MODELO DE COMPETENCIAS PARA EL CAMPO CONCEPTUAL ADITIVO DE LAS MAGNITUDES DISCRETAS RELATIVAS

SOCAS, M.M., HERNÁNDEZ, J. y NODA, A.
Universidad de La Laguna.

SUMMARY

In this work we propose a competence model that allows us to organize the additive conceptual field for relative discrete magnitudes from the perspective of problem solving. We start off from Piaget's concrete operations subperiod where logical and infralogical groupings, arithmetical group Z and measuring are involved. The organizing features of the model will be the epistemological, phenomenological and cognitive elements associated with this field. This organizational proposal constitutes a competence model for the additive conceptual field which integrates those elements and relations given in this field, and which leads to a new classification of different situations and problems associated with it, as well as incorporating and explaining other research, especially that research made in the field of whole numbers by Carpenter and Moser (1983) and others, and the categories put forward by Vergnaud (1982). Furthermore, our proposal facilitates relations with a possible performance model.

INTRODUCCIÓN

En el recreo, Juan ganó 6 canicas y Pedro ganó 5 más que Juan. ¿Cuántos canicas ganó Pedro?

Si analizáramos este problema desde los enfoques teóricos básicos –categorías semánticas (Carpenter y Moser, 1983) o campo conceptual aditivo (Vergnaud, 1982)–, no pertenecería a ninguna categoría semántica, salvo que aceptáramos la comparación entre variaciones, y tampoco estaría identificado en las categorías establecidas por Vergnaud para el campo conceptual aditivo de las magnitudes relativas, al tratarse de una relación entre transformaciones.

En estos modelos más representativos que regulan el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas, encontramos que las categorías semánticas se limitan a situaciones donde las magnitudes son discretas absolutas y las categorías de Vergnaud dejan fuera diferentes problemas que tienen interés en el contexto escolar o sitúan en la misma categoría problemas que aparentan tener estructuras diferentes.

Plantearse la organización del campo conceptual aditivo de las magnitudes relativas y tratar de caracterizarlo para determinar un marco instrumental y explicativo que dé respuestas homogéneas a las diferentes situaciones parece adecuado.

A partir del estudio de los aspectos epistemológicos, fenomenológicos y cognitivos que configuran el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas, se analizan los elementos y relaciones que se dan en el campo y se propone un modelo de competencias. El modelo de competencias es un modelo formal caracterizado por los elementos epistemológicos, fenomenológicos y cognitivos asociados al campo conceptual, que aborda tanto las magnitudes escalares discretas como las absolutas relativas, y considera el grupo aditivo y ordenado de los números enteros como un buen modelo para los fenómenos que se dan en el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas relativas bajo el cual se pueden dar explicaciones homogéneas a las diferentes situaciones y problemas que se dan en el estudio.

Este estudio presenta una organización exhaustiva y aporta una nueva clasificación de las situaciones y problemas, basada en las cantidades, medidas y números enteros, del dominio de aplicación del campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS ADITIVOS

Los problemas que aquí consideramos son los problemas aritméticos elementales verbales (PAEV) y, en particular, los problemas aditivos. Constituyen éstos, hoy en día, un dominio de investigación con entidad propia como se pone de manifiesto en múltiples publicaciones (Fuson, 1992). Una primera revisión en nuestro país, la encontramos en Puig y Cerdán (1988). Posteriormente, Castro, Rico y Gil (1992) han realizado una revisión y categorización de este campo, poniendo de manifiesto los cuatro enfoques de investigación existentes sobre problemas aritméticos aditivos de enunciado verbal que requieren un determinado funcionamiento cognitivo: variable sintáctica, variable lingüística, sentencias abiertas y enfoque semántico.

Entre estos enfoques teóricos básicos que organizan este dominio de investigación cabe destacar el enfoque de las estructuras semánticas de los enunciados de los problemas que se sustenta fundamentalmente en las teorías cognitivas del procesamiento de la información (Heller y Greeno, 1978; Carpenter y Moser, 1983) y el enfoque desde las relaciones aditivas que se dan en los problemas verbales aritméticos, mediante el uso de medidas, transformaciones y relaciones estáticas, en el marco de la teoría de los campos conceptuales (Vergnaud y Duran, 1976; Vergnaud, 1982).

En el estudio de los problemas aritméticos aditivos de una sola operación existen varias categorías de problemas. Inicialmente, Heller y Greeno (1978) establecieron tres categorías semánticas: cambio, combinación y comparación. Posteriormente, Carpenter y Moser (1983) añaden la categoría de igualación, llegándose a enumerar veinte situaciones diferentes. Fuson (1992) aumenta el número de situaciones a veinticuatro al considerar dos tipos de combinación: conceptual o física.

Los trabajos de Vergnaud y Duran (1976) y de Vergnaud (1982) sitúan la resolución de problemas aritméticos verbales con números naturales y enteros dentro de lo que se denomina *campo conceptual aditivo*. Establecen las diferentes relaciones estáticas y obtienen ciertas evidencias empíricas sobre las respuestas de los estudiantes, las dificultades que tienen y los errores que cometen.

Vergnaud y Duran (1976) pretenden aportar «un marco teórico suficientemente riguroso para que el estudio de la resolución de problemas aritméticos salga del empirismo que lo suele caracterizar» (p. 128). Entre otros aspectos, Vergnaud (1982, pp. 43-45) plantea la existencia de seis grandes categorías de relaciones numéricas aditivas: composición de medidas (I), transformación de una medida en otra medida (II), relación estática entre dos medidas (III), composición de dos transformaciones (IV), transformación de una relación estática (estado relativo) en otra relación estática (estado relativo) (V) y composición de dos relaciones estáticas (estados relativos) (VI). Los dos autores realizan diferentes estudios experimentales, fundamentalmente sobre problemas de la categoría II y IV, obteniendo resultados dispares que son difícilmente justificables desde el marco teórico que se propone; por ejemplo, han encontrado diferencias de varios años en la resolución de problemas aparentemente similares desde el punto de vista teórico. Estos resultados les llevan a concluir que: «La aritmética elemental aditiva no forma un bloque homogéneo, sino que se compone de relaciones heterogéneas que son tratadas de distinta forma por los niños e incluso por los adultos» (Vergnaud y Duran, 1976, pp. 124-125).

El propósito de este trabajo es ampliar el marco teórico existente y mostrar que el grupo aditivo y ordenado de los números enteros es un buen modelo que caracteriza el campo conceptual de las magnitudes discretas, y que las categorías de cambio, combinación y comparación son pertinentes para la clasificación de los problemas.

CAMPO CONCEPTUAL Y MODELOS DE COMPETENCIAS

Vergnaud (1993) indica que un campo conceptual está formado por dos conjuntos básicos: un conjunto de situaciones y el conjunto de conceptos que permiten analizar esas situaciones como tareas matemáticas.

Castro (1994), al organizar la línea de investigación denominada *pensamiento numérico*, amplía las consideraciones de Vergnaud al caracterizar el campo conceptual numérico, implicando a los fenómenos de enseñanza y a los aspectos curriculares en esta aplicación de conceptos, relaciones y sistemas simbólicos a un conjunto de situaciones, fenómenos, cuestiones y problemas para ser analizados como temas matemáticos.

La organización de los campos conceptuales o de líneas de investigación tienen como finalidad explicitar los significados completos que aparecen durante los procesos de enseñanza-aprendizaje; por tanto, éstos deben ser un marco global que combine tanto las exploraciones formales como funcionales. Hay, pues, dos componentes esenciales: el componente formal, que procede de todas las evidencias acumuladas tanto de la lógica de la disciplina como de las tendencias de los sujetos en un campo conceptual, y el componente funcional que procede del entorno de enseñanza en el que se está llevando a cabo el proceso de aprendizaje.

Para su análisis parece necesario considerar estos dos componentes como modelo de competencias (MC) y modelo de ejecución (ME), respectivamente.

El modelo de competencias se referiría al aspecto formal del campo conceptual tanto en su aspecto epistemológico como en sus aspectos cognitivos; es decir, simularía los procesos cognitivos implicados en la ejecución competente de un usuario ideal del campo conceptual analizado.

Ahora bien, un problema importante para la educación matemática es saber cómo ejecuta el usuario real las acciones propias de ese campo conceptual, donde las creencias extramatemáticas, concernientes al ejecutor y a la situación donde tiene lugar la actividad, juegan un papel fundamental en la determinación de cómo se realiza, se identifica y se comprende el campo conceptual tratado.

Es necesario distinguir con claridad entre la función y las propiedades del modelo de competencias (MC) y del modelo de ejecución (ME). Ambos relacionan signos y significados, pero ME se sirve de informaciones que están más allá de la asociación signos-significados y de las estructuras cognitivas que subyacen –determinadas por el modelo de competencias–, y opera bajo los condicionamientos de la memoria, del tiempo, de la organización de estrategias perceptivas –condicionados por el contexto y por creencias extramatemáticas– etc., que no son asuntos del MC.

En este sentido, debemos señalar los planteamientos de Filloy (1990), que propone concentrarse en *modelos teóricos locales* adecuados a fenómenos específicos, pero capaces de tomar en consideración todos los elementos: gramática, lógica matemática, modelos de enseñanza, modelos cognitivos y pragmática, organizados en torno a tres componentes: modelos de enseñanza, modelos de los procesos cognitivos implicados y modelos de competencias formales, que arrojan luz sobre las interrelaciones y las oposiciones que ocurren durante la evolución de todos los procesos pertinentes relacionados con cada uno de los tres componentes.

En este trabajo nos referiremos al modelo de competencias para el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas, es decir, a representaciones idealizadas que están determinadas por el campo conceptual subyacente (que en nuestro caso, serán los números enteros). Este modelo de competencias está constituido por:

– elementos epistemológicos y fenomenológicos asociados al campo conceptual aditivo de los números naturales y enteros;

– elementos cognitivos asociados a dicho campo.

Los aspectos epistemológicos tratan de la organización lógico-formal de los números naturales y enteros, es decir, de los conceptos, relaciones y procedimientos que le caracterizan; y los aspectos fenomenológicos tratan del conjunto de situaciones y problemas que pueden ser analizados mediante la organización lógico-formal de los números naturales y enteros.

En los aspectos cognitivos consideramos tanto las funciones cognitivas específicas del campo conceptual como los aspectos estructurales de las actividades de aprendizaje. Para su análisis lo organizamos en la construcción de los conceptos numéricos y de medida, y el esquema partes-todo.

LA CONSTRUCCIÓN DE LOS CONCEPTOS NUMÉRICOS Y DE MEDIDA

El desarrollo del conjunto de situaciones y de los conceptos que permiten analizar esas situaciones como tareas matemáticas en el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas, según las teorías de Piaget (1978), se encuentra ubicado en el período de las operaciones concretas (7-11 años). El punto de partida lo constituye la idea de que cualidad y cantidad son inseparables, y ello tanto desde el punto de vista genético como desde el punto de vista del análisis lógico o axiomático.

Piaget caracteriza las operaciones elementales de reunión y separación compatibles con la cuantificación intensiva y con las estructuras cognoscitivas llamadas agrupamientos. El agrupamiento es una estructura híbrida entre la de grupo y retículo y es la estructura psicológica que formaliza las organizaciones del pensamiento natural. Hay nueve agrupamientos diferentes que describen la organización de las operaciones lógicas (es decir, las operaciones que se ocupan de las clases y las relaciones lógicas): un agrupamiento menor y ocho mayores. Estos agrupamientos se adecuan también a la organización de lo que Piaget llama operaciones infralógicas, que define como acciones cognoscitivas vinculadas con las relaciones de posición y distancia y de partes-todo, que atañen a objetivos y configuraciones espacio-temporales concretos (Flavell, 1981, p. 189). Así, a cada agrupamiento lógico, le corresponde uno infralógico. Las operaciones lógicas tienen como síntesis el número, y las operaciones infralógicas, la medición.

A modo de resumen hay señalar que el grupo aditivo de los números enteros es, pues, el producto de una fusión operatoria entre los agrupamientos cualitativos de las clases y las relaciones asimétricas, pero por abstracción de las cualidades diferenciables sobre las que se hacen estos agrupamientos. Las clases, las colecciones asimétricas y los números forman un sistema operatorio coherente, a la vez único por sus mecanismos y diferenciado por las tres posibilidades de coordinación de las semejanzas, las diferencias o ambas al mismo tiempo.

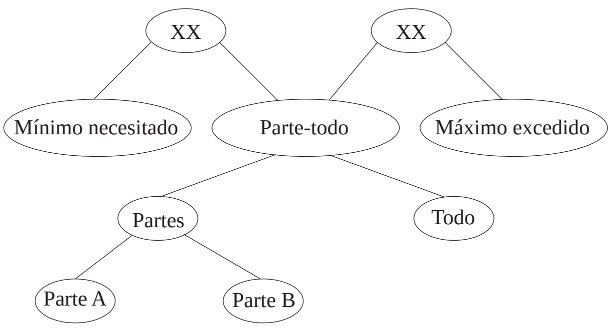
Y desde el punto de vista del aprendizaje matemático, podemos interpretar que debe darse una cierta simultaneidad en la construcción individual de los conceptos numéricos y métricos y ello viene avalado tanto por el isomorfismo existente entre sus estructuras como por la equivalencia del proceso de construcción seguido.

EL ESQUEMA PARTES-TODO

La noción de *esquema* es de gran importancia en la psicología cognitiva actual; se considera como un elemento fundamental dentro de la estructura cognitiva. Sus orígenes, sin embargo, son lejanos. Retomamos en este trabajo la idea inicial de Piaget, referenciada en Flavell (1981), y que caracteriza el esquema como una estructura cognoscitiva que se refiere a una clase semejante de secuencias de acción, las que forzosamente son totalidades fuertes, integradas y cuyos elementos de comportamiento están íntimamente interrelacionados. En resumen, el esquema es el contenido de la conducta organizada y manifiesta que lo designa, pero con importantes connotaciones estructurales que no son intrínsecas al mismo contenido concreto. Aunque las palabras *esquema* y *concepto* no son intercambiables, Piaget, reconoció que había cierta semejanza entre ellas.

Resnick (1983, pp. 114-115) presenta la siguiente figura como el esquema parte-todo que ha sido utilizado en diferentes investigaciones sobre el desarrollo del conocimiento del número natural (Briars y Larkin, 1981; Resnick, Greeno y Rowland, 1980; Riley, Greeno y Heller, 1983) y en la resolución de problemas aritméticos verbales (Riley, Greeno y Heller, 1983; Carpenter y Moser, 1982; Nesher, 1982; Vergnaud, 1982).

Figura 1



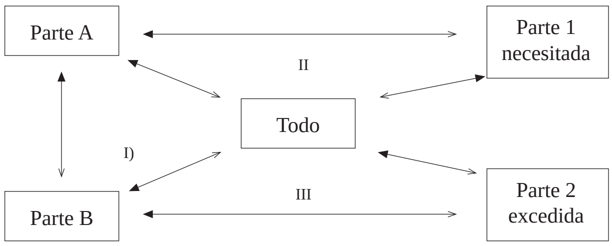
El esquema especifica que una cantidad (el todo) puede ser dividida (en partes), mientras que la combinación de partes, que no excedan ni falten en el todo. Por implicación, las partes pueden ser incluidas en el todo. El esquema parte-todo proporciona una interpretación del número que es similar a la definición del concepto operacional del número dada por Piaget (1941), y proporciona una herramienta útil en la resolución de problemas aritméticos verbales con números naturales.

Después de estas breves consideraciones se nos plantea el problema de caracterizar mediante una representación gráfica estas organizaciones y reglas de acción que se dan en los procesos numéricos y de medida en el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas relativas.

De forma gráfica representaremos las relaciones entre las partes y el todo con el diagrama de la figura 2.

El esquema se organiza en tres grupos (I, II, III), donde I representa todas las operaciones aditivas posibles de unión entre las partes y de separación del todo, y los grupos II y III, las relaciones asimétricas, es decir, las relaciones entre la parte y el todo expresado por sus diferencias ordenadas. Hemos mantenido en el esquema la diferencia entre parte 1 necesitada y parte 2 excedida, no sólo por mantener la simetría del mismo, sino por entender, como Resnick, que la parte necesitada implica un proceso que va de la parte menor a la mayor (el todo) y está asociada a los procedimientos más primitivos de contar progresivamente, y que la parte excedida va de la parte mayor (todo) a la parte menor y está asociada al procedimiento de contar regresivamente.

Figura 2
Diagrama aditivo del esquema partes-todo.



Está claro que este diagrama aditivo del esquema partes-todo, que tiene bastante parecido al presentado por Resnick, parece referirse de manera clara al campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas absolutas; sin embargo, nuestra idea es utilizarlo tanto con cantidades orientadas presentes (números positivos) como con cantidades orientadas ausentes (números negativos) y que, en la mayoría de los casos, la diferencia entre negativo y positivo difiere respecto a las expectativas del sujeto: descubrimiento de una ausencia o una orientación en ese sentido en lugar de la presencia u orientación en el otro sentido. Es necesario dotar a este diagrama de una interpretación explícita de todas las relaciones aditivas que se dan en el supuesto de que las partes y el todo puedan ser consideradas no sólo como cantidades orientadas presentes (positivas) sino también orientadas ausentes. Estas relaciones quedan claramente determinadas por la relación de Chasles (1793-1880), uno de los creadores de la geometría moderna, relación que formulamos en una dimensión como:

Relación de Chasles para tres puntos:

Todo triplete de puntos A, B y C en una recta, cualquiera que sea su posición respectiva, verifica la relación:

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

Es una relación entre las medidas algebraicas de los bipuntos:

$$\{\overline{AC}\}, \{\overline{AB}\} \text{ y } \{\overline{BC}\}$$

por tanto, una propiedad de estos bipuntos, independiente del origen elegido en la recta. En efecto, este origen no figura en la relación; se trata, pues, de una propiedad intrínseca de los puntos A, B y C. Esta *relación se puede generalizar cuando se consideran n puntos.* Caratini, R. (1970).

Podemos considerar las siguientes situaciones que se exponen en la figura 3.

Figura 3

A	B	C	(1)		A	C	B	(2)
B	A	C	(3)		B	C	A	(4)
C	A	B	(5)		C	B	A	(6)

Estas seis situaciones desarrollan todas las posibles uniones entre las partes y la posible separación del todo, tanto si las cantidades están orientadas presentes (positivas) como orientadas ausentes (negativas).

De lo anterior, podemos señalar que los elementos cognitivos asociados al campo conceptual de los números naturales y enteros quedan caracterizados por:

– El proceso de construcción de los conceptos numéricos y de medida donde las clases, relaciones asimétricas y los números enteros constituyen un sistema operatorio aditivo coherente, isomorfo al de las medidas enteras discretas.

– El esquema aditivo partes-todo, tanto para las cantidades positivas como para las cantidades negativas y que está determinado por el diagrama aditivo y la relación de Chasles.

– Las categorías semánticas de cambio, combinación y comparación.

ORGANIZACIÓN DEL CAMPO CONCEPTUAL ADITIVO DE LAS MAGNITUDES DISCRETAS

El propósito es la construcción de un modelo de competencias para el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas, es decir, la elaboración de un modelo teórico que organice este campo conceptual. En definitiva, pretendemos englobar bajo una misma estructura (modelo de competencias) diferentes conceptos y relaciones, a veces no clasificados, que regulan el funcionamiento del campo conceptual aditivo, tomando en consideración el conjunto de los números enteros.

El modelo de competencias debe responder a las exigencias del campo conceptual aditivo y debe permitir entre otras cosas:

• Integrar los elementos y relaciones que se dan en el campo conceptual de las magnitudes discretas enteras.

• Elaborar una nueva y exhaustiva clasificación de las situaciones y problemas considerados en el campo conceptual.

• Integrar y explicar de forma plausible resultados de otras investigaciones.

• Facilitar la relación con el modelo de ejecución (ME).

Nos vamos a referir a las tres primeras en lo que sigue. Tomaremos como organizadores del campo conceptual aditivo las magnitudes discretas, las relaciones más significativas que se dan en los elementos epistemológicos, fenomenológicos y cognitivos asociados al campo conceptual de los números naturales y enteros.

Procediendo de esta manera obtenemos una primera clasificación del campo conceptual aditivo en dos grandes categorías determinadas por el diagrama aditivo del esquema partes-todo: Las operaciones aditivas (grupo I) y las relaciones asimétricas (grupos II y III).

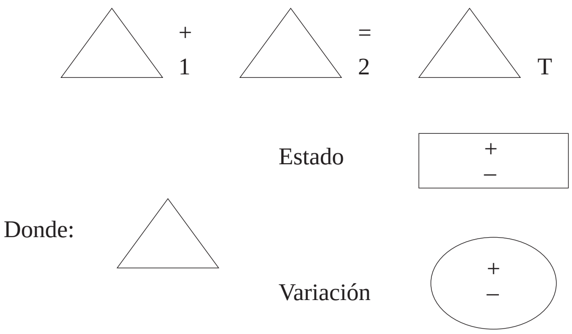
LAS OPERACIONES ADITIVAS

Las operaciones aditivas están representadas por el grupo I del diagrama aditivo del esquema partes-todo y tiene como elementos organizadores a la forma canónica de la operación aditiva $a+b=c$, que correspondería al aspecto epistemológico; a los significados de los fenómenos asociados a los números y a las magnitudes, que especificaremos a continuación y a todas las relaciones posibles entre estos números o magnitudes expresados por la relación de Chasles dentro del diagrama aditivo del esquema partes-todo. Con relación a la forma canónica $a+b=c$, esto nos va a originar siempre tres casos posibles dependiendo de la posición del dato desconocido.

Con relación a los fenómenos asociados utilizaremos la expresión *número = magnitud*, que debe ser interpretada como «número entero equivalente a magnitud discreta relativa», que contiene como casos particulares los números naturales y las magnitudes discretas absolutas, porque, dada una magnitud, podemos garantizar por su misma definición que existe siempre un isomorfismo de ella con el Z-módulo de los números enteros, y este isomorfismo respeta la ordenación total y arquimediana de la magnitud. Por ello vamos a considerar los números enteros, o mejor las cantidades discretas relativas. De esta manera, en lo que sigue, nos referiremos tanto a cantidades como a medidas y, por tanto, a números, aunque los ejemplos serán referenciados con cantidades, ya que son la mayor parte de las actividades y ejemplos con significado concreto que se utilizan en la enseñanza. Estas cantidades pueden ser numéricas o de magnitud y son las que aparecen con un doble sentido o significado, como estado (tengo 6 canicas, debo 6 canicas, etc.), o como variación (gané 6 canicas, perdí 6 canicas, etc.).

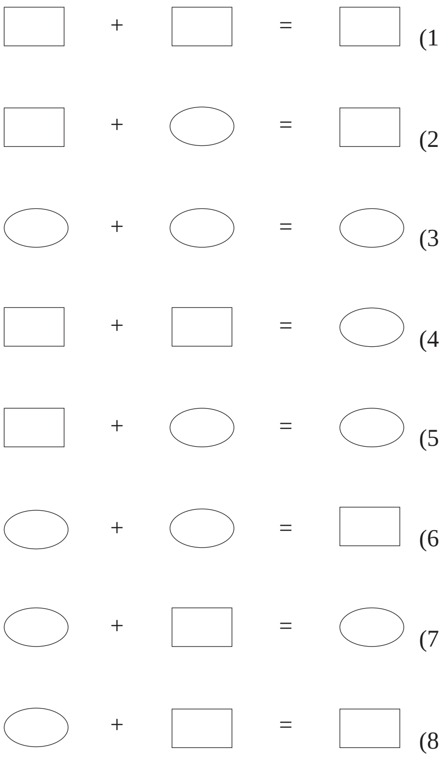
De esta manera, si consideramos la expresión canónica de la estructura aditiva $a + b = c$ y la representamos como se expone en la figura 4, obtenemos todas las relaciones aditivas posibles de los fenómenos asociados:

Figura 4



Es necesario observar que estas ocho relaciones aditivas se pueden reducir a seis en función de las equivalencias entre 2 y 8, y entre 5 y 7 (Fig. 5).

Figura 5



Si hacemos intervenir las relaciones posibles organizadas por el diagrama aditivo del esquema partes-todo mediante la relación de Chasles, obtenemos todas las operaciones aditivas lógicamente posibles del campo

Tabla I

Forma canónica	Número = magnitud	Relación partes-todo	
a + b = c	Estado, variación, mixta	Relación de Chasles	
3	8	6	144
3	6*	6	108

conceptual de las magnitudes discretas, que son en total 144, y, si aceptamos por razones de equivalencia la reducción de los casos posibles, como ya hemos indicado (la de número = magnitud a seis), nos quedan en total 108.

Muchas son las preguntas que nos podemos hacer frente al conjunto de operaciones aditivas lógicamente posibles del campo conceptual de las magnitudes discretas. Algunas se pueden concretar en: ¿Se pueden describir fenómenos en los que intervienen cantidades en todas las relaciones posibles? ¿Se pueden establecer todas las relaciones dadas por Chasles entre las partes y el todo con cantidades orientadas ausentes o presentes, respectivamente? ¿Se pueden y deben hacer particiones más finas dentro de este conjunto de operaciones aditivas lógicamente posibles?

Veamos algunos ejemplos con relación a la primera pregunta. Los fenómenos descritos en 1, 2 y 3 corresponden a los fenómenos habituales recogidos en la literatura sobre este tema; y a continuación presentamos posibles ejemplos de 4, 5 y 6 (Fig. 5).

(4. Rafael tiene 7 canicas en su maleta y 5 en su mesa de noche. ¿Cuántas canicas puede pagar Rafael?

(5. Rafael tiene 7 canicas en su maleta y su tía le regala 5. ¿Cuántas canicas puede pagar Rafael?

(6. La tía de Rafael le regala 5 canicas y él gana 7. ¿Cuántas canicas tiene Rafael?

Con relación a la segunda pregunta se pueden construir ejemplos haciendo intervenir cantidades orientadas presentes (positivas) y cantidades orientadas ausentes (negativas), en los seis casos posibles (Fig. 3).

Con relación a la tercera pregunta sobre clasificaciones más finas, éstas se pueden hacer atendiendo a: *a)* aspectos epistemológicos, por ejemplo, considerando la operación como una operación binaria, generalmente asociada a la teoría de los cardinales, o como una operación unitaria –generalmente asociada a la teoría de operadores; *b)* aspectos fenomenológicos, cantidades como estado, variación o situaciones mixtas; y, por último, atendiendo al esquema partes-todo con la presencia de cantidades orientadas presentes (positivas) u orientadas ausentes (negativas). Pero todo ello debe estar relacionado con el trabajo empírico. No obstante, considerando el trabajo realizado en el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas absolutas, la categorización de las mismas desde una perspectiva global en categorías semánticas como combinación y cambio parecen adecuadas. De esta manera, podemos organizar las 108 operaciones aditivas lógicamente posibles en la forma como se expresa en la tabla II.

Tabla II

	Forma canónica	Número = magnitud	Relación partes-todo	
Combinación	3	1	6	18
Cambio	3	5	6	90

Parece razonable incluir 4, 5 y 6 (Fig. 5) dentro de la categoría semántica Cambio; 2 y 3 estaban ya incluidas por estudios anteriores.

LAS RELACIONES ASIMÉTRICAS

Las relaciones asimétricas están representadas por los grupos II y III del diagrama aditivo del esquema partes-todo (Fig. 2) y tienen como elementos organizadores: la forma canónica de la operación aditiva que ahora toma la expresión a-b=c, que nos va a originar tres casos posibles dependiendo de la posición del dato desconocido.

– Las relaciones sustractivas posibles de los fenómenos asociados ahora se reducen a 1 y 3 (Fig. 5), es decir, a situaciones de comparación entre estados o entre variaciones.

– Las relaciones posibles organizadas por el diagrama aditivo del esquema partes-todo mediante la relación de Chasles ahora se reducen a 2, 3, 4 y 5 (Fig. 3), ya que 1 y 6 quedan descartadas porque no facilitan relaciones de comparación entre las partes.

Si hacemos intervenir todas las relaciones posibles, obtenemos que las relaciones asimétricas (grupo II, parte necesitada) lógicamente posibles del campo conceptual de las magnitudes discretas son veinticuatro.

Tabla III

Forma canónica	Número = magnitud	Relación partes-todo	
a - b = c	-Estado, variación	-Chasles	
3	2	4	24

Análogamente, si hacemos intervenir todas las relaciones posibles para las relaciones asimétricas del grupo III (parte excedida), obtenemos igualmente veinticuatro.

Tabla IV

Forma canónica	Número = magnitud	Relación partes-todo	
a - b = c	-Estado, Variación	-Chasles	
3	2	4	24

LAS OPERACIONES ADITIVAS Y LAS RELACIONES ASIMÉTRICAS Y LAS OTRAS CATEGORÍAS

Corresponde ahora analizar este modelo de competencias para el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas con otras organizaciones de intenciones parecidas, en particular con las que hemos comentado aquí: las categorías semánticas y las categorías de Vergnaud. Por problemas de extensión sólo vamos a establecer la relación con algunas categorías, si bien es fácil comprobar su validez para las otras.

Por ejemplo, para la categoría Cambio, las seis situaciones diferentes estarán identificadas como se expresa en la tabla V, donde las cantidades representan una situación mixta determinada por la relación 2 (Fig. 5), y la relación partes-todo viene determinada por las relaciones 1 («añadir a») y 2 («quitar de») de Chasles (Fig. 3).

Tabla V

Forma canónica	Número = magnitud	Relación partes-todo	Total
a + b = c	-Mixta	(Relación de Chasles)	
3	1	2	6

Al analizar las seis categorías de Vergnaud (1982) dentro del modelo de competencias nos encontramos con la necesidad de reorganizar estas categorías al encontrar categorías aditivas que no corresponden a este nivel estructural y problemas formulados en una categoría que corresponderían a otra, entre otras cosas.

Las categorías I, II, IV y V corresponden dentro del diagrama aditivo del esquema partes-todo a las operaciones aditivas (grupo I) y, dentro de éste, a las operaciones aditivas de combinación, la categoría I, y a las operaciones aditivas de cambio, las categorías II, IV y V. La categoría I de Vergnaud coincide con la categoría de combinar de Carpenter y Moser (1983), y en ella sólo se admite que el número actúe como estado y con valores positivos.

Las categorías II, IV y V estarían dentro de las operaciones aditivas de cambio. La categoría II coincide con la categoría de Cambio de Carpenter y Moser (1983).

En la categoría IV, dos transformaciones se componen en una tercera, considera dieciocho situaciones diferentes de problemas, identificadas como se expone en la tabla VI.

Tabla VI

Forma canónica	Número = magnitud	Relación partes-todo	Total
a + b = c	*Variación	(Relación de Chasles)	
3	1	6	18

En esta tabla, las cantidades representan la situación de variación determinada por la relación 3 (Fig. 5), y la relación partes-todo viene determinada por las seis relaciones posibles de Chasles.

Pensamos que este modelo resuelve los problemas que se plantean a Vergnaud. Con relación a la medida, al situarse en el marco de las magnitudes absolutas (escalares), se encuentra con elementos que son medidas y con elementos que no son medidas, y necesita operar con ellos. De igual manera, al comparar medidas, se encuentra con algunas en forma de estado, como tener 6 canicas y con relaciones estáticas, a veces denominadas estados relativos, como deber 6 canicas. Esto genera una gran cantidad de dificultades en la organización del campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas, por ello parece más razonable situarnos en un marco más general: el de las magnitudes discretas relativas donde todos los elementos serán cantidades o medidas.

La transformación de tiempo que utiliza Vergnaud interviene en algunas categorías como la II o no interviene como en I y en III. Parece razonable pensar que la noción de *transformación* lleva implícita la noción de *tiempo* y que ésta estará asociada a las magnitudes discretas enteras en función de que represente un estado (tiempo presente) o una variación (tiempo pasado o futuro).

Con relación a las relaciones estáticas, las mantienen en su estado inicial en la categoría III, pero cuando intenta que una transformación actúe sobre ella (categoría V) o bien operar con ellas (categoría VI), se encuentra con un doble problema: o bien la reduce a un estado relativo (Pedro debe 6 canicas), que correspondería a problemas de otras categorías, o bien formula problemas de un nivel diferente, lo cual crea una gran heterogeneidad en la organización del campo conceptual considerado.

CONSIDERACIONES FINALES

A lo largo de este artículo hemos hecho una propuesta de organización del campo conceptual de las magnitudes discretas desde el enfoque de la resolución de problemas, situándonos en el subperiodo piagetiano de las operaciones concretas, donde intervienen los agrupamientos lógicos e infralógicos, el grupo aritmético Z y la medición.

Esta propuesta de organización constituye un modelo de competencias para el campo conceptual aditivo que integra los elementos y relaciones que se dan en este campo, permite una nueva clasificación de las diferentes situaciones y problemas del mismo, integra y explica resultados de otras investigaciones y facilita la relación con un posible modelo de ejecución.

El modelo de competencias presenta de manera unificada las categorías semánticas del campo conceptual aditivo discreto, no sólo desde una perspectiva lógico-formal, que se da en las otras categorizaciones, sino también desde la perspectiva de las leyes de composición, de los fenómenos asociados y de las estructuras cognitivas implicadas.

En definitiva, hemos considerado bajo una única estructura (modelo de competencias) diferentes conceptos y relaciones, a veces no clasificados que regulan el funcionamiento del campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas.

Hemos caracterizado un modelo de competencias para el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas relativas, pero sería absurdo considerar este modelo de competencias como un modelo válido para la ejecución. Sin embargo, un modelo de ejecución tiene que incorporar un modelo de competencias como una parte esencial. Los modelos de ejecución se pueden construir de maneras diferentes, pero compatibles con premisas fijas sobre la competencia en la cual se basan.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRIARS, D. J. y LARKIN, J.H. (1981). An integrated model of skill in solving elementary word problems. *Annual Meeting of the Society for Research in Child Development.* Boston.

CARATINI, R. (1970). *Los números y el espacio.* ARGOS Enciclopedia temática, 12. París: Editions Bordas. Barcelona: Argos.

CARPENTER, T.P. y MOSER, J.M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills, en Carpenter, T.P., Moser, J.M. y Romberg, J.M. (eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective,* pp. 9-24. Hillsdale, N.J: Lawrence Erlbaum.

CARPENTER, T.P. y MOSER, J.M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts, en Lesh, R. y Landau, M. (eds.), *Acquisition of Mathematics: Concepts and Processes.* Nueva York: Academic Press.

CASTRO, E., RICO, L. y GIL, F. (1992). Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos. *Enseñanza de las Ciencias,* 10(3), pp. 243-253.

CASTRO, E. (1994). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años)*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

FILLOY, E. (1990). PME algebra research. A working perspective. Conferencia Plenaria, en Booker, G., Cobb, P. y Mendecuti, T. (eds.), *Proceedings of the fourteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. II, pp. 1-33.

FLAVELL, J.H., 1981. *La psicología evolutiva de Jean Piaget.* Barcelona: Paidós.

FUSON, K. C. (1992). Research on Whole Number Addition and Subtraction, en Grouws, D.A. (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* pp. 243-275. Nueva York: MacMillan Publishing Company.

HELLER, J.I. y GREENO, J.G. (1978). *Semantic processing in arithmetic word problem solving.* Paper presentado en Midwestern Psychological Association Convention. Chicago.

NESHER, P. (1982). Levels of description in the analysis of addition and subtraction word problems, en Carpenter, T.P., Moser, J.M. y Romberg, T. (eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective,* pp. 9-24. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum.

PIAGET, J. (1965). *The child's conception of number.* Nueva York: Norton.

PIAGET, J. (1978). *Introducción a la epistemología genética. El pensamiento matemático.* Buenos Aires: Paidós.

PUIG. L. y CERDÁN, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares.* Madrid: Síntesis.

RESNICK, L.B. (1983). A developmental theory of number understanding, en Ginsburg, H.P. (ed.), *The development of mathematical thinking.* New York: Academic Press.

RESNICK, L.B., GREENO, J.G. y ROWLAND, J. (1980). *MOLLY: A model of learning from mapping instruction.* Manuscrito inédito. Pittsburg, PA: University of Pittsburg, Learning Research and Development Center.

RILEY, M.S., GREENO, J.G. y HELLER, J.I. (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic, en Ginsburg, H.P. (ed.), *The development of mathematical thinking.* Nueva York: Academic Press.

VERGNAUD, G. y DURAND, D. (1976). Structures additives et complexité psychogénetique. *Revue Française de Pedagogie,* Vol. 36. Trad. cast., 1983. Estructura aditiva y complejidad psicogenética, en Coll, C., *Psicología genética y aprendizajes escolares.* Siglo XXI, pp. 105-128.

VERGNAUD, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. en Carpenter, T.P., Moser, J.M. y Romberg, T. (eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective,* pp. 9-24. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum.

VERGNAUD, G. (1993). La teoría de los campos conceptuales, en Sánchez, E. y Zubieta, G. (eds.), *Lecturas en didáctica de las matemáticas. Escuela Francesa,* pp. 88-117. México. DF: Cinvestav-IPN.

[Artículo recibido en junio de 1996 y aceptado en octubre de 1997.]