UNA INTRODUCCIÓN A LA DINÁMICA NO LINEAL EN ENSEÑANZA SECUNDARIA

ALEMAÑ BERENGUER, RAFAEL ANDRÉS[1] y PÉREZ SELLES, J.F.[2]
[1] IES Pere M. Orts i Bosch. Benidorm. Alicante.
[2] IES Bernat de Sarrià. Benidorm. Alicante.

SUMMARY

An interesting study on an approach to Physics teaching of an introduction to non-linear dynamics, at a basic level, is presented here. This study, framed on the constructivist theory of learning has led to the actual possibility of explaining in secondary clasrooms the elementary foundations of this outstanding area in modern physics. An initial exploration of the prior beliefs of pupils about mechanics and predictibility constituted the base of this attempt

INTRODUCCIÓN

En este artículo se expondrá un trabajo relativo al intento de presentar a un grupo de alumnos de secundaria los principios básicos de la dinámica de sistemas no lineales, teoría en la que se funda el moderno estudio del caos y otros comportamientos complejos de los fenómenos físicos. El estudio se lleva a cabo dentro del marco de la teoría constructivista de aprendizaje (Osborne, Freiberg, 1985; Driver, Oldham, 1986; Novak, 1988) y se desarrolló en varias fases consistentes en:

– la exploración de las ideas previas de los estudiantes referentes a las propiedades y características de la mecánica como teoría física, especialmente en lo concerniente a la posibilidad de predecir el comportamiento futuro a partir del conocimiento de las condiciones presentes en un sistema dado;

– el diseño de ejemplos y cuestiones que tomen como base los esquemas conceptuales identificados en los alumnos de este nivel durante la primera fase, de modo que resulten relevantes para ellos y les permitan lograr un aprendizaje significativo de las nuevas ideas.

– la puesta en práctica en el aula de estos materiales con una muestra total de 23 alumnos pertenecientes al 2º curso de bachillerato LOGSE (1997-98), durante tres sesiones de clase ubicadas al final de la parte del programa de la asignatura de física dedicada a la mecánica. Los miembros del grupo en cuestión eran estudiantes normales, no conflictivos y sin necesidad de ayudas intelectuales especiales.

LINEALIDAD Y NO LINEALIDAD

Las sesiones de trabajo comienzan con un recordatorio de los conceptos matemático y físico de *linealidad* y *no linealidad.* En el nivel educativo en el que estamos trabajando, los alumnos ya poseen una base matemática previa suficiente para adentrarse en estas cuestiones con cierta seguridad. Del mismo modo, sus conocimientos de mecánica en particular y física en general, adquiridos a lo largo de cursos anteriores, posibilitan el proceso de aprendizaje que a continuación se abordará.

Exploración de las ideas previas

Iniciamos el ensayo pasando a los alumnos un breve cuestionario en el que figuran dos preguntas: 1) «¿Qué consideras necesario para garantizar la resolución de un problema físico, en este caso mecánico?» 2) «¿Piensas que, dadas esas condiciones, es siempre posible predecir el comportamiento futuro de un sistema?, ¿por qué?» Naturalmente, el sentido y la intencionalidad de estas preguntas es ampliamente comentada en clase antes de proceder a cumplimentar libre e individualmente el cuestionario. Finalmente, se recoge la encuesta y se pasa a debatir las contestaciones ofrecidas.

De la discusión y del resultado de los cuestionarios se concluye que aproximadamente un 80% de la clase considera necesario, de acuerdo con la primera pregunta, disponer de una ley física bien definida –expresada como una fórmula matemática– y unos datos iniciales que insertar en ella. Un 10% creía bastarse con las ecuaciones del movimiento, aunque esta fracción de opiniones se reconvierte con rapidez hacia el primer grupo una vez destacada la importancia de los datos de partida. Por último, el 10% restante no sabe o no contesta (respuesta en blanco). Finalmente, y asistidos por el profesor, el consenso se alcanza en torno a la posición defendida por el 80% ya comentado.

Las contestaciones a la segunda pregunta, salvo en ese 10% que no responde, llaman la atención por su unanimidad en el tono afirmativo y sin género de dudas al respecto. Nadie vacila, ni siquiera mínimamente, en sostener que, dadas las condiciones expuestas en la primera pregunta, la exactitud de una predicción teórica y el período de tiempo de su validez resultan arbitrarios. Como máximo, se acepta sin problemas que dicha exactitud dependerá de la finura de los instrumentos de medida, pero nadie duda de que es meramente un problema técnico que no evidencia límite teórico alguno. En ningún caso se plantea la influencia de los errores en los datos iniciales, más que como pequeñas inconveniencias que se pueden reducir a voluntad.

La conclusión de esta primera fase de la experiencia es que los alumnos de este grupo han asumido explícitamente el marco conceptual que considera las fórmulas de la física como «cajas negras» o artilugios en los que se introducen unos datos de entrada (semejantes a los *inputs* de un ordenador) y se obtienen otros datos, las predicciones, como resultado (*outputs*). Es interesante constatar que todos los alumnos se encuentran familiarizados de un modo u otro (ya sea por haber cursado la asignatura optativa de informática o por el uso doméstico de un ordenador personal) con este tipo de visión de las cosas lo que sin duda debe haber contribuido a modelar su pensamiento.

Por otro lado, también queda patente la asunción del paradigma clásico de la predictibilidad absoluta, particularmente en aquéllos que han cursado la asignatura optativa de astronomía, verdadero epítome de esta línea de pensamiento. La influencia de los errores se juzga despreciable, simplemente no se toma en cuenta en modo alguno. En este momento no se continúa profundizando en tales cuestiones, sino que se pasa a tratar las ideas de linealidad y no linealidad como primer paso en el proceso de cambio conceptual asistido por el docente.

Concepto matemático

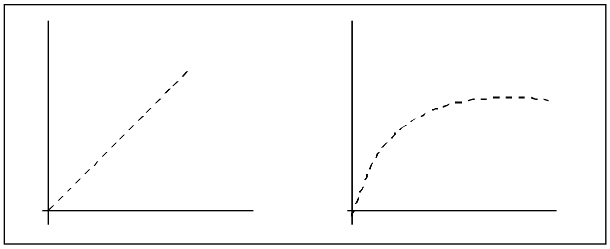
La idea más intuitiva de linealidad que casi todos los alumnos poseen de manera más o menos difusa es la que se expresa por comparación con la figura de una recta en un sistema de coordenadas cartesiano. Así, un proceso «es lineal –se dice– si la ecuación que rige su comportamiento es de la misma forma que la que describe la recta». Como uno de los modos de escribir la ecuación de una recta en geometría analítica (con m la pendiente y b un término independiente) es $y = mx + b$, los alumnos identifican enseguida linealidad con una especie de proporcionalidad corregida con el término b. En el caso más simple, en el que $b = 0$, quedaría sencillamente $y = mx$.

Generalizando algo más, ahora podemos dar un paso adelante y afirmar que $f(x)$ es una función lineal si, al multiplicar la variable x por un coeficiente a resulta $f(ax) = af(x)$. Más ampliamente, para dos variables x, y, dos coeficientes a, b, además de la función f, linealidad en ambas variables significará que $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$. Este razonamiento conduce a una conclusión que a los alumnos les es particularmente fácil de captar. Tras un animado debate en el aula se llega a la conclusión siguiente: «Si un sistema es lineal, puede descomponerse en partes de manera que el comportamiento global del sistema como un todo es el mismo que el obtenido combinando los comportamientos de cada una de sus partes tomadas aisladamente.» En otras palabras, y dicho más brevemente, «el todo es igual a la suma de sus partes». Este lema (Russell, 1986) parece poseer un fuerte impacto informativo y es fácilmente recordado por los alumnos en relación con el tema en estudio.

Un apunte geométrico ayuda a los alumnos a identificar ciertas propiedades de la linealidad y la no linealidad desde un punto de vista más gráfico. Dibujando una recta y una curva en sendos diagramas cartesianos (Fig. 1), los estudiantes –ya adiestrados en matemáticas sobre el análisis de funciones– advierten la diferencia entre ambas en cuanto a la cantidad de magnitudes necesarias para caracterizar cada una de ellas. Una recta queda determinada mediante dos parámetros: un punto y su pendiente (es decir, su primera derivada), la cual nos indica por su signo si la recta crece o decrece. En cambio, una curva precisa ser caracterizada con un parámetro más, su segunda derivada, necesaria para identificar su tipo de curvatura (cóncava o convexa), magnitud esta carente de sentido para la recta (su segunda derivada es nula, ya que su curvatura es también cero).

Un alumno realiza en este momento una muy interesante observación: tomando tramos cortos de la curva, su forma puede aproximarse por la de una recta, cosa que no sucede a la inversa. Tras la correspondiente puesta en común en el aula, la clase decide que, en efecto, para

Figura 1



curvaturas pequeñas o fragmentos minúsculos, las curvas pueden aproximarse de modo razonablemente bueno a secciones de rectas. Esta puntualización reviste suma importancia, pues nos conduce a una primera idea clave que nos será de gran utilidad más adelante:

En condiciones restringidas, los procesos no lineales pueden considerarse como si fuesen aproximadamente lineales.

Concepto físico

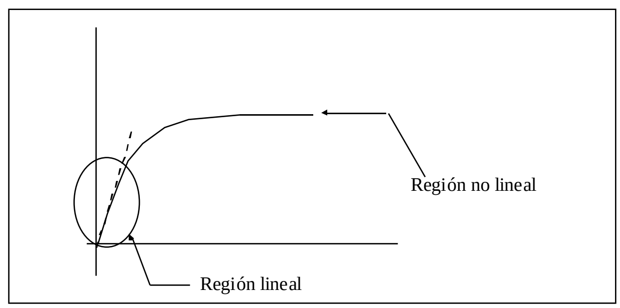
La linealidad o no linealidad en los sistemas físicos reales dependerá de que los modelos que los describen adecuadamente se ajusten a uno de estos dos comportamientos matemáticos, lo que a su vez reflejará una cierta conducta física bien característica. El lema «el todo es igual a la suma de sus partes» se plasma aquí en la posibilidad de descomponer una fuerza (representada como un vector) en una serie de fuerzas menores cuya suma vectorial conduce a la fuerza inicial. Es decir, el conocido como principio de superposición de esfuerzos –y en general todos los principios de superposición de la física elemental– es resultado de la linealidad de la operación que llamamos suma de vectores (Arnold, 1983). Si $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, entonces $a\vec{c} = a\vec{a} + a\vec{b}$, para cualquier número a.

Un ejemplo físico extremadamente simple de imaginar referente a la suma vectorial es el de los martillazos propinados a un clavo: la sucesión de tres golpes de 1/3 Newton cada uno es equivalente a un solo golpe de 1 Newton. Sin embargo, no siempre es así; diez personas empujando a la vez un automóvil no producen el mismo efecto si lo empujan una tras otra, aun cuando realicen aisladamente la misma fuerza en ambos casos. Los conmutadores usados en electrónica del tipo «todo o nada» constituyen otro ejemplo en el que un efecto global no puede descomponerse en una combinación de efectos parciales (Minorsky, 1962). Esos dispositivos se activan a partir de una intensidad mínima de la señal de entrada («intensidad umbral»); superada la cual, la señal de salida es siempre la misma. Por eso un ascensor no acude más deprisa por mucho que pulsemos el interruptor de llamada tras haber sido pulsado por primera vez.

Los alumnos, pese a su arraigada costumbre de trabajar con sistema lineales idealizados –muy particularmente los ejemplificados por la suma de vectores–, no muestran gran resistencia a reconocer la existencia y los rasgos diferenciadores de los sistemas no lineales. Tampoco encuentran dificultad en asumir que algunos sistemas que se comportan linealmente pueden dejar de hacerlo bajo ciertas condiciones. Tomemos el ejemplo de los pesos medidos por un dinamómetro. Colgando 300 gramos, el alargamiento del dinamómetro y el valor de la medida es el triple que si colgamos 100 gramos. Ahora bien, cuando el peso supera un límite, cede la resistencia del material que forma el muelle del dinamómetro y el aparato deja de funcionar. Lo que sucede, y los alumnos no tardan en advertirlo, es que el muelle obedece inicialmente la ley de Hooke, $F = -kx$, pero esta ecuación deja de regir cuando el citado peso límite se sobrepasa.

Visualmente, esta situación puede ilustrarse (Fig. 2) con un gráfico formado por una región lineal –la recta creciente– y otra no lineal –la línea paralela al eje de abcisas.

Figura 2



Una segunda idea básica deducida de lo anteriores es:

Traspasando un cierto umbral de las magnitudes implicadas, los procesos lineales pueden desembocar en una conducta no lineal

Existen, no obstante, situaciones en las que el comportamiento del sistema estudiado es tanto menos lineal cuanto menor es el valor de la variable en juego. Ése es el caso, por ejemplo, de las fuerzas inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia ($F \propto 1/r^2$), como la gravedad. Para pequeños valores de r, ligeras variaciones de la distancia producen alteraciones muy acusadas de la fuerza gravitacional. La causa de este comportamiento es, una vez más, el carácter no lineal de la dependencia entre la fuerza y la distancia. Llegamos ahora a una tercera idea clave que los alumnos distinguen sin gran dificultad:

En los sistemas no lineales, pequeñas (o grandes) variaciones de una variable pueden provocar grandes (o pequeñas) alteraciones de las demás

Esta falta de proporcionalidad entre los cambios de las variables en un sistema es una de las notas distintivas de la no linealidad (Briggs-Peat, 1994), cuya importancia podremos comprobar a continuación.

NO LINEALIDAD Y CAOS

Equipados ya con las ideas discutidas anteriormente nos disponemos a plantear los problemas que la no linealidad crea en relación con nuestra capacidad de predecir el comportamiento de los sistemas mecánicos. El primer paso consiste en recordar a los alumnos que nuestro conocimiento de la naturaleza jamás es total, pues siempre se halla sujeto a imprecisiones (Meirovitch, 1970). Una de ellas, que existiría aun cuando las ecuaciones del movimiento que manejamos fuesen perfectas, es la de los errores en los datos iniciales. Estos errores en la determinación de los datos de partida, se deben a las imperfecciones inevitables en las mediciones de los mismos.

En este nivel de bachillerato, los alumnos están acostumbrados a la importancia del cálculo de errores en las prácticas de laboratorio, por lo que no se sorprenden al serles recordado que tales datos iniciales se presentan en la forma $x(t_0) = x_0 \pm \Delta x_0$. La mejora de los procedimientos de medida ayudará a reducir el valor de dichos errores, pero nunca llegará a anularlos. Esto, en sí mismo, no es malo siempre que podamos controlar tales imprecisiones. Por desgracia, la dinámica no lineal nos ha mostrado que son muchos lo casos en que ello no es así, ya que resulta imposible impedir que los errores crezcan desaforadamente a lo largo del tiempo y las soluciones de los problemas se vuelvan inmanejables para $t \rightarrow \propto$ (Helleman, 1980). Acto seguido se proponen a la clase tres ejemplos para su comentario y discusión.

Movimiento armónico simple

Los estudiantes se hallan familiarizados con este tipo de movimiento cuya ecuación más simple puede ser $x(t) = A \cos\omega t$. Como $A = x(0)$, si conocemos este dato con un error a de forma que $A = x_0 \pm a$, se tendrá $x(t) = x_0 \cos\omega t \pm (a \cos\omega t)$. Como la función coseno está acotada entre ±1, el valor del paréntesis estará también acotado por el valor a. Si el error inicial era pequeño, se mantendrá así en cualquier instante.

Movimiento uniformemente acelerado

Supongamos que un cuerpo se mueve aceleradamente de acuerdo con la típica ley $x(t) = x_0 + v_0 t + {}^1/_2\, gt^2$. Si conocemos los datos iniciales con errores a y b, $x(0) = x_0 \pm a$, $v(0) = v_0 \pm b$ (con a y b mayor que cero, naturalmente), lo más que podemos asegurar para un tiempo t es que $x(t) = x_0 + v_0 t + {}^1/_2\, gt^2 \pm (a + bt)$. Es decir, el error crece linealmente con el tiempo y, aunque sea pequeño para producir grandes dificultades, es necesario tenerlo en cuenta.

Movimiento repulsivo acelerado

Supongamos un movimiento (Rañada, 1988) cuya ecuación es de la forma $x(t) = x_0 \exp(kt)$, con k una constante con unidades de $[\text{tiempo}]^{-1}$ (ciertos movimientos sometidos a una fuerza repulsiva $f = cx$ generan ecuaciones semejantes a ésta). Con el margen de error establecido en los ejemplos anteriores, $x(0) = x_0 \pm a$, tendremos la posición del móvil que vendrá dada por $x(t) = x_0 \exp(kt) \pm [a \exp(kt)]$. Ahora el error, dado por el término entre corchetes, tiende exponencialmente a infinito para tiempos muy largos. Esto significa, no sólo que carecemos de la posibilidad de predecir su posición con precisión arbitraria, sino que el margen de error crece tan rápido que hablar de una solución efectiva pierde todo sentido.

Los tres ejemplos anteriores muestran que la respuesta de los sistemas mecánicos ante el error en los datos iniciales, puede resultar de decisiva importancia. Aquéllos en los que un pequeño error en los datos de partida crece violentamente borrando toda esperanza práctica de realizar predicciones, se dice que presentan sensibilidad infinita a las condiciones iniciales. Así se expresa el hecho de que, para evitar esta conducta intratable, sería menester que se especificasen las condiciones iniciales con una precisión infinita. Como semejante alternativa es impensable, los sistemas no lineales con esta clase de sensibilidad dejan de ser predecibles y su comportamiento se torna caótico (Schuster, 1984). Concluimos, pues, que ése es el significado científico del término *caos*, tan de moda en nuestros días a través de la literatura y el cine de ciencia-ficción.

EVALUACIÓN DE RESULTADOS

Pese al nivel meramente cualitativo de esta introducción, se propone a los alumnos responder por escrito a dos cuestiones finales. Una de ellas les pide que expliquen las principales diferencias entre procesos lineales y no lineales y, en la otra, se les invita a explicar el significado de la *sensibilidad infinita* a las condiciones iniciales. Todos ellos –con los matices comprensibles– responden satisfactoriamente, habida cuenta de lo reciente del aprendizaje, y en especial porque resaltan en sus explicaciones las tres ideas claves que han sido destacadas a lo largo de este artículo.

Antes de terminar con el tema surge entre los alumnos la cuestión de hasta qué punto se hallan presentes los sistemas no lineales en la naturaleza o, dicho de otro modo, en qué grado el mundo real es impredecible y caótico. La contestación del profesor según la cual sucede que, en realidad, los sistema no lineales y caóticos (fluidos, láseres, planetas, plasmas, acelerados de partículas, reacciones químicas, ecología de poblaciones, sistemas celulares, etc.) son muchísimo más numerosos que los lineales despierta la curiosidad general sobre las razones que han impedido descubrir antes esta característica de la naturaleza. El motivo lo ofrece nuestra idea clave número 1, pues de ella se deducía que los sistemas no lineales pueden aproximarse para tiempos cortos a comportamientos lineales. El desarrollo de la dinámica clásica se sustentó durante muy largo tiempo en sus aplicaciones astronómicas al sistema solar donde los efectos caóticos son reducidos y su escala temporal es muy amplia. Sólo el uso generalizado de los ordenadores permitió conocer el comportamiento de las soluciones dinámicas para tiempos largos en esta y otras áreas, y tomar conciencia del problema.

Las sesiones terminan con un pequeño debate sobre la diferencia entre la idea de *determinismo* y la de *predictibilidad* (Alemañ, 1998). Un sistema es determinista siempre que se encuentre gobernado por una ley bien definida, expresada matemáticamente por una ecuación diferencial, por ejemplo. Pero sólo será predecible si no padece la sensibilidad infinita a las condiciones iniciales mencionada antes. La confusión entre ambos términos, muy frecuente, aboca a numerosos malentendidos que la puesta en común final contribuye a disipar.

CONCLUSIONES

La conclusión fundamental que se extrae de esta experiencia es la completa factibilidad de la enseñanza de los rudimentos del caos y la dinámica no lineal a los alumnos de secundaria. El nivel básicamente cualitativo de la exposición y los debates no disminuyen en absoluto su rigor y el correcto tratamiento de los conceptos objeto de aprendizaje.

También es de destacar la conveniencia de romper la ciega confianza de los estudiantes en la exactitud de las leyes físicas que aprenden y las ecuaciones que las expresan. Parece que todos admiten implícitamente que tales ecuaciones actúan como una suerte de «cajas negras» en las que, por un extremo, entran los datos iniciales y, por el otro, salen los resultados sin mayores dificultades que las meramente relacionadas con el cálculo. De ahí la sorpresa con que los estudiantes reciben el descubrimiento de la no linealidad y el comportamiento caótico en la naturaleza: una sorpresa que debe alertarnos sobre la gran cantidad de suposiciones que se asumen tácitamente durante el aprendizaje de los conceptos científicos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALEMAÑ, R.A. (1998). *Grandes metáforas de la física*. Madrid: Celeste Ediciones.

ARNOLD, V. (1983). *Mecánica clásica. Métodos matemáticos.* Madrid: Paraninfo.

BRIGGS, J. y PEAT, F.D. (1994). *El espejo turbulento Los enigmas del caos y el orden.* Barcelona: Salvat.

DRIVER, R. y OLDHAM, V. (1986). A Constructivist Approach to Curriculum Development in Science. *Studies in Science Education,* 13, pp. 105-122.

HELLEMAN, R.H.G. (1980). Self-generated chaotic behaviour in non-linear dynamics, en COHEN, E.G.D. (ed.). *Fundamental problems in statiscal physics,* 5. Amsterdam: North Holland.

MEIROVITCH, L. (1970). *Methods of analytical dynamics.* Nueva York: McGraw-Hill.

MINORSKY, N. (1962). *Nonlinear oscillations.* Princeton (Estados Unidos): Van Norstrand.

NOVAK, J.D. (1988). Constructivismo humano, un consenso emergente. *Enseñanza de las Ciencias,* 6(3), pp. 213-223.

OSBORNE, J.R. y FREYBERG, P. (1985). *Learning in Science. The implications of children's Science.* Londres: Heinemann.

RAÑADA, A.F. (1988). Phenomenology of chaotic motion, en SÁEZ, A.W. (ed.), *Methods and applications of non-linear dynamics,* pp. 1-93. Singapur: World Scientific.

RUSSELL, B. (1986). *La perspectiva científica.* Barcelona: Planeta.

SCHUSTER, H.G. (1984). *Deterministic chaos.* Weinheim: Physik Verlag.

[Artículo recibido en septiembre de 1998 y aceptado en diciembre de 1998.]