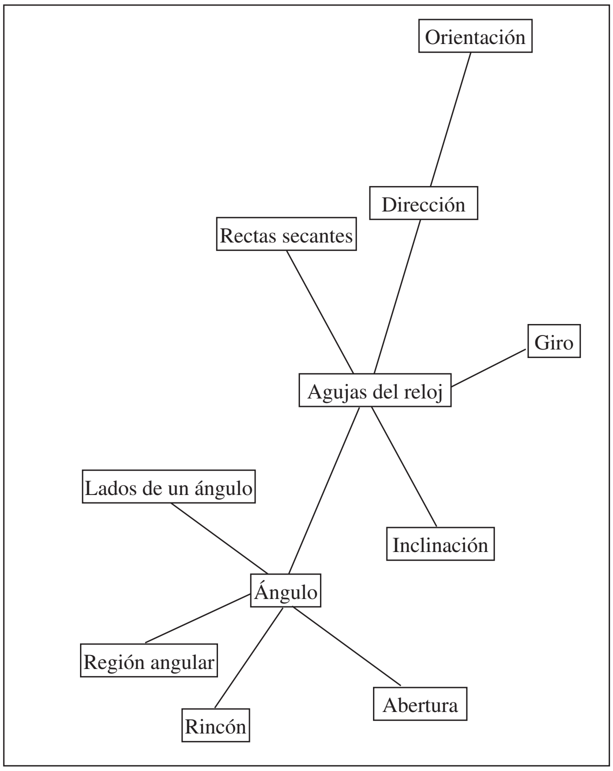
La puesta en práctica se llevó a cabo con diez ordenadores Macintosh que fueron aportados por el equipo de investigación y en los que previamente se había instalado una copia del programa KNOT Mac, versión 3.1. Para todos las redes de los alumnos, los parámetros escogidos en las preferencias del programa fueron $q = 10$, r = infinito, que como hemos indicado anteriormente, permiten obtener las redes más sencillas posibles.

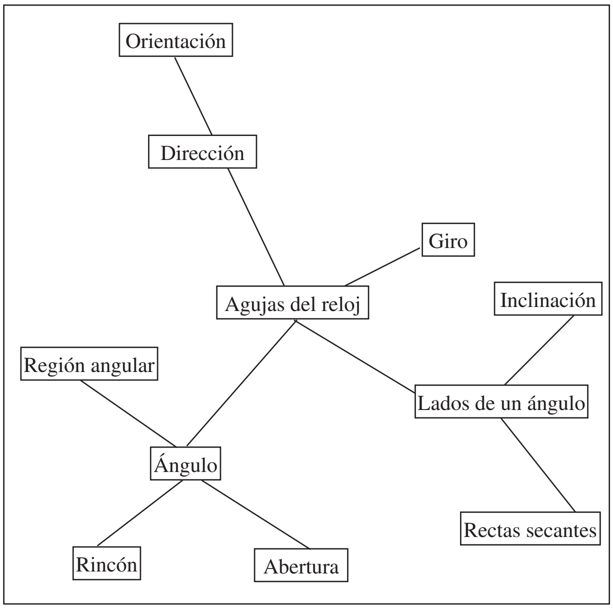
A todos los alumnos se les impartieron únicamente las siguientes instrucciones textuales: *«En el ordenador van a aparecer una serie de palabras que tienen algo que ver unas con otras, que tienen cierta relación: poca, mucha o regular. Tú tienes que indicar cuánta. Si señalas con el ratón a la derecha es mucha, si señalas a la izquierda es poca, y hacia el centro es regular»*.

No se les dio ninguna otra indicación previa acerca del contenido de la prueba, sino tan sólo una demostración del manejo, que fue entendida perfectamente salvo pequeñas excepciones a las que se atendió personalmente cuando los demás alumnos ya estaban trabajando.

RESULTADOS Y ÁNALISIS DE LOS MISMOS

Se obtuvieron las 458 redes asociativas Pathfinder de los alumnos, del tipo de las siguientes:





Estas redes ofrecen una amplia información visual (relaciones entre conceptos, grupos que se forman entre ellos, distancias…) que, además, puede ser completada por parámetros como la coherencia, o la similaridad que se calcula por el programa KNOT, o las propias matrices numéricas de datos, y que exponemos en nuestros trabajos (Casas, 2002; Casas y Luengo, 2004). Tal cantidad de datos ofrece varios y sugerentes caminos de investigación. Sin embargo, en este trabajo sólo nos centraremos en un aspecto que presentamos a continuación.

En estas redes, como podemos observar, aparecen nodos principales (ángulo, agujas del reloj o lados del ángulo) que ocupan una posición más relevante dentro de la estructura, pues presentan un mayor número de relaciones con los demás. Llamamos «nodos múltiples» a aquéllos que tienen más de dos enlaces. Estos nodos nos permiten identificar los conceptos más importantes en la estructura cognitiva de los alumnos, que denominamos «conceptos nucleares» en nuestra teoría (Casas, 2002; Casas y Luengo, 2004).

De este modo podemos identificar cuáles son dichos conceptos en cada curso de la escolaridad, y estudiar así cómo va evolucionando la estructura cognitiva en torno al concepto de *ángulo* en distintas edades.

Para ello, registramos cuáles son los principales nodos múltiples que aparecen en ellas. Tras el recuento de todos los nodos múltiples, en la siguiente tabla podemos ver el tanto por ciento de veces que aparece como tal cada uno de los posibles nodos en las redes correspondientes a cada curso. En esta tabla y en las que siguen, están representados los cursos desde 3º de primaria (3ºp) hasta 4º de secundaria (4ºs), así como los alumnos de la Olimpiada (Ol.) y de Matemáticas (Mat.).

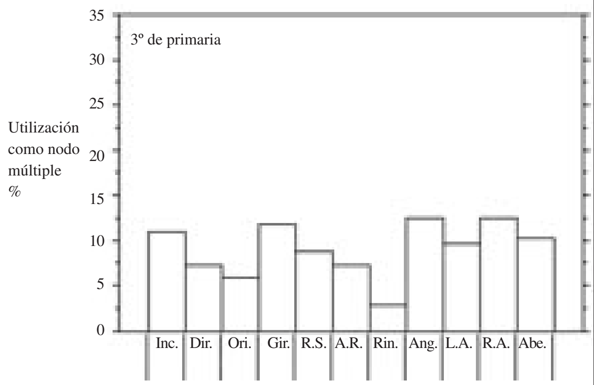
	3ºp	4ºp	5ºp	6ºp	1ºs	2ºs	3ºs	4ºs	Ol.	Mat.
Inclinación	11,0	10,3	5,9	6,8	4,5	2,3	0,8	2,7	0	0
Dirección	7,4	7,7	6,6	7,4	9,0	9,2	5,0	6,2	3,1	2,6
Orientación	5,9	9,4	8,1	5,6	6,8	5,4	5,0	0,9	3,1	2,6
Giro	11,8	5,1	9,6	8,6	7,5	8,5	5,0	6,2	1,5	7,7
Rectas secantes	8,8	5,1	2,2	6,8	5,3	6,2	6,7	7,1	7,7	5,1
Agujas del reloj	7,4	12,8	14,7	16,7	20,3	17,7	25,0	25,7	30,8	17,9
Rincón	2,9	11,1	8,1	4,3	7,5	6,9	8,3	1,8	7,7	5,1
Ángulo	12,5	13,7	21,3	14,8	17,3	18,5	21,7	23,9	26,2	23,1
Lados de un ángulo	9,6	13,7	15,4	10,5	9,8	13,8	15,8	10,6	6,2	12,8
Región angular	12,5	3,4	4,4	9,9	7,5	3,8	5,0	8,0	7,7	17,9
Abertura	10,3	7,7	3,7	8,6	4,5	7,7	1,7	7,1	6,2	5,1

Aquí podemos observar cómo, por ejemplo, en 3º, el concepto *inclinación* representa el 11% de los nodos múltiples totales que aparecen en las redes de tales alumnos. El concepto *dirección* representa el 7,4% del total de los nodos múltiples que aparecen en tal curso. En la columna correspondiente a 3º, como ocurre en todas las demás, la suma de porcentajes es 100.

Hemos sombreado, además, cuáles son los nodos múltiples más utilizados. Así podemos ver, en conjunto, en cada uno de los cursos, cuáles son los nodos múltiples que utilizan los alumnos.

Veamos a continuación cuál es la distribución de estos conceptos a lo largo de los distintos cursos.

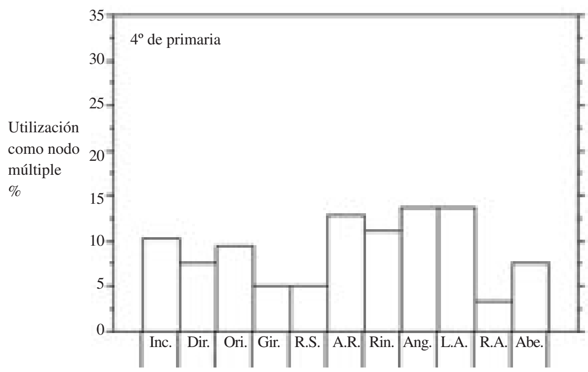
En 3º de primaria, la distribución en tanto por ciento de los conceptos que los alumnos utilizan como nodos múltiples es la siguiente:



Inc.: Inclinación / Dir.: Dirección / Ori.: Orientación / Gir.: Giro /
R.S.: Rectas secantes / A.R: Agujas del reloj / Rin.: Rincón /
Ang.: Ángulo / L.A.: Lados de un ángulo / R.A.: Región angular / Abe.: Abertura

Como podemos ver, hay varios conceptos que aparecen como nodos múltiples en proporciones similares: *ángulo*, *región angular*, *giro* e *inclinación* son los más destacados, aunque los demás tienen una representación notable. Recordemos que es en este curso cuando se inicia el aprendizaje del concepto de *ángulo*.

En 4º de primaria, la distribución es la siguiente:

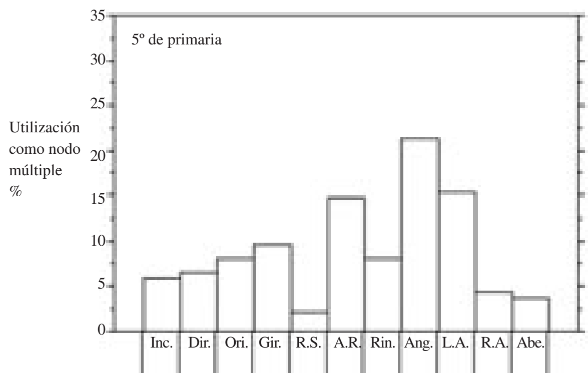


Inc.: Inclinación / Dir.: Dirección / Ori.: Orientación / Gir.: Giro /
R.S.: Rectas secantes / A.R: Agujas del reloj / Rin.: Rincón /
Ang.: Ángulo / L.A.: Lados de un ángulo / R.A.: Región angular / Abe.: Abertura

Esta distribución es similar a la anterior, con dos diferencias que queremos destacar: la menor utilización del concepto *región angular* y el aumento de la frecuencia de aparición de *agujas del reloj*.

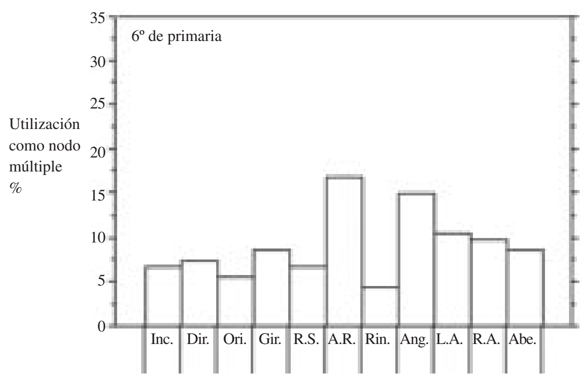
En el curso 5º de primaria, la distribución de frecuencias de utilización es la que aparece en el cuadro de la página siguiente.

En este curso se observa una tendencia que se mantendrá ya durante toda la escolaridad: la concentración de las frecuencias de aparición en unos pocos conceptos, que, como podemos ver en la anterior figura son, en este caso: «ángulo», *lados del ángulo* y *agujas del reloj*.



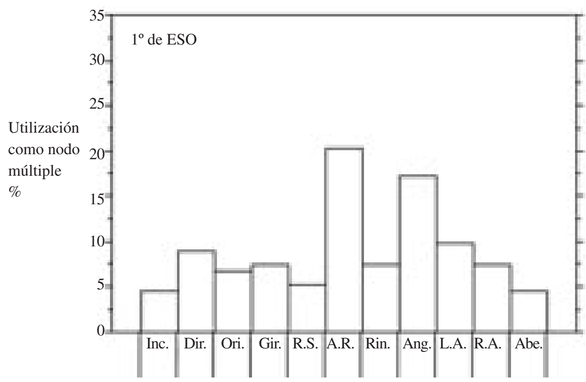
Inc.: Inclinación / Dir.: Dirección / Ori.: Orientación / Gir.: Giro /
R.S.: Rectas secantes / A.R: Agujas del reloj / Rin.: Rincón /
Ang.: Ángulo / L.A.: Lados de un ángulo / R.A.: Región angular / Abe.: Abertura

Al llegar a 6º de primaria hay un cambio, pues vemos que vuelven a utilizarse conceptos que parecían tener una tendencia a dejar de aparecer (como «región angular»). Sin embargo, se mantiene la importancia de dos conceptos: *agujas del reloj* y *ángulo*.

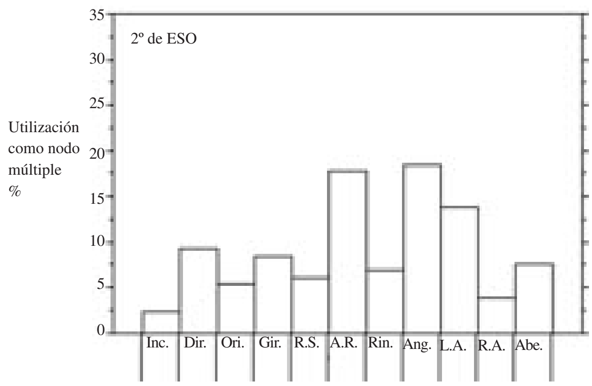


Inc.: Inclinación / Dir.: Dirección / Ori.: Orientación / Gir. : Giro /
R.S.: Rectas Secanes / A.R: Agujas del Reloj / Rin.: Rincón /
Ang.: Ángulo / L.A.: Lados de un ángulo / R.A.: Región Angular / Abe.: Abertura

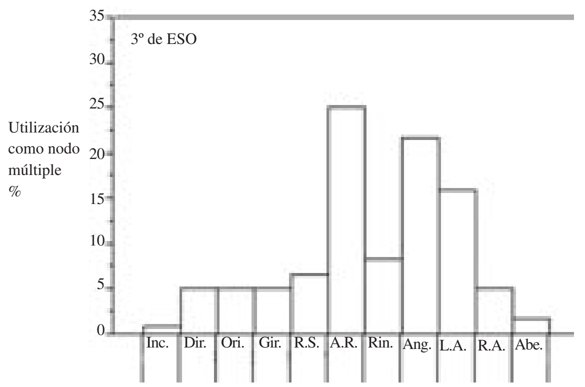
A partir de 1º de ESO, se acentúa una tendencia que se mantendrá en toda la secundaria: el empleo de cada vez menos conceptos distintos como nodos múltiples, y la polarización en unos pocos. Ello destaca aún más si observamos que la media de aparición de los conceptos menos utilizados que estaba en 3º de primaria en torno a un 10% baja en secundaria hasta un 5, mientras que la de los más utilizados aumenta hasta un 15%. Esta evolución podemos comprobarla en los datos de 1º a 3º de ESO, que presentamos a continuación.



Inc.: Inclinación / Dir.: Dirección / Ori.: Orientación / Gir.: Giro /
R.S.: Rectas secantes / A.R: Agujas del reloj / Rin.: Rincón /
Ang.: Ángulo / L.A.: Lados de un ángulo / R.A.: Región angular / Abe.: Abertura



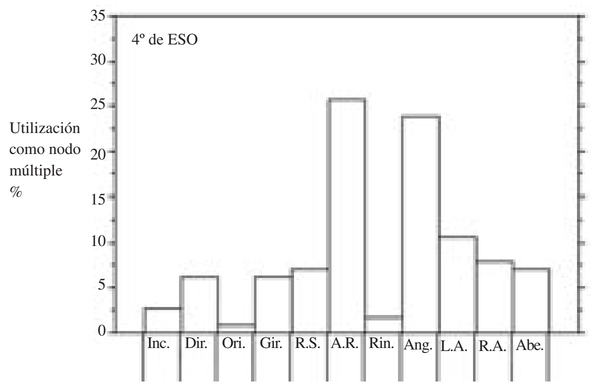
Inc.: Inclinación / Dir.: Dirección / Ori.: Orientación / Gir.: Giro /
R.S.: Rectas secantes / A.R: Agujas del reloj / Rin.: Rincón /
Ang.: Ángulo / L.A.: Lados de un ángulo / R.A.: Región angular / Abe.: Abertura



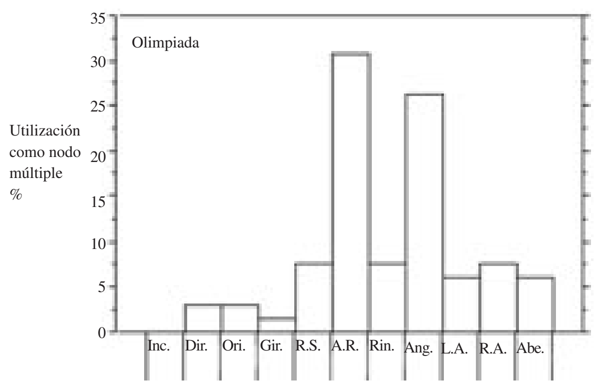
Inc.: Inclinación / Dir.: Dirección / Ori.: Orientación / Gir.: Giro /
R.S.: Rectas secantes / A.R: Agujas del reloj / Rin.: Rincón /
Ang.: Ángulo / L.A.: Lados de un ángulo / R.A.: Región angular / Abe.: Abertura

En estos cursos, sin embargo, sigue manteniéndose la frecuencia de aparición de los mismos tres conceptos: *agujas del reloj*, *ángulo* y *lados del ángulo*.

La tendencia que anteriormente hemos señalado, se acentúa si cabe, en el curso 4º de ESO, y en los alumnos de la Olimpiada:



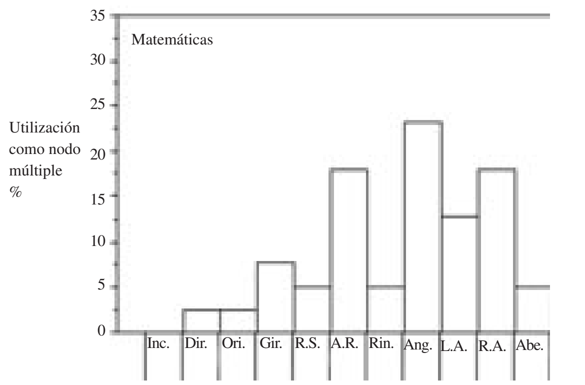
Inc.: Inclinación / Dir.: Dirección / Ori.: Orientación / Gir.: Giro /
R.S.: Rectas secantes / A.R: Agujas del reloj / Rin.: Rincón /
Ang.: Ángulo / L.A.: Lados de un ángulo / R.A.: Región angular / Abe.: Abertura



Inc.: Inclinación / Dir.: Dirección / Ori.: Orientación / Gir.: Giro /
R.S.: Rectas secantes / A.R: Agujas del reloj / Rin.: Rincón /
Ang.: Ángulo / L.A.: Lados de un ángulo / R.A.: Región angular / Abe.: Abertura

En este último grupo, que, recordemos, corresponde a alumnos de 2º de ESO, pero de capacidad superior, la tendencia es aún más manifiesta: tan sólo dos conceptos *agujas del reloj* y *ángulo* centran la mayor parte de las redes asociativas.

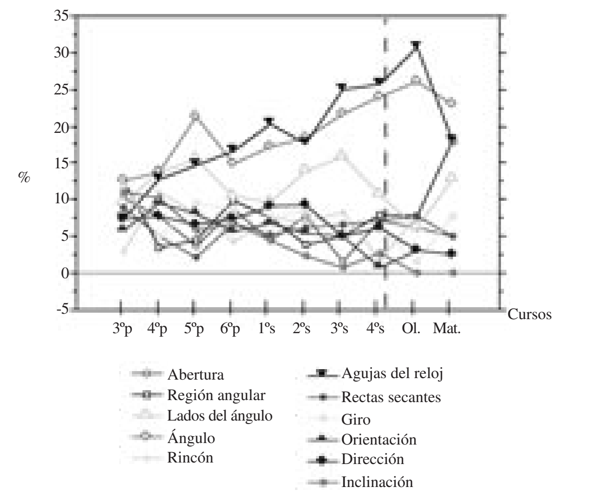
Por último, entre los alumnos de Matemáticas, adultos, observamos que, aunque hay conceptos que parecen «resurgir» (tal como el de *región angular*, seguramente como fruto de su formación especializada en el momento), siguen manteniéndose básicamente los mismos conceptos que fueron surgiendo a lo largo de la escolaridad:



Inc.: Inclinación / Dir.: Dirección / Ori.: Orientación / Gir.: Giro /
R.S.: Rectas secantes / A.R: Agujas del reloj / Rin.: Rincón /
Ang.: Ángulo / L.A.: Lados de un ángulo / R.A.: Región angular / Abe.: Abertura

Dado que el objetivo último de nuestro trabajo es estudiar el concepto evolutivo de *ángulo* a través de los distintos cursos de la escolaridad, creemos ahora que puede resultar adecuado estudiar la evolución de un concepto a través de su frecuencia de aparición como nodo múltiple en los distintos cursos y grupos. Aunque, reiteramos una vez más, los grupos de la Olimpiada y los alumnos de Matemáticas son grupos de características diferentes, los incluimos en este gráfico para poder compararlos. El gráfico, pues, recordamos, tiene dos partes, separadas por la línea discontinua: una parte refleja la evolución de los grupos escolares según su edad, y la otra es una comparación con estos dos grupos especiales.

Ello nos ayudará a conocer con una visión de conjunto cuáles son los conceptos más importantes en la estructura cognitiva de los alumnos.



La interpretación de esta gráfica, en concordancia con los datos parciales que hemos presentado anteriormente para cada curso, nos informa de cómo al principio de la escolaridad, la frecuencia de uso de cada concepto es similar (todos están agrupados en la zona de la gráfica que corresponde entre el 2,9 y el 12,5 por ciento). Esto nos indica que todos los conceptos son utilizados en una proporción aproximada. Pero, conforme aumenta la edad de los alumnos, hay conceptos (como los de *agujas del reloj*, *ángulo*) que aumentan en su frecuencia de utilización, hasta un 30,8% y 26,2% respectivamente) destacándose claramente de los demás, mientras que otros conceptos tienen una tendencia a ser utilizados cada vez menos.

CONCLUSIONES

Observando los resultados anteriores, obtenemos las siguientes conclusiones:

Al principio de la escolaridad todos los conceptos son utilizados en proporciones muy similares, mientras que, conforme avanza ésta, unos pocos conceptos tienden a utilizarse más que todos los demás como conceptos principales.

Aparece, a lo largo de la escolaridad, un concepto que se destaca como el más importante: el de *agujas del reloj*.

Los siguientes conceptos en orden de importancia según su utilización son los de *ángulo* y *lados del ángulo*.

Podemos, pues, observar que existen conceptos cuyo uso en las redes aumenta a lo largo de la escolaridad: *agujas del reloj* y *ángulo*, mientras que existen conceptos cuyo uso en las redes se mantiene a un nivel medio durante toda la escolaridad, como el de *lados del ángulo* y, por otro lado, el uso de todos los demás conceptos en las redes se mantiene muy bajo y tiende a disminuir.

De los resultados obtenidos podemos concluir que en la estructura cognitiva de los alumnos resultan ser muy significativos tres conceptos: *agujas del reloj*, *ángulo* y *lados del ángulo*. Aunque *ángulo* es un concepto general y *lados del ángulo* un concepto matemático, el tercero de ellos *agujas del reloj*, que es precisamente el más utilizado de todos por los alumnos, es solamente un ejemplo utilizado durante la enseñanza.

Estos resultados concuerdan con nuestra «Teoría de los Conceptos Nucleares», expuesta en Casas (2002) y en Casas y Luengo (2004). Explicada muy brevemente, parte de una sencilla idea: la adquisición del conocimiento en general y su almacenamiento en la estructura cognitiva de un alumno sigue un proceso análogo a la adquisición del conocimiento del entorno físico.

El entorno físico (una ciudad, una región…) se conoce partiendo de puntos destacados («hitos») entre los que se establecen «rutas» para desplazarse de unos a otros. El conocimiento basado en rutas de las que, si nos salimos, nos perdemos, no es completo y el entorno físico no se conoce plenamente hasta que no se tiene la «vista de conjunto», que nos permite conocer todas las rutas, cambiar de unas a otras si es necesario y elegir aquéllas que sean mejores para cada propósito, los «senderos de mínimo coste».

Partiendo de la adquisición de ciertos «hitos», puntos fuertes en la estructura cognitiva que denominamos *conceptos nucleares*, se van estableciendo enlaces entre ellos que constituyen «rutas» (relaciones entre algunos conceptos) y «senderos de mínimo coste» (asociaciones entre grupos de conceptos que se establecen para un determinado propósito y que tienden a ser lo más sencillas posible) que conducen a la adquisición de una «visión de conjunto» (cuando se domina todo el campo de conocimiento y se pueden establecer distintas asociaciones en función de lo que se necesite). En dicho momento podemos considerar que se ha adquirido adecuadamente un concepto.

Del mismo modo, interpretamos nuestros resultados considerando que los alumnos construyen su conocimiento a partir de conceptos como los de *agujas del reloj* o *lados del ángulo*, ejemplos ambos que tienen un soporte físico (de carácter dinámico en el caso del primero) para, a partir de ellos, ir adquiriendo otros conceptos, tales como *apertura*, *orientación* o *rotación,* que carecen de dicho soporte, y creando rutas de enlace con ellos, hasta tener una visión de conjunto que representa la adquisición del concepto general de *ángulo*.

Los conceptos nucleares, como muestran los datos de investigación, no son siempre los conceptos más generales o abstractos, sino también otros como los ejemplos utilizados en la enseñanza, pero que resultan los más destacados en la estructura cognitiva del alumno. Utilizando de nuevo el símil geográfico, podemos decir que, cuando se conoce un entorno geográfico de una ciudad, no tienen por qué ser sus principales avenidas o monumentos nuestros puntos de referencia, sino quizá sólo algunos puntos que nos han resultado interesantes porque fueron los primeros que visitamos al llegar por primera vez. De ahí que los conceptos que se adquieren en el principio de la instrucción suelan ser los más importantes.

Repercusiones para la enseñanza y la investigación

En el caso concreto de la enseñanza del ángulo, creemos que es necesario abordarla desde una perspectiva muy amplia, pues, como hemos tenido ocasión de comprobar, es un concepto muy complejo, con numerosos matices que han de ser presentados adecuadamente para que el alumno consiga una integración de todas sus partes.

Pero nuestros datos muestran cómo los alumnos centran su estructura cognitiva sobre todo en aspectos relacionados con el soporte físico de la noción de ángulo, como es el caso de las agujas del reloj, que representan los lados del ángulo, otro de los conceptos nucleares identificados y que, además, entra dentro de lo que antes hemos descrito como concepción «dinámica». Esta concepción dinámica, parece ser, pues, la que resulta para los alumnos más «atractiva».

A partir de los conceptos nucleares señalados, se puede, entonces, construir todo el conocimiento, adquiriendo progresivamente otros conceptos que, como los de *abertura*, *orientación* o *giro*, carecen de un soporte físico propio y han de ser construidos con el trabajo en muchas situaciones y modelos físicos en los que estos conceptos están implicados.

Esto nos indica también el relativo interés que tiene construir el conocimiento de este concepto en torno a nociones como la de «región angular», absolutamente formales matemáticamente hablando, pero que sólo aparecen como destacadas, paradójicamente, en dos momentos de la escolaridad: al inicio de ésta, y en los alumnos de Matemáticas, donde, en cierto modo, éstos vuelven a aprender de nuevo, aunque más formalizado, el mismo concepto de *ángulo*.

Quizá en este momento interese también destacar que la cuestión más importante no es encontrar una definición de *ángulo* que sea adecuada, sino, como en otros muchos casos, tratar de que sea el alumno el que construya su propio concepto de *ángulo*; y que lo construya a partir de las situaciones angulares que se le presentan y va manipulando a lo largo de su escolaridad.

La importancia de la manipulación de modelos físicos para conocer realidades abstractas queda, de nuevo, reflejada por los datos de nuestra investigación. Ésta ha mostrado cómo el recurso a soportes físicos y actividades manipulativas es de suma importancia para los alumnos, pues, a lo largo de toda su escolaridad, recurren a ellos a la hora de organizar su estructura cognitiva acerca de conceptos complejos como el de ángulo.

Una repercusión importante, de orden práctico, para la investigación es que nuestra metodología permite identificar cuáles son los conceptos nucleares en torno a los cuales los alumnos estructuran su conocimiento, y no sólo en el conocimiento del concepto de *ángulo* sino, utilizando una metodología similar, en el de otros muchos conceptos matemáticos.

Si la gran aportación de Ausubel y Novak a las teorías educativas ha sido la consideración de la importancia de los conocimientos previos, precisamente, en la dificultad de identificar de forma correcta en la práctica aquellos conceptos que son significativos para los alumnos, radica una de las debilidades de su propuesta educativa. Si con nuestra técnica podemos identificarlos y podemos estructurar la enseñanza en torno a ellos, hemos conseguido un avance.

Queremos, por último, insistir en que existen muy pocas investigaciones realizadas con esta técnica en las áreas de matemáticas o ciencias. Conocemos tan sólo las citadas anteriormente y, entre ellas, las nuestras propias. No existen, pues, antecedentes de estudios o trabajos publicados que aborden el mismo problema u otros relacionados. Por ello no se pueden presentar más aportaciones previas en el área, como es usual hacer en los trabajos de investigación.

En el momento actual de la investigación, el hecho de no poder contrastar los resultados con otras investigaciones constituye, lógicamente, una limitación de los resultados obtenidos, pero consideramos que las posibilidades de las redes asociativas Pathfinder para la investigación son enormes, y este hecho lo respalda el interés y la variedad de ámbitos en que han sido utilizadas y validadas. La didáctica de las matemáticas puede enriquecerse con la utilización de esta nueva técnica como se está haciendo en otros campos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARAB, S. et al. (1996). Assessing Hypermedia Navigation through Pathfinder: Prospects and Limitations. *Journal of Educational Computing Research,* 15(3), pp. 185-205.

BERGER, C. y DERSHIMER, C. (1993). *Using Technology to Measure Change in Students' Science Learning*. Atlanta Georgia: National Association for Research in Science Teaching.

BUENDÍA, L. (1999). La investigación por encuesta, en Buendía, L., Colás, P. y Hernández, F. *Métodos de investigación en psicopedagogía*, pp. 119-155. Madrid: McGraw Hill.

BYRNE, C. y McCRACKEN, S. (1999). An Adaptive Thesaurus Employing Semantic Distance, Relational Inheritance and Nominal Compound Interpretation for Linguistic Support of Information Retrieval. *Journal of Information Science*, 25(2), pp. 113-131.

CASAS, L. y LUENGO, R. (1999). La exploración de la estructura conceptual en los alumnos. Un método empírico: las redes asociativas Pathfinder. *Campo Abierto. Revista de la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura*, 16, pp. 13-33.

CASAS, L. y LUENGO, R. (2000). Aproximación al concepto de ángulo a través de redes asociativas Pathfinder en alumnos de educación primaria y secundaria obligatoria. *Campo Abierto. Revista de la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura*, 17, pp. 41-60.

CASAS, L. (2002). «El estudio de la estructura cognitiva de alumnos a través de redes asociativas Pathfinder. Aplicaciones y posibilidades en geometría». Tesis doctoral. Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Extremadura.

CASAS, L. y LUENGO, R. (2004). Representación del conocimiento y aprendizaje. Teoría de los Conceptos Nucleares. *Revista Española de Pedagogía*, 227, pp 59-84.

CHEN, C. (1998). Bridging the Gap: The Use of Pathfinder Networks in Visual Navigation. *Journal of Visual Languages and Computing,* 9, pp. 267-286.

CONTRERAS, A. (1993). «Evolución de concepciones sobre nociones geométricas elementales en entornos de programación con el lenguaje logo». Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

ECKERT, A. (1997). Die Netzwerk Elaborierungs Technik (NET). Ein Instrument zur computerunterstützten Diagnose von Wissensstrukturen, en Witruk, E. y Friedrich, G. (eds.). *Pädagogische Psychologie. Streit um ein neues Selbstverständnis*, pp. 168-176. Landau: Verlag Empirische Pädagogik.

FABRIKANT, S.I. (2001). *Visualizing region and scale in information*. Proceedings, 20th ICA/ACI International Cartographic Conference, Pequín, China.

FENKER, R. M. (1975). The organization of conceptual materials: A methodology for meassuring ideal and actual cognitive structures. *Instructional Science*, 4, pp. 33-57.

FOWLER, R. (1992). Information Navigator: An information system using associative networks for display and retrieval. En línea: <http://bahia.cs.panam.edu/info_vis/inf_nav/info_nav_tr_92.html>. [Consultado 15-III-2004].

FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht, Netherlands: D. Reidel Publishing Co.

HASLINGER, B. (2001). *Assoziatives Denken bei Frauen in verschiedenen Zyklusphasen*. Diplomarbeit an der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Wien. En línea: <http://evolution.anthro.univie.ac.at/institutes/urbanethology/pdf/haslinger.pdf>. Consultado 15-III-2004.

HOLLOWAY, G. (1982). *Concepción del espacio en el niño según Piaget*. Barcelona: Paidós.

GONZALVO, P., CAÑAS, J.J. y BAJO, M.T. (1994). Structural Representations in Knowledge Acquisition. *Journal of Educational Psychology*, 86, pp. 601-616.

JONASSEN, D. H. (1990). Semantic network elicitation: tools for structuring hypertext, en Green, C. y McAleese, R. (eds.). *Hypertext: State of the Art*. Oxford: Intellect.

JONASSEN, D., BEISSNER, K. y YACCI, M. (1993). *Structural Knowledge: Techniques for Representing, Conveying and Acquiring Structural Knowledge*. Hillsdale, NJ: Laurence Erlbaum Associates.

JOHNSON, P. et al. (1994). Locus of Predictive Advantage in Pathfinder-Based Representations of Classroom Knowledge. *Journal of Educational Psychology*, 86(4), pp. 617-626.

KAMADA, T. y KAWAI, S. (1989). An algorithm for drawing general undirected graphs. *Information Processing Letters*, 31, pp. 7-15.

KNOT Software. (1989). [Disquetes]. Interlink, Inc. P.O. Box 4086 UPB, Las Cruces, NM 88003-4086. En línea: <http://www.geocities.com/interlinkinc/home.html>.

KOKOSKI, T. y HOUSNER, L. (1994). *Pathfinder Analysis of Knowledge Structures: An Exploratory Investigation of Math and Science Teacher Educators*. Núm. ERIC ED376218.

KONEMAN, P. y JONASSEN, D. (1994). *Hypertext Interface Design and Structural Knowledge Acquisition*. Núm. ERIC ED373727.

LANG, S. y MURROW, G. (1983). *Geometry. A High School Course.* Nueva York: Springer - Verlag.

LINDSAY, A., YEO, R. y GOLDSMITH, T. (1995). The Semantic Organization of Knowledge in Alzheimer's Patients. *Archives of Clinical Neuropsychology*, 10(4), pp. 359-360.

MAGINA, S. y HOYLES, C. (1991). Developing a map of children's conceptions of angle. Actas XV Congreso PME, pp. 358-364.

MANGUNO, G. (1998). Network knowledge organization: do knowledge structures for sexual and emotional information reflect gender or sexual orientation? En línea: <http://www.findarticles.com/cf_0/m2294/9-10_39/53857387/print.jhtml>. Consultado 15-III-2004.

MARTÍNEZ RECIO, A. (1999). «Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática». Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

MATOS, J.M. (1994). Cognitive Models of the concept of angle. *Actas XVIII Congreso PME*, 3, pp. 263-270.

McCLURE J.R. (1999). *Concept Maps and the Acquisition of Cognitive Skill: Concept Maps as a Tool to Study Skill Acquisition*. Annual meeting of the American Educational Research Association. Montreal.

McGAGHIE, W. (1996). *Comparison of Knowledge Structures with the Pathfinder Scaling Algorithm*. Annual Meeting of the American Educational Research. Nueva York.

MITCHELMORE, M. C. (1990). Psychologische und mathematische Schwierigkeiten beim Lernen des Winkelbegriffs. *Mathematica Didactica*, 13(2), pp. 19-37.

MITCHELMORE, M. (1998). Young students' concepts of turning and angle. *Cognition and Instruction*, 16, pp. 265-284.

MITCHELMORE, M. y WHITE, P. (1996). Children's concepts of turning: Dynamic or static?, en Puig, L. y Gutiérrez, A. (eds.). *Actas del 20º Congreso del PME,* 3, pp. 415-421.

NELSON y BUENO (1999). *Adopted and invented learning strategies in a multimedia learning environment*. Annual meeting of the American Educational Research Association, Montreal. En línea: <http://www.siue.edu/~wnelson/research/AERA99.htm>. Consultado 15-III-2004.

NOSS, R. (1987). Children's learning of geometrical concepts through Logo. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(5), pp. 343-362.

PAULSEN J.S. et al. (1996). Impairment of the semantic network in schizophrenia. *Psychiatry Research,* 63(2), pp. 109-121. [En línea]

PIAGET, J. INGELDER, B. y SZEMINSKA, A. (1948). *La geometrie spontanee de l´enfant.* París: Presses Universitaires de France.

PREECE, P. (1976). Mapping cognitive structure: A comparison of methods*. Journal of Educational Psychology*, 68, pp. 1-8.

RAMEY, J.A. et al. (2001*). Assessment of Training Using Pathfinder Associative Networks*. Annual Meeting of the Southwest Educational Research Association (24th). Nueva Orleans, LA. Núm. ERIC ED454285.

ROANES, E. (1973). *Matemáticas para profesores de EGB.* Salamanca: Anaya.

ROHRER, L.C. y HOI, K. (1999). *Validating Measures of Structural Knowledge through the Multitrait-Multimethod matrix*. Annual Meeting of the American Educational Research Association. Montreal.

SCHVANEVELDT, R.W., DURSO, F.T. y DEARHOLT, D.W. (1985). *Pathfinder: Scaling with network structures* (Memorandum in Computer and Cognitive Science, MCCS-85-9). Las Cruces, NM: Computing Resarch Laboratory, New Mexico State University.

SCHVANEVELDT, R.W. (ed.) (1989). *Pathfinder Associative Networks. Studies in Knowledge Organization.* Norwood, NJ: Ablex

SCHVANEVELDT, R.W., BERINGER D.B. y LAMONICA J.A. (2001). Priority and Organization of Information Accessed by Pilots in Various Phases of Flight. *The International Journal of Aviation Psychology*, 11(3), pp. 253-280.

SEVERI, F. (1962). *Elementos de geometría I.* Barcelona: Labor.

SHAVELSON, R. (1972). Some aspects of the correspondence between content structure and cognitive structure in physics instruction. *Journal of Educational Psychology*, 63, pp. 225-234.

TALL, D. y VINNER, S. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, pp. 151-169.

WAINER, H. y KAYE, K. (1974). Multidimensional scaling of concept learning in an introductory course. *Journal of Educational Psychology*, 66, pp. 591-598.

[Artículo recibido en octubre de 2003 y aceptado en mayo de 2004]