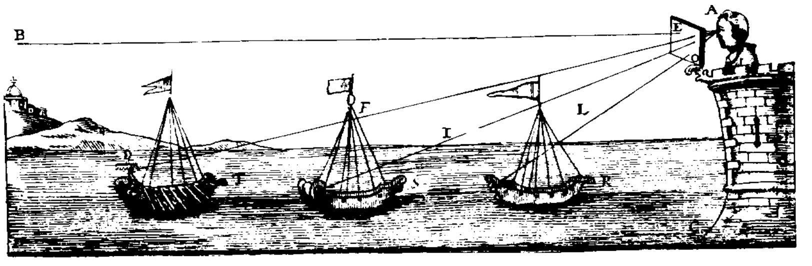
INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA



SIGNIFICADO DE LA MEDIA EN LOS LIBROS DE TEXTO DE SECUNDARIA

Cobo Merino, Belén[1] **y Batanero, Carmen**[2]
[1] IES Los Neveros. H. Vega, Granada
belenc@teleline.es
[2] Universidad de Granada
batanero@ugr.es

Resumen. En este trabajo presentamos un estudio del significado de la media en una muestra de 22 libros de educación secundaria obligatoria. Analizamos los problemas propuestos, algoritmos de cálculo, definiciones, propiedades, representaciones y argumentos. Concluimos la variedad de significados presentados en los libros para un mismo concepto, así como la ausencia de algunos elementos que lo harían más significativo para los estudiantes.
Palabras clave. Libros de texto, media, significado, comprensión.

Summary. In this article, we present a survey on the meaning of mean in a sample of 22 books of Compulsory Secondary Education (ESO). We analyse the problems proposed, calculus algorithms, definitions, properties, representations and arguments. We conclude the variety of meanings presented in the books for one concept, as well as the absence of some elements that would make it more meaningful for students.
Keywords. Textbooks, mean, meaning, comprehension.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo nos interesamos por la enseñanza de las medidas de posición central: media, mediana y moda en la educación secundaria obligatoria (ESO, alumnos de 12 a 16 años), continuando otros trabajos previos (Cobo, 1998, 2002). Aunque este tema ya se contemplaba en los anteriores planes de estudio, en España (MEC, 1993) y otros países (NCTM, 2000) se da en los últimos años mayor énfasis a las actividades de análisis exploratorio de datos, lo que nos lleva a replantear la forma en que son introducidos.

Está claro que las posibles dificultades que los alumnos encuentren en el tema dependerán de la enseñanza recibida. Cuando queremos reflexionar sobre la dificultad que el aprendizaje de ciertos conceptos tiene para los alumnos, es necesario comenzar por hacer un análisis epistemológico de su significado. Como indica Godino (1996, p. 418), «el problema de la comprensión está íntimamente ligado a cómo se concibe el propio conocimiento matemático. Los términos y expresiones matemáticas denotan entidades abstractas cuya naturaleza y origen tenemos que explicitar para poder elaborar una teoría útil y efectiva sobre qué entendemos por comprender tales objetos. Esta explicitación requiere responder a preguntas tales como: ¿Cuál es la estructura del objeto a comprender? ¿Qué formas o modos posibles de comprensión existen para cada concepto? ¿Qué aspectos o componentes de los conceptos matemáticos es posible y deseable que aprendan los estudiantes en un momento y circunstancias dadas?».

Aquí nos centraremos exclusivamente en la media aritmética. Siguiendo a Godino y Batanero (1994, 1997) y Batanero y Godino (2001), vamos a considerar las siguientes entidades primarias como constituyentes del significado de la *media*:

– *Problemas y situaciones* que inducen actividades matemáticas y definen el campo de problemas de donde surge la idea de media. Un ejemplo sería encontrar la mejor estimación de una cantidad desconocida.

– *Procedimientos, algoritmos, operaciones*. Cuando un sujeto se enfrenta a un problema y trata de resolverlo, realiza distintos tipos de *prácticas*, que llega a convertir en rutinas con el tiempo. Prácticas características en la solución de problemas de promedios serían sumar una serie de valores y dividir por el número de sumandos.

– *Representaciones* materiales utilizadas en la actividad de resolución de problemas (términos, expresiones, símbolos, tablas, gráficos).

– *Abstracciones* (conceptos, proposiciones). Las definiciones y propiedades características de la media y sus relaciones con otros conceptos.

– *Demostraciones* que empleamos para probar las propiedades de la media y que llegan a formar parte de su significado.

En este marco teórico, el significado de un concepto matemático varía según la institución considerada y los instrumentos semióticos disponibles en la misma. En la escuela se fijan unos significados determinados para los conceptos a enseñar, pero un estudiante, en un momento de su proceso de aprendizaje, puede asignar a la media un significado que no corresponde exactamente con el anterior. Tampoco el significado en una institución escolar, como, por ejemplo, la enseñanza secundaria, se tiene que corresponder exactamente con el atribuido por los matemáticos profesionales.

En este trabajo tratamos de caracterizar los componentes del significado que, de la media, se presenta en los libros de texto de enseñanza secundaria. A continuación presentamos este análisis, haciendo primero unas breves consideraciones sobre la importancia de los libros de texto y resumiendo brevemente las investigaciones previas más relevantes.

FUNDAMENTOS

Importancia del libro de texto

Nuestro estudio se justifica por la importancia que el libro de texto tiene como recurso didáctico, señalada ya en el informe Cockroft (1985), donde se afirma que los libros de texto constituyen una ayuda inestimable para el profesor en el trabajo diario del aula.

Chevallard (1991) sugiere que los libros de texto ofrecen una concepción legitimada del saber a enseñar e institucionalizan una forma de progresión del conocimiento de los estudiantes. Por otro lado, Robert y Robinet (1989) indican que el estudio de los libros de texto nos permite conocer, de manera indirecta, la concepción del profesorado sobre un contenido específico, puesto que, al elegir los materiales curriculares que se van a emplear, intervienen muchas variables y al tomar la decisión de utilizar uno u otro texto se está posicionando y compartiendo, al menos parcialmente, lo que éste propone.

Según Ortiz de Haro (1999), un libro de texto se considera como un segundo nivel de transposición didáctica, después del primer nivel, que lo constituirán los currículos y programas oficiales. Si en un texto aparece un significado sesgado, éste puede llegar a transmitirse a los alumnos; el profesor que los usa debería mantener una permanente vigilancia epistemológica sobre el contenido de los libros de texto. Este trabajo es antecedente del nuestro, así como el de Sánchez Cobo (1996), quien estudia el tema de correlación y regresión.

Con la nueva educación secundaria obligatoria se ha producido una publicación de muchos nuevos libros de texto que tratan de incorporar las recomendaciones didácticas de estos y otros autores. Es, sin embargo, importante analizar el significado de los conceptos estadísticos que estos libros transmiten si queremos asegurar que cumplan la función para la que han sido diseñados.

Síntesis de investigaciones previas

Son muchas las investigaciones sobre la comprensión de la media, que, en general indican dificultades en el aprendizaje. Por ejemplo, Pollatsek, Lima y Well (1981) encontraron que las situaciones en las cuales se debe calcular una media ponderada y la selección de los correspondientes pesos no son fácilmente identificadas por los estudiantes. Li y Shen (1992) indican que, cuando los datos se agrupan en intervalos, los estudiantes olvidan con frecuencia que cada uno de estos grupos debería ponderarse de modo distinto al calcular la media y se limitan a calcular la de todas las marcas de clase. Carvalho (1996), en una investigación con alumnos de 7º de educación básica (14-15 años), sugiere que algunos, al calcular la media, suman las frecuencias absolutas en lugar de los valores de la variable. Para la mediana toman el valor central de la serie de frecuencias absolutas.

En otros casos, el algoritmo se aplica de forma mecánica sin comprender su significado. Cai (1995) encontró que, mientras la mayoría de los alumnos de 12-13 años son capaces de aplicar adecuadamente el algoritmo para calcular la media, sólo algunos saben determinar un valor desconocido en un conjunto pequeño de datos para obtener un valor medio dado. Gattuso y Mary (1998) sugieren que el contexto y forma de representación influyen en la dificultad de los problemas de promedio.

Mevarech (1983) sugiere que una explicación posible de los errores en el cálculo de promedios es que los estudiantes suelen creer que un conjunto de números, junto con la operación media aritmética, constituye un grupo algebraico, que satisface los cuatro axiomas: clausura, asociatividad, elemento neutro y elemento inverso. Éstas y otras propiedades fueron analizadas por Strauss y Bichler (1988) con niños de 8 a 12 años, indicando que los alumnos comprenden intuitivamente el hecho de que la media es un valor comprendido entre los extremos de la distribución o que el valor medio está influenciado por los valores de cada uno de los datos, no así la inexistencia del elemento neutro. Por nuestra parte, pensamos que los estudiantes que comienzan la ESO (12-13 años) estarían en una situación similar a los de mayor edad de este estudio y podrían presentar las mismas dificultades encontradas por estos autores.

En referencia a los futuros profesores, Batanero, Godino y Navas (1997) observaron que los maestros de primaria en formación encuentran dificultades en: el tratamiento de los ceros y valores atípicos en el cálculo de promedios; identificar las posiciones relativas de media, mediana y moda en distribuciones asimétricas; y la elección de la medida de tendencia central más adecuada en una determinada situación y el uso de los promedios en la comparación de distribuciones. Se trata de dificultades que permanecen incluso después de haber recibido enseñanza específica.

Tras todas estas investigaciones, han sido Watson y Moritz (2000) los primeros que han realizado un estudio del desarrollo evolutivo del concepto. Realizaron un estudio con 2.250 sujetos entre 3º de primaria y el curso de orientación universitaria (8 a 18 años). No proporcionan datos sobre la enseñanza de los promedios ni analizan separadamente la comprensión de elementos de significado, sino sólo la comprensión global. Por otro lado, el cuestionario se limita a dos ítems de opciones múltiples para evaluar la comprensión del uso cotidiano de promedios y otros dos ítems abiertos para evaluar la capacidad de aplicación y cálculo. Definen los siguientes niveles de desarrollo evolutivo:

– *Prepromedio*: No se llega a usar la idea de promedio, ni siquiera de forma coloquial o en contextos cotidianos.

– *Uso coloquial de la media*: Interpretándolo como normal o bueno, se emplean ideas imaginarias en el contexto de la tarea. Se relaciona con la idea de suma, pero no se conoce el algoritmo correcto, no se comprende el significado, pocos progresos en tareas complejas.

– *Respuesta multiestructural*: Se usan varias ideas como máximo, mínimo y suma más división para describir la media en situaciones sencillas, aunque no se es capaz de aplicarlo en situaciones complejas. Se producen errores en los algoritmos de cálculo o se confunden media, mediana y moda. Existen conflictos cognitivos entre el cálculo de la media y el concepto.

– *Media como representante*: Se asocia la media con su algoritmo en situaciones sencillas. Recurren al algoritmo de cálculo para describir los conceptos. Se relaciona el algoritmo con la posibilidad de un resultado no entero. Se expresa alguna idea de representatividad para la estimación o predicción en un conjunto de datos. No se sabe aplicar en contextos complejos y con frecuencia se prefieren usar las características visuales de los gráficos en lugar de sus promedios.

– *Aplicación en un contexto complejo*: Además de las capacidades del nivel anterior es capaz de invertir el algoritmo para hallar el total a partir de la media, o calcula medias ponderadas (no las dos cosas a la vez). No tiene clara la idea de distribución, raramente usan la media para comparar más de un conjunto de datos.

– *Aplicación en dos o más contextos complejos*. Además del anterior, es capaz a la vez de invertir el algoritmo para hallar el total a partir de la media y calcular medias ponderadas. Comprende la idea de distribución. Usan la media frecuentemente para comparar dos o más conjuntos de datos.

La investigación más seria sobre el aprendizaje de promedios la encontramos en Carvalho (2001), quien analiza el efecto que el trabajo cooperativo en pares (grupo experimental) tiene sobre el desarrollo de la capacidad lógica y sobre el aprendizaje de conceptos estadísticos elementales. Para ello proporciona a los alumnos lo que la autora llama *tareas estadísticas no habituales*, que corresponden a problemas sencillos y abiertos sobre estadística. Los niños que trabajaron en forma cooperativa mostraron un avance más claro, tanto en el desarrollo lógico como en sus competencias estadísticas, que sus compañeros. También encontró que es preferible formar parejas de alumnos heterogéneas en cuanto a sus capacidades y conocimientos y que esto beneficia no sólo al alumno que se encuentra en nivel inferior, sino también a su compañero. La investigación muestra finalmente que el contenido estadístico causa dificultades a los alumnos, incluso cuando trabajan en pares y en tareas no habituales. Aunque los alumnos realizan las tareas, el aprendizaje es con frecuencia memorístico y no se llega a una comprensión profunda.

En nuestra opinión, los resultados de las investigaciones que hemos descrito sobre la media muestran también que el conocimiento de las reglas de cálculo por parte de los estudiantes no implica necesariamente una comprensión real de los conceptos subyacentes. Si los alumnos adquieren sólo el conocimiento de tipo computacional es probable que cometan errores predecibles, salvo en los problemas más sencillos. Además, proponer el algoritmo de cálculo prematuramente puede influir negativamente en la comprensión del concepto. Por ello se debería trabajar sobre las ideas intuitivas que tienen los alumnos para ayudarles a desarrollar caminos nuevos que les permitan enriquecer los conceptos que ya tienen asimilados. A la misma conclusión llega Tormo (1993) en un estudio realizado con alumnos de 12 a 15 años.

Como hemos dicho arriba, consideramos muy importante la reflexión sobre la enseñanza que reciben los estudiantes y sobre el significado que la institución que se ocupa de ella asigna a la media, por su relación con las dificultades que pueden encontrar a lo largo del proceso. Un paso en este sentido sería analizar la enseñanza actual, de la que uno de sus indicadores son los libros de texto, como hemos argumentado antes. Por ello, las dificultades que queremos evaluar se refieren a los problemas y las tareas concretas que se proponen a los estudiantes, los algoritmos de cálculo y otras prácticas en la resolución de problemas, las representaciones, propiedades, definiciones y las validaciones presentadas.

METODOLOGÍA

Para llevar a cabo el análisis, hemos seleccionado 22 libros de texto, que incluyen, entre sus temas, contenidos relativos a estadísticos de posición central, en concreto la media, del segundo ciclo de la ESO; en total 14 de 3º de ESO (destinados a alumnos de 15 años) y 7 de 4º de ESO (alumnos de 16 años). La relación de libros analizados se presenta en el anexo. La selección de los libros se ha hecho teniendo en cuenta los cursos en los que se incluyen temas específicos que tratan de las medidas de centralización en la enseñanza secundaria obligatoria, que son 3º y 4º curso.

Aunque, en el currículo que se propone en Andalucía, los contenidos relativos a la media se deben trabajar en el primer ciclo de la ESO, y hacer una revisión en 3º y 4º, la mayor parte de las editoriales proponen estos temas en los libros de 3º y 4º de ESO y, más frecuentemente, en 3º. Debido a esto, nosotros nos hemos centrado en estos dos cursos, intentando incluir un abanico de editoriales que abarque las más conocidas y utilizadas entre los docentes y también algunas obras recientes con un ámbito de difusión menor, pero que presenten un enfoque novedoso. Los libros han sido publicados entre 1994 y 1999 y corresponden a 17 editoriales diferentes; creemos que representa bien los libros de texto de este nivel escolar.

Una vez seleccionados los libros de texto, se tomaron aquellos capítulos en los que se tratan las medidas de centralización que nos ocupan y todos los que se relacionan con otros conceptos en los que explícita o implícitamente pueden aparecer los promedios, como, por ejemplo, representaciones gráficas de conjuntos de datos, estadísticos de orden y medidas de dispersión. En el análisis de contenido se han llevado a cabo los siguientes pasos:

– En primer lugar, se ha realizado una lectura minuciosa de los capítulos que tratan el tema, clasificando y agrupando las diferentes definiciones, propiedades, representaciones y justificaciones prototípicas e intentando determinar los elementos de significado que contienen, partiendo de un análisis conceptual previo.

Las categorías utilizadas para la clasificación «significado» fueron establecidas *a priori*, tras un análisis detallado de la media realizado a partir de una muestra de libros universitarios de estadística descriptiva. De hecho, existen algunas de estas categorías que no hemos encontrado en los libros de texto analizados, por presentar un nivel de complejidad mayor del que se puede trabajar con estudiantes de estos niveles.

– Posteriormente, se han elaborado tablas comparativas que recogen los elementos de significado presentes en los diferentes textos en relación con cada contenido. Esta presentación de la información nos facilitará el análisis y la extracción de conclusiones.

El proceso de análisis ha sido inductivo y cíclico, como se recomienda en el análisis de datos cualitativo (Huberman y Miles, 1994). Fueron necesarias varias lecturas, la elaboración progresiva de las categorías, la comparación de casos incluidos y excluidos en las mismas y la revisión sucesiva hasta llegar a los resultados que presentamos a continuación.

RESULTADOS

Situaciones problema presentadas en los libros

Comenzamos con la *situación problema* que consideramos como cualquier tarea cuya solución requiere actividades de matematización, es decir, según Freudenthal (1991):

– Construir o buscar soluciones de un problema que no son inmediatamente accesibles.

– Inventar una simbolización adecuada para representar la situación problemática y las soluciones encontradas, y para comunicar estas soluciones a otras personas.

– Justificar las soluciones propuestas (validar o argumentar).

– Generalizar la solución a otros contextos, situaciones problema y procedimientos.

Hemos encontrado los siguientes tipos diferenciados de problemas, que en su conjunto definen el campo de problemas de aplicación de la media en los libros analizados.

P1. Estimar una medida a partir de diversas mediciones realizadas, en presencia de errores. A pesar de que éste es el campo de problemas del que surge históricamente la primera idea de media, en el análisis de libros de texto realizado, sólo hemos encontrado ejemplos en 3 de los libros. Incluso en algunos de estos casos, no se resalta específicamente que la media proporcione una solución general a este tipo de problemas, ya que no se resuelve el ejercicio ni se comenta su solución, sino que sólo se presenta como idea implícita subyacente, tal cual reproducimos a continuación.

> Hemos escogido 50 bolsas de pasta alimenticia en un supermercado. Todas ellas llevan impreso «Peso neto: 250 g» en la etiqueta. Después de pesarlas con precisión, hemos obtenido los siguientes resultados, expresado en gramos.
>
> 243 269 226 249 255 240 266 230 236 250
> 252 261 242 240 270 240 251 228 259 262
> 260 231 261 268 252 259 250 249 243 256
> 230 250 252 259 236 249 243 256 230 250
> 249 243 256 230 250 252 274 268 270 233
>
> ¿Qué peso podemos esperar que tenga una bolsa de pasta alimenticia de esta marca?
>
> Matemáticas 3º ESO. Guadiel, p. 150

En este ejemplo, identificamos un caso típico de problema de estimación de una cantidad de una cierta magnitud, en presencia de errores de medida, que con frecuencia encontrarán los alumnos en el futuro, por ejemplo, al realizar las prácticas de física. Pensamos que este tipo de problema debería presentarse con mayor frecuencia en la enseñanza de las medidas de posición central, porque es comprensible para los alumnos de estas edades y porque permite construir la idea de media como mejor estimador de una cantidad desconocida. Ésta es una idea muy potente que es utilizada con frecuencia en diferentes modelos estadísticos, por ejemplo, cuando los alumnos estudian la regresión lineal, incluida en el temario de bachillerato.

P2. Obtener una cantidad equitativa al hacer un reparto para conseguir una distribución uniforme. Al contrario que en el caso del problema anterior, la idea de media como reparto equitativo la hemos encontrado en casi todos los textos estudiados, en concreto en 18 de los 22 libros que hemos analizado. La idea de distribución uniforme no aparece de forma explícita, es decir, no se alude claramente a esta propiedad de la media. Sin embargo, en algunos problemas en los que se debe calcular la media de un conjunto de datos está implícita la idea de uniformar los valores de una variable. A continuación transcribimos uno de estos ejemplos, en el que también se pide a los alumnos decidir, entre la media, mediana y moda, cuál sería el mejor representante de un conjunto de datos.

> En un pequeño comercio hay cinco empleados cuyos sueldos mensuales son: 80.000, 80.000, 80.000, 100.000 y 400.000 pesetas. Halla la moda y la mediana e interprétalas.
> ¿Cuánto cobran entre todos los empleados al mes? Si esta cantidad se repartiera por igual, ¿cuánto cobraría cada uno? ¿Alguno de ellos cobra este sueldo medio?
> ¿Qué valor de los tres: moda, mediana o media, crees que representa mejor los sueldos de los empleados de este pequeño comercio?
> ¿Cuál es el mayor sueldo? ¿Y el menor? ¿Cuál es la diferencia entre estos dos valores?
>
> 3º Matemáticas. Secundaria. Edelvives, p. 328

P3. Obtener un elemento representativo de un conjunto de valores dados cuya distribución es aproximadamente simétrica. Este problema es el que más frecuentemente hemos encontrado en los textos analizados, no sólo porque está presente en todos ellos, sino porque es muy alta la frecuencia de aparición en los ejemplos y problemas tanto resueltos como propuestos. Es la principal aplicación que se presenta de la media, como número que representa un conjunto de datos, e incluso en muchos casos se presenta explícitamente. Reproducimos un ejemplo a continuación.

> Un alumno ha obtenido en cinco exámenes las siguientes calificaciones: 5, 7, 6, 7 y 9. La nota media se calcula así:
>
> $$\text{Nota media} = \frac{5+7+6+7+9}{5} = 6{,}8$$
>
> La media resume la treyectoria escolar en una solo dato: 6,8; y en ello estriba su ventaja.

P4. Estimar el valor que se obtendrá con mayor probabilidad al tomar un elemento al azar de una población cuando la variable es aproximadamente simétrica. A pesar de que ésta es una de las principales aplicaciones de la media y que los alumnos de esta edad podrían perfectamente entenderlo, no hemos encontrado ningún texto que haga referencia a esta situación.

Tabla I

Campos de problemas que presentan los libros analizados.

	Texto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Problemas	P1																				◻	◻	◻
	P2		◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻
	P3	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻
	P4																						

En la tabla I hacemos un resumen de la aparición de los campos de problemas analizados en los diferentes libros de texto. Como podemos ver en la tabla, hay algunos campos de problemas que apenas aparecen en los libros de texto, a pesar de su importancia y de que podrían ser fácilmente comprensibles por los alumnos.

Es curioso observar cómo el problema del que surge la primera idea de media, estimar una medida a partir de diversas mediciones realizadas, en presencia de errores, no aparece más que en tres de los libros analizados, punto que nos ha llamado la atención porque no creemos que pueda presentar una dificultad especial en los estudiantes de estas edades.

En el caso del problema P4, el tener que estimar un valor de máxima probabilidad en un conjunto presenta una doble dificultad: por un lado, los estudiantes no están habituados a efectuar estimaciones y, por otro, la probabilidad también es un concepto que les resulta difícil. No obstante, aunque no se presentasen como problemas, creemos que sería adecuado mostrar algunos ejemplos de aplicación de la media en este tipo de problema, por ejemplo, al hablar de la esperanza de vida o de la duración estimada de un examen o de una lámpara.

Algoritmos y procedimientos

Cuando un alumno se enfrenta a un problema y trata de resolverlo, realiza distintos tipos de procedimientos o algoritmos. Los libros de texto analizados presentan las técnicas concretas para resolver las situaciones planteadas, bien de forma explícita incluyendo ejemplos resueltos o bien dando únicamente indicaciones para que sean los propios estudiantes quienes realicen las tareas en problemas propuestos.

El cálculo de la media depende de la forma de presentación de los datos y del tipo de variable que se maneje. Este aspecto se tiene en cuenta en la mayoría de los textos analizados, que separan, explícitamente, unos casos de otros. En todos los libros aparecen explícitamente como objeto de enseñanza las técnicas para el cálculo de la media. Además, en la mayoría de ellos se le dedica una extensión mucho mayor que a otros aspectos, lo que nos hace pensar que es uno de los puntos a los se le concede más importancia. En todos los libros se presentan los tres casos siguientes:

A1. *Cálculo de la media de una variable discreta con datos aislados*, mediante el algoritmo de suma de todos los valores, dividiendo por el número de datos, generalmente con una notación sencilla, como en el caso siguiente:

Se quiere estudiar el efecto secundario que tiene la vacuna contra la meningitis. Para ello se toma la temperatura a cuatro niños. Los resultados obtenidos, en grados, son los siguientes:

$$\bar{x} = \frac{37{,}1^{\circ} + 36{,}5^{\circ} + 38^{\circ} + 37^{\circ}}{4} = 37{,}15^{\circ}$$

3º Matemáticas. Edelvives. Proyecto Adara, p. 236

A2. *Cálculo de la media de una variable discreta con datos presentados en tablas de frecuencias.* En este caso, se precisa aplicar el algoritmo de cálculo de la media ponderada, y el alumno debe identificar y discriminar los valores de la variable y los de las ponderaciones. Los libros presentan este algoritmo, justificándolo como modo de simplificar los cálculos.

En otros casos, la tabla de frecuencias está implícita, pero se presenta el algoritmo de cálculo de la media ponderada.

Ejercicio resuelto

La media de 4 números es 5,4. La media de otros 6 números diferentes es 4,3. Encuentra:

a) Cuánto suman los 4 primeros números.
b) Cuánto suman los otros 6 números juntos.
c) La media de todos los números juntos.

a) Si la media de 4 números es 5,4, la suma total de los 4 números es $5{,}4 \cdot 4 = 21{,}6$.
b) Si la media de los otros 6 números es 4,3, la suma total de los 6 números es $4{,}3 \cdot 6 = 25{,}8$.
c) La suma de los 10 números es 21,6 + 25,8 = 47,4. La media de todos los números es $47{,}4/10 = 4{,}74$.

Matemáticas 3º Secundaria. SM, p. 269

A3. *Cálculo de la media en tablas de datos agrupados en clases.* Todos los libros presentan la sustitución del valor de la variable por la marca de clase, usando el algoritmo de cálculo de la media ponderada, aunque generalmente no se hace alusión a que el valor obtenido de esta manera es aproximado, como vemos en el ejemplo que reproducimos a continuación:

En el caso de que la variable sea continua, la media se calcula a partir de la marca de clase o valor medio de cada intervalo.

Ejemplo. Se están estudiando las precipitaciones caídas en España en un determinado mes. Para ello se registran los litros por metro cuadrado caídos en diferentes provincias.

Litros por metro cuadrado	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
c_i	15	25	35	45	55	65
Núm. de provincias	4	2	3	1	2	1

La precipitación media la calcularemos de la siguiente forma:

$$\bar{x} = \frac{15 \cdot 4 + 25 \cdot 2 + 35 \cdot 3 + 45 \cdot 1 + 55 \cdot 2 + 65 \cdot 1}{13} = 33{,}51/m^2$$

3º Matemáticas. Edelvives. Proyecto Adara, p. 236

Tabla II
Algoritmos de cálculo que presentan los libros analizados.

Texto		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Algoritmos	A1	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	A2	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	A3	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	A4																						

AM4. *Cálculo gráfico.* No hemos encontrado el cálculo gráfico de la media de un conjunto de datos apoyándose en un diagrama de frecuencias acumuladas. Es posible que los autores tengan en cuenta la dificultad que para los estudiantes supone añadir la lectura de gráficos al cálculo de la media.

La tabla II presenta un resumen de los algoritmos encontrados en los diferentes textos analizados.

El análisis revela que, en los libros de texto de esta etapa educativa, se da mucha importancia al cálculo, puesto que el porcentaje de texto, ejemplos y ejercicios dedicados a éste es notable, incluso en detrimento de otros aspectos. Una de las primeras consecuencias que este hecho puede tener es que, aunque los estudiantes consigan manejar perfectamente los procedimientos de cálculo, pueden no alcanzar una comprensión completa de esta medida, sus posibilidades de uso, las ventajas y la conveniencia de elegir esta u otras medidas de posición central según la situación.

No obstante, el tema del uso de los gráficos es más deficiente que el uso de cálculos aritméticos e, incluso, algebraicos.

Definiciones y propiedades

Hemos analizado las definiciones y propiedades presentadas explícitamente al alumno, así como el uso implícito que se hace de las mismas en los libros analizados que presentamos a continuación.

DM1. *La definición de la media como la suma ponderada de cada uno de los valores de la variable, multiplicado por su frecuencia.* Esta definición enfatiza el algoritmo de cálculo $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i$, y presenta la media como una operación con los datos. Es la de mayor frecuencia en los libros de texto, aparece en 18 de los 22 analizados. Como ejemplo incluimos la siguiente.

> La media aritmética o media de una variable estadística es el resultado que se obtiene al dividir la suma de todos los datos entre el número total de datos. Se representa por $\bar{x}$. La fórmula para obtener la media aritmética es:
>
> $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot n_i}{N}$$
>
> Matemáticas A. 4º ESO. Casals, p. 191

DM2. Esta otra definición de media, como *promedio aritmético de un conjunto de datos* relaciona la media con otros promedios y enfatiza su carácter de valor central. Únicamente la hemos encontrado en 3 textos. Uno de ellos se reproduce a continuación.

> La media aritmética, $\bar{x}$ es el promedio de todos los valores que toma la variable. Esta media es única para cada distribución cuantitativa y se calcula mediante la expresión:
>
> $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot F_i}{N}$$
>
> Matemáticas 4º Opción A. Oxford Educación, p. 197

Tabla III
Definiciones que presentan los libros analizados.

Definiciones	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Algoritmo	X	X	X	X	X	X		X	X	X	X	X		X	X	X	X		X	X		X
Promedio													X					X			X	

Como se puede apreciar en la tabla III, la definición a partir del algoritmo, enfatizando la idea de media como operación, predomina, lo que nos indica gran homogeneidad en los libros a la hora de presentar este concepto. Sería más acertado, a nuestro juicio, centrarse en la idea de media como representante.

Una vez analizadas las definiciones, estudiamos las propiedades introducidas explícita o implícitamente, clasificándolas en numéricas, algebraicas y estadísticas.

Propiedades numéricas

N1. *La media de un conjunto de datos es siempre un valor perteneciente al rango de la variable.* Esta propiedad, que se deduce fácilmente de las distintas definiciones y que puede comprobarse sin dificultad en todos los problemas, únicamente la hemos encontrado explicitada en 2 de los textos. Esto puede deberse a que la mayoría de los autores la considere evidente, aunque, como se ha puesto de manifiesto en la investigación de Tormo (1995), algunos alumnos no la comprenden. Un ejemplo es el siguiente.

> Antes de efectuar los cálculos, tanto si lo haces con papel y lápiz como si lo haces con una calculadora científica, debes estimar entre qué posibles valores estarán los parámetros que desees calcular.
> En cualquier caso, y por rara que sea una distribución, tanto la media como la moda y la mediana estarán acotadas entre los valores mínimo y máximo de los datos.
>
> Matemáticas Secundaria 3º SM, p. 267

N2. *La media puede no coincidir con ninguno de los valores de los datos.* Esta propiedad se explicita sólo en 1 de los textos analizados, que es el que reproducimos a continuación. Sin embargo, Watson y Moritz (2000) muestran en su trabajo cómo los alumnos interpretan en ocasiones que el valor medio debe coincidir con alguno de los datos.

> La media aritmética:
> Es una medida de tendencia central.
> Su valor siempre está situado entre los valores extremos.
> Puede o no coincidir con alguno de los valores dados.
> Es representativa de los valores dados.
> Puede ser un número que no tenga sentido en el contexto propuesto.
>
> Matemáticas Opción A. 4º curso. Secundaria 2000, p. 208

N3. *En el cálculo de la media intervienen todos los valores de los datos.* En 5 textos de los analizados hemos encontrado referencia a esta propiedad, como en el ejemplo siguiente en que se pregunta a los alumnos que analicen esta propiedad.

> ¿Influyen todos los datos en el cálculo de la media, la mediana o la moda?
>
> Sigma Matemáticas. 3º Secundaria. SM, p. 238

N4. *La media se ve afectada por cualquier cambio en los datos.* Esta propiedad sólo la hemos encontrado en 5 de los libros estudiados y, en este caso, no se presenta explícitamente, sino que surge como resultado de problemas. Reproducimos un ejemplo.

> Cuando una distribución tiene algún valor muy extremo y poco significativo, ¿alterará mucho el valor de la media? ¿Y de la moda?
>
> Sigma Matemáticas. 3º Secundaria. SM, p. 238

La tabla IV presenta un resumen de la presencia de las propiedades numéricas en los libros de texto. Aunque con una baja frecuencia de aparición, hemos encontrado presentadas las propiedades numéricas en algunos de los libros de texto como tales, es decir, explícitamente y no como resultados obtenidos a partir de ejercicios o problemas.

Propiedades algebraicas

En cuanto a las propiedades algebraicas, las únicas que hemos encontrado son las que describimos a continuación.

A5. *La media conserva los cambios de origen y escala*. En doce de los libros hemos encontrado este enunciado como propiedad de la media. Presentamos un ejemplo.

Tabla IV

Propiedades numéricas que presentan los libros analizados.

Propiedades	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**
N1		X																		X		
N2																				X		
N3		X	X		X						X		X									
N4		X	X				X										X					X

> 26. Investiga. ¿Qué le ocurre a $\bar{x}$ y a σ si a todos los datos les sumamos un mismo número? Comprueba tu conjetura con estos datos: 3, 5, 6, 3, 4, 2, 3.
>
> 27. Investiga. ¿Qué les ocurre a la media y a la desviación típica si todos los datos los multiplicamos por un mismo número? Comprueba tu conjetura con estos datos: 3, 5, 6, 3, 4, 2, 3.
>
> Matemáticas Andalucía 3º Anaya, p. 297

A7. *La media no está definida para datos ordinales o nominales*. Esta propiedad aparece en doce de los libros analizados, como se muestra en el ejemplo.

> *Observación:* La media no tiene sentido si la variable es cualitativa. Considera, por ejemplo, la cualidad «color de los ojos» observada en 37 personas:

Color	**Verdes**	**Negros**	**Azules**	**Pardos**	**Grises**
f	7	9	3	14	4

> Al intentar calcular la media obtendríamos:
>
> $$\bar{x} = \frac{verde \cdot 7 + negro \cdot 9 + ...}{37}$$
>
> Resulta absurdo pretender multiplicar la cualidad «verde» por un número.
>
> Fractal. Matemáticas 3. Vicens Vives, p. 262

Las restantes propiedades sólo las hemos encontrado en algunos de los textos, como muestra la tabla y con un tratamiento bastante tangencial. Incluimos a continuación el enunciado de éstas para facilitar la interpretación de la tabla V, en la que presentamos un resumen de su frecuencia de aparición.

A1. *La moda es una operación interna, mientras que la media y la mediana no.*

A2. *La media, mediana y moda, consideradas como operación, no tienen ningún elemento neutro ni simétrico.*

A3. *No tienen la propiedad asociativa.*

A4. *Son conmutativas.*

A6. *La media de la suma de dos o más variables es la suma de las medias. En el caso de la mediana y la moda no se cumple.*

Propiedades estadísticas

De todas ellas, las que más encontramos son las que se describen a continuación.

E1. *La media es un representante de un colectivo.* Tiene una alta frecuencia de aparición, en 17 de los 22 libros analizados. No obstante, pensamos que, precisamente ésta debería estar presente en todos los textos, puesto que se trata de una característica esencial que da sentido al estudio de las medidas de posición central.

E4. *La media es un estadístico menos resistente que la mediana y la moda.* Esta propiedad aparece sólo en 7 de los libros analizados, a pesar de que es fundamental para poder elegir uno de los tres parámetros de centralización como el representante más adecuado de una distribución, a la vista de sus características.

Las demás propiedades estadísticas de las medidas de posición central aparecen en muy pocas ocasiones, como puede apreciarse en la tabla VI y con un tratamiento tangencial. Estas propiedades son las siguientes:

E2. *La media coincide con el centro de gravedad del conjunto de datos.*

E3. *En distribuciones simétricas, la mediana, la media y la moda coinciden.*

E5. *La suma de las desviaciones de un conjunto de datos con respecto a su media es cero.*

E6. *Es respecto a la media cuando la suma de los cuadrados de las desviaciones es mínima.*

E7. *No se puede calcular la media de un conjunto de datos si están agrupados en intervalos y uno de ellos es abierto.*

Tabla V

Propiedades algebraicas que presentan los libros analizados.

Propiedades	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**
A1				X			X														X	
A2																						
A3	X	X	X	X															X			
A4			X																		X	
A5	X	X		X		X	X	X		M			X	X	X	X				X		
A6																						
A7	X			X	X	X				X	X		X				X	X	X		X	

Tabla VI
Propiedades estadísticas que presentan los libros analizados.

Propiedades	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
E1	X			X	X	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X	
E2	X												X							X		
E3						X		X			X		X									
E4		X	X			X				X	X						X				X	
E5	X						X	X														
E6							X															
E7																						

Lenguaje, representaciones y argumentos

Otro punto que hemos analizado son los términos, símbolos y representaciones tabulares o gráficas empleadas en el tema. Este tipo de elementos de significado de un objeto matemático tiene un carácter ostensivo y sirve para representar a los demás elementos del significado de dicho objeto. En la terminología que Vergnaud (1982) serían el conjunto de representaciones simbólicas usadas para representar un concepto, sus propiedades y las situaciones a las que se refiere. Desde el marco teórico de nuestro estudio, su importancia se debe a que en el trabajo matemático usamos normalmente unos objetos concretos (las representaciones) en función o representación de los objetos abstractos o de las situaciones en las que intervienen, existiendo una correspondencia semiótica entre el objeto representante y el objeto representado.

Términos y expresiones verbales. Entre las palabras usadas en los libros analizados para presentar y hablar del concepto que nos ocupa, hemos encontrado las siguientes con mayor frecuencia de aparición:

– *Parámetro estadístico*, *parámetro central* y *medida de centralización* para referirse a la media. En este caso se trata de palabras con sentido matemático preciso que no se usan en el lenguaje ordinario. El profesor debe estar seguro de que el alumno comprende su significado.

– La *media* se presenta con este nombre en todos los textos, pero en algunos también se utiliza la palabra *promedio* como sinónimo de ésta. En este caso se trata de palabras que tienen el mismo sentido en el lenguaje ordinario.

– Para nombrar un conjunto de datos de habla de *distribución estadística* o *distribución de datos*, cuyos valores se representan por $x_1\ x_2\ x_3 \ldots\ x_n$; *serie estadística* de valores $\mathrm{x}_1\ \mathrm{x}_2\ \mathrm{x}_3 \ldots\ \mathrm{x}_n$; y *variable estadística*.

– En todos los textos se habla tanto de *población* como de *muestra* a la hora de referirse a un conjunto de datos para analizar, sin detenerse en la diferencia entre una u otra, a pesar de ser conceptos altamente complejos que los alumnos tienden a confundir.

Notaciones y símbolos. Hemos analizado también las notaciones simbólicas empleadas, que son un elemento característico del lenguaje matemático (Socas et al., 1984). Las notaciones usadas en los libros de texto de nuestra muestra para la media es $\bar{x}$, usada en el doble sentido de resultado y proceso, que puede ser difícil de diferenciar para los alumnos. Para los datos se utiliza x_i, para las frecuencias absolutas, f_i, n_i, y, en algunos casos, F_i. Para el total de datos, N o n. Estos símbolos se combinan en fórmulas que sirven para enseñar un procedimiento de cálculo, para explicar un razonamiento o incluso para definir un concepto. Las *fórmulas* que aparecen en los libros analizados son las siguientes:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N},\ \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i}{N},\ \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot n_i}{N},\ \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i,\ \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}$$

Hacemos notar aquí la dificultad del uso del sumatorio, con el que los alumnos de estas edades no están familiarizados. Además, es necesario el uso de subíndices, es decir, que se hace alusión a una secuencia de valores o, lo que es lo mismo, a una función de variable discreta.

Otras representaciones. Además del lenguaje y los símbolos, en los libros de texto aparecen con frecuencia representaciones de tipo diverso, que analizamos en este apartado. En nuestro estudio, en cuanto a las presentaciones y gráficos usados para presentar los datos en las actividades y ejemplos referidos a la media, moda y mediana, las más frecuentes que hemos encontrado son: conjuntos de datos aislados, presentados sin formato; tablas de datos; tablas de frecuencias y de frecuencias acumuladas; tablas de datos agrupados en intervalos; diagramas de barras, histogramas, polígonos de frecuencias y polígonos de frecuencias acumuladas; curva de distribución; gráfico de la caja y gráfico de tronco.

La tabla VII presenta un resumen de los elementos lingüísticos y representaciones encontrados en nuestro análisis. La forma de presentar los datos no es un tema trivial y, al observar la tabla, se aprecia que, en algunos textos, faltan ciertos elementos, concretamente gráficos y representaciones simbólicas. Pensamos que ello puede influir en las dificultades que encuentran los estudiantes a la hora de analizar un conjunto de datos que vengan dados en forma de gráficos.

Tabla VII
Representaciones que utilizan los libros analizados.

Representaciones	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Verbales	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Tablas	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Símbolos	X	X	X		X	X		X	X	X	X	X	X	X			X	X	X	X	X	X
Gráficos	X	X	X	X		X	X				X	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X

Argumentos

Los libros usan diversas formas de probar los resultados o propiedades que describimos a continuación.

Arg1. *Comprobación de casos particulares y contraejemplos.* Cuando, para justificar una propiedad o la forma de hacer un cálculo, se muestra cómo se cumple dicha propiedad en un caso particular. En otros casos con un contraejemplo se invalida una ley. Es mucho más frecuente la aparición de casos particulares, tanto para justificar propiedades como para presentar definiciones posteriores o ilustrar técnicas de cálculo. Sólo en algún caso aislado hemos encontrado el uso de contraejemplos para justificar propiedades. Pongamos el caso del cuadro siguiente en que se muestra cómo se usa una situación particular para ejemplificar una técnica de cálculo presentada anteriormente de forma general y con la simbolización elegida por los autores:

1. Encuentra la talla mediana en la distribución estadística de la página anterior.

El intervalo o clase mediana es 165, 170, ya que es el primer intervalo cuya frecuencia acumulada, $F_1 = 26$, sobrepasa la mitad del número de individuos $N/2 = 15$.

Para obtener la mediana exacta utilizamos la siguiente expresión:

$$Me = L_i \frac{N/2 - F_{Me-1}}{f_{Me}} \cdot C$$

L_i = extremo inferior de la clase mediana
C = amplitud de la clase mediana
f_{Me} = frecuencia absoluta de la clase mediana
F_{Me-1} = frecuencia absoluta de la clase anterior a la mediana

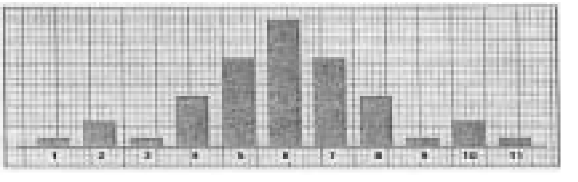
$$Me = 165 + \frac{15 - 14}{12} \cdot 5 = 165{,}42 \text{ cm es la talla mediana}$$

Matemáticas 3º ESO. Editex, p. 237

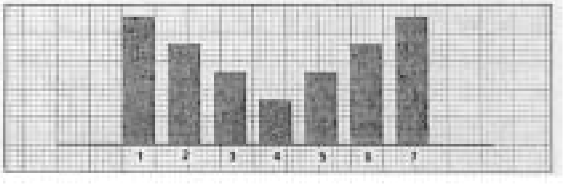
Arg2. *Uso de gráficos como justificación*. Se aplica como validación cuando por medio de ella se muestra visualmente la verdad o falsedad de una afirmación o de una propiedad. En el ejemplo siguiente se muestra cómo se parte de un gráfico para tratar la propiedad de la coincidencia de moda, mediana y media sólo en el caso de distribuciones simétricas.

Para entrenarse: verdadero o falso

4. Coinciden media, mediana y moda:



5. Coinciden media, mediana y moda:



Fractal 3. Matemáticas. Vicens Vives, p. 270

Arg3. *Razonamientos algebraicos.* Este tipo de razonamientos, de los más utilizados en matemáticas, aquí apenas aparecen, probablemente debido a que el manejo del lenguaje algebraico es muy limitado en estas edades. Sólo en un texto hemos encontrado uno de estos usos, y simplificado al máximo.

Arg4. *Razonamientos verbales deductivos.* Otro elemento, muy usado para validar propiedades, es el de los razonamientos verbales. Esta forma de validar una propiedad presenta la ventaja, con respecto al uso de casos particulares, de que permite generalizar los resultados y, sin embargo, como muestra la tabla VI, su aparición es menos usual, probablemente debido a que requieren un nivel de abstracción mayor, lo que conlleva ciertas dificultades para los alumnos.

Tabla VIII
Argumentos que presentan los libros analizados.

Argumentos	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**
ARG1	X	X	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X	X	X	X
ARG2		X	X			X	X	X					X		X	X	X					X
ARG3							X															
ARG4		X	X	X	X	X	X	X			X	X							X	X	X	

Como se puede ver en la tabla VIII, no todos los argumentos se utilizan, de manera significativa, en los libros de texto del nivel educativo que hemos analizado. La comprobación de casos particulares y, eventualmente, el uso de algún contraejemplo, sí que es de uso frecuente, probablemente debido a que se trata de razonamientos sobre casos concretos, lo que resulta más fácil a los estudiantes de estas edades que si se argumenta con un nivel mayor de abstracción. No obstante, encontramos el problema de que se generalizan propiedades con demasiada rapidez a partir de uno o varios casos particulares que las verifiquen, lo que puede dar lugar a pensar que esta forma de razonar es correcta, lo cual, como sabemos, no es cierto y, sin embargo, se da con demasiada frecuencia, especialmente entre los estudiantes más jóvenes.

IMPLICACIONES DEL TRABAJO

El análisis que hemos presentado en las secciones anteriores muestra una gran diversidad en la presentación de la idea de media, así como algunas ausencias de elementos que podrían hacer la enseñanza más significativa y que resumimos a continuación. También revela que, en los libros de texto de esta etapa educativa, se da mucha más importancia a las definiciones y al cálculo de la media que al estudio de sus propiedades, el cual es bastante deficiente, puesto que observamos que el porcentaje de texto, de ejemplos y de ejercicios dedicados a aquéllos es notablemente mayor que el dedicado a éstas.

Una de las primeras consecuencias que este hecho puede tener es que, aunque los estudiantes consigan manejar perfectamente los procedimientos de cálculo, pueden no alcanzar una comprensión completa de este concepto, sus posibilidades de uso, las ventajas sobre otras medidas de posición central y la conveniencia, por tanto, de elegir unas u otras según la situación, ya que hay elementos de significado que no se adquieren de manera espontánea y que no se tratan explícitamente.

Respecto a los cálculos realizados a partir de gráficos, hemos constatado que no aparecen tratados explícitamente en los libros de texto. Somos conscientes de la dificultad añadida que puede suponer la lectura e interpretación de gráficos a estudiantes de estas edades, pero también es cierto que su manejo completa el significado del concepto que estamos estudiando y, en un mundo dominado por la imagen, sería quizás interesante que los alumnos se familiarizasen con este otro lenguaje.

Hay que destacar la importancia que tiene el lenguaje en este proceso de enseñanza – aprendizaje y que se pone de manifiesto en este análisis a través de la gran variedad de representaciones empleadas por los distintos libros de texto. Es necesario, pues, tratar en la enseñanza de manera consciente este tema que, en muchas ocasiones, parece trivial y, sin embargo, entraña dificultades para los estudiantes.

En cuanto a los distintos campos de problemas, hemos constatado que hay situaciones de las que emerge la idea de media, como es la de estimar una medida a partir de diversas mediciones en presencia de errores, las cuales no hemos encontrado recogidas en los libros de texto, por lo que debemos llamar la atención sobre este punto, ya que su tratamiento explícito, no siendo difícil para estudiantes de estas edades, podría contribuir a enriquecer la significatividad del aprendizaje.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BATANERO, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de tendencia central. *UNO,* 25, pp. 41-58.

BATANERO, C. y GODINO, J. (2001). Developing new tools in statistics education research. *Proceedings of the 53rd Session of the International Statistical Institute, Bulletin of ISI* tome LIX, book 2, pp. 137-142. Seul: ISI.

BATANERO, C., GODINO, J. y NAVAS, F.J. (1997). Evaluación de concepciones sobre la noción de promedio en maestros de primaria en formación. Trabajo presentado en las VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa.

CAI, J. (1995). Beyond the computational algorithm. Students'unsderstanding of the arithmetic average concept, en Meira, L. (ed.). *Proceedings of the 19th PME Conference*, 3, pp. 144-151. Recife (Brasil): Universidade Federal de Pernambuco.

CARVALHO, C. (1998). Tarefas estadísticas e estratégias de resposta. Comunicación presentada en el *VI* Encuentro en Educación Matemática de la Sociedad Portuguesa de Ciencias de la Educación. Castelo de Vide (Portugal).

COBO, B. (1998). «Estadísticos de orden en la enseñanza secundaria». Memoria de tercer ciclo. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

COBO, B. (2002). Problemas y algoritmos relacionados con la media en los libros de texto de secundaria. *Actas de las Jornadas Europeas de Estadística*, pp. 241-252. Instituto Balear de Estadística.

COBO, B. (2003). «Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria». Tesis doctoral. Universidad de Granada.

COCKCROFT, W.H. (1985). Las matemáticas sí cuentan. *Informe Cockcroft*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

CHEVALLARD (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La pensée sauvage.

FREUDENTHAL, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* Dordrecht: Kluwer.

GODINO, J.D. (1996). Mathematical concepts, their meanings and understanding, en Puig, L. y Gutiérrez, A. (eds.). *Proceedings of the 20th PME Conference,* 2, pp. 417-424. Valencia: Universidad de Valencia.

GODINO, J.D. y BATANERO, C. (1994). Significado personal e institucional de los objetos matemáticos (Institutional and personal meaning of mathematical objects). *Recherches en Didactiques des Mathématiques,* 14(3), pp. 325-355.

GODINO, J.D. y BATANERO, C. (1997) Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education, en Sierpinska, A. y Kilpatrick, J. (eds.). *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity,* pp. 177-195. Dordrecht: Kluwer.

HUBERMAN, A.M. y MILES, M. (1994). Data management and analysis methods, en Denzin, N. K. y Lincoln, Y. S. (eds.). *Handbook of Qualitative Research*, pp. 428-444. Londres: Sage Publications.

MEC (1992). *Decretos de Enseñanza Secundaria Obligatoria*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

MEVARECH, Z.R. (1983). A deep structure model of students'statistical misconceptions. *Educational Studies in Mathematics,* 14, pp. 415-429.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA; NCTM http://standards.nctm.org/

ORTIZ, J.J. (1999). «Significado de los conceptos probabilísticos elementales en los textos de bachillerato». Tesis doctoral. Universidad de Granada.

POLLATSEK, A., LIMA, S. y WELL, A.D. (1981). Concept or Computation: Students'understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics*, 12, pp. 191-204.

ROBERT, A. y ROBINET, J. (1989). Enoncés d'exercices de manuels de seconde et representations des auteurs de manuels (IREM). Universidad de París.

SÁNCHEZ COBO, F.T. (1996). *Análisis de los contenidos y ejercicios de regresión y correlación en los textos de bachillerato*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

STRAUSS, S. y BICHLER, E. (1988). The development of children's concepts of the arithmetic average. *Journal for Research in Mathematics Education,* 19(1), pp. 64-80.

TORMO, C. (1993). *Estudio sobre cuatro propiedades de la media aritmética en alumnos de 12 a 15 años*. Memoria de tercer ciclo. Valencia: Universidad de Valencia.

WATSON, J.M. y MORITZ, J.B. (2000). The longitudinal development of understanding of average. *Mathematical Thinking and Learning,* 1(2,3), pp. 11-50.

[Artículo recibido en noviembre de 2002 y aceptado en octubre de 2003]

ANEXO

Libros de texto incluidos en el análisis

1. Matemáticas 3º ESO. Serie nuestro mundo. J. Colera, J.E. García, I. Gaztelu y M. J. Oliveira. Anaya. 1998
2. Matemáticas 3º ESO. J. R. Vizmanos y M. Anzola. SM. 1996.
3. Sigma. Matemáticas 3º ESO. J. R. Vizmanos y M. Anzola. SM. 1999
4. Matemáticas 3º ESO. V. Frías y otros. Edelvives. 1995
5. Matemáticas 3º ESO. Proyecto Adara. I. Lazcano y J.F. Sanz. Edelvives. 1998
6. Fractal. Matemáticas 3º ESO. F. Álvarez y A. Ruiz. Vicens Vives. 1996
7. Educación Secundaria. Matemáticas 3º ESO. F. Alvarez y otros. Vicens Vives. 1994
8. Matemáticas 3º ESO. A.J. Ramírez y otros. Ecir. 1995
9. Matemáticas 3º ESO. Grupo Edebé. Guadiel. 1998
10. Matemáticas 3º ESO. A. Miñano y J.A. Ródenas. Bruño. 1998
11. Matemáticas 3º ESO. J. M. Arias y J.A. Pérez. Casals. 1995
12. Matemáticas 3º ESO. C. González y otros. Editex. 1998
13. Matemáticas 3º ESO. J.L. Sánchez y J. Vera. Oxford Ed. 1998
14. Matemáticas 3º ESO. J.F. Gutiérrez. Donostiarra. 1996
15. Matemáticas 4º ESO. Opción A. Proyecto 2000. L. Rico y otros. Algaida. 1994
16. Matemáticas 4º ESO. Opción B. Proyecto 2000. L. Rico y otros. Algaida. 1994
17. Matemáticas 4º ESO. Opción A. C. Amigo y otros. McGraw-Hill. 1997
18. Matemáticas 4º ESO. Opción A. J. L. Sánchez y J. Vera. Oxford. 1998
19. Matemáticas A 4º ESO. J.M. Arias y otros. Casals. 1996
20. Secundaria 2000. Matemáticas A 4º ESO J.A. Almodóvar, J. Gil y A. Nortes Checa. Santillana.1998
21. Miríada XXI. Opción B. Matemáticas 4º ESO. M. J. Ovejero y otros. McGraw-Hill. 1999
22. Construir las Matemáticas 4º ESO. R. Pérez y otros. Proyecto Sur. 1999