EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL CONCEPTO DE *LÍMITE FUNCIONAL* EN LOS LIBROS DE TEXTO DE BACHILLERATO Y CURSO DE ORIENTACIÓN UNIVERSITARIA (COU): 1940-1995[1*]

SIERRA VÁZQUEZ, MODESTO, GONZÁLEZ ASTUDILLO, MARÍA TERESA y LÓPEZ ESTEBAN, CARMEN
Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales. Universidad de Salamanca.

SUMMARY

In this paper, we study the historical development of the concept of functional limit in the textbooks of bachillerato and COU during the last fifty years. We analyse twenty-seven books in three stages. In the last one, which gathers the results from the others, we consider three dimensions: conceptual, cognitive and phenomenologic that show us a wide perspective of the changes experimented in this development.

INTRODUCCIÓN

Durante los últimos años se ha producido un interés creciente hacia la historia de la educación matemática, motivada, entre otras razones, por el fracaso que ha seguido a los proyectos de reforma curricular. Este interés se ha traducido en el ámbito de la investigación en publicaciones sobre la evolución de los programas oficiales, la formación de profesores, las corrientes didácticas dominantes y el análisis de los cambios que se han producido. En este marco se ha puesto de manifiesto la importancia del análisis del libro de texto como reflejo de la actividad que se realiza en el aula. De acuerdo con Schubring (1987), si se parte del hecho de que la práctica de la enseñanza no está tan determinada por los decretos y órdenes ministeriales como por los libros de texto utilizados para enseñar, se llega a la necesidad de un análisis de dichos libros de texto. La producción abundante de manuales, la variedad y riqueza de sus contenidos, la incidencia en el aula de este material, su función como transmisor de contenidos socialmente aceptados, hace que resulte interesante estudiar la contribución que han tenido en la historia de la educación matemática.

El análisis de libros de texto se ha llevado a cabo en diferentes ámbitos de investigación. Si bien los historiadores de la educación han realizado aportaciones como tesis doctorales, exposiciones, coloquios, etc. relacionados con los manuales escolares, son escasos los trabajos referidos a las matemáticas. Esto se detecta, en el caso de Francia, en el trabajo de Choppin (1993) en el que hace un balance bibliométrico de la investigación francesa sobre la historia de los manuales escolares. Las razones de dicha escasez se pueden deber, a juicio de Choppin, tanto a la falta de formación matemática de los historiadores como al escaso interés de los matemáticos por este tema. Centrándonos en el campo de la educación matemática, Howson (1995) distingue entre investigaciones realizadas sobre textos *a posteriori*, es decir, la forma en que se ha usado un libro de texto, cómo ha contribuido al proceso de aprendizaje y qué obstáculos se han presentado, que son escasas; y las realizadas *a priori* que son más numerosas. Entre estas últimas hay que señalar los trabajos de Chevallard y sus colaboradores (Chevallard, 1985; Chevallard y Johsua, 1982), en los que aparece la noción de *transposición didáctica*, es decir, la transformación de la matemática *(savoir savant)* en el contenido escolar *(savoir enseigné)*, que se refleja fundamentalmente en los libros de texto. En la misma línea está el trabajo de Tavignot (1993). Otras investigaciones se centran en los aspectos relativos al lenguaje y la legibilidad (Pimm, 1987, 1994). Por su parte, Otte (1986) pone el énfasis en lo que transmite el texto, las relaciones entre el conocimiento y su representación textual y las variaciones en las interpretaciones. En Dormolen (1986) se hace una clasificación de los elementos que son imprescindibles en un libro de texto de matemáticas. Lowe y Pimm (1996) consideran que hay una tétrada asociada a un libro de texto: el lector, el escritor, el profesor y el mismo libro, y que las características de cada uno de ellos, así como sus interacciones determinan el uso de este material en el aula. También se han llevado a cabo algunos estudios comparativos como el que aparece publicado en un monográfico de TIMSS (Third International Mathematic and Science Study) realizado por Howson (1995) sobre libros de texto para niños de 13 años de ocho países diferentes.

Por último, resulta imprescindible destacar el trabajo, ya mencionado, de Schubring (1987) sobre metodología de análisis histórico de libros de texto, en el que se considera necesaria una aproximación global que analice, en primer lugar, los cambios en las sucesivas ediciones de un libro de texto, para pasar luego a buscar los cambios en otros libros de texto y, por último, relacionar estos cambios con los que se han producido en el contexto, es decir, cambios en los programas, en los decretos ministeriales, en los debates didácticos, en la evolución de las matemáticas, en la epistemología, etc.

En nuestro trabajo hemos realizado un análisis de libros de texto estudiando los cambios que se han producido a lo largo de más de cincuenta años en un concepto clave para la enseñanza del análisis como es el de *límite funcional*. El uso de diversas ediciones de algunos de los libros analizados, su comparación con otros libros del mismo periodo y su relación con los programas oficiales en aquel momento nos proporcionarán los datos esenciales para concretar cuál ha sido la evolución de dicho concepto.

METODOLOGÍA

Hemos analizado libros publicados desde la terminación de la Guerra Civil hasta nuestros días. De acuerdo con Schubring (1987), la producción de libros de texto se lleva a cabo dentro de un contexto determinado y responde a las corrientes epistemológicas y didácticas al uso; además, existiendo en el caso español disposiciones legales sobre el currículo, los libros de texto tienden a adaptarse a ellas. Por esta razón, por un lado, se presentan sucintamente los planes de estudio vigentes durante la época analizada incluyendo el tratamiento del concepto de *límite* en los mismos; por otro, los libros se han agrupado por periodos que, en líneas generales, corresponden a los sucesivos planes de estudio:

1) *Periodo comprendido entre 1940 y 1967*. Este periodo abarca desde el final de la Guerra Civil hasta 1967 en que se publican los textos piloto para la introducción de la matemática moderna en el bachillerato. Tiene un punto de inflexión en 1953, año en el que se publica un nuevo plan de estudios (modificado parcialmente en 1957). Se han analizado cinco libros de este periodo.

2) *Periodo comprendido entre 1967 y 1975*. Este periodo abarca desde la introducción de la matemática moderna hasta la implantación del bachillerato unificado y polivalente (BUP) en 1975. Se han analizado nueve libros de diversos autores y editoriales, entre ellos los textos piloto publicados por la Comisión para el Ensayo Didáctico sobre la Matemática Moderna en los Institutos de Enseñanza Media.

3) *Periodo comprendido entre 1975 y 1995*. Este periodo comprende desde la implantación del BUP hasta el inicio de los nuevos Bachilleratos derivados de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE). Se han analizado trece libros.

El criterio para la selección de los libros de texto ha sido el de los autores más «famosos» o de las editoriales más «importantes» de cada uno de los periodos. También se ha procurado que los autores elegidos tuvieran producción en los distintos periodos, para estudiar la evolución del tratamiento del concepto de *límite.*

El análisis de libros de texto se ha llevado a cabo en tres etapas, cada una de las cuales profundiza el trabajo realizado en la etapa anterior.

En la primera etapa, se han elaborado fichas con los datos fundamentales del libro: título, autor/es, editorial, año de edición, plan de estudios, y un resumen del contenido de los capítulos relacionados con el límite.

En la segunda etapa se han hecho tablas comparativas de los libros correspondientes a cada periodo, que incluyen:

a) Modo de introducción del concepto: formal, heurísticos o constructivo.

b) Tipo de definición: topológica, métrica, geométrica o por sucesiones.

c) Secuenciación: se ha hecho un listado de las definiciones y propiedades relacionadas con el límite, numerándolas según su orden de aparición.

d) Tipos de ejercicios y problemas.

En la tercera etapa se han considerado tres dimensiones de análisis:

a) Análisis conceptual, que se refiere a cómo se define y organiza el concepto a lo largo del texto, representaciones gráficas y simbólicas utilizadas, problemas y ejercicios resueltos o propuestos, así como ciertos aspectos materiales de los libros de texto que determinan la presentación del concepto.

b) Análisis didáctico-cognitivo, que se refiere tanto a la explicitación de los objetivos que los autores pretenden conseguir como al modo en el que se intenta que el alumno desarrolle ciertas capacidades cognitivas (Duval, 1995).

c) Análisis fenomenológico, que se caracteriza por los fenómenos que se toman en consideración con respecto al concepto en cuestión, en nuestro caso el de *límite funcional*. Aquí se considera el análisis fenomenológico didáctico, en el que intervienen los fenómenos que se proponen en las secuencias de enseñanza que aparecen en los libros analizados (Puig, 1997).

Análisis conceptual	**Análisis didáctico-cognitivo**	**Análisis fenomenológico**
• Secuenciación de contenidos • Definiciones: tipo y papel que juegan en el texto • Ejemplos y ejercicios • Representaciones gráficas y simbólicas • Aspectos materiales	• Objetivos e intenciones del autor (expresadas habitualmente en el prólogo) • Teorías de enseñanza-aprendizaje subyacente • Capacidades que se quieren desarrollar	• En torno a las porpias matemáticas • En torno a otras ciencias • Fenómenos de la vida diaria

Sin lugar a dudas, las concepciones epistemológicas de los autores acerca del conocimiento matemático están relacionadas con el modo de transmisión de dicho conocimiento y van a determinar qué tipo de capacidades se pretenden desarrollar en los alumnos, por lo que, a veces, es inevitable mezclar componentes epistemológicos y cognitivos en este análisis. Esto mismo sucederá con el análisis cognitivo y fenomenológico.

RESULTADOS

Vamos a presentar los resultados de cada uno de los periodos considerados, de acuerdo con el análisis conceptual, cognitivo y fenomenológico que hemos llevado a cabo según el esquema anterior. No obstante, en lo que se refiere al conceptual, aunque en la investigación original (Sierra, González y López, 1997) se cubrieron ampliamente los cinco aspectos considerados, aquí, por razones de extensión, nos limitaremos a las definiciones y a las representaciones gráficas y simbólicas.

1) Desde la terminación de la Guerra Civil hasta la introducción de la matemática moderna en los institutos de bachillerato (1940-67)

Durante este periodo, estuvieron vigentes dos planes de estudios: el de 1938, que se promulga durante la Guerra Civil y se modifica en el de 1953.

El plan de 1938 organizaba los estudios de bachillerato en siete cursos; se accedía superando una prueba de acceso a los diez años, estableciéndose un examen de estado al finalizar el mismo, requisito indispensable para acceder a la universidad. Trataba de aunar los aspectos científicos y humanísticos en un solo tipo de bachillerato. La asignatura de matemáticas formaba parte de los programas de los siete cursos y se desarrollaba de modo cíclico. En la distribución de materias no aparece explícitamente el cálculo diferencial e integral, aunque la costumbre de la época era introducir esta parte en los contenidos de álgebra o de álgebra superior.

En 1953 se estableció un nuevo plan de estudios para el bachillerato. La nueva organización rompió el carácter unitario que había tenido hasta entonces, estructurándose en bachillerato elemental (10-14 años) y bachillerato superior (14-16 años), teniendo este último dos especialidades denominadas ciencias y letras; además, se estableció un curso puente con los estudios superiores denominado preuniversitario. Las finalidades declaradas en la presentación del nuevo plan de estudios fueron: descongestionar las enseñanzas teóricas, evitar la excesiva reiteración del método cíclico y garantizar el cultivo de asignaturas más importantes y formativas. La asignatura de matemáticas era obligatoria en el bachillerato elemental y en la especialidad de ciencias del bachillerato superior.

Los conceptos de *límite* y *continuidad* aparecen en los cuestionarios (programas) de sexto curso dentro del bloque de análisis. En estos cuestionarios, el límite aparece ligado al concepto de *sucesión*, que posteriormente se aplica para definir la continuidad de funciones. Los cinco libros analizados se han agrupado en dos bloques:

Bloque A	Bloque B
• Fernández de Castro, M. y Jiménez Jiménez, J.L. *Matemáticas. Preparación del examen de estado.* Escelicer. Cádiz- Madrid. (sin fecha, anterior a 1995). • Bruño. *Matemáticas 6º curso.* Ediciones Bruño. Madrid. 1968.	• Ríos, S. y Rodríguez San Juan, A. *Matemáticas. 6º curso de bachillerato*. Los autores. Madrid. 1950. • Ríos, S. y Rodríguez San Juan, A. *Matemáticas. 5º curso de bachillerato*. Los autores. Madrid, 1968a. • Ríos, S. y Rodríguez San Juan A. *Matemáticas. 6º curso de bachillerato*. Los autores. Madrid. 1968b.

El tratamiento del concepto de *límite* en los libros del bloque A va ligado a los conceptos de *sucesión* y *variable* de un modo oscuro, mientras que en los libros de Sixto Ríos y Rodríguez San Juan adquiere un estatus propio que no aparece en los libros del bloque anterior. En estos dos últimos autores se observa, sin lugar a dudas, la influencia de Julio Rey Pastor (1888-1962). Como es bien sabido, Rey Pastor se propuso elevar el nivel de la matemática española considerando su retraso «en medio siglo en la geometría y en análisis un poco mayor». Para ello se trazó un plan minucioso de modo que con el advenimiento de la segunda República, en 1931, se puede considerar que en España existía ya una cultura matemática contemporánea. Pues bien, discípulos suyos como Sixto Ríos y Rodríguez San Juan, contribuyeron a dotar de esa contemporaneidad a nuestra matemática, no solamente en la enseñanza universitaria sino también en la secundaria.

A continuación se presentan los resultados más destacables en cada una de las tres dimensiones de análisis.

ANÁLISIS CONCEPTUAL

Definiciones

La definición de *límite* experimenta una evolución desde los libros del bloque A a los del bloque B, aunque tienen elementos comunes como son la idea de infinitésimos y el lenguaje de incrementos. En particular, en el libro de Fernández de Castro y Jiménez Jiménez (sin fecha), después de la definición de los conceptos de *variable* y de *sucesión*, aparece la definición de *límite de variable*, particularizando para el caso de sucesiones:

> *Se dice que una variable tiene un límite o tiende a un límite si, en la sucesión de sus valores, se verifica que a partir de uno de ellos la diferencia entre los demás y el límite es, en valor absoluto, tan pequeña como se quiera.*

Es una definición donde se mezclan el concepto de *variable* y el de *sucesión*. Posteriormente, al identificar función con variable se mantiene la definición anterior de *límite*. Además, la idea de infinitésimo está implícitamente subyacente en ella y, efectivamente, el lenguaje de infinitésimos se utiliza abundantemente a lo largo del tema.

En Bruño (1968), hay un cierto cambio; la definición de *límite* se da explícitamente utilizando el lenguaje de sucesiones:

> *Una función* f(x) *tiene límite* b *cuando la variable* x *tiende a* a *cuando eligiendo cualquier sucesión de valores* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *que tienen límite* a*; los correspondientes valores de* f(x): $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ *tienen por límite* b.

En los libros de Sixto Ríos y Rodríguez San Juan (1950, 1968a, 1968b), aunque el concepto de *función* se sigue presentando ligado al concepto de *variable*, el concepto de *límite* ya se empieza a definir a partir de las funciones, y se hace mediante sucesiones. La definición es:

> *El límite de la función* f(x) *cuando* x *tiende a* a *es el número* b*, si se verifica que los valores de la función* f(x) *se aproximan tanto como queramos a* b*, tomando los valores de la variable* x *convenientemente próximos a* a *(no se hace ninguna hipótesis sobre el valor de la función en el punto* a*).*

Esta definición se completa dando una interpretación geométrica del límite de una función en un punto utilizando entornos simétricos. Se observa en estos dos autores una preocupación por los aspectos geométricos, que se traduce tanto en las interpretaciones de los conceptos como en los ejercicios propuestos, donde aparecen problemas de límites en contextos geométricos; es una característica que no se dará en el resto de los periodos.

A nuestro juicio, durante este periodo se observa un cambio progresivo en la definición del concepto de *límite*, desde su presentación, ligado a la idea de variable, hasta la introducción del concepto de *función*, clarificándose el concepto de *límite* a partir del de función.

REPRESENTACIONES GRÁFICAS Y SIMBÓLICAS

Representaciones gráficas

En los libros del bloque A, las representaciones gráficas son muy escasas. En el libro de Fernández de Castro y Jiménez Jiménez (s.f.) hay un cuadro resumen de las operaciones con límites donde aparecen las indeterminaciones.

En los libros del bloque B, hay un aumento notable de representaciones gráficas: se da una interpretación geométrica del límite y se ponen contraejemplos sobre la existencia de límite, para lo cual se utiliza la representación gráfica de la función *E(x)* (parte entera de *x*). Las representaciones gráficas empleadas son cartesianas.

Representaciones simbólicas

La notación que se usa para el límite en los libros del bloque A está orientada a la idea de variable. Las variables se representan con las letras minúsculas del abecedario y los infinitésimos con las letras griegas correspondientes a las utilizadas para las variables. Se utiliza el símbolo (para representar el infinito, y esto ocurrirá de aquí en adelante en todos los libros analizados. Asimismo, se hace uso del valor absoluto (con la notación clásica de las barras) en las demostraciones. Además de las expresiones simbólicas, aparecen expresiones verbales a lo largo de los textos como: «tienden a», «tan pequeño como se quiera», «*n* crece infinitamente», «mayor que cualquier número por grande que sea», «tiende a cero más rápidamente que». También se tratan órdenes de infinitésimos e infinitésimos equivalentes.

En los libros del bloque B aparece una simbolización más moderna del límite, los autores escriben:

$\lim_{x \to a} f(x) = b$, o bien $f(x) \to \boldsymbol{b}$, *cuando* $x \to \boldsymbol{a}$.

que se lee: *f(x) tiende a* ***b*** *cuando x tiende a* ***a***.

Se usa mucho el lenguaje de ε. Así, cuando los autores demuestran que el límite de una función es un cierto valor, a lo largo de dicha demostración afinan el valor de ε (ε/2, ε/4...) de modo que al final salga en el segundo miembro de la desigualdad. También son frecuentes expresiones que hemos mencionado anteriormente para los libros del bloque A.

Aunque las representaciones gráficas y simbólicas son muy escasas, se observa una progresión notable, de modo que, en los libros de Sixto Ríos y Rodríguez San Juan (1950,1968b), los tipos de representación son acordes con su época, de acuerdo con la idea de contemporaneidad a que ya hemos hecho referencia.

Análisis didáctico-cognitivo

Como ya se ha señalado anteriormente, los prólogos o las introducciones a las diferentes lecciones nos ponen sobre la pista de las capacidades que los autores pretenden desarrollar en los alumnos. Ahora bien, hay que tener en cuenta que la ordenación de la educación secundaria en España sólo permitía, en la práctica, que un número limitado de españoles alcanzase este nivel educativo, constituyendo una élite entre la población española; precisamente, a este número reducido de alumnos, seleccionados primordialmente por criterios socioeconómicos, van dirigidos estos libros.

El único libro en el que aparece explicitado el objeto de la lección es en el de Fernández de Castro y Jiménez Jiménez (s.f.) donde los conceptos tienen un carácter esencialmente instrumental, ya que lo que se pretende es: «Hallar unas reglas sencillas que nos permitan calcular con seguridad y rapidez el límite de variables complicadas en las que intervienen operaciones diversas algebraicas y aun trascendentes.» Este carácter instrumental está presente también en los otros libros estudiados.

Una segunda característica es el carácter cíclico de los contenidos que se repiten en sucesivos cursos ampliándose y completándose en cada uno respecto del anterior.

En todos los libros, el desarrollo es secuencial y formal, aunque las demostraciones no son totalmente rigurosas, sino que tienen ciertos componentes intuitivos. La idea que subyace es la de una matemática ya hecha que el alumno debe memorizar y practicar resolviendo ejercicios. En definitiva, las capacidades que se pretenden desarrollar en el alumno son: memorización de definiciones y propiedades y práctica algorítmica, con alguna excepción en los ejercicios planteados.

Análisis fenomenológico

En el libro de Fernández de Castro y Jiménez Jiménez (s.f.), cuando trata el concepto de *variable*, hace alguna referencia a fenómenos naturales como: hora del día, estación del año y circunstancias meteorológicas. Hecha esta salvedad, el resto de los libros hace solamente referencias a aspectos matemáticos cuando presentan los conceptos de *límite* y *continuidad* y, en general, el límite es concebido como una preparación para la derivada; aunque en algunos casos, como en el libro de Sixto Ríos y Rodríguez San Juan (1950), hay un componente geométrico importante referido al estudio de límites de pendientes de rectas secantes a una curva, de longitudes de cuerdas, de áreas bajo ciertas condiciones, de sucesiones de circunferencias.

INTRODUCCIÓN DE LA MATEMÁTICA MODERNA (1967-75)

Como es bien conocido, a comienzos de los años sesenta triunfó en casi todo el mundo occidental la enseñanza de las llamadas «matemáticas modernas»; en el caso español, se introdujo progresivamente en los programas de bachillerato. Las razones de dicha introducción, están recogidas en Rico y Sierra (1994), y son las siguientes:

a) La matemática moderna proporciona esquemas más sencillos para poder presentar la materia del bachillerato.

b) Con la matemática moderna se pueden organizar dichas materias de modo más racional.

c) Los fines esenciales de la matemática en la enseñanza media son dos: formativo e instrumental.

d) Ambos fines pueden lograrse con más eficacia mediante la matemática moderna.

e) Tanto en la teoría como en los algoritmos, el alumno, con la matemática moderna, puede llegar a discurrir con más precisión y claridad.

f) Con la matemática moderna se estudiarán las materias que tengan carácter fundamental, y las que no poseen este carácter quedarán relegadas como simples ejercicios a desarrollar por los alumnos.

En 1962 se constituyó la Comisión para el Ensayo Didáctico sobre la Matemática Moderna en los Institutos Nacionales de Enseñanza Media, presidida por el profesor Abellanas. La Comisión editó, en los años 1967 y 1969, textos piloto para el 5º y 6º curso de bachillerato, respectivamente, que se convirtieron, de hecho, en el nuevo programa de matemáticas que progresivamente se fue implantando en el bachillerato y cuyos cimientos son la teoría de conjuntos y las estructuras de las matemáticas en sentido bourbakista, es decir, las estructuras algebraicas, de orden y topológicas.

Por lo que se refiere al límite, en dichos textos piloto, en 5º curso se hace una breve introducción a este concepto en el capítulo dedicado a funciones de variable real y, en 6º curso, dentro de un capítulo titulado de igual manera, se profundiza en ambos conceptos, primando el punto de vista topológico. Los nueve libros analizados se han agrupado en tres bloques.

Estos bloques representan tres tendencias observadas en este periodo. Así, los libros del bloque A siguen el modelo de la etapa anterior (representado en los libros de Sixto Ríos y Rodríguez San Juan). Los del bloque B, que comprenden los textos piloto y los que siguen sus orientaciones e ideas, suponen una ruptura presentando las nuevas ideas acerca de la enseñanza de las matemáticas. Finalmente, los del bloque C introducen la matemática estructural y axiomática, pero a la vez proponen actividades para el alumno y las explicaciones se apoyan en ellas. Se observa que, junto al nuevo paradigma que surge como una auténtica revolución, se mantiene, coexistiendo con él, el antiguo. Esto nos recuerda las ideas kuhnianas sobre la estructura de las revoluciones científicas.

Los resultados en cada una de las tres dimensiones son los que se exponen a continuación.

Análisis conceptual

Definiciones

La definición de *límite* va evolucionando hacia un mayor formalismo. Así, en el bloque A se enfatiza la definición por sucesiones, aunque también aparece de modo residual la definición topológica que les lleva a utilizar entornos generales. En los libros piloto (bloque B) aparece la siguiente definición:

> *Diremos que una función* $f(x) = y$ *tiene por límite* b *para* x = a, *cuando para todo entorno* E_b *del punto* b, *se verifica* $f^{-1}(E_b) = E_a - a$, *o bien,* $f^{-1}(E_b) = E_a$. *En el segundo caso, además de tener límite la función en* x=a, *diremos que es continua en dicho punto.*

Bloque A	Bloque B	Bloque C
• Sin autores. *Matemáticas sexto curso*. Edelvives. Zaragoza. 1972 (aprobado por OM 23-2-68). • Segura, S. *Matemáticas 6º curso.* ECIR. Valencia, 1974. • Tuduri, J. y Casals, R. COU. *Matemáticas especiales.* Vimasa. Terrasa, 1974.	• Abellanas, P., García Rúa, J., Rodríguez Labajo, A., Casulleras Regás, J. y Marcos de Lanuza, F. *Matemática moderna: Quinto curso.* MEC. MADRID, 1967. • Abellanas, P., García Rúa, J., Rodríguez Labajo, A., Casulleras, Regás, J. y Marcos de Lanuza, F. *Matemática moderna. Sexto curso.* MEC. Madrid, 1969. • Marcos de Lanuza, F. *Matemáticas 5º curso.* G. del Toro: Madrid, 1972a. • Marcos de Lanuza, F. *Matemáticas COU optativa*. G. del Toro. Madrid, 1972b.	• Agustín, J.M. y Vila, A. *Matemáticas 6º Bachillerato. Vol. 2.* Vicens-Vives. Barcelona, 1973. • Marcos, C. y Martínez, J. *Matemáticas generales COU.* SM. Valencia, 1973.

En los libros del bloque C se utiliza preferentemente la definición topológica, aunque se quiere conducir progresivamente al alumno a partir de ciertos ejemplos hasta las definiciones.

Representaciones gráficas y simbólicas

Representaciones gráficas

Aparecen tablas, gráficas cartesianas y otras representaciones estrechamente ligadas al tipo de definición que se utiliza. En cuanto a las tablas, cuando los autores presentan el concepto de *límite* utilizando sucesiones, por ejemplo, en el libro de la editorial Edelvives (1972) (bloque A), aparecen tablas con los valores de dichas sucesiones y los correspondientes de *f(x),* mientras que, cuando se utiliza la definición topológica, en el libro de Agustí y Vila (1973) (bloque C), las tablas de valores de la función se usan para comprobar que se verifica dicha definición en casos particulares.

Las gráficas cartesianas aparecen en todos los libros analizados, algunas de ellas incluso realizadas a mano alzada presentando las características que interese resaltar. Por ejemplo, cuando se da la definición en sentido topológico, se representan entornos de un punto y de su imagen inversa, incluso cuando se trata del infinito.

En el bloque C, hay además otros tipos de representaciones gráficas como diagramas de Venn (Marcos y Martínez, 1973) y uso de la recta numérica (Agustí y Vila, 1973).

Representaciones simbólicas

Todos utilizan $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ con las letras *a, l* u otras diferentes, y también $f(x) \underset{x \to a}{\to} l$. Las excepciones, las constituyen los libros de Marcos de Lanuza (1972a, 1972b) del bloque B con $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ y el libro de Agustí y Vila (1973) del bloque C con $\lim_a F = l$.

Las notaciones evolucionan desde las correspondientes a la definición de *límite* por sucesiones hasta la definición topológica, adaptándose a cada tipo de definición. En particular, el significado que se da al símbolo ε varía de unos a otros: mientras que en unos se considera como algo «arbitrariamente pequeño» (Segura, 1974, bloque A), en otros se considera simplemente $\varepsilon > 0$ (Tuduri y Casals, 1974, bloque A; Marcos y Martínez, 1973, bloque C).

Como en los libros del bloque B se utiliza la definición topológica, aparecen referencias a entornos. En los textos piloto se utilizan representaciones simbólicas de dichos entornos, bien utilizando subíndices como E_a y E_b o bien entornos centrados $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ y en otros textos se tratan de forma exclusivamente verbal. También en los libros del bloque C, aparecen notaciones de entornos; por ejemplo, en Agustí y Vila (1973), se dice:

> *Diremos que* l *es el límite de* F *en* a, *si para todo entorno* B *de* l *se puede encontrar un entorno reducido de a* $A_0 = A - \{a\}$ *de modo que* $f(A_0) \subset B$.

También en este bloque se inicia el uso de los símbolos de los cuantificadores. Así, en Marcos y Martínez (1973), aparece la siguiente definición:

> *Se dice que la función* $f(x)$ *tiende hacia* L *cuando* x *tiende hacia* $+\infty$ *(o hacia* $-\infty$*), si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un real positivo* A, *tal que* $|x| > A$ *implica* $|f(x)-L| < \varepsilon$;
> $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, A > 0$ *tal que* $|x| > A \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$.

Análisis didáctico-cognitivo

Los libros del bloque A no tienen prólogos en donde los autores expresen sus ideas acerca de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. No obstante, como ya se ha señalado, siguen el modelo de la etapa anterior y las capacidades que pretenden desarrollar son: aprendizaje memorístico de las definiciones y aplicación de estas definiciones a la resolución de ejercicios.

Los libros del bloque B suponen una ruptura con el bloque anterior, ya que con ellos se introduce la matemática moderna en el bachillerato. De acuerdo con Steiner (1987), las ideas acerca del conocimiento matemático influyen en las teorías de enseñanza-aprendizaje de ese conocimiento; por ello, para poder llevar a cabo este análisis cognitivo, tenemos que hacer referencia a ciertos aspectos epistemológicos, máxime cuando estamos en un punto de ruptura con el pensamiento anterior. Siguiendo las ideas de la matemática moderna, en los textos piloto, los conjuntos y las aplicaciones son los cimientos sobre los que se pretende construir el edificio de la matemática, y las estructuras, las herramientas para construir dicho edificio. Estas ideas se ven reflejadas en el tratamiento del límite: la orientación topológica no es casual sino que es justamente la preconizada por los pioneros de la reforma de las matemáticas de acuerdo con las ideas bourbakistas. Por ello los conceptos de *conjunto, número real* y *entorno* se utilizan constantemente. En los otros dos libros de este bloque se enfatizan las ideas aparecidas en los textos piloto. En consonancia con lo dicho hasta ahora, las capacidades que se pretenden desarrollar son: adquisición de las formas de hacer del nuevo lenguaje de la matemática moderna, el conocimiento de la definición de *límite* en este lenguaje, el aprendizaje de las definiciones mediante actividades dirigidas, la aplicación de las definiciones a la resolución de ejercicios y el desarrollo de algoritmos para el cálculo de límites de expresiones algebraicas.

Los libros del bloque C se sitúan decididamente en la corriente de la matemática moderna con las implicaciones cognitivas subyacentes. Esto se expresa claramente en el prólogo del libro de Marcos y Martínez (1973), en el cual no sólo se ensalza a Bourbaki, sino que también se hace mención explícita a Piaget, diciendo textualmente que «Piaget ha demostrado que las formas humanas de pensamiento coinciden con las estructuras de la matemática moderna». Asimismo, el libro de Agustí y Vila (1973) tiene una clara influencia de las obras de Papy y sus colaboradores, con una preponderancia de los aspectos topológicos sobre los métricos según el espíritu bourbakista, pero con numerosas actividades. Advertimos, por consiguiente, un cierto cambio en la visión de estos autores sobre la enseñanza de las matemáticas. Si hasta ese momento se miraba casi exclusivamente el contenido de la materia, en estos libros se empieza a considerar al alumno como sujeto que aprende, tratando de explicar este aprendizaje desde las teorías piagetianas. Respecto a las capacidades que se pretenden desarrollar, en nuestra opinión, son muy diferentes de un libro a otro, probablemente por los cursos distintos a los que se dirigen. Así, mientras que en el libro de Marcos y Martínez (1973) se pretende que el alumno aprenda memorísticamente las definiciones, que se acostumbre al mecanismo de las demostraciones deductivas y realice numerosos ejercicios, en el libro de Agustí y Vila (1973), se pretende que el alumno vaya construyendo de una manera dirigida los distintos conceptos, que entrevea algunas demostraciones y realice numerosos ejercicios.

Análisis fenomenológico

En los libros del bloque A no hay referencias a situaciones o fenómenos propios de otras ciencias distintas de las matemáticas y, en el caso de éstas, se reducen a casos de funciones polinómicas, radicales, logaritmos, cocientes de polinomios y funciones trigonométricas. La idea de *límite funcional* sólo aparece como ejemplo más significativo en Segura (1974), en el caso de un grifo que deja caer una gota cada minuto. Dicha idea está basada en el límite de sucesiones.

Respecto del bloque B, no hay referencias a fenómenos que puedan ser organizados mediante el límite y que sean exteriores a la propia matemática. La matemática se encierra en sí misma y se explica por ella misma. Incluso desaparecen las interpretaciones y los problemas en sentido geométrico de la época anterior. Parece como si esta parte del análisis matemático fuera independiente del resto de las ramas de las matemáticas. Insistimos en la predominancia de la visión topológica en el caso del límite. Incluso en el caso de la discontinuidad de una función, la idea de estar partida, más que una idea intuitiva, es una idea que se utiliza para reafirmar el uso de los entornos.

Tampoco en los libros del bloque C hay referencias a fenómenos distintos de los de la propia matemática, aunque existen algunas peculiaridades. Así, el concepto de *límite* no sólo está ligado a funciones expresadas de forma algebraica, sino que aparece en relación con otras ramas de la matemática, como la geometría (en el caso de Marcos y Martínez, 1973) y las estructuras matemáticas (Agustí y Vila, 1973).

En definitiva, todos los libros analizados reflejan un cierto espíritu de la época en cuanto a la concepción de las matemáticas. Es interesante resaltar que, aunque los promotores de la reforma, Papy y Dieudonné, entre otros, señalan que las matemáticas están por todas partes y que son un instrumento para comprender la realidad, en escasas ocasiones, en sus obras dedicadas a la enseñanza, aparecen las matemáticas para interpretar fenómenos de otras ciencias. Igual sucederá en el caso español, en los libros de texto de este periodo, lo que va a marcar toda una generación de profesores y alumnos, que transmitirán y asimilarán, respectivamente, unas matemáticas sin conexión con otras ciencias y fenómenos.

DESARROLLO DEL PLAN DE ESTUDIOS DE BACHILLERATO UNIFICADO POLIVALENTE (BUP) Y DEL CURSO DE ORIENTACIÓN UNIVERSITARIA (COU). 1975-95

A comienzos de la década de los setenta se emprende una reestructuración del sistema educativo español, que culmina con la aprobación de la Ley General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa, promulgada el 4 de agosto de 1970. Se estableció el bachillerato Unificado y polivalente, BUP, y el curso de orientación universitaria, COU, necesario para acceder a estudios universitarios. La duración del bachillerato se estableció en tres cursos (14-17 años). El plan de estudios se estructuraba en materias comunes, materias optativas y enseñanzas y actividades técnico-profesionales.

Las matemáticas aparecieron como una asignatura dentro del área Ciencias Matemáticas y de la Naturaleza. Sin embargo, hasta el año 1975 no se estableció el currículo para el nuevo bachillerato (Decreto del 23 de enero de 1975, desarrollado en el BOE del 18 de abril del mismo año). Las matemáticas tenían un carácter de asignatura obligatoria en cada uno de los tres cursos del bachillerato, aunque posteriormente las del tercer curso pasaron a ser opcionales.

El concepto de *límite* aparece en los documentos oficiales en 2º curso, sugiriendo como orientación didáctica introducirlo de forma métrica en contraposición con la orientación topológica del periodo anterior y, en cambio, reducir el cálculo de límites a casos sencillos.

En el mismo decreto en el que se aprobaba el plan de estudios de bachillerato, se reguló el curso de orientación universitaria estableciendo un núcleo de materias comunes y dos opciones; en cada opción aparecían a su vez, dos materias obligatorias y tres optativas, entre las cuales el alumno debía escoger dos de éstas. Las matemáticas figuran como optativa en la opción A y como obligatoria en la opción B. El programa contenía cuatro grandes temas, siendo uno de ellos: «Ampliación del cálculo diferencial e integral», sin pormenorizar su contenido.

Ambos programas mantienen una orientación formalista y estructuralista. Rico y Sierra (1997) señalan tres ideas que sustentan el convencimiento del carácter irreversible dado al programa de las matemáticas modernas: en primer lugar, el carácter científico, completo y avanzado del nuevo programa de las matemáticas escolares. Este punto de vista es parcial e incompleto, ya que se desconocen las dificultades de fundamentación y desarrollo de la mayor parte de los temas de la matemática elemental en base al programa bourbakista. La segunda idea fue la supuesta implantación de estos programas en la mayoría de los países, salvo raras excepciones, y su aceptación universal. La tercera razón fue la legitimación desde el punto de vista de la psicología, bajo la influencia de los grandes psicólogos cognitivos de la época, principalmente Piaget y Bruner. Sin mayor criterio, durante años se defendió que la enseñanza de las estructuras matemáticas a los niños y adolescentes estaba fundada en argumentos cognitivos, respondía a una moderna teoría del aprendizaje y tenía carácter evolutivo. «Tenemos, pues, que en los años setenta se produce en España una confluencia de intereses entre algunos profesores universitarios, ciertos responsables administrativos del diseño curricular y algunos psicólogos de la educación, quienes con una considerable deficiencia de formación sobre el currículo de las matemáticas, sus problemas y limitaciones, establecen un programa de formación formalista desde preescolar hasta la universidad. La vigencia de este currículo, la ciframos en veintidós años y su periodo de influencia indiscutible se sitúa en la década de los setenta.» (Rico y Sierra, 1997, pp. 46).

Salvo algunas excepciones, el programa de la matemática moderna se recibió acríticamente y se incorporó a nuestro sistema educativo sin una reflexión propia sobre nuestras necesidades específicas.

Más tarde, en 1987 (OM de 3 de septiembre) se modificó la estructura del plan de estudios de COU. Se establecieron cuatro opciones, incorporando a las opciones C y D orientadas hacia las ciencias humanas y sociales, una nueva asignatura llamada Matemáticas II con tres grandes temas, uno de los cuales se titulaba: «Análisis descriptivo de funciones y gráficas», en el que se indicaba que no es imprescindible la formalización del concepto de *límite* ni tampoco utilizar una notación rigurosa para definir un vocabulario básico. En nuestro trabajo no hemos analizado libros de texto de esta asignatura.

Durante la década de los ochenta, se produjo un amplio debate sobre la reforma educativa en España que culminó con la aprobación y promulgación en 1990 de la ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE), que ha supuesto una profunda transformación de dicho sistema. Esta ley establece una nueva etapa de

Bloque A	**Bloque B**	**Bloque C**	**Bloque D**
• Marcos de Lanuza, F. *Matemáticas 2º BUP*. G. del Toro. Madrid, 1978. • Marcos de Lanuza, F. *Matemáticas especiales. COU*. G. del Toro. Madrid, 1976. • Agustí, J.M. y Vila, A. *Matemáticas. Vectores, 2º BUP*. Vicens Vives. Barcelona, 1976.	• Guillén, J., Navarro, R., Peña, J.A. y Ferrer, S. *Matemáticas 2º Bachillerato*. Magisterio. Madrid, 1976. • Boadas, J., Romero, R. y Villalbí, R. *Matemáticas 2º curso de BUP*. Teide. Barcelona, 1976. • Etayo, J., Colera, J. y Ruiz, A. *Matemáticas 2º de BUP*. Anaya. Salamanca, 1977. • Anzola, M., Caruncho, J. y Gutiérrez, M. *Matemáticas 2º de Bachillerato*. Santillana. Madrid, 1976. • Lazcano, I. y Barolo, P. *Matemáticas 2º BUP*. Edelvives. Madrid, 1993. • Álvarez, F., García C., Garrido, L.M. y Vila, A. *Matemáticas. Factor 2*. Vicens Vives. Barcelona, 1992.	• Grupo Cero. *Matemáticas de bachillerato. Volumen 2*. Teide. Barcelona. 1985.	• Hernández, F., Lorenzo, F., Martínez, A. y Valdés, J. *Signo II. Matemáticas 2º Bachillerato*. Bruño. Madrid, 1989. • Colera, J. y Guzmán, M. *Bachillerato. Matemáticas 2*. Anaya. Madrid, 1994. • Guzmán, M. y Colera, J. *Matemáticas I COU*. Anaya. Madrid, 1989.

12 a 16 años denominada educación secundaria obligatoria (ESO). El bachillerato se reduce a dos años de duración, que se cursarán como regla general entre los 16 y los 18 años, suprimiéndose el COU. Se han establecido cuatro modalidades de bachillerato: artes, ciencias de la naturaleza y de la salud, tecnología y humanidades y ciencias sociales. En el momento de llevar a cabo esta investigación no está implantado, de forma general en todo el Estado español, el bachillerato LOGSE, y son escasos los libros de texto dedicados al mismo, por lo que no se ha realizado un análisis de esos manuales, que posponemos para una investigación posterior. No obstante, las orientaciones didácticas preconizadas para el nuevo bachillerato se ven reflejadas en algunos libros de texto que recogeremos a continuación, los cuales aunque están escritos para BUP, participan de las nuevas ideas metodológicas derivadas de la LOGSE, en las que se resalta el papel de las matemáticas como un conjunto de conocimientos que nacen de la necesidad de resolver problemas prácticos, y se remarca la idea de que participar en el conocimiento matemático consiste, más que en la posesión de los resultados finales de esta ciencia, en el dominio de su «forma de hacer».

Los libros analizados de este periodo son los siguientes:

Los libros del bloque A continúan en la línea iniciada en el periodo anterior, por lo que no exponemos los resultados. En los libros del bloque B se impone la tendencia de la matemática moderna. Una metodología diferente es la que presenta el Grupo Cero de Valencia (en la misma línea que el Grup Zero de Barcelona) siguiendo las ideas de la fenomenología didáctica de Freudenthal (se ha hecho un análisis particular de este libro). La influencia de los nuevos planteamientos se hará presente en los libros del bloque D.

Análisis conceptual

Definiciones

La definición de *límite* se da prioritariamente de forma métrica, aunque también se utilizan las definiciones por sucesiones y la topológica. Asimismo, se consideran todos los casos posibles de *límite* y se dan las correspondientes definiciones.

En los libros del bloque B se pone énfasis en los límites laterales en un intento de analizar el concepto de *límite* hasta llegar a su formalización. Así en el libro de Guillén y otros (1976) se dice:

> *Diremos que una función* f(x) *tiene por límite* b *cuando* x *tiende a* a *por la derecha, y lo simbolizaremos por*
>
> $$\lim_{x \to a^+} f(x) = b$$
>
> *cuando, para todo número positivo* ε *(por pequeño que sea) existe un número positivo* δ*, dependiente de* ε*, tal, que se cumpla:*
>
> $$0 < x\text{-}a < \delta \Rightarrow /f(x) - b/ < \varepsilon$$
>
> *Análogamente, diremos que f(x) tiene por límite* b *cuando x tiende a* a *por la izquierda, y los simbolizaremos por*
>
> $$\lim_{x \to a^-} f(x) = b$$
>
> *cuando, en las mismas condiciones, se tenga:*
>
> $$0 < a\text{-}x < \delta \Rightarrow /f(x) - b/ < \varepsilon$$
>
> *Los límites por la derecha y por la izquierda se llaman conjuntamente* límites laterales.
>
> *Claro está que, cuando existe* $\lim_{x \to a} f(x)$*, también existen* $\lim_{x \to a^+} f(x)$ *y* $\lim_{x \to a^-} f(x)$*, y los tres son iguales entre sí.*

En los libros del bloque D, el acento se pone en los límites infinitos y en el infinito, ya que, al dar una visión más fenomenológica del concepto, éste se introduce a través de las sucesiones que conducen de forma natural hacia dichos tipos de límite. Así, en el libro de Guzmán y Colera (1989) se introduce la definición de *límite* de la siguiente manera: «El estudio de límites de funciones, cuando $x \to \infty$, es similar al de sucesiones que se acaba de realizar en el tema anterior. Ahora la expresión $\lim_{x \to \infty} f(x)$ requiere, obligatoriamente, la notación $x \to \infty$, pues, a diferencia de *n*, *x* puede tender también *a* $-\infty$ o a cualquier número. El $\lim_{x \to \infty} f(x)$ puede existir o no», dando a continuación la definición de *límite* de forma métrica.

Representaciones gráficas y simbólicas

Representaciones gráficas

Hemos detectado un aumento considerable de representaciones gráficas respecto del periodo anterior, manteniéndose la relación existente entre el tipo de definición presentada y la representación gráfica utilizada.

En los libros del bloque B aparecen tablas, aunque con distinto sentido. Así, por ejemplo, en el de Boadas y otros (1976) se utilizan para aproximarse al valor de la variable estudiando los correspondientes valores de *f(x)*, en Anzola y otros (1976) se utilizan para el trabajo en los valores de δ de la definición del límite, y en el de Hernández y otros (1989) se va calculando la diferencia entre los valores de la función y el candidato al límite. Todo ello acorde con las definiciones que utilizan los distintos autores. Por el contrario, en los libros del bloque D son escasas las tablas de valores de la función.

Gráficas cartesianas aparecen en todos los libros como apoyo a las distintas definiciones de límites, aunque difieren de unos libros a otros. En los del bloque D, el énfasis que los autores ponen en los límites infinitos se traduce en una proliferación de representaciones gráficas de asíntotas por medio de líneas punteadas.

Otras representaciones gráficas son tablas-resumen tanto de operaciones con límites como de expresiones indeterminadas y de síntesis de la unidad.

Representaciones simbólicas

Las representaciones simbólicas son muy abundantes al comienzo del periodo considerado, el lenguaje de ε y δ está consolidado y aparecen por doquier símbolos, subíndices, valores absolutos, flechas, etc., aunque en ninguno de los libros aparecen los símbolos de los cuantificadores. Todos los libros utilizan la notación $\lim_{x \to a} f(x) = l$ en que las letras *a* y *l* son sustituidas, a veces, por otras distintas. Como hemos señalado anteriormente, los límites laterales son muy utilizados, lo que se refleja en la aparición de la correspondiente notación simbólica en dos versiones:

$\lim_{x \to a^+}$ $\lim_{x \to a^-}$ En las editoriales Santillana, Teide y Magisterio.

$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}}$ $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}}$ En la editorial Anaya.

Como ya se ha dicho, los límites infinitos se presentan en todos los textos; todos consideran, excepto Teide, los casos +∞ y -∞, lo que se refleja en la notación simbólica correspondiente.

El uso del lenguaje de entornos o de valor absoluto viene determinado por el peso que los autores dan a las definiciones topológica o métrica en sus respectivos textos. En Anzola y otros (1976) y en Boadas y otros (1976), en los que la definición topológica juega un papel preponderante, se utilizan los entornos aunque con distinta notación: $E(l,\varepsilon)$, en el primero, y $E_r(l)$, en el segundo.

Sin embargo, al final de periodo, los autores tienen una tendencia a la simplificación del simbolismo, existiendo un aumento en el uso de expresiones del tipo: «muy próximo a», «por grande que sea», «mayor que cualquier número real por grande que sea», «valores muy cercanos a», etc.

Análisis didáctico-cognitivo

En los prólogos de los libros del bloque B, los respectivos autores expresan sus intenciones coincidentes en todos ellos. La idea predominante es presentar las matemáticas desde la corriente de la matemática moderna, con rigor, pero, «al mismo tiempo evitar caer en un excesivo rigorismo que harían ininteligibles las citadas cuestiones para los alumnos de esta edad» (Anzola et al., 1976) o «con el lenguaje y el rigor necesarios, pero al mismo tiempo viables para los alumnos» (Boadas et al., 1976). Sin embargo, a nuestro juicio, el rigor se mantiene a lo largo de los textos; hay una disonancia entre los propósitos expresados por los autores y su concreción al presentar el concepto de *límite.*

Los autores presentan una lista de objetivos más o menos operativos al comienzo de cada unidad o lección. Así, en Guillén y otros (1976), los objetivos que se pretenden alcanzar son:

1) Definir límite funcional finito. Definir límites laterales por la derecha y por la izquierda.

2) Definir límite funcional infinito.

3) Definir límite funcional en el infinito.

El método predominante para alcanzar estos objetivos consiste en presentar muchos y variados ejemplos y ejercicios intercalados en el texto. Al final de cada capítulo aparecen numerosos ejercicios de revisión, recapitulación y ampliación. En algunos casos (Boadas et al., 1976) se dirigen a «aquellos alumnos más exigentes consigo mismos o a aquéllos que necesiten de repeticiones o mayor práctica.» Por su parte, Anzola y otros (1976) presentan al final del libro una parte de complementos y ampliación «concebidos para atender a las diferencias individuales». De acuerdo con las ideas expresadas en los prólogos de los respectivos libros, las capacidades que se pretenden desarrollar son las siguientes: aprendizaje de las definiciones, no sólo desde el punto de vista verbal, sino desde el simbólico, manipulación de símbolos, reglas lógicas, conocimiento del método deductivo, adquisición de las herramientas necesarias para la resolución de ejercicios y comprensión de algunas propiedades fundamentales. Será en COU cuando estas habilidades se consoliden.

Aunque en los libros del bloque D se sigue desarrollando el plan de estudios de 1975, hay en ellos un enfoque distinto, ya que, como se ha dicho anteriormente, participan de las ideas derivadas de la LOGSE. Así, en estos libros observamos las siguientes características:

a) Importancia concedida a la motivación, ya que «los conceptos matemáticos surgen de modo natural del deseo de explorar cuantitativamente la realidad» (Guzmán y Colera, 1989, prólogo).

b) El apoyo en la historia de las matemáticas y en sus aplicaciones.

c) La presentación intuitiva de los conceptos antes de su desarrollo formal.

d) La actividad intensa de los alumnos a través de la realización de numerosos ejercicios y problemas, siendo éstos de diferentes tipos.

e) La conexión con la realidad y con otras ciencias, que se manifiesta en la presentación de diversos fenómenos que se pueden organizar desarrollando los conceptos matemáticos.

f) El énfasis puesto en los procedimientos de resolución de problemas.

g) La incorporación de apoyos didácticos como resúmenes, utilización de la calculadora, orientación en el uso de herramientas matemáticas y ejercicios de autoevaluación.

h) La presentación de anécdotas, hechos curiosos y llamativos para resaltar el aspecto social, lúdico y cultural de las matemáticas.

Las capacidades que se pretenden desarrollar son, entre otras: aprendizaje comprensivo de la definición partiendo de las intuiciones hasta llegar a su formalización, desarrollo de estrategias de pensamiento (experimentar, observar, buscar pautas y regularidades, formular conjeturas, demostrar), comprensión, interpretación y predicción de ciertos fenómenos y reconocimiento de la aplicabilidad de las matemáticas a otras ciencias.

Todo esto configura una nueva generación de libros de texto, donde se notan las influencias de ciertas corrientes de la didáctica de las matemáticas, como la fenomenología didáctica, el aprendizaje por descubrimiento y la resolución de problemas.

Análisis fenomenológico

En los libros del bloque B no hay referencias a fenómenos propios de otras ciencias distintas de las matemáticas, y dentro de la propia matemática se observa un deslizamiento hacia la manipulación de símbolos y aspectos puramente formales, en los que se ha perdido el significado de los diferentes conceptos.

Sin embargo, en los libros del bloque D, son continuas las referencia tanto a situaciones de la vida diaria como a diversos fenómenos de la naturaleza en los cuales interviene el concepto de *límite*, especialmente en el libro de 2º de BUP de Colera y Guzmán (1994). Las situaciones planteadas son las siguientes, referidas a la relación entre:

- El volumen de una caja y su lado
- El área de un cuadrado y su lado
- El peso de un depósito y los litros de agua que contiene
- La altura de rectángulos inscritos en un ángulo y su base
- El porcentaje de audiencia de la televisión y la hora del día
- La altura del agua de un depósito y el tiempo que tarda en llenarse
- El aumento que proporciona una lupa y la distancia de ésta al objeto
- La temperatura del agua que en el inicio está en ebullición y el tiempo de enfriamiento a partir de ella
- El volumen de una esfera y su radio
- La intensidad del sonido y la distancia al foco

Por su parte, en el libro de COU de Guzmán y Colera (1989), al final del capítulo aparece un punto dedicado a la aplicabilidad de la matemática donde se presentan las relaciones entre las matemáticas y ciencias naturales y se argumenta sobre la aplicación de las matemáticas a las mismas. Se observa, por consiguiente, que en estos libros se produce una ruptura en la concepción de las matemáticas como ciencia en contraposición con las ideas bourbakistas. Las matemáticas, además de los aspectos formales, son un instrumento para comprender, interpretar y predecir diversos fenómenos; esta concepción se refleja a lo largo de ambos textos y, en particular, al tratar el concepto de *límite*.

Análisis del libro del Grupo Cero[1]: Matemáticas de Bachillerato (Volumen 2)

Análisis conceptual

En este libro no hay ningún capítulo especial dedicado al *límite* (ni a la *continuidad*), sólo hay un apéndice al final del mismo. Ambos conceptos están difuminados a lo largo de todo el libro.

La notación de *límite* aparece por primera vez al tratar la velocidad instantánea en el capítulo dedicado a las derivadas, pero se trata solamente de una notación, en ningún caso de una definición. Posteriormente en el mismo capítulo aparece la definición de *derivada* como un límite. Más adelante, dentro del capítulo sobre el estudio sistemático de las gráficas trata sobre asíntotas verticales, utilizando términos y notación de *tender hacia infinito* y de *aproximación*.

En un capítulo posterior, dedicado a sucesiones y límites, se enfatiza la idea de sucesión como una función de N en R, tratando los límites de sucesiones como un caso particular de límite funcional. Finalmente, dedica el apéndice a la formalización de los conceptos de *límite* y *continuidad*, llegando a la definición topológica de *límite* a partir de la idea de *aproximación*.

Análisis didáctico-cognitivo

Según los planteamientos del Grupo Cero (1985), el aprendizaje debe predominar sobre la enseñanza. Las teorías constructivistas del aprendizaje subyacen en las ideas de este grupo; además, estas ideas influirán en la configuración del currículo oficial actualmente vigente. Por ello se trata de que sea el alumno el que investigue, conjeture y rectifique, si es preciso, para alcanzar el conocimiento, siendo labor del profesor la de gestionar el aprendizaje. Por esto, el libro no busca señalar un programa, sino aportar materiales para el trabajo de los alumnos. En palabras de los autores: «en una clase activa de matemáticas, la tarea primordial es hacer matemáticas, es decir, matematizar». Y entienden hacer matemáticas como la actividad intensa del alumno estudiando diversos fenómenos, con los conceptos matemáticos que sirven para organizarlos e interpretarlos. A través de estos planteamientos se pretende desarrollar en los alumnos capacidades inéditas hasta ese momento en los libros de texto como: inducir, conjeturar, experimentar, analizar, rectificar los propios errores, sintetizar, bajo la tutela del profesor.

Análisis fenomenológico

El texto se desarrolla de acuerdo con la aproximación fenomenológica de Freudenthal, incluso en el prólogo del libro se hace la siguiente cita de este autor: «la mentalidad matemática se expresa en la tendencia a matematizar las matemáticas. Por supuesto que los estudiantes deben aprender a matematizar situaciones reales. Matematizar situaciones matemáticas puede ser el final, pero no el comienzo. Para muchos, el objetivo de la enseñanza de las matemáticas es introducir a los muchachos en un sistema de matemáticas, sistema que, innegablemente irradia encanto estético, el cual, sin embargo, no puede ser captado por personas que no tengan un profundo conocimiento de las matemáticas.» Hay, por consiguiente, a nuestro juicio, una diferencia profunda con el resto de los autores, todos hablan de hacer matemáticas, pero esta idea difiere esencialmente desde la perspectiva que la considera el Grupo Cero y la perspectiva en que la consideran los demás. Mientras que los autores anteriormente analizados se «encierran» en la misma matemática como ciencia y para ellos eso es hacer matemáticas, el Grupo Cero, siguiendo las ideas de Freudenthal, parte de una serie de fenómenos, de la física, economía, etc., que matematizan. En palabras de los mismos autores: «no tratan de desarrollar un cuerpo de ideas matemáticas y sólo después introducir varias aplicaciones, sino que las aplicaciones deben surgir de un modo natural, alejando la posibilidad de toda separación ficticia entre teoría y práctica». Por ello se rompe la secuencia ejemplo - definición - propiedades - ejercicios, convirtiéndola en presentación de diversos fenómenos - análisis de estos fenómenos - introducción del concepto organizador - nuevos fenómenos - ejercicios.

CONCLUSIONES

Aunque, en este artículo, no se han presentado pormenorizadamente los planes de estudio, se puede, no obstante, hacer una breve consideración sobre los mismos. En general, y hasta la última reforma derivada de la LOGSE, el currículo oficial se caracteriza por ser cerrado, con indicaciones precisas acerca del contenido, dispersas sobre la metodología y prácticamente nulas sobre la evaluación. Además, han existido periodos caracterizados por el carácter experimental de los programas, como ha sido el caso de la matemática moderna o de las ideas constructivistas preconizadas en la última reforma. Se puede afirmar, entonces, que hay como «puntos de transición» en el cambio de estos programas oficiales. Sin embargo, a pesar del carácter cerrado de los programas, se observa que el currículo no ha sido uniforme en cada una de las épocas; al analizar los libros de texto, hemos demostrado las diferencias notables existentes entre ellos, a pesar de que en cada época deberían ajustarse a las disposiciones oficiales.

También se observa, tanto en los programas oficiales como en los libros de texto, la influencia de las corrientes internacionales. Después de un primer periodo, donde la atención estaba puesta en el rigor de las definiciones, se continuó con el de la matemática moderna, con el acento puesto en la formalización. Superado este periodo, se observa que los autores de los libros de texto tratan de presentar los conceptos conectados a situaciones con la intención de dotarlos de un sentido.

En los puntos de transición a los que hemos hecho referencia anteriormente, aparecen libros de texto que marcan diferencias con el periodo anterior; en particular, nos referimos a los textos piloto elaborados por la Comisión para el Ensayo Didáctico sobre la Matemática Moderna en los institutos nacionales de enseñanza media y los libros del Grupo Cero de Valencia. También se constata el paso progresivo de los «libros de autor», como los de Rodríguez San Juan, Sixto Ríos y Marcos de Lanuza, a los «libros de editoriales», como Magisterio Español, SM, Anaya y Santillana, por citar las cuatro más importantes del mercado español, durante los últimos veinticinco años. Los libros de texto son productos de cada época, con su lenguaje y sus justificaciones; además, se observa que términos como *intuición, aplicación de la matemática, matematización, rigor* tienen distintos sentidos en cada uno de los periodos considerados, e incluso en cada periodo, de unos autores a otros.

Haciendo hincapié en el límite, tanto en los programas oficiales como en los libros de texto, se observa una evolución desde su consideración ligado al concepto de *función* (que se identifica en el primer periodo con el de *variable*), pasando por un largo periodo en el que tiene entidad propia, hasta las últimas reformas en las que se enfatiza el carácter instrumental del mismo. Hay un periodo inicial (hasta los años cincuenta) en el que se dan definiciones en las que se mezcla el concepto de *variable* y el concepto de *función*, seguido de un periodo en el que, aunque se clarifica el concepto de *límite*, este concepto se define mediante sucesiones. En el periodo de la matemática moderna se pone el énfasis en la presentación topológica del concepto, aunque hay una traducción inmediata a la definición métrica; sin embargo, esta tendencia no es general en todos los autores. Con la implantación del BUP derivado de la Ley General de Educación (LGE), se consolida la tendencia de la matemática moderna, considerando el concepto de *límite* en sí mismo, definiéndose como *límites laterales* y presentando todos los casos finitos e infinitos del límite y de la variable. En los últimos libros, antes de la entrada en vigor de los bachilleratos LOGSE, aparece una tendencia a presentar el concepto de *límite* en el marco de fenómenos de la naturaleza o situaciones de la vida diaria.

NOTAS

* Este artículo es parte de un proyecto de investigación financiado por el Centro de Investigación y Documentación Educativa (CIDE) del MEC y por la Junta de Castilla y León.

[1] Aunque el análisis del texto del Grupo Cero (1985) aparece después del de los bloques B y D por su carácter singular, hay que advertir que su publicación es anterior a todos los del bloque D. De hecho hay una influencia clara de este libro sobre los libros posteriores.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CHEVALLARD, Y. (1985). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD, Y. y JOHSUA, M.A. (1982). Un exemple d'analyse de la transposition didactique: La notion de distance. *Recherche en Didactique des Mathématiques,* 3(1), pp. 159-239.

CHOPPIN, A. (1993). L'histoire des manuels scolaires. Un bilan bibliométrique de la recherche française. *Histoire de l'Education,* 58, pp. 165-185.

DORMOLEN, J. VAN (1986). Textual Analysis, en Christiansen, B., Howson, A.G. y Otte, M. (eds.). *Perspectives on Mathematics Education,* pp. 141-171. Dordrecht: Reidel.

DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine.* Berna: Peter Lang.

HOWSON, G. (1995). *Mathematics Textbooks: A Comparative Study of Grade 8 texts.* Vancouver: Pacific Educational Press.

LOWE, E. y PIMM, D. (1996). 'This is so': a text on texts, en Bishop, A., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. y Laborde, C. *International Handbook of Mathematics Education,* pp. 371-410. Dordrecht: Kluwer.

OTTE, M. (1986). What is a Text?, en Christiansen, B., Howson, A.G. y Otte, M. (eds.). *Perspectives on Mathematics Education,* pp. 173-204. Dordrecht: Reidel.

PIMM, D. (1987). *Speaking mathematically.* Nueva York: Routledge y Kegan Paul. Traducción cast. (1990). *El lenguaje matemático en el aula.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia-Ediciones Morata.

PIMM, D. (1994). Mathematics classroom language form, function and force, en Bielher, R., Cholz, R.W., Sträßer, R. y Winkelmann, B. (eds.). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline,* pp. 159-169. Dordrecht: Kluwer.

PUIG, L. (1997). Análisis fenomenológico, en Rico, L. (coord.). *La educación matemática en la enseñanza secundaria,* pp. 61-94. Barcelona: ICE. Universitat de Barcelona - Horsori.

RICO, L. y SIERRA, M. (1994). Educación matemática en la España del siglo XX, en Kilpatrick, J., Rico, L. y Sierra, M. *Educación matemática e investigación.* Madrid: Síntesis.

RICO, L. y SIERRA, M. (1997). Antecedentes del currículo de matemáticas, en Rico. L. (ed.). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria.* Madrid: Síntesis

SIERRA, M., GONZÁLEZ, M.T. y LÓPEZ, C. (1997). *Los conceptos de* límite *y* continuidad *en la educación secundaria: transposición didáctica y concepciones de los alumnos.* Salamanca: Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales. Universidad de Salamanca (documento inédito).

SCHUBRING, G. (1987). On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as textbook author. *For the Learning of Mathematics,* 7(3), pp. 41-51.

STEINER, H.G. (1987). Philosophical and epistemological aspects of mathematics and their interaction with theory and practice in mathematics education. *For the Learning of Mathematics,* 7(1), pp. 7-13.

TAVIGNOT. P. (1993). Analyse du processus de transposition didactique. Application à la symétrie orthogonale en sixième lors de la réforme de 1985. *Recherche en Didactique des Mathématiques,* 13(3), pp. 257-294.

[Artículo recibido en mayo de 1998 y aceptado en marzo de 1999.]