# RECONOCIMIENTO DE PROCESOS MATEMÁTICOS EN ALUMNOS DE PRIMER CURSO DE BACHILLERATO

**IBAÑES, MARCELINO J.[1] y ORTEGA, TOMÁS[2]**
**[1] Instituto Vega del Prado. Valladolid**
**marcel33@terra.es**
**[2] Facultad de Educación. Universidad de Valladolid**
**ortega@am.uva.es**

**Resumen.** En este artículo, que es el segundo de una trilogía en la que se da cuenta de una investigación sobre los aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática, se presenta un estudio sobre el *reconocimiento* de diferentes procesos matemáticos por parte de alumnos de primer curso de bachillerato. A lo largo del mismo se asiste a la construcción y enriquecimiento de la idea misma de reconocimiento, se detallan las dificultades de los estudiantes en esta tarea y se proponen instrucciones mediante las cuales es posible mejorar en esta habilidad.
**Palabras clave.** Aprendizaje, cognitivo, demostración, dificultades, instrucción, procesos, reconocimiento.

**Summary.** This is the second paper of a trilogy in which we give an account of a research about learning cognitive aspects of the mathematical proof. We here present a study on the sixteen/seventeen years old students' recognition of different mathematical processes. In this study, we witness the construction and enrichment of the idea of recognition proper; we also inform about the difficulties of the students in this task and propose instructions in order to improve this skill.
**Keywords.** Cognitive, difficulties, instruction, learning, process, proof, recognition.

## INTRODUCCIÓN

En los últimos años, la demostración matemática ha sido objeto de numerosas investigaciones en el seno de la didáctica de la matemática, muchas de ellas ya han sido reseñadas en el primer artículo de esta trilogía (Ibañes y Ortega, 2001) y, en cierto modo, algunas de éstas están relacionadas con el tema que se trata aquí. Así, por ejemplo, se podría considerar que las tres dimensiones en la comprensión y el uso de las demostraciones de Bell (1979), los niveles de demostración correspondientes a los niveles de abstracción en los que trabaja el alumno (Van Dormolen, 1977), los tipos de prueba de Balacheff (1987), el tipo, el método, el estilo y el modo de Ibañes y Ortega (1997), los seis niveles de Miyazaki (2000), las crencias de los estudiantes sobre la demostración aportadas por van Asch (1993) y De Reid (1996), etc. aportan ciertos matices explicativos para el reconocimiento de las demostraciones.

En la investigación que se presenta aquí han tenido mayor influencia los trabajos que tratan de explicar el aprendizaje de los alumnos. Así, Martin y Harel (1989) destacan que ciertos estudiantes, que habían aceptado una demostración auténtica, no rechazan una falsa al ser influenciados por su apariencia, y que las apariencias de ciertas justificaciones les hacen pensar que se trata de demostraciones. Estos autores afirman que estas deficiencias son consecuencia de la prioridad que se da en la escuela a *escribir* (memorizar) demostraciones sobre la *comprensión*, *producción* y *valoración* de las mismas, y encontraron que más del 80% de los profesores de escuela elemental entrevistados consideraba que los argumentos inductivos constituían una demostración matemática.

Alibert y Thomas (1991) describen algunas características de las pruebas que prefieren los estudiantes y el grado de su comprensión. Chazan (1993) considera que el esquema inductivo es el más habitual entre los estudiantes, que éstos son conscientes de sus limitaciones, que no dan muestras de rechazo cuando se les presenta una prueba inductiva, que sus pruebas inductivas consisten en un solo ejemplo, que raras veces encuentran un *contraejemplo* y, además, creen que éste no invalidaría la prueba. También afirman que el uso de la inducción disminuye a medida que se desarrollan otros esquemas de prueba más avanzados.

Harel y Sowder (1998) realizan una clasificación de los *esquemas de prueba* caracterizado por las dudas, certezas y convicciones individuales de los alumnos, clasificación que ha sido ampliamente superada por Ibañes y Ortega (2001).

En todas estas investigaciones sobre la demostración hay aportaciones importantes, pero en ellas no se analiza el reconocimiento de procesos, ni se explica si los alumnos reconocen o no, y si distinguen o no, unos procesos de otros. Reconocer demostraciones comprende *distinguirlas* de otros procesos e *identificarlas* cuando se está en presencia de una de ellas, así como *identificar el enunciado* que expresa lo que se ha demostrado. Además, reconocer demostraciones también significa *ser consciente de sus consecuencias*; por ejemplo, que se debe *aplicar el resultado* cuando proceda, que no se precisa de *posteriores comprobaciones*, que resulta imposible encontrar *contraejemplos*, etc. Éste es el problema de nuestra investigación, es objeto de nuestra atención desde hace años, y en Ibañes (1997) ya se describe que uno de los aspectos que influyen en la comprensión de las demostraciones es su *reconocimiento*. Pero, éste es un camino de ida y vuelta, ya que, para identificar las demostraciones y distinguirlas de otros procesos, el estudiante debe poseer un *esquema de prueba* adecuado que le permita comprender la situación. La clasificación de los esquemas de prueba de Harel y Sowder se completa en Ibañes y Ortega (2001) e Ibañes (2001), quienes consideran cuatro grandes grupos:

– *Esquemas de convicción externa*

– *Esquemas empíricos*:
Experimentales (estáticos o dinámicos)
Inductivos (auténticos o falsos; de uno o varios casos sistemáticos o no sistemáticos).

– *Esquemas analíticos:*
Transformacionales (estáticos o dinámicos; Particulares o generales; completos o incompletos)
Intuitivo-axiomáticos

– *Dependencia respecto de la tarea:*
Esquema utilizado
Esquema aceptado
Esquema adherido
Esquema declarado
Esquema inicial y esquema final
Esquema asignado.

El uso de estas *modalidades* ayuda a explicar la evolución del conocimiento de los alumnos respecto de la demostración, y con ellas se descubre cómo cada alumno, en cada momento, tiene un esquema de prueba que, con una instrucción apropiada, va evolucionando en el tiempo. De Villiers (1993) presenta un modelo en el que distingue las siguientes funciones de la demostración (*verificación*, *explicación*, *sistematización*, *descubrimiento*, *comunicación*).

El modelo descrito por De Villiers y las últimas investigaciones que se acaban de reseñar han constituido el marco teórico de la investigación en el que se explica el reconocimiento de los procesos por los alumnos, las dificultades que encuentran y cómo van evolucionando. Por otra parte, se ha considerado una metodología cualitativa completando tres ciclos completos de *investigación-acción* con sus cuatro fases (planificación, implementación, análisis y reflexión): el primero se implementó en febrero de 1997 en un grupo experimental (GE) de 33 alumnos de 3º de BUP, y los dos restantes en noviembre y diciembre del mismo año en un GE de 22 alumnos de 1º de bachillerato LOGSE (16-17 años). Estos ciclos han aportado gran cantidad de datos (que se han contrastado con grupos de control), de cuyo análisis han surgido reflexiones intermedias, que han permitido avanzar en la investigación, y unas conclusiones generales. A continuación se presenta la investigación desarrollada siguiendo el orden cronológico de estos ciclos.

## PRIMER CICLO

El equipo investigador propuso a los alumnos una cuestión con el objetivo de averiguar si los alumnos *distinguen* las demostraciones matemáticas de las simples comprobaciones. Esta cuestión y las que se formularon en los otros dos ciclos constituyen el anexo I. Las semanas anteriores se les había explicado el tema de trigonometría, y el profesor justificó los teoremas correspondientes a esta teoría utilizando indistintamente *comprobaciones* o *demostraciones*, pero sin explicar en ningún momento las características de estos procesos matemáticos ni hacer referencia a esta distinción. En la citada cuestión se pedía a los estudiantes que revisaran en sus apuntes las pruebas expuestas en clase, y decidieran si se trataban, o no, de demostraciones. Los teoremas expuestos y las justificaciones que el profesor utilizó para cada uno de ellos fueron éstos:

• *La fórmula del coseno de una diferencia*, que se justificó comprobándola numéricamente para algunos valores particulares de la medida de los ángulos.

• *La fórmula del coseno del ángulo mitad*, que fue demostrada por el profesor a partir de la *fórmula del coseno del ángulo doble*, anteriormente demostrada, y teniendo en cuenta la relación fundamental $sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$.

• *El teorema de los senos*, que se justificó comprobándolo en el triángulo rectángulo de lados $1$, $\sqrt{3}$ y $2$, y solicitando a los alumnos que lo verificaran midiendo los lados y los ángulos en varios triángulos que debían dibujar.

• *El teorema del coseno*, que se demostró utilizando el *estilo vectorial* (Ibañes y Ortega, 1997), ya que inmediatamente antes se había estudiado el tema de vectores.

Aunque las respuestas de los alumnos fueron muy heterogéneas, se pueden agrupar según la siguiente clasificación, a la que se acompaña de alguna transcripción de las justificaciones dadas por los alumnos:

1) Cuando el proceso expuesto se trata de una demostración, la mayoría de los alumnos (76%) responde acertadamente que es una demostración. Sin embargo, las razones aducidas para explicar esta elección no son siempre las más convenientes, incluso, ni siquiera son acertadas.

– El 52% de estos alumnos basa su respuesta en el *razonamiento* empleado (R):

«Hemos llegado a una fórmula mediante una serie de pasos lógicamente ciertos.» (Adrián)

– El 34% se basa en las *funciones* (De Villiers, 1993) que observan en el proceso expuesto (F):

«Sí, porque explica de dónde viene y cómo se llega a ella.» (Matilde)

– Y el 14% basa erróneamente su respuesta en aspectos *externos* (E).

«Sí, porque por medio de operaciones se ha llegado a una fórmula más sencilla». (Leopoldo)

2) Cuando el proceso no es una demostración, la mayoría de los alumnos (57%) responde equivocadamente que se trata de una demostración, como por ejemplo, Ramiro:

«Sí, porque demuestra con ejemplos la fórmula anteriormente citada.» (Ramiro)

Además, los que aciertan no siempre lo hacen con razones suficientes y las justificaciones que dan son muy diferentes:

– El 68% basa su respuesta en el razonamiento empleado (R), como, por ejemplo:

«No tenemos un proceso razonado que nos diga que eso es cierto.» (Liana)

– El 32% se fija únicamente en la ausencia de determinadas funciones (F), como, por ejemplo:

«No, porque no explica las relaciones.» (Horacio)

3) Tanto en las demostraciones como en las comprobaciones, todos los alumnos que han argumentado sobre la clase de razonamiento utilizado (R) eligen la respuesta acertada. Además, la inmensa mayoría de los que consideran otros aspectos responden de manera errónea.

Del análisis de las respuestas, se siguen las siguientes reflexiones para el primer ciclo:

1) El elevado número de alumnos que califica de demostración lo que es una simple comprobación (muchos más que al contrario) pone de manifiesto la incidencia de los *esquemas de prueba* inductivos (Harel y Sowder, 1998; Ibañes y Ortega, 2001) en los alumnos de este nivel.

2) El hecho de que las razones aducidas por los estudiantes para explicar su elección no sean siempre las más adecuadas, incluso cuando aciertan, indica la conveniencia de instruirlos en la distinción de procesos matemáticos.

3) Puesto que todos los alumnos que han argumentado sobre la clase de razonamiento utilizado (R) eligen la respuesta acertada y, además, la inmensa mayoría de los que consideran otros aspectos responden de manera errónea, parece conveniente instruir a los alumnos en las características del razonamiento que se sigue en las demostraciones matemáticas.

4) También se ha observado en ambos procesos que muchos alumnos argumentan atendiendo a la presencia o ausencia de determinadas funciones (F). Aunque éstas no determinan necesariamente que el proceso expuesto sea o no una demostración, no cabe duda de que se trata de un aspecto que es importante valorar, por lo que se debe fomentar la apreciación por parte de los alumnos de las funciones que cumplen los procesos matemáticos y, en particular, las demostraciones de los teoremas.

5) Algunos alumnos no han reconocido que una demostración lo es porque han echado en falta algunas de sus funciones, en particular la de *explicación* y la de *sistematización*, y, por tanto, se deduce la conveniencia de que los profesores, a la hora de justificar los teoremas, elijan demostraciones ricas en esas funciones.

6) Las respuestas de los alumnos a esta cuestión han estado necesariamente determinadas por su propio esquema de prueba. Por ejemplo, ante una demostración, los alumnos responden que no lo es porque «no pone ejemplos»; contestan de esta manera porque están razonando de acuerdo con un esquema inductivo. Se deduce que el progreso de los alumnos en el reconocimiento de los procesos estará íntimamente ligado con el desarrollo de su esquema de prueba.

## SEGUNDO CICLO

Para poder hacer una análisis más profundo de las reflexiones anteriores, el equipo investigador diseñó un material didáctico con la finalidad de orientar a los alumnos del GE. Se emplearon dos períodos lectivos de 50 minutos en exponer ejemplos de diferentes procesos y proceder a su *identificación* y *distinción*: cálculos, definiciones (conceptos), enunciados (relaciones conceptuales), resolución de ecuaciones, comprobaciones, demostraciones y refutaciones con contraejemplos. Algunas dificultades expuestas por los estudiantes indujeron a instruirlos también sobre la *identificación del enunciado* cuando se está en presencia de una demostración.

Después de dos semanas, en noviembre de 1997 se pasó un cuestionario en el GE y en un grupo de control (GC). En la primera de las tres cuestiones de las que consta, se exponen cinco procesos matemáticos y se pide a los alumnos que indiquen cuál es la demostración que se encuentra entre ellos. El primero se trata de un cálculo, el segundo es una demostración, el tercero una definición, el cuarto es el enunciado de una proposición y el quinto constituye una comprobación mediante un ejemplo. Su objetivo es observar si los alumnos *distinguen* las demostraciones de otros procesos matemáticos. El análisis de las respuestas de los alumnos del GE a esta primera cuestión se resume en los siguientes puntos:

1) Acierta el 27% de los alumnos, eligiendo el segundo proceso como demostración, mientras que la mayoría –el 64%– elige el quinto proceso.

2) En cuanto a la justificación de las respuestas, la práctica totalidad de los alumnos –el 95%– argumentan sobre la distinción del proceso (DiP1), y ninguno se restringe a otros aspectos (DiP2). El 5% no explica su elección. Aquellas argumentaciones obedecen a la consideración de los siguientes aspectos: características del *razonamiento* utilizado (R), *funciones* que cumple el proceso expuesto (F) o razones de orden *externo* (E).

3) Entre los alumnos que eligen el segundo proceso, el 71% se ha fijado en la clase de razonamiento y el 57%, en la función que cumple el proceso –algunos en ambos. Dentro de los primeros, todos destacan el *razonamiento general*. Por ejemplo:

«El número 2 es una demostración, ya que lo que dice tiene validez para todos los casos y no sólo para un caso específico.» (Miguel)

Y los que consideran la función que cumple el proceso destacan la de *explicación*.

4) Entre los alumnos que eligen el quinto proceso, el 21% se ha fijado en la clase de razonamiento, el 86%, en la función que cumple el proceso y el 5%, en aspectos externos. Entre los primeros sobresalen los que observan el *carácter deductivo del razonamiento*:

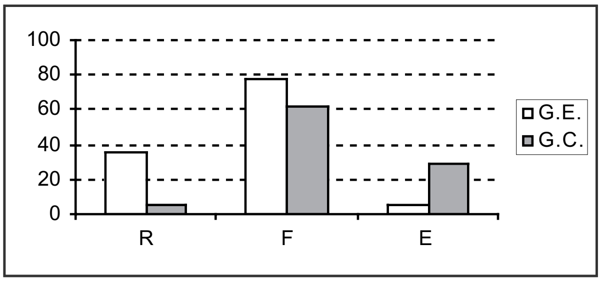
«El número 5 es una demostración porque hace un repaso de todos los pasos a seguir para conseguir que la primera igualdad se verifique.» (Roberto)

Y, entre los alumnos que consideran la función que cumple el proceso, la mayoría se fija en la función de *verificación*.

5) De los alumnos que basan su elección en el razonamiento utilizado (R), el 63% acierta, respondiendo que el segundo proceso es la demostración, mientras que el 94% de los estudiantes que se centra en la función que cumple (F) fallan al elegir otras opciones.

6) En el GC hay un porcentaje similar de alumnos que aciertan al elegir como demostración el segundo proceso. Sin embargo, hubo bastantes alumnos (29%) cuyos argumentos no se refieren a la distinción del proceso (DiP2), sino que únicamente consideran algún aspecto parcial como la veracidad del enunciado o se centran en la comprobación de la validez del razonamiento o de alguno de los pasos que incluye. Por otra parte, en cuanto a los criterios que siguen los estudiantes para justificar su elección, se observa que en el GE hay mayor incidencia de la clase de razonamiento (R) que en el de control (36% frente al 5%), más disposición a valorar las funciones (F) que cumplen los procesos (78% frente al 62%) y menor influencia de aspectos externos (E), 5% en el grupo experimental frente al 29% en el grupo de control. En la figura 1 se interpretan gráficamente estos datos.

Figura 1




Una vez estudiada en la primera cuestión, relativa a la *distinción* de procesos, se pasa a la *identificación* de los mismos y de su enunciado. Así, en la segunda cuestión se demuestra, sin decir de qué proceso se trata, que *uniendo los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera, se obtiene un paralelogramo*, y se pregunta a los alumnos qué es lo que se ha hecho. A continuación se resume el análisis de las respuestas de los alumnos del grupo experimental:

1) En relación con la identificación del proceso, los alumnos se distribuyen según los distintos niveles de la manera siguiente:

– El 45% identifica el proceso como una demostración (P1). Sirva como ejemplo la manifestación de Ruth:

«Demostrar que la unión de los puntos medios de (los lados de) un cuadrilátero forman un paralelogramo.» (Ruth)

– También el 45% de los alumnos identifica el proceso como una comprobación o una explicación (P2). Ejemplos:

«Hemos comprobado, con un ejemplo, que, si unimos los puntos medios de (los lados de) un cuadrilátero, sale un paralelogramo.» (Roberto)

«Una explicación con un ejemplo, pero no demostramos nada…» (Ismael)

– El 9% de los alumnos se limita a describir el proceso (P3):

«En un cuadrilátero hemos dibujado dos triángulos… y hemos unido los puntos medios de los lados…» (Herminio)

2) Si se considera únicamente la identificación del enunciado, se obtiene la siguiente distribución por niveles:

– El 27% de los alumnos da un enunciado completo (E1):

«Uniendo los puntos medios de (los lados de) un cuadrilátero cualquiera, obtenemos un paralelogramo.» (Jesús)

– El 14% de los alumnos da un enunciado incompleto (E2), que incluye sólo la conclusión:

«Una demostración de que *OLMN* es un paralelogramo». (Tamara)

–El 32% de los alumnos da un enunciado incorrecto (E3):

«Al unir los puntos medios de dos de los lados de un triángulo, este segmento es paralelo al tercer lado». (Virginia).

– El 27% de los alumnos no propone enunciado alguno (E4):

«Partiendo de un lema o ley que admitimos, se ha explicado otra ley.» (Úrsula)

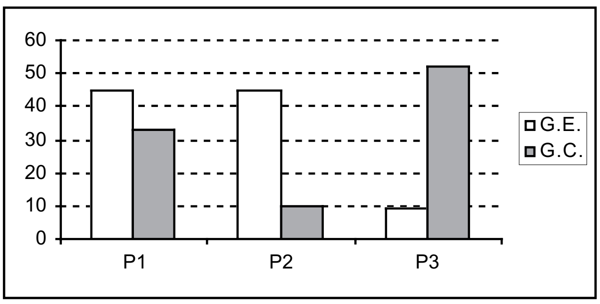
3) Comparando los resultados de la identificación de procesos en ambos grupos, cabe destacar los siguientes hechos, que posteriormente se reflejan en la figura 2:

– Una mayor incidencia del nivel *P1* en el grupo experimental que en el de control (45% frente al 33%).

– Mayor porcentaje del nivel *P2* (45% frente al 10%).

– Mucha menor incidencia en el nivel P3 (9% frente al 52%).

Figura 2




Con el objetivo de observar si los alumnos son capaces de formular el enunciado de un proceso del que saben que es una demostración, en la cuestión 3 se afirma que el proceso de la cuestión anterior es una *demostración* y se les pide que escriban el enunciado de lo que se ha demostrado.

En el GE, el 55% de los alumnos enuncia de forma completa la proposición, el 8% lo hace de forma incompleta y el 36% lo hace incorrectamente. En el GC, el 48% la formula correctamente y el 52%, de forma incorrecta.

Como muestra de los enunciados del GE, a continuación se transcriben dos de las respuestas de los alumnos ilustrativas de estos dos últimos casos.

«En un triángulo cualquiera, si unimos los puntos medios de dos de sus lados (el segmento resultante) es paralelo a la base del triángulo.» (Estela)

«Que en un paralelogramo, si se traza la diagonal, quedan dos triángulos y, si hallamos los puntos medios de los otros dos segmentos y trazamos una perpendicular a los puntos medios, habrá la misma distancia en uno que en otro.» (Raúl, P.)

Para completar el estudio de la *distinción* de los procesos de la *identificación* de los mismos y de sus enunciados, aspectos incluidos en las instrucciones recibidas por los alumnos del GE, avanzando un poco más en el *reconocimiento de los procesos matemáticos,* se diseñó una cuarta cuestión con el objetivo de observar cuál es la disposición que muestran los alumnos para *aplicar* un teorema que se acaba de demostrar. En ella se comienza con el enunciado y una demostración (indicando que se hace así) del teorema de la cuestión 2. A continuación, se pide a los alumnos que dibujen un cuadrilátero cualquiera y que unan los puntos medios de sus lados. Finalmente, se les pregunta si pueden afirmar que la figura obtenida es un paralelogramo *(a)*, que no lo es *(b)* o que no tienen la suficiente información para decidir si lo es o no *(c)*. En lo que sigue se resume el análisis de las respuestas de los alumnos del grupo experimental.

1) Todos los alumnos (100%) eligen la opción *a*. Esto significa que todos ellos sostienen que se dan las condiciones para asegurar que el cuadrilátero obtenido es un paralelogramo. Sin embargo, las justificaciones no son uniformes, sino que obedecen a distintas razones.

2) En primer lugar, el 32% de los alumnos afirma que el cuadrilátero obtenido es un paralelogramo, en aplicación del teorema que se acaba de demostrar (nivel DA1):

«Se obtiene un paralelogramo porque en la demostración se explica… siendo esta demostración aplicable a cualquier cuadrilátero…» (Lorenzo)

3) En un segundo nivel (DA2), se sitúa el 18% de los alumnos, los cuales argumentan que el cuadrilátero obtenido es un paralelogramo, repitiendo –total o parcialmente- la construcción que se hace en la demostración:

«Si trazamos las diagonales *AC* y *BD* se ve que *LM* y *ON* son paralelas a la primera y que *LO* y *MN* lo son a la segunda. De aquí se deduce que *MNLO* tiene sus lados paralelos y , por lo tanto, es un paralelogramo.» (Roberto)

4) El 45% de los alumnos se sitúa en un tercer nivel (DA3), pues argumenta sobre el caso particular de su dibujo, sin hacer referencia alguna al teorema. Así pues, estos alumnos no son conscientes ni de la aplicabilidad del teorema ni de su procedimiento.

«En el cuadrilátero que he hecho yo se ve que es un paralelogramo, aunque esté trazado sin escuadra…» (Herminio)

5) Además, el 5% de los estudiantes no justifica su elección (nivel DA4).

6) Sorprendentemente, excepto uno, todos los alumnos que aplicaron el teorema, es decir, los del nivel DA1, *hacen una posterior verificación* del mismo al referirse también a la situación particular de su dibujo.

«Porque nos lo han demostrado arriba y porque se ve a simple vista que *LO* y *MN* son paralelos, igual que *LM* y *ON*.» (Rigoberto)

En la literatura de la especialidad se encuentran otros investigadores que se han ocupado de este fenómeno. Por ejemplo, Fischbein (1982) obtuvo que sólo el 14'5% de los estudiantes de *high school* que encuestó fueron «consistentes hasta el final» en aceptar la validez de un teorema y de su demostración *sin sentir la necesidad de posteriores comprobaciones empíricas*.

7) Tanto la elección de las distintas opciones que incluía la pregunta como la distribución de porcentajes correspondientes a los diferentes niveles de justificación son prácticamente iguales en ambos grupos, el experimental y el de control.

De todo lo anteriormente expuesto y como consecuencia del análisis global de los datos se desprenden algunas reflexiones del ciclo, que se transcriben a continuación:

1) El escaso porcentaje de alumnos que elige la *demostración* en comparación con los que optan por el proceso que es una *comprobación* evidencia de nuevo el arraigo del esquema de prueba inductivo en los estudiantes de este nivel. Se desprende la necesidad de diseñar nuevas instrucciones para seguir indagando sobre la *distinción* de la demostración.

2) A pesar de esta deficiencia, la instrucción recibida por los alumnos del grupo experimental fue útil en varios aspectos, como quedó patente en el análisis de las respuestas. Por lo tanto, las nuevas instrucciones no deberán corregir las anteriores, sino insistir y profundizar más en las características esenciales de la demostración.

Del análisis de las respuestas de la cuestión 2 sededuce:

3) Los alumnos tienen importantes dificultades tanto en la *identificación* del proceso como en la del enunciado. En la primera, más de la mitad se limita a describirlo o considera que se trata de una comprobación. Y, menos de la cuarta parte de los estudiantes logra la identificación del enunciado. Se desprende la necesidad de mejorar su capacidad para la identificación de procesos matemáticos.

Del análisis de las respuestas de la cuestión 3 se deduce:

4) Sólo la tercera parte de los alumnos muestra disposición a *aplicar* el teorema recién demostrado; el resto repite la demostración en un caso concreto o argumenta en su caso particular con independencia del teorema expuesto. Como las respuestas han sido prácticamente iguales en ambos grupos, se sigue que las instrucciones generales sobre la *distinción* y la *identificación* de los procesos recibidas por los alumnos del grupo experimental no han tenido ningún efecto sobre *la aplicabilidad de los teoremas*, por lo que se precisa una instrucción específica en este sentido.

5) Al mismo tiempo, y para evitar en lo posible el fenómeno comentado en el punto 6 del análisis de las respuestas, es conveniente que estas instrucciones disuadan a los alumnos de *realizar posteriores verificaciones* a la demostración de un teorema.

## TERCER CICLO

A la vista de la experiencia acumulada y con el objeto de poner en práctica las intenciones expuestas en las reflexiones anteriores, el equipo investigador redactó unas instrucciones, basadas en *preguntas activadoras* que estimularan a los estudiantes en la búsqueda de los aspectos clave en la resolución del problema. Se trataron los siguientes dos aspectos:

1) El primero es la *identificación* de las demostraciones y su *distinción* frente a las simples comprobaciones. Para ello se exponen sucesivamente distintos enunciados con sus justificaciones (demostraciones o comprobaciones) correspondientes. A continuación, y para cada uno de ellos, se guía a los alumnos hacia la identificación del proceso mediante preguntas que inciden en el carácter universal o particular del razonamiento:

– *¿El enunciado se refiere a un objeto concreto o a todos los objetos de una determinada clase*?

– *El razonamiento que se hace a continuación, ¿vale para todos los objetos de esa clase o sólo para un objeto concreto?*

– *¿Queda probada la propiedad considerada para todos los objetos de la clase?*

– *Por lo tanto, ¿queda así demostrado el teorema, sí o no?*

2) El segundo aspecto es la consideración de las *consecuencias* de demostrar un teorema; en particular: *la conveniencia de su aplicación, la improcedencia de ulteriores verificaciones y la imposibilidad de encontrar contraejemplos*. Con estos fines se enuncian y demuestran varios teoremas; después de cada uno de ellos, se pide dibujar un objeto concreto de los considerados en el enunciado, y se pregunta si se cumple para él la conclusión del teorema, proponiendo tres posibilidades:

– *Medir o realizar un cálculo con números concretos*.

– *Repetir los pasos de la demostración*.

– *Idear otro procedimiento*.

Y, para orientar en esta última alternativa, pasados unos minutos, se plantean las siguientes preguntas:

– *¿El enunciado del teorema sirve para todos los objetos considerados o sólo para algunos?*

– *En particular, ¿sirve también para el objeto que dibujaste?*

– *Luego, ¿es cierto para tu objeto la conclusión del teorema?*

Por último y para abordar otra de las *consecuencias* de haber demostrado un teorema, la de *la imposibilidad de encontrar contraejemplos*, se plantea una nueva pregunta:

– *¿Se podrá encontrar un objeto concreto para el que no se verifique el teorema?*

El profesor investigador expuso en el grupo experimental el contenido de este material durante dos períodos lectivos de 50 minutos. Como ejemplo, en el anexo II se reproduce el que corresponde a los cinco primeros enunciados de distinción e identificación de procesos.

Dos semanas después se propuso un cuestionario que consta de tres cuestiones. La primera de ellas es análoga a la primera del ciclo anterior: se exponen cinco procesos matemáticos y se pide a los alumnos que señalen cuáles son las demostraciones que se encuentran entre ellos. El primero se trata de una definición; el segundo es una comprobación; el tercero también es una comprobación, aunque algo más estructurada que la anterior; el cuarto es una demostración; y el quinto constituye un enunciado. Su objetivo es observar si los alumnos *distinguen* las demostraciones de otros procesos matemáticos. El análisis de las respuestas de los alumnos del grupo experimental se resume en los siguientes puntos:

1) El 85% de los alumnos acierta en elegir el cuarto proceso como demostración. El resto eligió los procesos segundo y tercero. Este resultado supone una mejoría muy importante respecto al obtenido en el segundo ciclo, en cuya ocasión respondieron correctamente tan sólo el 27%. Por otra parte, todos los alumnos que en el cuestionario anterior acertaron en su respuesta, también aciertan en su elección esta vez.

2) Las justificaciones de los estudiantes obedecen a la consideración de los siguientes aspectos: características del *razonamiento* utilizado (R), *funciones* que cumple el proceso expuesto (F) o razones de orden *externo* (E). Mientras que todos los estudiantes que eligen el proceso correcto se han fijado en la clase de razonamiento, los que optan por los procesos segundo y tercero argumentan acerca de la función que cumple, en causas externas, o no justifican la respuesta.

3) Entre los alumnos que valoran la clase de razonamiento (R), el 65% destaca su carácter *general*, el 25%, su carácter *deductivo,* y el 10%, la ausencia de razonamiento *particular*. A continuación se transcribe una cita de cada clase:

«El cuatro, porque vale para todos los casos».

«Porque va realizando todos los pasos hasta llegar a la fórmula.»

«Creo que el cuarto es una demostración porque no utiliza ejemplos concretos.»

4) Todos los alumnos que se fijan en el razonamiento utilizado eligen la opción correcta, por lo que la correspondencia entre ambas clases es biunívoca. Además, debe destacarse el elevado porcentaje de alumnos (el 55% del total) que valoran el carácter general, en comparación con los que lo hicieron en el segundo ciclo (23%).

5) Los alumnos que consideran la función que cumple el proceso (F) se fijan en la función de *explicación* o en la de *sistematización*. Estos alumnos, como sólo se fijan en aspectos externos (E), optan por procesos inadecuados.

La segunda cuestión es similar a la tercera del ciclo 2. En ella se comienza enunciando y demostrando el siguiente teorema: *el segmento que une los puntos medios de dos de los lados de un triángulo es paralelo al tercer lado*. A continuación, se pide a los alumnos que dibujen un triángulo cualquiera y que unan los puntos medios de dos de sus lados, y se les pregunta si pueden afirmar que el segmento obtenido es paralelo al tercer lado, que no lo es o que no tienen la suficiente información para decidir si lo es o no. La finalidad de esta cuestión es observar la evolución, desde el cuestionario anterior, en su *disposición de aplicar los teoremas*. El análisis de las respuestas de los alumnos se resume en los siguientes puntos:

1) La primera opción es elegida por la práctica totalidad de los estudiantes.

2) A pesar del casi unánime acuerdo en que se dan las condiciones para asegurar que el segmento obtenido es paralelo al tercer lado del triángulo, –e igual a lo que sucedió en el cuestionario anterior–, las justificaciones no son uniformes, sino que obedecen a distintas razones que se corresponden con los niveles de respuesta que se consideran a continuación.

3) En primer lugar, la mitad de los alumnos afirma que el segmento obtenido es paralelo al tercer lado del triángulo en aplicación del teorema que se acaba de demostrar y enunciar. Estos alumnos son conscientes de la aplicabilidad del teorema, y pertenecen al primer nivel de respuesta (DA1):

«Solamente tengo que aplicar el teorema, puesto que ya está demostrado que se cumple en todos los casos.»

El porcentaje de alumnos de este nivel ha experimentado un importante avance respecto al ciclo anterior (del 32% al 50%). Además, disminuyen notablemente (del 27% al 5%) aquellos alumnos que, después de haber aplicado el teorema, tratan de argumentar sobre la situación particular de su dibujo, es decir, los que precisan de *ulterior verificación*.

4) En un segundo nivel (DA2) se sitúan los alumnos (20%) que argumentan que el segmento obtenido es paralelo al tercer lado del triángulo, que repiten la construcción que se hace en la demostración (o parte de ella). Por consiguiente, estos alumnos no son conscientes de la aplicabilidad inmediata del teorema, aunque sí de su procedimiento:

«Porque *CN* es igual a *BL*, y como *BCNL* es un paralelogramo, entonces *BC* y *LM* son paralelas.»

Estos casos representan el mismo porcentaje que en el cuestionario anterior.

5) En el tercer nivel (DA3) se sitúa el 25% de los alumnos, que argumentan sobre el caso particular de su dibujo, sin hacer referencia al teorema. Estos alumnos no son conscientes ni de la aplicabilidad del teorema, ni de la del procedimiento:

«Es paralelo a BC porque, si se comprueba con una escuadra y un cartabón, se ve perfectamente que, efectivamente, lo es (en caso de que esté perfectamente trazado).»

El porcentaje de respuestas de este nivel ha descendido notablemente respecto al ciclo anterior (del 45% al 25%).

Otra de las consecuencias de haber demostrado un teorema es la *imposibilidad de encontrar contraejemplos*, que es precisamente sobre lo que versa la cuestión 3. En esta tercera cuestión, los estudiantes tienen a la vista el mismo teorema que en la cuestión anterior y se les pregunta si podrían encontrar un triángulo en el que, uniendo los puntos medios de dos de sus lados, el segmento resultante no sea paralelo al tercer lado. Aquí no procede estudiar la evolución de los alumnos porque este aspecto no se tuvo en cuenta en el segundo ciclo, pero se contrastan los resultados con los de un grupo de control. El análisis de las respuestas se resume en los siguientes puntos:

1) En los dos grupos hay una respuesta muy mayoritaria en el sentido de la imposibilidad de encontrar el mencionado triángulo, aunque más acentuada en el grupo experimental (85%) que en el de control (70%).

2) A pesar de este mayoritario acuerdo en que resulta imposible encontrar un contraejemplo, las justificaciones no son uniformes, sino que obedecen a distintas razones que se han clasificado en los siguientes niveles de respuesta:

– *CE1*. Declara la imposibilidad en virtud de la aplicación del teorema.

– *CE2*. Declara la imposibilidad en virtud del procedimiento empleado en su demostración.

– *CE3*. Declara la imposibilidad en virtud de argumentos al margen del teorema.

– *CE4*. Tiene dudas sobre si es posible o no.

– *CE5*. Piensa que es posible encontrar contraejemplos.

– *CE6*. No justifica la respuesta.

3) La distribución de los porcentajes de alumnos que hay en cada nivel de respuesta se muestra en la tabla I.

Tabla I
Porcentajes correspondientes a cada nivel de respuesta en ambos grupos.

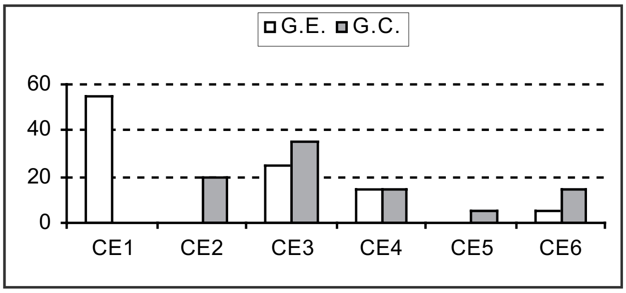
| | ***CE1*** | ***CE2*** | ***CE3*** | ***CE4*** | ***CE5*** | ***CE6*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| GE | 55% | 0% | 25% | 15% | 0% | 5% |
| GC | 0% | 20% | 35% | 15% | 5% | 15% |

En la figura 3 se interpretan gráficamente estos datos.

Destaca sobre todo la diferencia de porcentajes en el primer nivel de respuestas: 55% en el grupo experimental y 0% en el de control.

4) A continuación se incluyen algunos pronunciamientos de las justificaciones dadas por los alumnos, que se corresponden con los niveles antes definidos:

Figura 3




«No, porque el teorema sirve para todos los casos.»

«Porque siempre va a determinar un paralelogramo al trazar la paralela a uno de los lados.»

«Porque, aunque el triángulo lo hagas muy obtuso, la hipotenusa te dará más grande y el punto medio pasará por la paralela de la base.»

«No sé si se podría encontrar porque no sé si el teorema sirve para todos los triángulos o tiene excepciones.»

«Sí, porque si tú, cuando prolongas los lados de un triángulo, encuentras el punto medio de esos lados y trazas la recta, ésta no tiene por qué ser paralela (al tercer lado).»

5) Si se relacionan estos datos con los aportados sobre los *esquemas de prueba* de los estudiantes (Ibañes y Ortega, 2001), y cuya correlación está establecida en la investigación general (Ibañes, 2001), se obtienen los siguientes resultados: el 89% de los alumnos que acreditaron un esquema *analítico* son conscientes de la imposibilidad de encontrar un contraejemplo, mientras que tan sólo lo son el

29% de los que no lograron traspasar los esquemas *inductivos,* esquemas que permanecen muy *enraizados* en los alumnos.

De todo lo anterior se siguen las siguientes reflexiones para el tercer ciclo:

*En lo referente a la cuestión 1:* Por una parte, en lo referente a la *distinción* de los procesos, se observa una importante mejora respecto al ciclo anterior. Así mismo, se asiste a la consolidación de esta distinción en aquellos estudiantes que ya lo hicieron en el segundo ciclo. Por otra, también hay que destacar el auge que ha experimentado la atención al carácter *universal* del razonamiento de las demostraciones, y que la consideración de la clase de razonamiento se ha convertido en la clave para la distinción de los procesos.

*En lo que respecta a la cuestión 2:* Deben destacarse, con relación al segundo ciclo, tanto el importante avance en la disposición de los estudiantes *a aplicar el teorema* como el fuerte retroceso de aquéllos que, después de aplicar el teorema, *precisan de ulterior verificación*.

*Con relación a la cuestión 3:* Por una parte, se observa con absoluta nitidez un mejor comportamiento de los alumnos del grupo experimental en lo que atañe a la imposiblilidad de encontrar *contraejemplos* para un teorema demostrado. Por otra, también se observa una clara relación entre la evolución del esquema de prueba de los alumnos y su capacidad para rechazar la posibilidad de encontrar un contraejemplo.

## CONCLUSIONES

Se ha elaborado el concepto de *reconocimiento* de procesos matemáticos como una idea compleja que comprende tres facetas: *distinción*, *identificación* y *toma de consciencia de sus consecuencias*. También se han descrito algunas de las dificultades que los alumnos presentan en el reconocimiento de los procesos matemáticos, y, en particular, en el de las demostraciones. Como colofón, un análisis retrospectivo y global de la investigación realizada nos permite enunciar las siguientes conclusiones:

1) En el reconocimiento, distinción e identificación de las demostraciones matemáticas por parte de los alumnos, éstos van evolucionando y los elementos diferenciadores basados en razones externas al proceso y funciones del mismo dan paso a características del razonamiento utilizado.

2) El reconocimiento de la demostración está en relación con la evolución del *esquema de prueba* de los estudiantes y, en gran parte, viene determinado por el fuerte enraizamiento de los *esquemas inductivos*.

3) El reconocimiento de los procesos matemáticos, por parte de los alumnos, puede mejorar sensiblemente con las instrucciones adecuadas sin que ello precise de una docencia dilatada en el tiempo.

4) El conocimiento de las características del razonamiento que se lleva a cabo en las demostraciones, tras la instrucción, es el que más contribuye al reconocimiento de este procedimiento matemático, siendo su carácter universal el más influyente. Cuando se fijan en las funciones de la demostración, la de explicación es la que más consideran.

5) Los alumnos que no han recibido una instrucción específica sobre la aplicabilidad de los teoremas no son conscientes de esta posibilidad e incluso creen que se pueden encontrar ejemplos que no satisfagan un teorema ya demostrado, situación que, con una instrucción adecuada, va cambiando para bien.

### NOTA

* Este trabajo es parte de un proyecto de investigación subvencionado por la DG de Enseñanza Superior BXX2000-0069.

### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALIBERT, D. y THOMAS, M. (1991). Research on mathematical proof. en Tall (ed.). *Advanced Mathematical Thinking*, pp. 215-230. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, pp. 147-176.

BELL, A.W. (1979). The learning of process aspects of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 10, pp. 361-387.

CHAZAN, D. (1993). «High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof . *Educational Studies in Mathematics*, 24, pp. 359-387.

FISCHBEIN, E. (1982). Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics*, 3(2), pp. 9-18 y 24.

HAREL, G. y SOWDER, L. (1998). Students' Proof Schemes: Results from exploratory studies, en Dubinski, E., Schoenfeld, A. y Kaput, J. (eds.). *Research on Collegiate Mathematics Education*, vol. III, pp. 234-283. Providence (EEUU): American Mathematical Society.

IBAÑES, M. (1997). Alumnos de bachillerato interpretan una demostración y reconocen sus funciones. *Uno*, 13, pp. 95-101.

IBAÑES, M. (2001). «Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato.» Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

IBAÑES, M. y ORTEGA, T. (1997b). Mathematical Proofs: Classification and Exemples for Use in Secondary Education, en De Villiers, M. (coord.). *Proofs and Proving: Why, when and how?*, pp. 109-155. The Association for Mathematics Education of South Africa (AMESA), PO Box 12833, Centrahil 6006. South Africa.

IBAÑES, M. y ORTEGA, T. (2001). Un estudio sobre los esquemas de prueba en alumnos de primer curso de bachillerato. *Uno*, 28, pp. 39-59.

MARTIN, W.G. y HAREL, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(1), pp. 41-51.

MIYAZAKI, M. (2000). Levels of proof in lower secondary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 41, pp. 47-68.

REID, D.A. (1996). The role of proving: students and mathematicians, en De Villiers, M. (coord.). *Proofs and Proving: Why, when and how?*, pp. 185-199. The Association for Mathematics Education of South Africa (AMESA), PO Box 12833, Centrahil 6006. South Africa.

VAN ASH, A.G. (1993). To prove, why and how? *International Journal Mathematics Education Science and Technology*, 2, pp. 301-313.

VAN DORMOLEN, J. (1977). Learning to understand what giving a proof really means. *Educational Studies in Mathematics*, 8, pp. 27-34.

VILLIERS, M. DE (1993): El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Épsilon*, 26, pp. 15-30. (Ed. orig. 1990.)

[Artículo recibido en enero de 2002 y aceptado en octubre de 2002.]

## ANEXO I

**Primer ciclo**

**Cuestión**

Consulta en los apuntes las pruebas que se han hecho de los teoremas citados más abajo. Indica si se trata o no de demostraciones. (Encierra en un círculo *sí* o *no*, o déjalo en blanco si no sabes o no entiendes).

| | | |
|---|---|---|
| *a) Coseno de una diferencia* | Sí | No |
| *b) Coseno del ángulo mitad* | Sí | No |
| *c) Teorema de los senos* | Sí | No |
| *d) Teorema del coseno* | Sí | No |

Justifica la respuesta.

**Segundo ciclo**

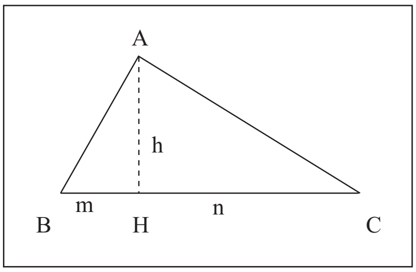
**Cuestión 1**

Entre los siguientes 5 ejemplos hay alguna *demostración*. Rodea con un círculo el número correspondiente.

1) $S = 1/2 \cdot b \cdot h = 1/2 \cdot 5 \cdot 8 = 20$

2) La altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo verifica que su cuadrado es el producto de los segmentos en que divide la hipotenusa (Fig. 1).

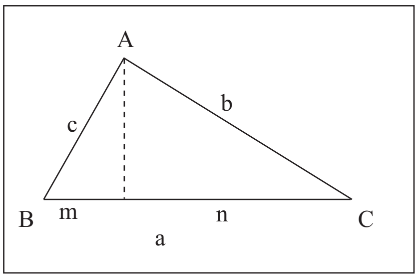
Figura 1




En efecto, los triángulos *ABH* y *CAH* son semejantes, por lo que se tiene: $m/h = h/n$, de donde $h^2 = m \cdot n$.

3) Se llaman triángulos semejantes a los que tienen los ángulos iguales y los lados proporcionales.

Figura 2




4) Cada cateto de un triángulo rectángulo verifica que su cuadrado es igual a la hipotenusa por su proyección sobre ella $(c^2 = a \cdot m)$. (Fig. 2).

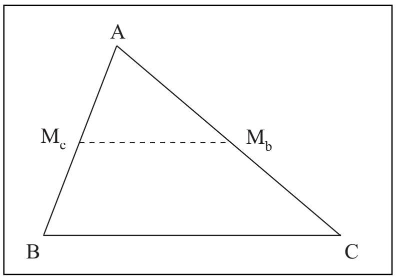
5) $cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x)$

Consideramos el ángulo de $30º$; su doble es $60º$.
Veamos si se verifica que $cos(60º) = cos^2(30º) - sen^2(30º)$.
Como $cos(60º) = 1/2$, $cos(30º) = (3/2$ y $sen(30º) = 1/2$.
Sustituyendo: $1/2 = (\sqrt{3}/2)^2 - (1/2)^2$.

Es decir: $1/2 = 3/4 - 1/4$.
O bien: $1/2 = 2/4$, lo que es verdad.

Justifica la respuesta.

Figura 3




**Cuestión 2**

Vamos a partir del siguiente resultado (*lema*) que admitiremos como verdadero:

Lema: El segmento que une los puntos medios de dos de los lados de un triángulo es paralelo al tercer lado. (Fig. 3)

Ahora lee con atención lo siguiente:

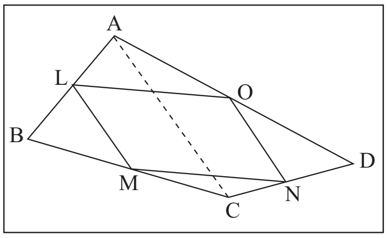
Considera un cuadrilátero cualquiera *ABCD* y los puntos medios de sus lados, *L*, *M*, *N* y *O* (Fig. 4).

Dibuja la diagonal *AC*. Se ven los triángulos *ACD* y *ABC*. Aplicando el lema en cada uno de estos triángulos, se tiene que *ON* es paralelo a *AC* y *LM* también es paralelo a *AC*. Luego *ON* y *LM* son paralelos.

De la misma forma, trazando la diagonal *BD*, se deduce que *OL* y *NM* son paralelos. Por consiguiente, *OLMN* es un paralelogramo.

¿Qué hemos hecho?

Figura 4




**Cuestión 3**

Lo que se ha hecho en la hoja anterior es una *demostración*. Pero, *¿qué se ha demostrado?*

Enuncia lo que se ha demostrado.

Si lo necesitas, aquí tienes de nuevo el texto (se repite el texto de la demostración y la figura 4).

**Cuestión 4**

*Teorema.* Si en un cuadrilátero cualquiera se unen los puntos medios de sus lados, el cuadrilátero que se obtiene es un paralelogramo.

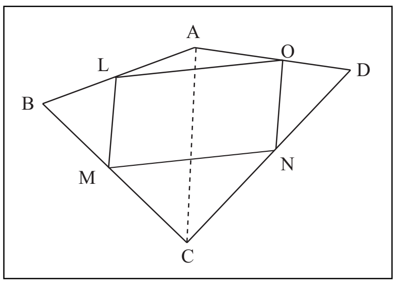
*Demostración*. Sea el cuadrilátero *ABCD* (Fig. 5). Considera la diagonal *AC*. Se ven los triángulos *ACD* y *ABC*. Aplicando el lema en cada uno de estos triángulos, se tiene que *ON* es paralelo a *AC* y *LM* también es paralelo a *AC*. Luego *ON* y *LM* son paralelos.

De la misma forma, trazando la diagonal *BD*, se deduce que *OL* y *NM* son paralelos.

*Por consiguiente, OLMN* es un paralelogramo.

Ahora, dibuja un cuadrilátero cualquiera:

Figura 5




Determina los puntos medios de los lados. Une estos puntos medios. ¿Qué puedes decir del cuadrilátero que se obtiene?

*a*) Que es un paralelogramo.

*b*) Que no es un paralelogramo.

*c*) Que no tenemos información suficiente para decidir si es un paralelogramo o no lo es.

Justifica la respuesta.

**Tercer ciclo**

**Cuestión 1**

Entre los siguientes ejemplos hay alguna *demostración*. Rodea con un círculo el número correspondiente.

1) Se llama *circuncentro* de un triángulo al centro de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo.

2) $tan(x) = sen(x)/cos(x)$.

Tomamos $x = 45^{\circ}$. Se tiene que: $tan(45^{\circ}) = 1$; $sen(45^{\circ}) = \sqrt{2}/2$; $cos(45^{\circ}) = \sqrt{2}/2$;
y, por tanto, $sen(45^{\circ})/cos(45^{\circ}) = (\sqrt{2}/2)/(\sqrt{2}/2) = 1 = tan(45^{\circ})$.

3) sen $(\alpha + \beta) = sen(\alpha) \,.\, cos(\beta) + sen(\beta) \,.\, cos(d)$.
Sean $(\alpha = 30^{\circ}$, $\beta\ 60^{\circ}$.
Veamos si se verifica: $sen\ (30^{\circ} + 60^{\circ}) = sen(30^{\circ}) \cdot cos(60^{\circ}) + sen(60^{\circ}) \cdot cos(30^{\circ})$.

Se tiene:
$sen(30^{\circ} + 60^{\circ}) = sen(90^{\circ}) = 1$.
$sen(30^{\circ}) \,.\, cos(60^{\circ}) + sen(60^{\circ}) \cdot cos(30^{\circ}) = 1/2 + 1/2 + (3/2 \,.\, \sqrt{3}/2 = 1/4 + 3/4 = 1$.

4) En un triángulo $ABC$ se verifica: $s = R \,.\, [sen(A) + sen(B) + sen(C)]$, siendo $s$ el semiperímetro y $R$ el radio de la circunferencia circunscrita.
En efecto, por el teorema de los senos: $a/sen(A) = b/sen(B) = c/sen(C) = 2R$.
De donde: $sen(A) = a/(2R)$, $sen(B) = b/(2R)$, $sen(C) = c/(2R)$.
Sumando miembro a miembro: $sen(A) + sen(B) + sen(C) = (a+b+c)/2R = 2s/2R$.
Despejando $s$, se obtiene la fórmula de arriba.

5) En un triángulo isósceles, la bisectriz del ángulo exterior al ángulo desigual es paralela al lado opuesto.

Justifica la respuesta.

**Cuestión 2**

*Teorema. El segmento que une los puntos medios de dos de los lados de un triángulo es paralelo al tercer lado.*

*Demostración*. Sea $ABC$ un triángulo cualquiera y $L$ y $M$ los puntos medios de los lados $AB$ y $AC$, respectivamente. Prolongamos $LM$ y desde $C$ trazamos $CN$ paralela a $AB$. Se tiene que $AM = MC$, $\angle LMA = \angle NMC$ y $\angle LAM = \angle MCN$. Por tanto, los triángulos $LMA$ y $NMC$ son congruentes. Se sigue que $CN = LA = BL$ y que $BCNL$ es un paralelogramo; luego, $LM$ es paralelo a $BC$.

Ahora dibuja un triángulo $ABC$. Señala los puntos medios, $L$ y $M$, de los lados $AB$ y $AC$, respectivamente, y únelos. ¿Qué puedes decir del segmento $LM$?:

*a*) Que es paralelo al lado *BC*.

*b*) Que no es paralelo al lado *BC*.

*c*) Que no tienes información suficiente para decidir si es o no es paralelo.

Justifica la respuesta.

**Cuestión 3**

Con el mismo teorema a la vista que en la cuestión 2 se pregunta: ¿Se podría dibujar un triángulo en el que el segmento que une los puntos medios de dos de sus lados no resulte paralelo al tercer lado? SÍ NO NO SÉ

Justifica la respuesta.

## ANEXO II

**Distinción e identificación de procesos**

1) *Teorema. La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180º.*

Dibujamos un triángulo (Fig. 1):

Medimos sus ángulos, resultando: 42º, 76º y 62º. Sumamos y da 180º.

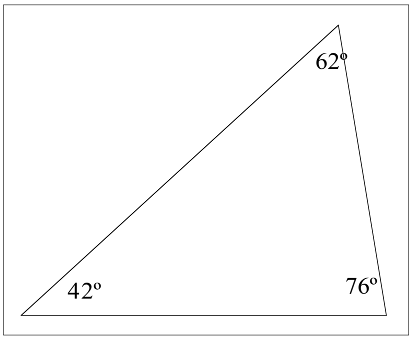
– ¿El enunciado se refiere a un triángulo concreto o a todos los triángulos?

– El razonamiento que se hace a continuación, ¿vale para todos los triángulos o sólo para un triángulo concreto?

– ¿Queda probado que, en todos los triángulos, la suma de los ángulos interiores es 180 º?

– Por lo tanto, ¿queda así demostrado el teorema?

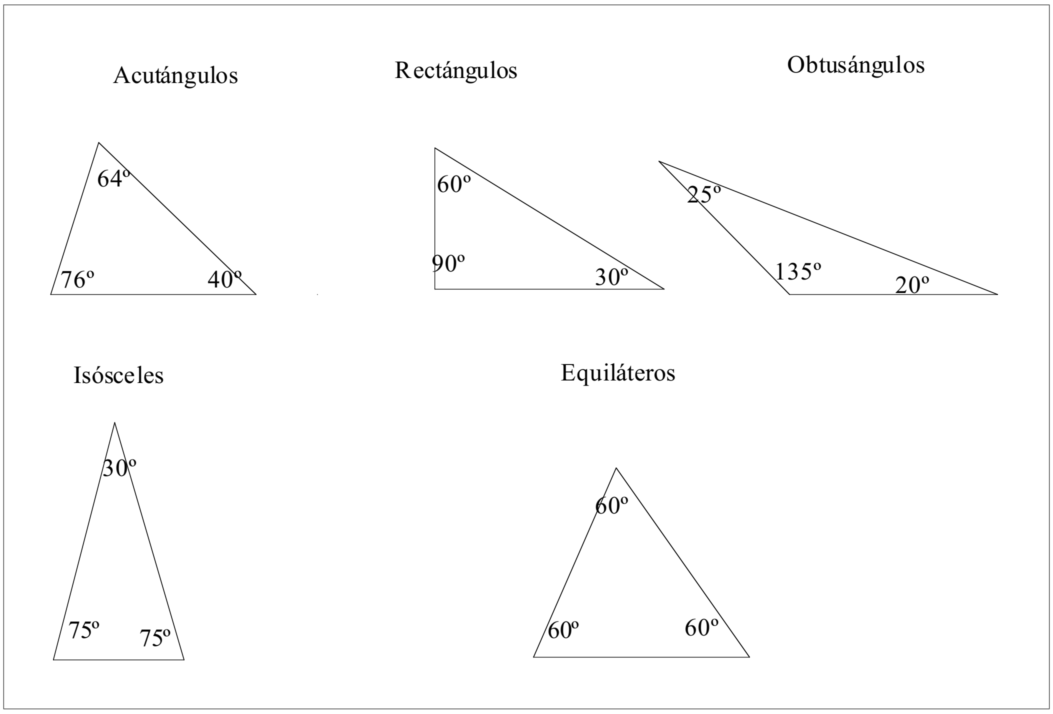
Figura 1




2) *Teorema. La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180º.*

Dibujamos triángulos de los distintos tipos (Fig. 2):

Figura 2




Medimos, en todos ellos, sus ángulos interiores, y su suma siempre resulta 180º.

– ¿El enunciado se refiere a triángulos concretos o a todos los triángulos?

– El razonamiento que se hace a continuación, ¿vale para todos los triángulos o sólo para triángulos concretos?

– ¿Queda probado que, en todos los triángulos, la suma de los ángulos interiores es 180º?

– Por lo tanto, ¿queda así demostrado el teorema?

3) *Teorema. La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180º.*

Sea *ABC* un triángulo cualquiera (Fig. 3):

Por *C* trazamos la recta *PQ* paralela a *AB* (porque por un punto cualquiera del plano puede trazarse una paralela a una recta dada).

Se tiene que $\angle PCA + \angle ACB + \angle BCQ = 180º$.

Por otra parte, $\angle PCA = \angle CAB$ (por ser ángulos alternos-internos) y $\angle BCQ = \angle ABC$ (por la misma razón).

Se sigue que $\angle CAB + \angle ABC + \angle ACB = 180º$.

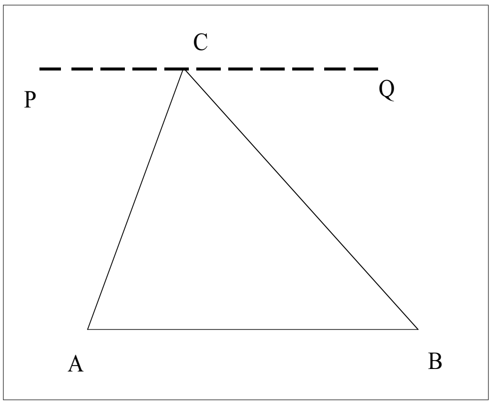
– ¿El enunciado se refiere a un triángulo concreto o a todos los triángulos?

– El razonamiento que se hace a continuación, ¿vale para todos los triángulos o sólo para un triángulo concreto?

– ¿Queda probado que, en todos los triángulos, la suma de los ángulos interiores es 180º?

– Por lo tanto, ¿queda así demostrado el teorema?

Figura 3




4) *Teorema.* $sen(2x) = 2\,sen(x)cos(x)$

$sen(60º) = 2\,sen(30º)cos(30º)$

$sen(60º) = \sqrt{3}/2$. Y, por otra parte $2\,sen(30º)cos(30º) = 2.1/2.\sqrt{3}/2 = \sqrt{3}/2$.

– ¿El enunciado se refiere a un ángulo concreto o a todos los ángulos?

– El razonamiento que se hace a continuación, ¿vale para todos los ángulos o sólo para un ángulo concreto?

– ¿Queda probado que, para todos los ángulos, sen(2x) = 2sen(x)cos(x)?

– Por lo tanto, ¿queda así demostrado el teorema?

5) *Teorema.* $cos(\alpha - \beta) = cos(\alpha)\,.\,cos(\beta) + sen(\alpha)\,.\,sen(\beta)$

Sea $\alpha = 90º$ y $\beta = 60º$.

Veamos si se verifica que: $cos(90º\text{-}60º) = cos(90º)cos(60º) + sen(90º)sen(60º)$

$cos(90º\text{-}60º) = cos(30º) = \sqrt{3}/2$.

$cos(90º)cos(60º) + sen(90º)sen(60º) = 0.1/2 + 1.\sqrt{3}/2 = \sqrt{3}/2$ .

– ¿El enunciado se refiere a ángulos concretos o a todos los ángulos?

– El razonamiento que se hace a continuación, ¿vale para todos los ángulos o sólo para ángulos concretos?

– ¿Queda probado que para todos los ángulos: $cos(\alpha - \beta) = cos(\alpha)\cdot cos(\beta)+sen(\alpha)\cdot sen(\beta)$?

– Por lo tanto, ¿queda así demostrado el teorema?