Publl. Mat. **45** (2001), 125–148

SPECTRE NEGATIF D'UN OPERATEUR ELLIPTIQUE AVEC DES CONDITIONS AU BORDS DE ROBIN

Yu. V. Egorov and M. El Aidi

Abstract

In this article we discuss some estimates of the number of the negative eigenvalues and their moments of energy for an elliptic operator $L = L_0 - V(x)$ defined in $H^m(\mathbb{R}^n_+)$ with the Robin boundary conditions containing a potential $W(x)$, in terms of some integrals of V and W.

1. Estimation du spèctre négatif

Soit L_0 un opérateur positif elliptique d'ordre $2m$, $m \geq 1$, symétrique, et V un potentiel réel, défini dans $\mathbb{R}^n$. Considérons l'opérateur $L = L_0 - V(x)$, défini dans $H^m(\mathbb{R}^n_+)$, avec les conditions au bord de Robin. Le spectre de L peut contenir des valeurs propres négatives, mais sous certaines conditions leur nombre N est fini. Notre but est de trouver ces conditions et d'estimer ce nombre.

On considère dans l'espace $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+\}$ un opérateur L_0 symétrique positif d'ordre $2m$ tel que

$$L_0 u = \sum_{|\alpha|\leq m,\, |\beta|\leq m} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u),$$

où les $a_{\alpha\beta}$ sont des fonctions mesurables. Nous allons utilisé l'espace $H^m(\mathbb{R}^n_+)$, un complété de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour la norme

$$||u||^2_{H^m(\mathbb{R}^n_+)} = \int_{\{x_n>0\}} |u(x)|^2 dx + \int_{\{x_n>0\}} \sum_{|\beta|=m} |D^\beta u(x)|^2 dx.$$

Notons $(\cdot,\cdot)$ le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^n_+)$. Pour $u, v \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ on a

$$\begin{aligned}(L_0 u, v) &= \int_{\{x_n>0\}} \sum_{|\alpha|\le m,\, |\beta|\le m} D^\alpha(a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u(x))\overline{v(x)}dx \\ &= \int_{\{x_n>0\}} \sum_{|\alpha|\le m,\, |\beta|\le m} (-1)^{|\alpha|} a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u(x)\overline{D^\alpha v(x)}dx \\ &\quad - \int_{\{x_n=0\}} \sum_{r=0}^{m-1} \overline{\frac{\partial^r v(x)}{\partial x_n^r}} L_{r,m}(u)dx'.\end{aligned}$$

$$L_{r,m} := \sum_{|\alpha|\le 2m-1-r} b_{r\alpha} D^\alpha, \quad b_{r\alpha} \in C^\infty(\partial\mathbb{R}^n_+). \tag{1.1}$$

Supposons que

$$\int_{\{x_n>0\}} \sum_{|\alpha|\le m,\, |\beta|\le m} (-1)^{|\alpha|} a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u(x)\overline{D^\alpha u(x)}dx \geq a_0 \int_{\{x_n>0\}} \sum_{|\beta|=m} |D^\beta u(x)|^2 dx, \tag{1.2}$$

pour tout $u \in H^m(\mathbb{R}^n_+)$, où a_0 est une constante strictement positive (par exemple pour l'opérateur $-\Delta$ défini dans $H^1_0(\Omega)$ avec Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$, on a $a_0 = 1$).

Soit $L = L_0 - V(x)$. Nous considérons le système suivant:

$$(*) \qquad \begin{cases} Lu(x) = \lambda u(x) & \text{pour } x_n > 0, \\ L_{0,m}(u(x)) - W(x')u(x) = 0 & \text{pour } x_n = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_n} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \cdots = \dfrac{\partial^{m-1} u}{\partial x_n^{m-1}} = 0 & \text{pour } x_n = 0, \end{cases}$$

l'opérateur $L_{0,m}$ était défini dans (1.1).

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant.

Théorème 1.1. *Soit $n > 2m$, $q \ge \frac{n}{2m} > 1$, $q_1 \ge \frac{n-1}{2m-1}$, $W \in L^{q_1}(\mathbb{R}^{n-1})$, $V \in L^q(\mathbb{R}^n_+)$ avec $V(x) = 0$, $W(x') = 0$ si $|x'| > R$ pour un $R > 0$. Alors le nombre de valeurs propres négatives du système $(*)$ vérifie l'estimation suivante:*

$$N \le C_1 \int_{\{x_n>0\}} V^q(x)|x|^{2mq-n}dx + C_2 \int_{\{x_n=0\}} W^{q_1}(x')|x|^{(2m-1)q_1-n+1}dx'.$$

On énonce deux lemmes cruciaux pour l'estimation du nombre de valeurs propres négatives des opérateurs elliptiques.

Lemme 1.1 (G. V. Rozenblyum)**.** *Soit Q un cube dans $\mathbb{R}^n$ et f une fonction positive mesurable dans Q, telle que $\int_Q f(x)dx = 1$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, le cube Q peut être recouvert par une réunion dénombrable finie de cubes fermés Q_j, $1 \leq j \leq M$ dont les arêtes sont paralleles aux arêtes de Q et tels que*

$$\int_{Q_j} f(x)dx \leq 2^n \varepsilon;\ M \leq 4^n \varepsilon^{-1}.$$

On peut trouver la démonstration de ce dernier lemme dans [**3**, p. 294].

Lemme 1.2 (I. M. Glazman [**4**])**.** *Soit A un opérateur auto-adjoint défini dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Soit λ_0 un nombre réel fixé, E la projection spectrale associée à A. Alors la dimension de $E(]-\infty, \lambda_0[)\mathcal{H}$ est finie si et seulement si il existe deux sous-espaces vectoriels F et G de $\mathcal{H}$ tels que* $\dim G < +\infty$*, $\mathcal{H}$ est somme directe orthogonale de F et de G, et*

$$(Af - \lambda_0 f, f) \geq 0 \ \textit{pour}\ f \in F \cap D(A),$$

où $(\ ,\ )$ est le produit scalaire de $\mathcal{H}$, et $D(A)$ est le domaine de définition de A. Donc le nombre de valeurs propres de A qui sont inférieures à λ_0, ne dépasse pas $\dim G$.

La démonstration du Théorème 1.1, se fera en deux étapes.

Première partie de la démonstration du Théorème 1.1: A partir du système $(*)$ et par application de la formule de Green généralisée on a

$$\begin{aligned}(L_0u, u) &= \int_{\{x_n>0\}} \sum_{|\alpha|\leq m,\, |\beta|\leq m} (-1)^{|\alpha|} a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u(x) \overline{D^\alpha u(x)} dx \\ &\quad - \int_{\{x_n=0\}} u(x) \overline{L_{0,m}(u(x))} dx' \\ &\quad - \int_{\{x_n=0\}} \sum_{r=1}^{m-1} \frac{\partial^r u}{\partial x_n^r} \overline{L_{r,m}(u)} dx' \\ &= \int_{\{x_n>0\}} \sum_{|\alpha|\leq m,\, |\beta|\leq m} (-1)^{|\alpha|} a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u(x) \overline{D^\alpha u(x)} dx \\ &\quad - \int_{\{x_n=0\}} W(x') u^2(x) dx' \\ &= \lambda \int_{\{x_n>0\}} u^2(x) dx + \int_{\{x_n>0\}} V(x) u^2(x) dx.\end{aligned} \tag{1.3}$$

La dernière égalité nous donne

$$\lambda = \frac{S}{\int_{\{x_n>0\}} u^2(x)dx},$$

où

$$S = \int_{\{x_n>0\}} \sum_{|\alpha\leq m,\,|\beta|\leq m} (-1)^{|\alpha|} a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u(x) \overline{D^\alpha u(x)} dx$$
$$- \int_{\{x_n>0\}} V(x)u^2(x)dx - \int_{\{x_n=0\}} W(x')u^2(x)dx'.$$

Par application du lemme de Glazmann et l'hypothèse (1.2), on a $N = N_1 + N_2$, où N_1 est la codimension du sous-espace de $H^m(\mathbb{R}^n_+)$ des fonctions u telles que

$$\int_{\{x_n>0\}} V(x)u^2(x)dx \leq C_1 \int_{\{x_n>0\}} \sum_{|\beta|=m} |D^\beta u(x)|^2 dx \tag{1.4}$$

et N_2 est la codimension du sous-espace de $H^m(\mathbb{R}^n_+)$ des fonctions u telles que

$$\int_{\{x_n=0\}} W(x')u^2(x')dx' \leq C_2 \int_{\{x_n>0\}} \sum_{|\beta|=m} |D^\beta u(x)|^2 dx, \tag{1.5}$$

où $C_1 + C_2 = a_0$.

N_1 coïncide avec le nombre des valeurs propres de l'opérateur $L_0 - V$ défini dans $H_0^m(\mathbb{R}^n_+)$. Dans [**1**] Egorov et Kondratiev ont démontré que N_1 admet la majoration suivante:

$$N_1 \leq c(n,m) \int_{\mathbb{R}^n_+} V(x)^q |x|^{2mq-n} dx, \quad q \geq \frac{n}{2m} > 1.$$

L'estimation du nombre N_2 figurera dans la deuxième partie de la démonstration du Théorème 1.1. Pour ce faire on a besoin du théorème suivant

Théorème 1.2. *On a*

$$\left(\int_{x_n=0} |u(x)|^{2p} |x|^{-n+1+p(n-2m)} dx\right)^{1/p} \leq C \int_{\{x_n>0\}} \sum_{|\beta|=m} |D^\beta u(x)|^2 dx, \tag{1.6}$$

pour tout $u \in H^m(\mathbb{R}^n_+)$, *avec les conditions* $1 \leq p \leq \dfrac{n-1}{n-2m}$, $n > 2m$, $m \geq 1$.

Pour démontrer ce théorème, on a besoin du lemme suivant (voir [**1**] ou [**3**, p. 278]).

Lemme 1.3. *Soit $u \in C_0^{2m}(\mathbb{R}^n)$, (r, ω) des coordonnés sphériques dans $\mathbb{R}^n$, $|\omega| = 1$, $\{\phi_j\}$ système complet orthogonal de fonctions sphériques dans $L^2(\mathbf{S}^{n-1})$, c'est à dire*

$$\int_{\mathbf{S}^{n-1}} \phi_i(\omega)\overline{\phi_j(\omega)}d\omega = \delta_{ij}, \quad i, j \in \mathbf{N},$$

et

$$u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} R_j(r)\phi_j(\omega).$$

Alors on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^m u(x)\overline{u(x)}dx = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} L_j(D_t)T_j(t)\overline{T}_j(t)dt$$

où $r = e^t$, $D_t = d/dt$, $T_j(t) = R_j(r)r^{(n-2m)/2}$ et L_j est un opérateur différentiel positif d'ordre $2m$ à coefficients constants de polynôme caractéristique

$$(1.7) \quad L_j(\mathbf{i}\lambda) = \prod_{l=0}^{m-1} [\lambda^2 + (k - m + n/2 + 2l)^2] = \sum_{l=0}^{m-1} c_l^{(j)} \lambda^{2l}, \ \mathbf{i}^2 = -1.$$

La valeur de $k = k(j)$ dans la formule provient de la relation $\mu_j = -k(k + n - 2)$, où μ_j est la j^{ieme} valeur propre de l'opérateur Laplace-Beltrami L_ω, associée à la fonction propre ϕ_j.

Le lemme qui suit est démontré dans [**3**, p. 281], ici nous donnerons une esquise de la démonstration.

Lemme 1.4. *Soit $p \geq 1$, L_j l'opérateur différentiel défini dans le lemme précédent. Si $k(j) \geq m + 1 - n/2$ ou n impair alors l'inégalité*

$$(1.8) \qquad \left(\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^{2p}dt\right)^{1/p} \leq b_p[k(j)]^{1-1/p-2m} \int_{\mathbb{R}} L_j(D_t)u(t)\overline{u(t)}dt,$$

est vraie pour toute fonction $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Démonstration: Le coefficient principal de L_j est égal à $(-1)^m$. Par conséquent on a la minoration suivante

$$(1.9) \qquad \int_{\mathbb{R}} L_j(D_t)u(t)\overline{u}(t)dt \geq \int_{\mathbb{R}} ((-1)^m D_t^{2m} + a_j^0)u(t)\overline{u}(t)dt,$$

avec $a_j^0 = \prod_{l=0}^{m-1}(k-m+n/2+2l)^2$. Si n est impair alors on a $a_j^0 \geq d_0[k(j)]^{2m}$, $d_0 > 1$, et si n est pair et $k(j) \geq m+1-n/2$, on obtient aussi $a_j^0 \geq d_0[k(j)]^{2m}$. D'après [**1**] on a l'inégalité suivante:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^{2p} dt\right)^{1/p} \leq b_p \int_{\mathbb{R}} (|u^{(m)}(t)|^2 + d_0|u(t)|^2) dt,$$

vraie pour tout $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $p \geq 1$ et

$$b_p = \sup_{u \in C_0^\infty(\mathbb{R})} \left(\frac{\left(\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^{2p} dt\right)^{1/p}}{\int_{\mathbb{R}} (|u^{(m)}(t)|^2 + d_0|u(t)|^2) dt} \right).$$

Par conséquent à partir de cette dernière inégalité, on effectue le changement de variable $t_1 = k(j)t$

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}} |u_1(t)|^{2p} dt\right)^{1/p} &\leq b_p [k(j)]^{-2m-1/p+1} \int_{\mathbb{R}} (|u_1^{(m)}(t)|^2 + a_j^0 |u_1(t)|^2) dt \\ &\leq b_p [k(j)]^{-2m-1/p+1} \int_{\mathbb{R}} L_j(D_t) u_1(t) \overline{u}_1(t) dt,\end{aligned} \tag{1.10}$$

d'où le Lemme 1.4. □

Démonstration du Théorème 1.2: On prend p tel que $n-1-p(n-2m) \geq 1$. On a

$$\begin{aligned}&\int_{\{x_n=0\}} |u(x',0)|^{2p} |x|^{-n+1-p(n-2m)} dx' \\ &= \int_{\{x_n=0\}} [\left(|u(x',0)|^2 |x|^{1-2m}\right)^{\frac{n-1-p(n-2m)}{2m-1}} \left(|u(x',0)|^{\frac{2(n-1)}{n-2m}}\right)^{\frac{(p-1)(n-2m)}{2m-1}}] dx' \\ &\leq \left(\int_{\{x_n=0\}} |u(x)|^2 |x|^{1-2m} dx'\right)^{\frac{n-1-p(n-2m)}{2m-1}} \\ &\quad \times \left(\int_{\{x_n=0\}} |u(x)|^{\frac{2(n-1)}{n-2m}} dx'\right)^{\frac{(p-1)(n-2m)}{2m-1}}.\end{aligned}$$

La dernière inégalité est dûe à Hölder avec les exposants

$$\frac{2m-1}{n-1-p(n-2m)} \text{ et } \frac{2m-1}{(p-1)(n-2m)}.$$

D'après le théorème d'injection de Sobolev on a

$$\left(\int_{\{x_n=0\}} |u(x',0)|^{\frac{2(n-1)}{n-2m}} dx'\right)^{\frac{n-2m}{n-1}} \leq C \int_{\{x_n>0\}} \sum_{|\beta|=m} |D^\beta u(x)|^2 dx.$$

Il reste à prouver que

$$\int_{\{x_n=0\}} |u(x',0)|^2 |x|^{1-2m} dx' \leq C \int_{\{x_n>0\}} \sum_{|\beta|=m} |D^\beta u(x)|^2 dx. \tag{1.11}$$

Pour cela, on passe aux coordonnées sphériques $x = r.\omega$, et on écrit $u(r,\omega)$ sous la forme d'une série

$$u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} R_j(r)\phi_j(\omega),$$

où $R_j(r)\phi_j(\omega)$ est la projection orthogonale de la fonction u sur le sous-espace propre de $L_2(\mathbb{R}^n_+)$, associé à l'opérateur de Laplace-Beltrami L_ω et correspondant à la valeur propre $-j(j+n-2)$.

Posons de nouveaux $r = e^t$, $T_j(t) = R_j(r) r^{\frac{n}{2}-m}$. Alors

$$\begin{aligned}
&\int_{\{x_n=0\}} |u(x',0)|^2 |x|^{1-2m} dx' \\
&\qquad = \int_0^{+\infty} \int_{\{|\omega|=1,\, \omega_n=0\}} \left|\sum_{j=1}^{\infty} R_j\phi_j\right|^2 r^{1-2m+n-2} dr d\omega' \\
&\qquad \leq \int_0^{\infty} \int_{\{|\omega|=1,\, \omega_n=0\}} \sum_{j=1}^{\infty} R_j^2 \phi_j^2 r^{-2m+n-1} dr d\omega' \\
&\qquad \leq \int_{\{|\omega|=1,\, \omega_n=0\}} \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j^2 d\omega' \int_{\mathbb{R}} |T_j(t)|^2 dt.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

On applique le théorème d'injection de Sobolev entre l'espace de Sobolev $W_2^1(\mathbf{S}_+^{n-1})$, qie est le complété de l'espace $C^\infty(\mathbf{S}^{n-1})$ pour la norme

$$||\phi||^2_{W_2^1(\mathbf{S}_+^{n-1})} = \int_{\{\omega\in\mathbf{S}_+^{n-1}\}} |\nabla_\omega \phi(\omega)|^2 d\omega + \int_{\{\omega\in\mathbf{S}_+^{n-1}\}} \phi^2(\omega) d\omega,$$

et l'espace $L_2(\{\omega \in \mathbf{S}^{n-1},\, \omega_n = 0\})$ muni de sa norme habituelle. On rappelle que

$$\int_{\mathbf{S}_+^{n-1}} |\nabla_\omega \phi_j|^2 d\omega = -\int_{\mathbf{S}_+^{n-1}} L_\omega \phi_j(\omega)\phi_j(\omega) d\omega$$
$$= j(j+n-2)\int_{\mathbf{S}_+^{n-1}} \phi_j^2(\omega) d\omega \leq Cj^2.$$

Par conséquent pour chaque j on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{\{\omega\in\mathbf{S}^{n-1},\,\omega_n=0\}} \phi_j^2(\omega',0)d\omega' \\
&\quad\leq C'\left(\int_{\{\omega\in\mathbf{S}_+^{n-1}\}} |\nabla_\omega\phi_j(\omega)|^2 d\omega + \int_{\{\omega\in\mathbf{S}_+^{n-1}\}} \phi_j^2(\omega)d\omega\right) \\
&\quad\leq C'\left(\int_{\{\omega\in\mathbf{S}_+^{n-1}\}} |\nabla_\omega\phi_j(\omega)|^2 d\omega + 1\right) \\
&\quad\leq C(j^2+1).
\end{aligned} \tag{1.13}$$

D'après le Lemme 1.4 avec $p = 1$ on a

$$\int_{\mathbb{R}} |T_j(t)|^2 dt \leq b_1 j^{-2m}\int_{\mathbb{R}} L_j(D_t)T_j(t)\overline{T_j(t)}dt, \tag{1.14}$$

ainsi on a

$$\int_{\{\omega\in\mathbf{S}^{n-1},\,\omega_n=0\}} \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j^2(\omega',0)d\omega' \int_{\mathbb{R}} |T_j(t)|^2 dt$$
$$\leq C\sum_{j=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} L_j(D_t)T_j(t)\overline{T_j(t)}dt$$
$$\leq C\int_{\{x_n>0\}} \sum_{|\beta|=m} |D^\beta u(x)|^2 dx.$$

Ainsi on a prouvé (1.11), ce qui achève la démonstration du Théorème 1.2. $\square$

Corollaire 1.1. *Soit $Q(\delta)$ un cube dans $\mathbb{R}^n$, d'arête δ, tel que ses arêtes soient parallèles aux axes de coordonnées de $\mathbb{R}^n$ et $Q_0(\delta) = Q(\delta) \cap \{x_n = 0\}$ le cube dans $\mathbb{R}^{n-1}$ d'arête δ dans, $Q^+(\delta) = Q(\delta) \cap \{x_n > 0\}$. Il existe une constante C qui dépend de p, n, tel que pour toute fonction $u \in C^\infty(Q(\delta))$ satisfaisant*

$$\int_{Q^+(\delta)} D^\alpha u(x)dx = 0 \text{ pour } |\alpha| \le m-1, \tag{1.15}$$

on ait

$$\left[\int_{Q_0(\delta)} |u(x)|^{2p}|x|^{-n+1+p(n-2m)}dx'\right]^{\frac{1}{p}} \le C \int_{Q^+(\delta)} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u(x)|^2 dx, \tag{1.16}$$

avec $n > 2m$ et $1 \le p \le \dfrac{n-1}{n-2m}$.

Démonstration: La démonstration découle du Théorème 1.2. En effet, posons

$$J(u, Q_0(\delta)) := \left[\int_{Q_0(\delta)} |u(x)|^{2p}|x|^{-n+1+p(n-2m)}dx'\right]^{\frac{1}{p}},$$

prolongeons u comme fonction continue dans le cube Q' d'arête 2δ homothétique au cube $Q^+(\delta)$). Ici on peut supposer que

$$\int_{Q'} \sum_{|\alpha|\le m} \delta^{2|\alpha|-2}|D^\alpha u(x)|^2 dx \le c_0 \int_{Q(\delta)} \sum_{|\alpha|\le m} \delta^{2|\alpha|-2}|D^\alpha u(x)|^2 dx, \tag{1.17}$$

avec $c_0 = c_0(n)$.

Définissons la fonction $h \in C_0^\infty(Q')$ de telle manière que $h(x) = 1$ pour $x \in Q^+(\delta)$, et $|D^\alpha h(x)| \le C\delta^{-|\alpha|}$ pour $|\alpha| \le m$. On a

$$\int_{Q'} \sum_{|\alpha|\le m} \delta^{2|\alpha|-2}|D^\alpha (h(x)u(x)|^2 dx \le c' \int_{Q^+(\delta)} \sum_{|\alpha|\le m} |D^\alpha u(x)|^2 dx.$$

Maintenant, on applique l'inégalité de Poincaré généralisée

$$\int_{Q^+(\delta)} \sum_{|\alpha|\le m} \delta^{2|\alpha|-2}|D^\alpha u(x)|^2 dx \le c'' \int_{Q^+(\delta)} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u(x)|^2 dx,$$

qui est vraie si

$$\int_{Q^+(\delta)} D^\alpha u(x)dx = 0, \quad |\alpha| \le m-1.$$

Par conséquent il suffit de prouver que

$$J(hu, Q_0') \le c''' \int_{Q'} \sum_{|\alpha|\le m} \delta^{2|\alpha|-2} |D^\alpha (h(x)u(x))|^2 dx.$$

Or par application du Théorème 1.2, cette dernière inégalité est vérifiée car $hu \in C_0^\infty(Q')$, d'où le corollaire. □

Deuxième partie de la démonstration du Théorème 1.1: Soit Q un cube dans $\mathbb{R}^{n-1}$ contenant le support de W. On recouvre le cube Q par une réunion finie de cubes Q_j (définis au Corollaire 1.1), d'arêtes δ_j

$$Q = \bigcup_{j=1}^{M} Q_j.$$

Par conséquent on a

$$\int_Q W(x')u^2(x)dx' \le \sum_{j=1}^{M} \int_{Q_j} W(x')u^2(x)dx'.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder avec des exposants p_1, q_1 on obtient

$$\begin{aligned} \int_{Q_j} W(x')u^2(x)dx' &\le \int_{Q_j} W(x')|x|^{s/p_1} u^2(x)|x|^{-s/p_1} dx' \\ &\le \left(\int_{Q_j} W^{q_1}(x')|x|^{s(q_1-1)} dx' \right)^{1/q_1} \\ &\quad \times \left(\int_{Q_j} u^{2p_1}(x)|x|^{-s} dx' \right)^{1/p_1}, \end{aligned} \tag{1.18}$$

où $s = n-1-p_1(n-2m)$. On applique l'inégalité (1.16)

$$\left(\int_{Q_j} |u(x)|^{2p_1} |x|^{(n-2m)p_1+1-n} dx' \right)^{1/p_1} \le C_0(n) \int_{Q_j^+} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u(x)|^2 dx \tag{1.19}$$

avec

$$1 \le p \le \frac{n-1}{n-2m}, \quad s = n-1-p(n-2m) \tag{1.20}$$

et en supposant que

$$\int_{Q_j^+} D^\alpha u(x)dx = 0, \quad 0 \le |\alpha| \le m-1, \quad j \in [1, M]. \tag{1.21}$$

On remarque que la constante $C_0(n)$ de l'inégalité (1.19) ne dépend pas de δ_j. Appliquons le lemme de Rozenblyum en prenant

$$f(x) = I^{-1} W^{q_1}(x')|x|^{s(q_1-1)}, \quad I = \int_Q W^{q_1}(x')|x|^{s(q_1-1)} dx',$$

I est finie par de l'hypothèse faite sur le potentiel W.

En utilisant successivement (1.18), (1.19) et le lemme de Rozenblyum on obtient

$$\int_Q W(x')u^2(x)dx' \le (2^n I\varepsilon)^{1/q_1} C_0(n) \sum_{j=1}^{M} \int_{Q^+_{1,j}} |D^\alpha u(x)|^2 dx,$$

avec

$$\int_{Q^+_{1,j}(\delta)} D^\alpha u(x) dx = 0, \quad 0 \le |\alpha| \le m-1,$$

où ε est choisi de telle façon qu'on ait

$$(2^n I\varepsilon)^{1/q_1} C_0(n) \le a_0/2$$

ou

$$\varepsilon^{-1} = C_1(n) I.$$

Le nombre de conditions portées sur les u qui vérifient la relation (1.21) est donc égal à

$$\operatorname{card}\{\alpha \in \mathbf{N}^n,\ |\alpha| \le m-1\} 4^n \varepsilon^{-1} = C_2(n) I.$$

Alors

$$N_2 \le C_2(n) \int_{\{x_n=0\}} W^{q_1}(x')|x|^{s(q_1-1)} dx'.$$

A partir de (1.21) on a

$$\begin{aligned} 0 \le s(q_1-1) &= (n-1)(q_1-1) - p_1(n-2m)(q_1-1) \\ &= (n-1)q_1 - (n-1) - q_1(n-2m) \\ &= q_1(2m-1) - (n-1). \end{aligned}$$

Finalement, pour $q \ge n/2m$ et $q_1 \ge \dfrac{n-1}{2m-1}$, le nombre N de valeurs propres négatives du système $(*)$ est majoré par

$$\begin{aligned} N \le C_1(n) &\int_{\{x_n>0\}} V^q(x)|x|^{2mq-n} dx \\ &+ C_2(n) \int_{\{x_n=0\}} W^{q_1}(x')|x|^{(2m-1)q_1-n+1} dx'. \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du Théorème 1.1. □

Pour l'opérateur de Schrödinger classique on a le système suivant:

$$(**)\qquad \begin{cases} -\Delta u(x) - V(x)u(x) = \lambda u(x) & \text{pour } x_n > 0 \\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial x_n} + W(x')u(x) = 0 & \text{pour } x_n = 0. \end{cases}$$

Alors par application du Théorème 1.2 et la formule de Green classique, l'estimation du nombre N des valeurs propres négatives du système $(**)$ est donné dans le corollaire suivant

Corollaire 1.2. *Soit $n > 2$, $q \geq \dfrac{n}{2}$, $q_1 \geq n-1$. Soit $V(x) \geq 0$, $W(x') \geq 0$, $W \in L^{q_1}(\mathbb{R}^{n-1})$, $V \in L^q(\mathbb{R}^n_+)$, tel que $V(x) = 0$, $W(x') = 0$ si $|x'| > R$ pour un certain $R > 0$. Alors*

$$N \leq C_1 \int_{\{x_n=0\}} W^{q_1}(x')|x|^{q_1-n+1}dx' + C_2 \int_{x_n>0} V^q(x)|x|^{2q-n}dx,$$

où C_1, C_2 sont des constantes qui dépendent de n, q_1, q.

2. Moments d'énergie

Dans cette partie on donnera une estimation de *moments*

$$S_\gamma = \sum_{\lambda_j<0} |\lambda_j|^\gamma,$$

où les λ_j sont les valeurs propres négatives du système $(*)$ estimées dans le paragraphe précédent, en fonction des potentiels W et V.

Cette somme joue un rôle important en Physique Mathématique. Par exemple Ruelle [**7**], Lieb et Thirring [**6**], ont étudié ces moments pour l'opérateur de Schrödinger avec conditions de Dirichlet à la frontière du domaine d'étude.

En particulier, Lieb et Thirring ont obtenu l'estimation

$$S_\gamma \leq C \int_{\mathbb{R}^n} V(x)^{\gamma+n/2}dx, \quad \gamma + n/2 > 1$$

pour le cas de l'opérateur de Schrödinger ($m = 1$). Dans [**5**] E. Lieb a déterminé la meilleure constante C.

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant:

Théorème 2.1. *Soit* $n > 2m$, $r_1 \geq 0$, $r_2 \geq 0$, $m > 1$

$$\gamma + (n + r_1)/2m > 1 \text{ et } \gamma + (n + r_2)/2m > 1 + r_2/n.$$

Alors le moment d'énergie du système $(*)$ *admet la majoration suivante:*

$$\begin{aligned} S_\gamma \leq C_{(m,n,r_2,\gamma)} &\int_{\mathbb{R}^n_+} V(x)^{\gamma+(n+r_2)/2m} |x - x_0|^{r_2} dx \\ &+ C'_{(m,n,r_1,\gamma,\delta)} \int_{\{x_n=0\}} W(x')^{\gamma+(r_1+n+\kappa)/2m} |x - x'_0|^{r_1} dx', \end{aligned}$$

avec $x_0 = (x'_0, x_{0n}) \in \mathbb{R}^n_+$, $0 < \kappa < \dfrac{2m\gamma + n - 2m + r_1}{2m - 1}$.

On remarque que lorsque $\gamma = 0$, on tombe sur le Théorème 1.1, lequel donne l'estimation du spectre négatif du système $(*)$.

Nous utiliserons la formule de [**6**] suivante:

$$S_\gamma = \sum_{\lambda_j < 0} |\lambda_j|^\gamma = \gamma \int_0^\infty \alpha^{\gamma-1} N_\alpha d\alpha, \quad \alpha > 0,$$

avec N_α est le nombre des valeurs propres de $(*)$ inférieures à $-\alpha$.

Le résultat crucial dans cette partie est le lemme suivant:

Lemme 2.1. *Soit* $\alpha > 0$, N_α *le nombre de valeurs propres inférieures à* $-\alpha$. *On définit les potentiels* W_α *et* V_α *de la façon suivante:*

$$W_\alpha(x') = \begin{cases} W(x') & \text{si } W(x') > \alpha, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$V_\alpha(x) = \begin{cases} V(x) & \text{si } V(x) > \alpha, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} N_\alpha \leq C_{(n,m,r_2,q_2)} &\alpha^{-q_2+(n+r_2)/2m} \int_{\mathbb{R}^n_+} V_\alpha^{q_2} |x - x_0|^{r_2} dx \\ &+ C'_{(n,m,q_1,r_1)} \alpha^{-q_1+(q_1+n-1+r_1)/2m} \int_{\{x_n=0\}} W_\alpha^{q_1}(x') |x - x_0|^{r_1} dx', \end{aligned}$$

$q_1 > 1$, $0 \leq r_1 < (2m-1)q_1 - (n-1)$ *et* $q_2 > 1$, $0 \leq r_2 < 2mq_2 - n$, *les exposants* q_1 *et* q_2 *seront définis dans la démonstration du Théorème 2.1.*

Démonstration du lemme: Par le lemme de Glazmann N_α est majoré par la codimension du sous-espace A de $H^m(\mathbb{R}^n_+)$, tel que

$$\int_{\{x_n>0\}} V(x)u(x)^2dx + \int_{\{x_n=0\}} W(x')u(x)^2dx'$$
$$\le a_0\int_{\{x_n>0\}}\sum_{|\beta|=m}|D^\beta u(x)|^2dx+\alpha\int_{\{x_n>0\}}u(x)^2dx, \quad \text{pour tout } u\in A.$$

Par conséquent, il suffit de trouver un sous-espace A_1 de $H^m(\mathbb{R}^n_+)$ tel que

$$\int_{\{x_n>0\}} Vu(x)^2dx \le C_1\int_{\{x_n>0\}}\sum_{|\beta|=m}|D^\beta u(x)|^2dx+\alpha\int_{\{x_n>0\}}u(x)^2dx,$$

pour tout $u \in A_1$, et un autre sous-espace A_2 de $H^m(\mathbb{R}^n_+)$ tel que

$$(2.1) \quad \int_{\{x_n=0\}} Wu(x)^2dx'$$
$$\le C_2\int_{\{x_n>0\}}\sum_{|\beta|=m}|D^\beta u(x)|^2dx+\alpha\int_{\{x_n>0\}}u(x)^2dx,$$

pour tout $u \in A_2$ avec $C_1 + C_2 \le a_0$. Yu. Egorov et V. Kondratiev ont démontré dans [**2**] que la codimension $N_{1\alpha}$ de A_1 est majorée par

$$N_{1\alpha} \le C_{(n,m,r_2)}\alpha^{-q_2+(n+r_2)/2m}\int_{\mathbb{R}^n_+} V_\alpha^{q_2}(x)|x-x_0|^{r_2}dx,$$

avec $q_2 > 1$, $0 \le r_2 < 2mq_2 - n$. L'idée est d'utiliser le théorème d'injection de Sobolev, le lemme de Rozenblyum, de recouvrir le support de V par une réunion finie de cubes (car par hypothèse le support de V est compact) et puis de comparer les arêtes de ces cubes avec le nombre α.

Maintenant on détermine la codimension $N_{2\alpha}$ du sous-espace A_2. D'après la définition du potentiel W_α, nous remarquons que l'inégalité (2.1) est équivalente à

$$(2.2) \quad \int_{\{x_n=0\}} W_\alpha u(x)^2dx'$$
$$\le C_2\int_{\{x_n>0\}}\sum_{|\beta|=m}|D^\beta u(x)|^2dx+\alpha\int_{\{x_n>0\}}u(x)^2dx.$$

On a besoin du lemme suivant:

Lemme 2.2. *Soit $Q(\delta)$ un cube dans $\mathbb{R}^n$, d'arête δ, tel que ses arêtes soit parallèles aux axes de coordonnées de $\mathbb{R}^n$ et $Q_0(\delta) = Q(\delta) \cap \{x_n = 0\}$ le cube dans $\mathbb{R}^{n-1}$ d'arête δ, $Q^+(\delta) = Q(\delta) \cap \{x_n > 0\}$. Il existe une constante C_0 qui dépend de p, n, tel que*

$$\left(\int_{Q(\delta)} \frac{|u(x)|^{2p_1}}{|x - x'_0|^s} dx' \right)^{1/p_1} \leq C_0 \delta^{2m-n+(n-1-s)/p_1} \tag{2.3}$$

$$\times \left(\int_{Q(\delta)^+} \sum_{|\beta|=m} |D^\beta u(x)|^2 dx + \delta^{-2m} \int_{Q^+(\delta)} u(x)^2 dx \right), \; u \in C^\infty(Q(\delta)^+),$$

et

$$0 \leq s < n-1, \quad 1 \leq p_1 < \frac{n-1-s}{n-2m}. \tag{2.4}$$

Cela implique que $s < 2m - 1$.

Démonstration: Soit Q_0 un cube défini dans $\mathbb{R}^{n-1}$ d'arête $\delta = 1$. En utilisant inégalité de Hölder avec les exposants p_3 et q_3 on peut voir que

$$\int_{Q_0} \frac{|u(x)|^{2p_1}}{|x - x'_0|^s} dx' \leq \left(\int_{Q_0} |u(x)|^{2p_1p_3} dx' \right)^{1/p_3} \left(\int_{Q_0} \frac{dx'}{|x - x'_0|^{sq_3}} \right)^{1/q_3}.$$

Car $n - 1 > s$, on peut trouver $q_3 > 1$ tel que $sq_3 < n - 1$. Alors l'intégrale $\left(\int_{Q_0} \frac{dx}{|x - x'_0|^{sq_3}} \right)^{1/q_3}$ converge. D'après le théorème d'injection de Rellich-Kondrachov, pour $p_3 > \frac{n-1}{n-1-s}$ on a

$$\left(\int_{Q_0} |u(x)|^{2p_1p_3} dx' \right)^{1/p_1p_3}$$

$$\leq C_0 \left(\int_{Q_0^+} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u(x)|^2 dx + \int_{Q_0^+} |u(x)|^2 dx \right),$$

avec $p_1p_3 \leq \frac{n-1}{n-2m}$, $n > 2m$.

En utilisant le changement de variable $x = \delta t$, on obtient (2.3). □

Puisque le support de W est compact, la fonction W_α a un support compact contenu dans un cube Q d'arêtes parallèles aux axes des coordonnées de $\mathbb{R}^{n-1}$. Maintenant on applique le lemme de Rozenblyum pour la fonction mesurable positive $f(x) = I^{-1}W_\alpha^{q_1}(x')|x' - x'_0|^{s(q_1-1)}$, avec

$$I = \alpha^{-q_1+(np_1+s+1-n)(q_1-1)/2m} \int_Q W_\alpha(x')^{q_1}|x' - x'_0|^{s(q_1-1)}dx'.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, qui sera déterminé plus tard, il existe un recouvrement fini de cubes $(Q_j)_{1\le j\le N}$ d'arêtes parallèles aux axes des coordonnées de $\mathbb{R}^{n-1}$, avec $|Q_j|^{\frac{1}{n-1}} = \delta_j$, tel que

$$\int_{Q_j} W_\alpha^{q_1}(x')|x - x'_0|^{s(q_1-1)}dx' \le \varepsilon\alpha^{q_1-(np_1+s+1-n)(q_1-1)/2m}I. \tag{2.5}$$

Maintenant on compare l'arête δ_j du cube Q_j, avec le nombre α. On a trois possibilités:

1) Si $2\alpha^{-1/2m} \ge \delta_j \ge \alpha^{-1/2m}$, alors $\delta_j^{-2m} \le \alpha$. Par conséquent, l'inégalité (2.3) devient

$$\left(\int_{Q_j} \frac{|u(x)|^{2p_1}}{|x - x'_0|^s}dx'\right)^{1/p_1} \tag{2.6}$$
$$\le C_0\alpha^{-1+(np_1-n+1+s)/2mp_1}\left(\int_{Q_j^+}\sum_{|\beta|=m}|D^\beta u(x)|^2dx + \alpha\int_{Q_j^+}u(x)^2dx\right).$$

Cette collection de cubes sera nommée K_1.

2) Si $\delta_j \ge 2\alpha^{-1/2m}$, on peut effectuer un découpage du cube Q_j, et le représenter comme une réunion de cubes Q'_{jk} d'arête δ'_{jk} telles que

$$2\alpha^{-1/2m} \ge \delta'_{j,k} \ge \alpha^{-1/2m}.$$

On notera K_2 cette collection de cubes.

Par conséquent

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{Q_j} \frac{|u(x)|^{2p_1}}{|x-x_0'|^s}dx'\right)^{1/p_1} &\leq \sum_{k=1}^{n_j} \int_{Q'_{jk}} \frac{|u(x)|^{2p}}{|x-x_0'|^s}dx' \\
&= \sum_{k=1}^{n_j} C_0\alpha^{-1+(np_1+1+s-n)/2mp_1} \\
&\qquad \times \left(\int_{Q^+_{jk}} \sum_{|\beta|=m} |D^\beta u(x)|^2 dx + \alpha \int_{Q^+_{jk}} u(x)^2 dx\right) \\
&\leq C_0\alpha^{-1+(np_1+1+s-n)/2mp_1} \\
&\qquad \times \left(\int_{Q^+_{j}} \sum_{|\beta|=m} |D^\beta u(x)|^2 dx + \alpha \int_{Q^+_{j}} u(x)^2 dx\right).
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

3) Si $\delta_j \leq \alpha^{-1/2m}$ on suppose que la condition

$$\int_{Q_j^+} D^\beta u(x)dx = 0, \quad 0 \leq |\beta| \leq m-1$$

soit vérifiée.

Sous cette condition, par application de l'inégalité de Poincaré généralisée, l'inégalité (2.6) devient

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_{Q_j} \frac{|u(x)|^{2p_1}}{|x-x_0'|^s}dx'\right)^{1/p_1} \\
&\qquad \leq C_0\alpha^{-1+(np_1+1+s-n)/2mp_1} \int_{Q_j^+} \sum_{|\beta|=m} |D^\beta u(x)|^2 dx.
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Cette collection de cubes est notée K_3.

En utilisant successivement (2.5), et par application des trois cas ci-dessus, on obtient

(2.9)

$$
\begin{aligned}
&\int_{\{x_n=0\}} W_\alpha(x')u(x)^2dx' \\
&\quad\le \sum_{j=1}^{N}\int_{Q_j} W_\alpha(x')u(x)^2dx' \\
&\quad\le \sum_{j=1}^{N}\left(\int_{Q_j}\frac{|u(x)|^{2p_1}}{|x-x_0'|^s}dx'\right)^{1/p_1} \\
&\qquad\times\left(\int_{Q_j} W_\alpha^{q_1}(x')|x'-x_0'|^{s(q_1-1)}dx'\right)^{1/q_1} \\
&\quad\le \alpha^{1-(np_1-n+s+1)/2mp_1}(\varepsilon I)^{1/q_1}\left[\sum_{Q_j\in K_1}\left(\int_{Q_j}\frac{|u(x)|^{2p_1}}{|x-x_0'|^s}dx'\right)^{1/p_1}\right. \\
&\qquad+\sum_{Q_j\in K_2}\sum_{k_2=1}^{n_j}\left(\int_{Q_{jk_2}}\frac{|u(x)|^{2p_1}}{|x-x_0'|^s}dx'\right)^{1/p_1} \\
&\qquad\left.+\sum_{Q_j\in K_3}\left(\int_{Q_j}\frac{|u(x)|^{2p_1}}{|x-x_0'|^s}dx'\right)^{1/p_1}\right] \\
&\quad\le C(n)(\varepsilon I)^{1/q_1}\sum_{Q_j\in K_1}\left[\int_{Q_j^+}\sum_{|\beta|=m}|D^\beta u(x)|^2dx+\alpha\int_{Q_j^+}u(x)^2dx\right] \\
&\qquad+C_2(n)(\varepsilon I)^{1/q_1}\sum_{Q_j\in K_2}\left[\int_{Q_j^+}\sum_{|\beta|=m}|D^\beta u(x)|^2dx+\alpha\int_{Q_j^+}u(x)^2dx\right] \\
&\qquad+C_3(n)(\varepsilon I)^{1/q_1}\sum_{Q_j\in K_3}\int_{Q_j^+}\sum_{|\beta|=m}|D^\beta u(x)|^2dx \\
&\quad\le C_n'(\varepsilon I)^{1/q_1}\left[\int_{\{x_n>0\}}\sum_{|\beta|=m}|D^\beta u(x)|^2dx+\alpha\int_{\{x_n>0\}}u^2(x)dx\right].
\end{aligned}
$$

Rappelons que l'inégalité (2.8) est vérifiée sous la condition supplémentaire

$$\int_{Q_j^+} D^\beta u(x)dx = 0, \quad 0 \leq |\beta| \leq m-1. \tag{2.10}$$

Donc si on a

$$C_n'(\varepsilon I)^{1/q_1} = \min(C_2, 1), \quad C_1 + C_2 = a_0, \tag{2.11}$$

alors l'inégalité

$$\int_{\{x_n=0\}} W_\alpha(x')u(x)^2 dx' \leq a_0 \int_{\{x_n>0\}} \sum_{|\beta|=m} |D^\beta u(x)|^2 dx + \alpha \int_{\{x_n>0\}} u^2(x)dx$$

est vérifiée si les conditions (2.10) (qui sont en nombre finies) sont satisfaites.

Par conséquent le nombre $N_{2\alpha}$ ne dépasse pas le nombre de conditions énoncées dans (2.10), c'est à dire

$$N_{2\alpha} \leq C\varepsilon^{-1} \leq C'\alpha^{-q_1+(np_1+s+1-n)(q_1-1)/2m} \int_{\{x_n=0\}} W_\alpha(x')^{q_1}|x-x_0'|^{s(q_1-1)}dx'.$$

Les constantes C, C' dépendent de n, m, s.

Remarquons que

$$r_1 := s(q_1-1) < (n-1)(q_1-1).$$

A partir de la relation (2.4) on obtient

$$0 \leq r_1 < (2m-1)q_1 - (n-1),$$

d'où le Lemme 2.1. □

Démonstration du Théorème 2.1: D'après les hypothèses, on a

$$\gamma + (n+r_2)/2m > 1 + r_2/n$$

et

$$\gamma + (n+r_1)/2m > 1.$$

En tenant compte des conditions du Lemme 2.1, il existe $q_1 > 1$ et $q_2 > 1$ tels que

$$\gamma + (n-1+r_1)/2m > q_1(1-1/2m) \tag{2.12}$$

et

$$\gamma + (n+r_2)/2m > q_2 > 1 + r_2/n.$$

Par conséquent, en appliquant le Lemme 2.1 on a

$$S_\gamma \leq C_{n,m,r_2} \int_0^\infty \alpha^{\gamma-1-q_1+(q_1+n-1+r_1)/2m} \int_{\{x_n=0\}} W_\alpha(x')^{q_1} |x-x_0'|^{r_1} dx' d\alpha$$
$$+ C_{n,m,r_1} \int_0^\infty \alpha^{\gamma-1-q_2+(n+r_2)/2m} \int_{\mathbb{R}^n_+} V_\alpha(x)^{q_2} |x-x_0|^{r_2} dx d\alpha.$$

On a la majoration suivante:

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} |x-x_0|^{r_2} V(x)^{q_2} dx \times \int_0^{V(x)} \alpha^{\gamma-1-q_2+(n+r_2)/2m} d\alpha \tag{2.13}$$
$$\leq c \int_{\mathbb{R}^n_+} |x-x_0|^{r_2} V(x)^{\gamma+n/2m+r_2/2m} dx.$$

On a utilisé le fait que

$$\gamma - 1 + (n+r_2)/2m - q_2 > -1.$$

Il reste à majorer l'intégrale

(2.14)

$$\int_0^\infty \alpha^{\gamma-1-q_1+(q_1+n-1+r_1)/2m} \int_{\{x_n=0\}} W_\alpha(x')^{q_1} |x-x_0'|^{r_1} dx' d\alpha$$
$$= \int_{\{x_n=0\}} |x-x_0'|^{r_1} W^{q_1}(x') dx' \int_0^{W(x')} \alpha^{\gamma-1-q_1+(q_1+n-1+r_1)/2m} d\alpha$$
$$\leq C_2 \int_{\{x_n=0\}} |x-x_0'|^{r_1} W^{\gamma+(q_1+n-1+r_1)/2m}(x') dx'.$$

La dernière inégalité est dûe au fait que

$$\gamma - 1 + (\frac{1-2m}{2m}) q_1 + \frac{n-1+r_1}{2m} > -1, \quad \kappa = q_1 - 1,$$

d'après (2.12). Par conséquent, l'intégrale en α est convergente. A partir des dernières majorations, le Théorème 2.1 est démontré. $\square$

Que peut-on dire dans le cas où $n \le 2m$? C'est à dire peut-on donner une estimation de S_γ pour $L_0 - V$, avec les mêmes conditions au bord que pour le système $(*)$?

Dans le cas, où $\gamma+(n+r_1)/2m < 1+r_1/n$ ou $\gamma+(n+r_2)/2m < 1+r_2/n$, on ne peut pas donner une estimation de la somme finie S_γ pour le système $(*)$, comme le prouve le contre-exemple ci-dessous. On prendra $V(x) = 0$ et

$$W(x') = \begin{cases} \delta^{2ms_1}, & \text{si } 0 < |x' - x'_0| < \delta^{2m}, \\ |x' - x'_0|^{s_1}, & \text{si } \delta^{2m} < |x' - x'_0| < \delta, \\ 0, & \text{si } \delta < |x' - x'_0|, \end{cases}$$

où

$$1 - n > s_1 > -2m \frac{r_1 + n - 1}{2m\gamma + n + r_1 + \kappa}, \quad \kappa > 0.$$

Un tel nombre existe si

$$(2m\gamma + n + r_1)(n-1) < 2m(r_1 + n - 1),$$

i.e.

$$\gamma + \frac{n + r_1}{2m} < \frac{r_1 + n - 1}{n - 1}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\{x_n=0\}} W(x')dx' &= \int_{|x'-x'_0|<\delta^{2m}} W(x')dx' \\ &\quad + \int_{\delta^{2m}<|x'-x'_0|<\delta} W(x')dx' \\ &= \int_{|x'-x'_0|<\delta^{2m}} \delta^{2ms_1} dx \\ &\quad + \int_{\delta^{2m}<|x'-x'_0|<\delta} |x' - x'_0|^{s_1} dx' \ge C\delta^{2m(n+s_1-1)}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Donc

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\{x_n=0\}} W(x')dx' = +\infty. \tag{2.16}$$

Montrons que

$$\int_{\{x_n=0\}} |x-x_0'|^{r_1} W(x')^{\gamma+(n+\kappa+r_1)/2m} dx' < \varepsilon, \tag{2.17}$$

lorsque δ est suffisamment petit. En effet,

$$\begin{aligned}
&\int_{\{x_n=0\}} |x-x_0'|^{r_1} W(x')^{(n+\kappa+r_1)/2m+\gamma} dx' \\
&\qquad = \int_{|x'-x_0'|<\delta^{2m}} |x'-x_0'|^{r_1}\delta^{(n+\kappa+r_1)s_1+2ms_1\gamma} dx' \\
&\qquad\quad + \int_{\delta^{2m}<|x'-x_0'|<\delta} |x'-x_0'|^{r_1+s_1[(r_1+n+\kappa)/2m+\gamma]} dx' \\
&\qquad \le C_3\delta^{2m(r_1+n-1)+s_1(n+\kappa+r_1)+2ms_1\gamma} \\
&\qquad\quad + C_4\delta^{n-1+r_1+s_1[(n+\kappa+r_1)/2m+\gamma]}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Par conséquent lorsque δ est au voisinage de 0 on a bien (2.17). La première valeur propre négative du système $(*)$ s'exprime de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 = &\inf_{u\in H^m(\mathbb{R}^n_+)} \\
&\times\Bigg\{\Bigg[\int_{\{x_n>0\}} \sum_{|\alpha|\le m,\,|\beta|\le m} (-1)^{|\alpha|} a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u(x)\overline{D^\alpha u(x)}dx \\
&- \int_{\{x_n=0\}} W(x')u^2(x)dx' \Big/ \int_{\{x_n>0\}} u^2(x)dx\Bigg]\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \le &\int_{\{x_n>0\}} \sum_{|\alpha|\le m,\,|\beta|\le m} (-1)^{|\alpha|} a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u_0(x)\overline{D^\alpha u_0(x)}dx \\
&\qquad - \int_{\{x_n=0\}} W(x')u_0^2(x)dx',
\end{aligned} \tag{2.20}$$

où u_0 est une fonction de classe C^∞, égale à 1 dans $|x-x_0|<1/4$, qui s'annule quand $|x|>1$ et qui vérifie $\int_{\{x_n>0\}} u_0^2(x)dx = 1$. Or pour δ proche de 0, d'après (2.16) l'integrale

$$\int_{\{x_n=0\}} W(x')u_0^2(x')dx' = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} W(x')dx'$$

tend vers $+\infty$, et donc $\lambda_1 \to -\infty$.

Donc, le moment d'énergie du système $(*)$, S_γ tend vers $+\infty$ lorsque δ tend vers zéro. Si $\frac{n+r_2}{2m}+\gamma = 1+\frac{r_2}{n}$ ou $\frac{n+r_1}{2m}+\gamma = 1+\frac{r_1}{n}$, toujours on ne peut pas estimer la somme finie S_γ. Dans cette situation on suggère le contre exemple suivant, on prend encore $V=0$ et W défini par $W(x') = \frac{|x'-x_0'|^{-n+1}}{\ln(\frac{1}{|x'-x_0'|})}$ pour $\delta < |x'-x_0'| < \frac{1}{\ln(\frac{1}{\delta})}$ et $W(x') = \frac{\delta^{1-n}}{\ln(\frac{1}{\delta})}$ si $\delta > |x'-x_0'|$. En suivant la même démarche que précédemment on montre que S_γ tend vers $+\infty$ lorsque δ tend vers zéro.

Références

[1] Yu. V. Egorov et V. A. Kondratiev, Estimates of the negative spectrum of an elliptic operator, in *"Spectral theory of operators"* (Novgorod, 1989), Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 **150**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, pp. 111–140.

[2] Yu. V. Egorov et V. A. Kondratiev, On moments of negative eigenvalues of an elliptic operator, in *"Partial differential operators and mathematical physics"* (Holzhau, 1994), Oper. Theory Adv. Appl. **78**, Birkhäuser, Basel, 1995, pp. 119–126.

[3] Yu. Egorov et V. Kondratiev, *"On spectral theory of elliptic operators"*, Operator Theory: Advances and Applications **89**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1996.

[4] I. M. Glazman, *"Direct methods of qualitative spectral analysis of singular differential operators"*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1965.

[5] E. H. Lieb, The stability of matter, *Rev. Modern Phys.* **48(4)** (1976), 553–569.

[6] E. H. Lieb et W. Thirring, Inequalities for the moments of the Schrödinger Hamiltonians and their relation to Sobolev inequalities, Studies in Math. Physics: Essays in honor of V. Bargmann, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.

[7] D. Ruelle, Large volume limit of the distribution of characteristic exponents in turbulence, *Comm. Math. Phys.* **87(2)** (1982/83), 287–302.

Yu. V. Egorov:
Laboratoire MIP
UFR MIG
118 route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex
France
E-mail address: `egorov@mip.ups-tlse.fr`

M. El aïdi:
Erwin Schrödinger Institut
Boltzmanngasse 9
A-1090 Wien
Autriche
E-mail address: `melaidi@esi.ac.at`

Primera versió rebuda el 18 de febrer de 2000,
darrera versió rebuda el 19 d'octubre de 2000.