Publicacions Matemàtiques, Vol. **44** (2000), 343–353

# EXTENSIONS QUADRATIQUES 2-BIRATIONNELLES DE CORPS TOTALEMENT RÉELS

Jean-François Jaulent et Odile Sauzet

*Abstract*

We characterize 2-birational CM-extensions of totally real number fields in terms of tame ramification. This result completes in this case a previous work on pro-$\ell$-extensions over 2-rational number fields.

## 1. Position du problème

La notion de corps $S$-rationnel a été introduite dans [**JSa**], en liaison avec les résultats de [**W1**] et [**W2**], pour généraliser la notion de corps de nombres $\ell$-rationnel rencontrée implicitement dans des contextes variés par plusieurs auteurs puis explicitement définie et étudiée par [**MN**] d'une part et [**GJ**] d'autre part (cf. [**JN**]). Rappelons ce dont il s'agit: si $\ell$ est un nombre premier et $S$ un sous-ensemble non vide de l'ensemble $Pl_K^\ell$ des places de $K$ au-dessus de $\ell$, on dit que le corps de nombres $K$ est $S$-rationnel lorsque le groupe de Galois $G_K = \mathrm{Gal}(K'/K)$ de sa pro-$\ell$-extension (galoisienne) $\ell$-ramifiée maximale est le pro-$\ell$-produit libre

(i) $$G_K \simeq (\mathop{*}_{\substack{\mathfrak{p}|\ell\infty \\ \mathfrak{p}\notin S}} \mathcal{G}_\mathfrak{p}) * \mathcal{F}$$

des groupes de Galois locaux $\mathcal{G}_\mathfrak{p} = \mathrm{Gal}(\bar{K}_\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p})$ respectivement attachés aux pro-$\ell$-extensions maximales $\bar{K}_\mathfrak{p}$ des completés $K_\mathfrak{p}$ de $K$ aux places réelles ou $\ell$-adiques qui ne sont pas dans $S$, et d'un pro-$\ell$-groupe libre $\mathcal{F}$; dans ce cas, le nombre $f$ de générateurs de $\mathcal{F}$ est donné par la formule

(ii) $$f = d - r - c - l + s + 1,$$

où $d$ est la somme des degrés locaux $d = \sum_{\mathfrak{l}\in S}[K_\mathfrak{l} : \mathbb{Q}_\ell]$ et $r$, $c$, $l$, $s$ sont respectivement les nombres de places réelles, complexes, $\ell$-adiques ou dans $S$ de $K$ (cf. [**JSa**, th. 2.7]). Lorsque $S$ est un singleton $\{\mathfrak{l}\}$, on parle de corps $\mathfrak{l}$-rationnel et si $Pl_K^\ell$ est lui même un singleton, on dit tout simplement que $K$ est $\ell$-rationnel. Dans ce dernier cas, si $K$ contient en outre les racines $\ell$-ièmes de l'unité, la condition (i) ci-dessus a lieu si et seulement si le $\ell$-groupe $C\ell'_K$ des $\ell$-classes de diviseurs de $K$ (i.e. ici le quotient du $\ell$-groupe des classes d'idéaux prises au sens restreint par le sous-groupe engendré par la classe de l'idéal premier au dessus de $\ell$) est trivial, ce qui s'écrit

$$\text{(iii)} \qquad C\ell'_K = 1,$$

de sorte que la notion de $\ell$-rationalité coïncide alors avec celle de $\ell$-régularité introduite par Kummer dans l'étude des corps cyclotomiques $\mathbb{Q}[\zeta_\ell]$.

La question de la propagation de la $S$-rationalité dans une $\ell$-extension $L/K$ de corps de nombres a été complètement résolue dans [**JSa**] pour les $\ell$ impairs. Pour $\ell = 2$, en revanche, et $L/K$ quadratique, il peut arriver que le corps de base $K$ soit $\mathfrak{l}$-rationnel en une place 2-adique décomposée dans l'extension $L/K$ et que $L$ soit $\mathfrak{l}$-rationnel pour chacune des deux places au-dessus de $\mathfrak{l}$ (on dit alors qu'il est birationnel), situation que les arguments de [**JSa**] ne permettent pas de traiter complètement.

L'objet de ce travail est précisement d'éclaircir ce point plus délicat, dans le cas particulier où le corps de base $K$ est totalement réel, en prenant appui sur la notion de classes logarithmiques exposée dans [**J1**].

## 2. Index des notations

Nous utiliserons dans tout ce qui suit les notations de la théorie $\ell$-adique du corps de classes (avec ici $\ell = 2$) telle qu'exposée dans [**J2**]. En particulier si $K$ est un corps de nombres et $\mathfrak{p}$ une place de $K$, nous notons:

- $K_\mathfrak{p}$ le complété de $K$ en la place $\mathfrak{p}$;
- $\mathcal{R}_\mathfrak{p} = \varprojlim K_\mathfrak{p}^\times / K_\mathfrak{p}^{\times 2^n}$ le compactifié 2-adique de $K_\mathfrak{p}^\times$;
- $\tilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}$ le sous-groupe des unités logarithmiques de $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$, i.e. le noyau dans $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$ de la valeur absolue 2-adique $|.|_\mathfrak{p}$;
- $\mu_\mathfrak{p}$ le sous-groupe de torsion de $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$, i.e. le 2-groupe des racines de l'unité dans $K_\mathfrak{p}$;
- $\mathcal{J}_K = \prod_\mathfrak{p}^{\mathrm{res}} \mathcal{R}_\mathfrak{p}$ le 2-groupe des idèles de $K$;
- $\tilde{\mathcal{J}}_K$ le noyau dans $\mathcal{J}_K$ de la formule du produit pour les valeurs absolues 2-adiques;
- $\tilde{\mathcal{U}}_K = \prod_\mathfrak{p} \tilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}$ le sous-groupe des unités logarithmiques semi-locales;
- $\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_2 \otimes_\mathbb{Z} K^\times$ le 2-groupe des idèles principaux (plongé dans $\mathcal{J}_K$);
- $\tilde{\mathcal{E}}_K = \mathcal{R}_K \cap \tilde{\mathcal{U}}_K$ le sous-groupe des unités logarithmiques globales;

- $\mathcal{E}'_K = \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} E'_K$ le sous-groupe construit sur les 2-unités (au sens ordinaire);
- $\mathcal{D}_K = \mathcal{J}_K/\tilde{\mathcal{U}}_K$ le 2-groupe des diviseurs logarithmiques de $K$;
- $\tilde{\mathcal{D}}_K = \tilde{\mathcal{J}}_K/\tilde{\mathcal{U}}_K$ le sous-groupe des diviseurs logarithmiques de degré nul;
- $\tilde{\mathcal{P}}_K$ le sous-groupe des diviseurs logarithmiques principaux, i.e. l'image canonique de $\mathcal{R}_K$ dans $\tilde{\mathcal{D}}_K$;
- $\tilde{C\ell}'_K = \tilde{\mathcal{D}}_K/\tilde{\mathcal{P}}_K = \tilde{\mathcal{J}}_K/\mathcal{R}_K\tilde{U}_K$ le 2-groupe des classes logarithmiques;
- $C\ell'_K = \mathcal{J}_K/\mathcal{R}_K \prod_{\mathfrak{p}\nmid 2\infty} \mu_{\mathfrak{p}} \prod_{\mathfrak{l}|2} \mathcal{R}_{\mathfrak{l}}$ le 2-groupe des 2-classes (au sens restreint).

Enfin pour une extension $L/K$ de corps de nombres, nous écrivons:

- $\mathcal{N}_{L/K}$ le sous-groupe de $\mathcal{R}_K$ formé des éléments qui sont une norme locale dans $L/K$ (lorsque $L/K$ est cyclique, c'est tout simplement le groupe $N_{L/K}(\mathcal{R}_L)$ des normes globales).

Conformément aux conventions de [**J2**] nous réservons aux places finies le concept de ramification; si $\mathfrak{p}$ est une place réelle, nous parlons, s'il y a lieu, de complexification. De plus, toutes les extensions considérées ici étant des 2-extensions, la ramification est ipso facto modérée aux places étrangères à 2 et sauvage aux places 2-adiques.

## 3. Enoncé du résultat principal

Nous supposons désormais que $\ell$ vaut 2 et que $L$ est une extension quadratique totalement imaginaire d'un corps $K$ totalement réel. Notre propos est de relier la 2-rationalité de $K$ avec la 2-birationalité de $L$. Rappelons ce que nous entendons pas là:

**Définition 1** (cf. [**JN**, th. 1.2])**.** Un corps totalement réel $K$ est dit *2-rationnel* lorsque sa 2-extension (galoisienne) 2-ramifiée $\infty$-décomposée maximale $K'$ coïncide avec sa $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique $K^c$, ce qui a lieu si et seulement si les deux conditions suivantes sont réunies:

(1a) $K$ admet une unique place 2-adique $\mathfrak{l}$;
(1b) le 2-groupe $\mathcal{C}\ell'_K$ des 2-classes est trivial (en d'autres termes ici le 2-sous-groupe de Sylow du groupe des classes d'idéaux au sens restreint de $K$ est engendré par l'image de la classe de $\mathfrak{l}$).

**Définition 2** (cf. [**JSa**, th. 1.11])**.** Un corps totalement imaginaire $L$ est dit *2-birationnel* lorsqu'il est $\mathfrak{l}$-rationnel en chacune des places 2-adiques (en ce sens qu'il n'admet pas de 2-extension 2-ramifiée $\mathfrak{l}$-décomposée non triviale), ce qui a lieu si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées:

(2a) $L$ admet exactement 2 places 2-adiques $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{l}'$;

(2b) le 2-groupe $C\ell'_L$ des 2-classes de diviseurs de $L$ est trivial (en d'autres termes ici le 2-sous-groupe de Sylow du groupe des classes d'idéaux de $L$ (au sens ordinaire comme au sens restreint) est engendré par les images de $\mathfrak{l}$ et de $\mathfrak{l}'$);

(2c) les plongements canoniques de $L^\times$ dans $L_{\mathfrak{l}}^\times$ et $L_{\mathfrak{l}'}^\times$ induisent des isomorphismes $\mathcal{E}'_L \simeq \mathcal{R}_{\mathfrak{l}'} \simeq \mathcal{R}_{\mathfrak{l}}$ du tensorisé 2-adique du groupe des 2-unités de $L$ sur les compactifiés des groupes multiplicatifs des complétés de $L$ aux places 2-adiques.

Introduisons maintenant la notion de place primitive: étant donné un corps de nombres $K$, notons provisoirement $K^z$ le compositum des $\mathbb{Z}_2$-extensions de $K$ et $K^c$ la $\mathbb{Z}_2$-extension cylotomique de $K$; dans [**GJ**] (cf. déf. 1.1) une place modérée de $K$ (i.e. une place finie étrangère à 2) est dite primitive lorsque son image dans $\mathrm{Gal}(K^z/K)$ par l'application d'Artin n'est pas un carré; elle est dite dans [**J1**] (cf. déf. 4.4) logarithmiquement primitive lorsque c'est son image dans $\mathrm{Gal}(K^c/K)$ qui n'est pas un carré. Il se trouve que, lorsque $K$ est totalement réel et vérifie la conjecture de Leopoldt en 2, le compositum $K^z$ des $\mathbb{Z}_2$-extensions se réduit à la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique $K^c$, de sorte que les deux notions coïncident. Nous adopterons donc dans ce qui suit la convention suivante:

**Définition 3.** Soit $K$ un corps de nombres totalement réel qui satisfait la conjecture de Leopoldt en $\ell = 2$. Nous dirons qu'une place modérée $\mathfrak{p}$ de $K$ (i.e. une place finie ne divisant pas 2) est (relativement au nombre premier 2)

– *primitive*, lorsque son image dans le groupe procyclique $\mathrm{Gal}(K^c/K)$ n'est pas un carré, autrement dit lorsqu'elle n'est pas décomposée dans la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique $K^c/K$;
– *semi-primitive*, lorsque son image est un carré mais non une puissance 4-ième, autrement dit lorsqu'elle se décompose dans le premier étage de la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique $K^c/K$ mais pas au-delà.

Cela étant posé, le résultat principal de cet article est le suivant:

**Théorème 4.** *Soit $L/K$ une extension quadratique totalement imaginaire d'un corps de nombres totalement réel. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *le corps $L$ est 2-birationnel;*

(ii) *le corps $K$ est 2-rationnel, son unique place 2-adique est décomposée dans $L/K$ et l'extension $L/K$ est ramifiée modérément soit en une place semi-primitive $\mathfrak{p}$ soit en deux places primitives $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$.*

*Exemple.* Pour $K = \mathbb{Q}$ et $L = \mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$, on retrouve ainsi la classification des corps quadratiques imaginaires 2-birationnels donnée dans [**JSa**] (cf. cor. 1.12): ce sont les corps $\mathbb{Q}[\sqrt{-p}]$ avec $p \equiv 7 \ [\mathrm{mod}\, 16]$ premier et les corps $\mathbb{Q}[\sqrt{-pq}]$ avec $p \equiv -q \equiv 3 \ [\mathrm{mod}\, 8]$ premiers.

*Remarque.* Le théorème de densité de Čebotarev montre alors que tout corps de nombres 2-rationnel totalement réel possède une infinité d'extensions quadratiques totalement imaginaires qui sont 2-birationnelles.

## 4. Interprétation logarithmique de la 2-rationalité

Commençons par rappeler la construction du 2-groupe des classes logarithmiques (cf. [**J1**] pour plus de détails). Soit

$$\tilde{\mathcal{J}}_L = \left\{ \mathfrak{x} = (x_{\mathfrak{P}})_{\mathfrak{P}} \in \mathcal{J}_L \mid \prod_{\mathfrak{P}} |x_{\mathfrak{P}}|_{\mathfrak{P}} = 1 \right\}$$

le noyau dans le 2-groupe des idèles $\mathcal{J}_L = \prod_{\mathfrak{P}}^{\mathrm{res}} \mathcal{R}_{\mathfrak{P}}$ de la formule du produit pour les valeurs absolues 2-adiques et

$$\tilde{\mathcal{U}}_L = \{ \mathfrak{x} = (x_{\mathfrak{P}})_{\mathfrak{P}} \in \mathcal{J}_L \mid |x_{\mathfrak{P}}|_{\mathfrak{P}} = 1, \forall \mathfrak{P} \in Pl_L \}$$

le sous-groupe des *unités logarithmiques locales*; le quotient $\tilde{\mathcal{D}}_L = \tilde{\mathcal{J}}_L/\tilde{\mathcal{U}}_L$ est, par définition, le 2-groupe des *diviseurs logarithmiques* de $L$ et son quotient $\tilde{C\ell}'_L = \tilde{\mathcal{D}}_L/\tilde{\mathcal{P}}_L = \tilde{\mathcal{J}}_L/\mathcal{R}_L\tilde{\mathcal{U}}_L$ par l'image canonique $\tilde{\mathcal{P}}_L$ du 2-groupe $\mathcal{R}_L = \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} L^\times$ des idèles principaux est le 2-groupe des classes logarithmiques du corps $L$.

Dans la correspondance du corps de classes, le groupe d'idèles $\tilde{\mathcal{J}}_L$ est le groupe de normes associé à la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique $L^c$ de $L$ et son sous-groupe $\tilde{\mathcal{U}}_L\mathcal{R}_L$ est, lui, le sous-groupe de normes associé à la pro-2-extension abélienne *localement cyclotomique maximale* $L^{lc}$ de $L$ (i.e. à la plus grande 2-extension abélienne de $L$ qui est complètement décomposée sur $L^c$ en chacune des ses places), de sorte que le quotient $\tilde{C\ell}_L$ s'identifie au groupe de Galois $\mathrm{Gal}(L^{lc}/L^c)$. Lorsque $\tilde{C\ell}_L$ est trivial, $L^{lc}$ coïncide avec $L^c$ et on dit que $L$ est *2-logarithmiquement principal.*

Cela étant nous allons déduire le théorème 4 du critère suivant de birationalité:

**Proposition 5.** *Soit $L/K$ une extension quadratique totalement imaginaire d'un corps de nombres totalement réel. Il a alors équivalence entre:*

(i) *le corps $L$ est 2-birationnel;*
(ii) *le corps $K$ est 2-rationnel, l'extension $L/K$ est 2-décomposée mais ramifiée modérement en au moins une place finie et le corps $L$ est 2-logarithmiquement principal.*

Commençons pour cela par établir un lemme:

**Lemme 6.** *Si $L$ est un corps 2-birationnel extension quadratique d'un sous-corps $K$ totalement réel, celui-ci est 2-rationnel et l'extension $L/K$ est décomposée au-dessus de 2 et ramifiée modérément en au moins une place finie.*

*Preuve du lemme:* Vérifions d'abord que les places 2-adiques sont décomposée dans $L/K$. Dans le cas contraire, puisque $L$ supposé 2-birationnel possède exactement deux places 2-adiques, disons $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}'$, le sous-corps $K$ posséderait aussi deux places 2-adiques disons $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{l}'$, et les résultats de [**JSa**] (cf. cor. 2.11) montrent que, puisque $L$ est rationnel en $\mathfrak{L}$ comme en $\mathfrak{L}'$, il en résulterait que $K$ serait lui même rationnel en $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{l}'$, donc 2-birationnel, ce qui est exclu puisqu'un tel corps est nécessairement totalement imaginaire. En résumé $L$ possède donc deux places 2-adiques $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}'$, et $K$ une unique place 2-adique $\mathfrak{l}$, laquelle se décompose dans l'extension quadratique $L/K$.

Ce point acquis, écrivant la formule des classes ambiges pour les 2-classes (au sens restreint) $\mathcal{C}\ell'$ dans l'extension 2-décomposée $L/K$, nous obtenons:

$$1 = |\mathcal{C}\ell'^{\,\mathrm{Gal}(L/K)}_L| = |\mathcal{C}\ell'_K| \frac{2^n \prod_{\mathfrak{p}\nmid 2} e_{\mathfrak{p}}}{[L:K](\mathcal{E}'_K : \mathcal{E}'_K \cap \mathcal{N}_{L/K})}$$

$$= |\mathcal{C}\ell'_K| \frac{2^{n+t-1}}{(\mathcal{E}'_K : \mathcal{E}'_K \cap \mathcal{N}_{L/K})}$$

où $n = [K : \mathbb{Q}]$ est le nombre de places réelles qui se complexifient, $t$ le nombre de places finies qui se ramifient, $\mathcal{E}'_K$ le groupe des 2-unités (au sens restreint) et $\mathcal{N}_{L/K}$ le groupe des normes locales. Si donc l'extension $L/K$ était 2-ramifiée, nous aurions simultanément $t = 0$ (par hypothèse), $|\mathcal{C}\ell'_K| \geq 2$ (puisque $K$ posséderait une 2-extension non ramifiée (aux places finies) 2-décomposée non triviale: $L$), et $(\mathcal{E}'_K : \mathcal{E}'_K \cap \mathcal{N}_{L/K}) =$

$(\mathcal{E}'_K : \mathcal{E}^+_K) \leq 2^n$ (puisque les 2-unités normes locales seraient tout simplement celles totalement positives), donc finalement:

$$|\mathcal{C}\ell'_K| = 2 \,\&\, (\mathcal{E}'_K : \mathcal{E}^+_K) = 2^n$$

(*K* possèderait des 2-unités de toutes signatures).

En particulier le 2-groupe des 2-classes de $K$ au sens ordinaire serait encore d'ordre 2, et l'extension $L/K$ non complexifiée aux places réelles, contrairement au fait que $L$ est totalement imaginaire.

En fin de compte, il vient donc $t \geq 1$; chacun des deux facteurs $|\mathcal{C}\ell'_K|$ et $\frac{2^{n+t-1}}{(\mathcal{E}'_K : \mathcal{E}'_K \cap \mathcal{N}_{L/K})}$ dans la formule des classes ambiges est entier donc vaut 1; et il suit $|\mathcal{C}\ell'_K| = 1$, comme attendu. □

*Preuve de la proposition:* D'après le lemme, nous pouvons supposer $K$ 2-rationnel et $L/K$ 2-décomposée. Ecrivons donc $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}'$ les deux places 2-adiques de $L$, notons $2^a$ l'ordre du diviseur logarithmique de degré nul $\mathfrak{l} - \mathfrak{l}'$ dans le groupe $\widetilde{C\ell}_L$, et posons $2^a(\mathfrak{L} - \mathfrak{L}') = \widetilde{\mathrm{div}}(\pi_L)$, pour un $\pi_L$ de $\mathcal{R}_L$. Nous pouvons alors écrire le groupe $\mathcal{E}'_L$ des 2-unités dans $\mathcal{R}_L$ comme produit direct

$$\mathcal{E}'_L = \tilde{\mathcal{E}}_L \pi_L^{\mathbb{Z}_2}$$

du sous-groupe $\tilde{\mathcal{E}}_L$ des unités logarithmiques de $L$ et du $\mathbb{Z}_2$-module monogène engendré par $\pi_L$.

Maintenant, puisque $L$ est totalement imaginaire et possède $n = [K : \mathbb{Q}]$ places complexes, $\tilde{\mathcal{E}}_L$ est le produit du groupe $\mu_L$ des racines de l'unité dans $L$ et d'un $\mathbb{Z}_2$-module libre de dimension $n$ (cf. [**J1**, prop. 3.4]); en particulier il contient $\tilde{\mathcal{E}}_K$ avec un indice fini. Mais comme le quotient $\tilde{\mathcal{E}}_L/\tilde{\mathcal{E}}_K$ est sans torsion (sans quoi nous pourions écrire $L = K[\sqrt{\eta}]$ avec une unité logarithmique $\eta$ de $K$ et l'extension $L/K$ serait 2-ramifiée contrairement aux hypothèses faites), il suit que l'on a l'égalité $\tilde{\mathcal{E}}_L = \tilde{\mathcal{E}}_K$ (donc en fait $\tilde{\mathcal{E}}_L = \mathcal{E}'_K$ puisque, $K$ n'ayant qu'une seule place 2-adique, les unités logarithmiques de $K$ sont les 2-unités). En résumé nous avons obtenu la décomposition directe:

$$\mathcal{E}'_L = \tilde{\mathcal{E}}_K \pi_L^{\mathbb{Z}_2}.$$

Considérons maintenant le compactifié $\mathcal{R}_{\mathfrak{L}} = \mathcal{R}_{\mathfrak{l}}$ du groupe multiplicatif $L^\times_{\mathfrak{L}} = K^\times_{\mathfrak{l}}$ d'un complété 2-adique de $L$. Le choix d'une uniformisante logarithmique $\pi_{\mathfrak{L}}$ nous permet d'écrire de même $\mathcal{R}_{\mathfrak{L}} = \tilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{L}} \pi_{\mathfrak{l}}^{\mathbb{Z}_2}$ à partir cette fois du groupe $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{L}} = \tilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{l}}$ des unités logarithmiques locales.

Ici encore, l'application de localisation identifie $\tilde{\mathcal{E}}_K$ à un module d'indice fini de $\tilde{\mathcal{U}}_L$ (du fait de l'égalité des rangs) et finalement à $\tilde{\mathcal{E}}_K$ lui même (sans quoi $K$ possèderait une extension 2-décomposée $K[\sqrt{\eta}]$ non triviale engendrée par la racine carré d'une unité logarithmique, i.e. une extension quadratique 2-ramifiée et 2-décomposée, contrairement à la trivialité du groupe $C\ell'_K$).

En fin de compte, on voit que l'application de localisation de $\mathcal{E}'_L$ dans $\mathcal{R}_{\mathfrak{l}}$ est bijective si et seulement si $\pi_L$ est une uniformisante logarithmique; autrement dit que $L$ est 2-birationnel si et seulement si le diviseur logarithmique $\mathfrak{L} - \mathfrak{L}'$ est principal:

- si ce n'est pas le cas, le corps $L$ n'est ni 2-birationnel ni logarithmiquement principal;
- si c'est le cas, $L$ est birationnel, le groupe $C\ell'_L$ est trivial et le groupe $\tilde{C}\ell_L$ qui est alors engendré par la classe de $\mathfrak{L} - \mathfrak{L}'$ l'est aussi, de sorte que $L$ est logarithmiquement principal. $\square$

## 5. Démonstration du théorème principal dans le cas modérement ramifié

Soit $L$ une extension totalement imaginaire d'un corps de nombres totalement réel, ramifiée modérément en au moins une place (finie). D'après la Proposition 5 et le Lemme 6, nous pouvons supposer $K$ 2-rationnel et $L/K$ 2-décomposée, et notre problème est de déterminer sous quelles conditions portant sur la ramification le corps $L$ est logarithmiquement 2-principal.

Notons $G$ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(L/K)$ et écrivons la formule des classes logarithmiques ambiges dans l'extension $L/K$ (cf. [**J1**, th. 4.5 et th. 5.3]). Nous obtenons:

$$|\tilde{C}\ell_L^G| = |\tilde{C}\ell_K| \frac{2^n \prod \tilde{e}_{\mathfrak{p}}(L/K)}{[L^c : K^c](\tilde{\mathcal{E}}_K : \tilde{\mathcal{E}}_K \cap \mathcal{N}_{L/K})} (\mathcal{D}_L^{I_G} \tilde{\mathcal{P}}_L : \tilde{\mathcal{D}}_L^{I_G} \tilde{\mathcal{P}}_L),$$

où $|\tilde{C}\ell_K|$ vaut 1 puisque $K$ est 2-rationnel; $n = [K : \mathbb{Q}]$ est le nombre de places réelles de $K$ complexifiées dans $L$ (elles le sont toutes !); $\tilde{e}_{\mathfrak{p}}(L/K)$ désigne l'indice de ramification logarithmique de la place $\mathfrak{p}$ dans l'extension $L/K$ (lequel coïncide avec l'indice de ramification au sens ordinaire $e_{\mathfrak{p}}(L/K)$, puisque les places 2-adiques, décomposées par hypothèse, sont non ramifiées); le degré $[L^c : K^c] = [L : K]$ est égal à 2;

l'indice normique $(\tilde{\mathcal{E}}_K : \tilde{\mathcal{E}}_K \cap \mathcal{N}_{L/K})$ des unités logarithmiques modulo les normes est majoré par $2^{n+1}$ (puisque $\tilde{\mathcal{E}}_K$ est le produit de $\{\pm 1\}$ par un $\mathbb{Z}_2$-module libre de rang $n$); et le terme correctif $(\mathcal{D}^{I_G}\tilde{\mathcal{P}}_L : \tilde{\mathcal{D}}^{I_G}\tilde{\mathcal{P}}_L)$ vaut 1 ou 2 (et on sait qu'il vaut 1 lorsque l'extension $L/K$ est primitivement ramifiée).

Il en résulte que si $L$ est 2-logarithmiquement principal, l'extension quadratique $L/K$ n'est ramifiée qu'en une ou deux places.

Reprenons maintenant le même raisonnement à un étage fini $L_n/K_n$ de la tour cyclotomique: notons $K_m$ le $m$-ième étage de la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique $K^c$ de $K$ (c'est encore un corps totalement réel qui est 2-ramifié sur $K$ donc 2-rationnel) et considérons le compositum $L_m = K_m L$ (qui est le $m$-ième étage de la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique $L^c$ de $L$). Observant que $L$ et $L_m$ sont simultanément 2-logarithmiquement principaux ou pas (la principalité logarithmique de $L$ comme de $L_m$ équivalant à la trivialité du 2-groupe des 2-classes $C\ell'_{L^c}$ du corps surcirculaire $L^c$ (cf. par exemple [**JSo**])), nous concluons comme précédemment que si $L$ est 2-logarithmiquement principal, l'extension $L_m/K_m$ n'est ramifiée qu'en une ou deux places.

– Supposons donc $L$ 2-logarithmiquement principal et examinons les deux éventualités:

(i) cas monoramifié: s'il existe une unique place finie ramifiée (modérément) dans $L/K$, elle est forcément imprimitive (sans quoi $L/K$ serait primitivement ramifiée, et $L$ 2-rationnel en vertu du résultat de [**GJ**], ce qui est exclu $L$ ayant exactement deux places 2-adiques), i.e. décomposée dans $K_1/K$; et, quitte à remplacer $K$ par $K_1$ et $L$ par $L_1$ nous sommes ramenés au:

(ii) cas biramifié: s'il existe exactement deux places finies $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ ramifiées dans $L/K$, elles sont forcément toutes deux primitives (sans quoi l'une au moins serait décomposée dans $K_1/K$ et $L_1/K_1$ serait ramifiée en trois places au moins).

– Inversement, supposons $L/K$ ramifiée modérément en une unique place $\mathfrak{p}$ semi-primitive, soit en deux places exactement $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ toutes deux primitives. Alors, quitte à remplacer $L/K$ par $K_1/L_1$, nous pouvons nous placer dans le second cas. Cela étant, le terme correctif de la formule des classes logarithmique ambiges disparait (l'extension considérée est primitivement ramifiée), et la formule s'écrit:

$$|\tilde{C}\ell_L^G| = \frac{2^{n+1}}{(\tilde{\mathcal{E}}_K : \tilde{\mathcal{E}}_K \cap N_{L/K})} = \frac{2^{n+1}}{(\mathcal{E}'_K : \mathcal{E}'_K \cap N_{L/K})}.$$

D'autre part nous savons déjà, puisque $K$ est 2-rationnel, qu'il contient des 2-unités de toutes signatures. En d'autres termes, les 2-unités totalement positives (i.e. celles qui sont normes locales aux places infinies dans l'extension $L/K$) forment un sous-groupe d'indice $2^n$ dans $\mathcal{E}'_K$. Montrer que $\tilde{C}\ell_L$ est trivial revient donc à trouver une 2-unité totalement positive qui ne soit pas norme locale en $\mathfrak{p}$ (ou en $\mathfrak{q}$, ce qui est équivalent d'après la formule du produit). Or nous connaissons une telle 2-unité $\varepsilon$: le premier étage $K_1$ de la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique $K^c$ de $K$ est précisément de la forme $K[\sqrt{\varepsilon}]$ pour une 2-unité $\varepsilon \gg 0$ qui n'est pas un carré dans $K_{\mathfrak{p}}^{\times}$ (puisque $\mathfrak{p}$ ne se décompose pas dans $K_1/K$) donc qui n'est pas norme locale en $\mathfrak{p}$ dans l'extension quadratique $L/K$ ramifiée en $\mathfrak{p}$; ce qui achève la démonstration.

*Remarque.* Pour $K = \mathbb{Q}$, le résultat obtenu redonne naturellement la classification des corps quadratiques imaginaires 2-logarithmiquement principaux $\mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$ (avec ici $d \equiv -1 \,[\mathrm{mod}\, 8]$ compte tenu de la contrainte de 2-décomposition) établie dans [**So**].

## Bibliographie


[GJ] G. Gras et J.-F. Jaulent, Sur les corps de nombres réguliers, *Math. Z.* **202(3)** (1989), 343–365.

[J1] J.-F. Jaulent, Classes logarithmiques des corps de nombres, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **6(2)** (1994), 301–325.

[J2] J.-F. Jaulent, Théorie $\ell$-adique globale du corps de classes, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **10** (1999), 355–397.

[JN] J.-F. Jaulent et T. Nguyen Quang Do, Corps $p$-rationnels, corps $p$-réguliers, et ramification restreinte, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **5(2)** (1993), 343–363.

[JSa] J.-F. Jaulent et O. Sauzet, Pro-$\ell$-extensions de corps $\mathfrak{l}$-rationnels, *J. Number Theory* **65(2)** (1997), 240–267.

[JSo] J.-F. Jaulent et F. Soriano, Sur les tours localement cyclotomiques, *Arch. Math. (Basel)* **73(2)** (1999), 132–140.

[So] F. Soriano, Classes logarithmiques ambiges des corps quadratiques, *Acta Arith.* **78(3)** (1997), 201–219.

[MN] A. Movahhedi et T. Nguyen Quang Do, Sur l'arithmétique des corps de nombres $p$-rationnels, in: *"Sém. Th. Nombres Paris 1987–88"*, Prog. Math. **81**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 155–200.

[W1] K. Wingberg, On Galois groups of $p$-closed algebraic number fields with restricted ramification, *J. reine angew. Math.* **400** (1989), 185–202.

[W2] K. Wingberg, On Galois groups of $p$-closed algebraic number fields with restricted ramification II, *J. reine angew. Math.* **416** (1991), 187–194.

Institut de Mathématiques
Université Bordeaux I
351, cours de la libération
F-33405 Talence Cedex
France
*E-mail address*: jaulent@math.u-bordeaux.fr
*E-mail address*: sauzet@math.u-bordeaux.fr

Primera versió rebuda el 20 de juliol de 1999,
darrera versió rebuda el 8 d'octubre de 1999.