

# UNIVERSITÄT BREMEN

Zentrum für Technomathematik (ZeTeM)



Universität Bremen



## FE-CutS - Finite Elemente Modell für makroskopische Zerspanprozesse: Modellierung, Analyse und Simulation

von

Carsten Niebuhr

## DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines Doktors der Ingenieurwissenschaften

-Dr.-Ing.-

Vorgelegt im Fachbereich 3 (Mathematik & Informatik)  
der Universität Bremen

1. Gutachter:	Prof. Alfred Schmidt
2. Gutachter:	Dr. Iwona Piotrowska-Kurczewski
Eingereicht am:	20. Juli 2017
Tag der mündlichen Prüfung:	18. September 2017



## **Abstract**

The resulting complex thermal and mechanical load spectrum in dry machining processes leads to temperature induced shape deviations of metallic workpieces which changes its behavior for future use. Research projects try to compensate for manufacturing inaccuracies, resulting from the process, during the planning phase by using simulation-supported methods. The finite element method (FEM) is an appropriate tool to calculate thermomechanical behavior of workpieces by applying thermal and mechanical loads.

This thesis describes the modeling and simulation of the thermal and mechanical behavior of workpieces considering material removal during the processes by FEM. In this case the FEM is linked to a dixel model to visualize the geometry change also in the FEM. During the mathematical modeling the heat equation is coupled to the quasi-stationary linear-elastic deformation equation on a time-dependent domain with changing boundaries. Heat fluxes and process forces are given from a process model and exist only during the tool-workpiece-interaction. These informations are project to the time-dependent bounds of the workpiece. Here a new visualization of material removal on unfitted meshes is presented. The mesh is divided into two time-dependent disjoint parts. One for the time-dependent workpiece and one for the removed material. The geometry of the workpiece is approximated on time changing bounds by adjusted adaptive methods. The analysis shows good results for the approximation with a controllable volume error. On thus time-dependent domain the thermal and mechanical workpiece behavior during machining processes could be simulated in a realistic case. During the processes the identification and compensation of shape deviations will be possible. The model can be extended for other processes with geometrically defined edges.



## Zusammenfassung

Das während der trockenen, spanenden Bearbeitung entstehende komplexe thermische und mechanische Belastungskollektiv führt zu temperaturinduzierten Form- und Maßabweichungen metallischer Bauteile und verändert deren Verhalten im späteren Gebrauch. Ziel der Forschung ist, die aus dem Prozess resultierenden Fertigungsungenauigkeiten bereits in der Fertigungsplanung durch simulationsgestützte Methoden zu kompensieren. Die Simulation mit der Finiten Elementen Methode (FEM) ist solch ein geeignetes Werkzeug, um das thermomechanische Werkstückverhalten durch das Einbringen von thermischen und mechanischen Belastungen zu berechnen.

In dieser Arbeit wird, neben der Modellierung und Simulation von Zerspanprozessen zur Abbildung des thermomechanischen Werkstückverhaltens während der spanenden Bearbeitung, insbesondere auf die Berücksichtigung des Materialabtrags in die FEM eingegangen. Hierfür ist das Modell mit einer auf Dixel basierenden Materialabtragssimulation gekoppelt, um die Änderung der Werkstückgestalt in die FEM abzubilden. Die Basis der mathematischen Modellierung bildet die Kopplung zwischen Wärmeleitungsgleichung und quasi-stationärer, linear-elastischer Deformation über ein zeitabhängiges Werkstückgebiet mit sich ändernden Randbedingungen. Wärmestrom sowie Prozesskräfte sind über ein Prozessmodell gegeben und existieren nur während der Werkzeug-Werkstück-Interaktion im Bereich der Kontaktzone. Diese sind auf die zeitabhängigen Randflächen des Werkstückgebiets zu projizieren. Die Darstellung erfolgt auf einem nicht-angepassten Rechengitter, welches in zwei zeitabhängige FE-Gitter zerlegt ist. Unter Ausnutzung angepasster, adaptiver Methoden wird die Geometrie des Werkstücks über dessen Abmessungen approximiert. Während der Analyse zeigt sich, dass ein einfacher implementierter Ansatz eine gute, berechenbare Gebietsapproximation erlaubt. Auf diesem ist die Berechnung des thermischen und mechanischen Werkstückverhaltens während der spanenden Bearbeitung realisiert. Durch die Kopplung mit der Materialabtragssimulation ist eine spätere Identifizierung und Kompensation der temperaturinduzierten Form- und Maßabweichungen möglich, die während der Zerspanung entstehen. Neben den dargestellten Prozessen zum Bohren und Fräsen ist das thermomechanische FE-CutS auch auf weitere Zerspanverfahren mit geometrisch bestimmter Schneide übertragbar.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation . . . . .	1
1.2	Inhaltsübersicht . . . . .	2
1.3	DFG-Schwerpunktprogramm . . . . .	4
1.4	Danksagung . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Spanende Bearbeitung</b>	<b>7</b>
2.1	Zerspanprozesse . . . . .	7
2.1.1	Fräsen . . . . .	9
2.1.2	Bohren . . . . .	10
2.2	Simulationssystem . . . . .	11
2.2.1	Materialabtragssimulation . . . . .	11
2.2.2	Prozessmodell . . . . .	13
2.2.3	Thermomechanik . . . . .	13
2.2.4	Kopplung der Modelle . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Thermomechanisches Modell</b>	<b>15</b>
3.1	Beschreibung des zeitabhängigen Werkstückgebiets . . . . .	15
3.2	Wärmeleitungsgleichung . . . . .	19
3.3	Quasi-stationäres Verformungsverhalten . . . . .	23
3.3.1	Impulsbilanz . . . . .	24
3.3.2	Lineare Elastizität . . . . .	27
3.4	Gekoppeltes Modellproblem . . . . .	30
3.5	Parabolische Probleme auf zeitabhängigen Gebieten . . . . .	32
3.5.1	Bemerkungen zur analytischen Diskussion . . . . .	32
3.5.2	Sobolev-Räume auf nicht-zylindrischen Raum-Zeit-Gebieten . . . . .	33
3.6	Variationsformulierung der Modellgleichungen . . . . .	37
3.6.1	Schwache Wärmeleitungsgleichung . . . . .	37
3.6.2	Schwache linear-elastische Deformation . . . . .	38
3.6.3	Bemerkungen zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen . . . . .	39

<b>4</b>	<b>Diskretisierung von FE-CutS</b>	<b>41</b>
4.1	Approximationsmethoden für zeitabhängige Gebiete . . . . .	41
4.1.1	Beschreibung der Werkstückoberfläche durch Level-Set . . . . .	42
4.1.2	Anpassung des Rechengitters an das Werkstückgebiet . . . . .	43
4.1.3	Diskretes Werkstückgebiet in FE-CutS . . . . .	47
4.2	Diskretisierung des thermomechanischen Modells . . . . .	51
4.2.1	Grundlagen der Finiten Elemente Methode . . . . .	51
4.2.2	Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung . . . . .	53
4.2.3	Diskretisierung der Deformationsgleichung . . . . .	55
4.3	Adaptive Methoden . . . . .	58
4.3.1	Fehlerabschätzungen . . . . .	60
4.3.2	Adaptive Strategien . . . . .	64
4.3.3	Adaptive Strategie von FE-CutS . . . . .	68
4.4	Kopplung von Dixelmodell mit FE-CutS . . . . .	73
4.4.1	Datenaustausch . . . . .	73
4.4.2	Implementierungen in FE-CutS . . . . .	76
4.4.3	Approximation der Werkstückgeometrie . . . . .	80
4.4.4	Berücksichtigung von Informationen am Rand des Werkstücks . . . . .	85
4.5	Numerisches Lösungsschema von FE-CutS . . . . .	89
<b>5</b>	<b>Numerische Simulation</b>	<b>93</b>
5.1	Anmerkungen zur Visualisierung . . . . .	93
5.2	Analyse der adaptiven Gitteranpassung an den bewegenden Gebietsrand . . . . .	96
5.2.1	Konstruktion von Testbeispielen . . . . .	97
5.2.2	Adaptive Gitteranpassung an die planare Hyperfläche . . . . .	100
5.2.3	Adaptive Gitteranpassung an die gekrümmte Hyperfläche . . . . .	109
5.3	Anwendungen in der Zerspanung . . . . .	113
5.3.1	Einfache Zerspanprozesse . . . . .	114
5.3.2	Moderat-komplexe Zerspanprozesse . . . . .	125
5.3.3	Komplexer Fräsprozess eines Strukturbauteils . . . . .	139
5.4	Anwendungen in der Optimierung und Kompensation . . . . .	148
5.4.1	Reduziertes Modellproblem für Optimierungsansätze . . . . .	149
5.4.2	Ergebnisse zu unterschiedlichen Optimierungsansätzen . . . . .	150
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>157</b>
<b>A</b>	<b>Bezeichnungen</b>	<b>161</b>
<b>B</b>	<b>Werkstoffparameter</b>	<b>165</b>
<b>C</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>169</b>



# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation

Durch fortschreitende Automatisierung in nahezu allen spanenden Fertigungsprozessen sind thermisch und mechanisch bedingte Einflüsse bei herzustellenden metallischen Bauteilen nur bedingt kontrollierbar. Insbesondere bei der Trockenbearbeitung von möglichst leichten und zugleich robusten Strukturbauteilen hat das komplexe thermomechanische Belastungskollektiv entscheidenden Einfluss auf das Verhalten des Bauteils im späteren Gebrauch. Das entstehende thermische Belastungskollektiv resultiert aus transienten Wärmequellen, bestehend aus Scher-, Reib- und Trennenergie, die während des Fertigungsprozesses auftreten, und durch die im Bauteil akkumulierende Wärme. Hieraus ergibt sich ein Grund, dass heutzutage umweltschädliche Kühlschmierstoffe weit verbreitet sind und auf Trockenbearbeitung oftmals verzichtet wird.

Im Vordergrund aktueller Forschungsvorhaben steht die Identifizierung und Kompensation temperaturinduzierter Form- und Maßabweichungen, um trockene oder Minimalmengen geschmierte spanende Bearbeitung zu fördern und damit die Umwelt zu schonen. Unter anderem soll ermöglicht werden, dass die thermisch und mechanisch bedingten Abweichungen der Bauteilgeometrie bereits während der Fertigungsplanung, durch simulationsgestützte Methoden, ermittelt werden können. Daraus ergeben sich bei der Fertigung, z.B. in der Automobil- und Luftfahrtindustrie, Potentiale zur Reduktion von Kosten für Material und Bearbeitung sowie in der Produktionszeit. Die Ausnutzung von Effizienzsteigerungen sowie die Verbesserung der Bauteilqualität sind solche Potentiale, um hohe Ausschussraten zu vermeiden und kostenintensive Nachbearbeitungen zu minimieren.

Die beim Zerspanen auftretenden Temperaturen beeinflussen nicht nur das Werkstück selbst, sondern auch den gesamten Prozess. Hierbei sind Auswirkungen auf den Verschleiß der Schneiden, das Materialverhalten des Werkstoffs sowie die Reibung zwischen Werkzeug und Werkstück hervorzuheben. Deren Kompensation erfolgt aufgrund fehlender Grundlagenkenntnisse nur durch aufwändige experimentelle Einfahrversuche. Eine Simulation über die FEM bietet hier ein geeignetes Werkzeug, das thermomechanische Werkstückverhalten während der spanenden Bearbeitung zu berechnen. Die Effekte

im Werkstück können dabei sowohl thermoelastische und -plastische Deformation als auch Phasenumwandlungen des Materialgefüges in der Randzone bearbeiteter Flächen umfassen.

Die Vorhersage der auftretenden Temperaturen, insbesondere in der Spanbildung, erfolgt auf Basis unterschiedlicher Berechnungsmodelle. Diese, zumeist auf der Mesoskala agierenden Modelle, sind ein hilfreiches Mittel zum Verständnis der Temperaturentwicklung, besonders an relevanten Stellen, wo Messungen nur bedingt möglich sind. Nachteile ergeben sich nur durch die Berechnung einzelner Spanbildungen über einen Zahneingriff. Zur Abbildung kompletter Zerspanprozesse sind diese, zum Teil kommerziellen, Modelle nicht geeignet. Sie dienen im Wesentlichen zur Parametrisierung makroskopischer Berechnungsmodelle, wie sie hier betrachtet werden sollen.

Diese Arbeit soll nun zur Berechnung des thermischen und mechanischen Verhaltens des Werkstücks während der Zerspanung beitragen. Dabei sollen Geometrieänderungen, die im Laufe des Prozesses auftreten, über zeitabhängige Rechengebiete berücksichtigt werden. Ziel ist die Darstellung vollständiger Zerspanprozesse über ein makroskopisches Modell zu unterschiedlichen Verfahren mit geometrisch bestimmten Schneiden.

Zur Abbildung von Geometrieänderungen in die FEM nutzen viele kommerzielle Simulationsmodelle eine Neuvernetzung oder die Methode des Moving-Mesh. Aus der Projektion des alten auf das neue FE-Gitter resultieren jedoch lange Berechnungszeiten sowie ein hoher Bedarf an Ressourcen. Aufgrund dieser Kosten wird hier ein neuer effizienter Ansatz über ein festes nicht-angepasstes Rechengitter angestrebt. Die Geometrieänderungen sollen über die Kopplung zu einem reinen Materialabtragsmodell in die FEM berücksichtigt werden. Über zusätzliche angepasste, adaptive Methoden soll somit eine realitätsnahe und ressourcenschonende Darstellung der Werkstückgeometrie in die FEM erfolgen.

## 1.2 Inhaltsübersicht

Der Inhalt dieser Arbeit gliedert sich über die Modellierung eines auf die FEM basierenden Simulationsmodells, welches das thermische und mechanische Verhalten des Werkstücks während der spanenden Bearbeitung auf einen zeitabhängigen Werkstückgebiet ermittelt. Gekoppelt ist dieses Modell mit einer Materialabtragssimulation, um die in der Zeit sich stark ändernde Werkstückgestalt realitätsnah darstellen zu können.

Kapitel 2 führt zunächst allgemein in die spanende Bearbeitung ein. Neben Begriffserläuterungen erfolgt eine Zuordnung gängiger Fertigungsverfahren. Im speziellen werden hier die Begriffe des Bohrens und Fräsens aufgegriffen. In einem weiteren Abschnitt wird ein Simulationssystem vorgestellt, welches in ein Prozess- und Werkstückmodell unterteilt ist. Letzteres besteht aus der Kopplung eines Dixelmodells und dem in dieser Arbeit vorzustellenden FE-CutS. Eine abschließende Übersicht möglicher Einsatzgebiete des Systems beendet das Kapitel.

Im 3. Kapitel wird die Modellierung des mathematischen Modells erläutert. Neben

der Beschreibung des zeitabhängigen Werkstückgebiets werden auf diesem die Formulierungen der Wärmeleitungsgleichung und der linear-elastischen Deformation eingeführt. Das Kapitel schließt mit schwachen Formulierungen der Zustandsgleichungen auf dem Werkstückgebiet über Sobolev-Räume, die in nicht-zylindrische Raum-Zeit-Gebiete zu definieren sind.

Die Diskretisierung von FE-CutS ist Gegenstand des 4. Kapitels. Neben der numerischen Zerlegung des Rechengitters in zwei Teilgitter ist auch die Diskretisierung der Modellgleichungen notwendig. Um auf den nicht-angepassten Rechengitter die Approximation des Geometrierandes zu verbessern, sind Fehlerabschätzungen zu betrachten. Durch Ausnutzen angepasster, adaptiver Methoden wird die Werkstückgeometrie an die Abmessungen des Werkstücks angenähert. Die Kopplung eines Dixelmodells in FE-CutS beschreibt schließlich die Grundlage für die Geometrieänderungen des Werkstücks. Die Vorhersage des thermischen und mechanischen Werkstückverhaltens ist hierbei durch übergebende Informationen von Wärmeströmen und Prozesskräften in der Kontaktzone zwischen Werkzeug und Werkstück gegeben. Neu dabei ist, dass die Randbedingungen abschnittsweise zu definieren sind und sich damit über die Zeit ändern können. Ein nicht ständig eingreifendes Werkzeug wird hiermit berücksichtigt. Über die Kopplung ist somit ein Austausch von Informationen zwischen den Modellen gewährleistet sowie eine Schnittstelle zur Abbildung der Geometrieänderungen in die FEM.

Das Kapitel 5 beginnt zunächst mit einer Analyse der auf angepassten, adaptiven Methoden basierenden Gebietsapproximation. Hier wird gezeigt, dass ein einfacher zu implementierender Ansatz gute Approximationseigenschaften besitzt und der Volumenfehler kontrollierbar bleibt. Über die Anwendung unterschiedlicher, in der Komplexität steigender, Zerspanprozesse durch Bohren und Fräsen zeigt FE-CutS, inwieweit eine realitätsnahe Simulation des thermischen und mechanischen Werkstückverhaltens möglich ist. Das Kapitel endet mit einem Ausblick in die simulationsgestützte Optimierung und Kompensation temperaturinduzierter Form- und Maßabweichungen.

Mit einer kurzen Zusammenfassung und einem Ausblick auf Verbesserungen sowie weitere Anwendungsgebiete (Kapitel 6) findet diese Arbeit ihren Abschluss.

### 1.3 DFG-Schwerpunktprogramm

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen des Teilprojektes "Thermomechanische Verformung komplexer Werkstücke durch Bohr- und Fräsprozesse" des von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) geförderten Schwerpunktprogramms 1480 "Modellierung, Simulation und Kompensation von thermischen Bearbeitungseinflüssen für komplexe Zerspanprozesse".

In diesem über 6 Jahre geförderten Verbundprojekt lag der Fokus auf die Identifizierung und Kompensation des, bei der spanenden Bearbeitung entstehenden, temperaturinduzierten Verzugs. Hierbei wurden grundlegende Untersuchungen an unterschiedlich komplexen Bauteilen mit metallischer Grundmatrix durchgeführt, um die, in der Praxis resultierende, kostenintensive Nacharbeitung zu minimieren. In drei Förderphasen sind zunächst Grundlagenuntersuchungen an geometrisch einfachen Werkstücken betrachtet sowie Simulationsmodelle zur Identifizierung der Maß- und Formabweichungen aufgebaut worden. In der zweiten Förderphase waren die Grundlagen auf komplexere Werkstückstrukturen zu übertragen. Unter der Komplexitätssteigerung ist hierbei die Berücksichtigung unterschiedlicher homogener und nicht-homogener metallischer Werkstoffe sowie Stegkonstruktionen mit unterschiedlichen Wandstärken zu verstehen. In der finalen Phase sind geeignete Optimierungs- und Kompensationsstrategien entwickelt worden, die zur Reduzierung der entstehenden Maß- und Formabweichungen beitragen [16].



## 1.4 Danksagung

Diese Arbeit wäre ohne die Hilfe und Unterstützung einiger Personen nie zustande gekommen. Als erstes möchte ich mich bei Prof. Dr. Alfred Schmidt für die Betreuung dieser Arbeit, seiner Leitung sowie seine Erfahrung und Expertise in vielen hilfreichen Diskussionen bedanken sowie bei der zweiten Gutachterin Iwona Piotrowska-Kurczewski.

Des Weiteren bedanke ich mich bei der DFG für die Finanzierung meiner Arbeit sowie bei den Kollegen im Schwerpunktprogramm SPP 1480 "Modellierung, Simulation und Kompensation von thermischen Bearbeitungseinflüssen für komplexe Zerspanprozesse" für die Bereitstellung von Materialparametern und experimentellen Daten sowie die vielen hilfreichen Diskussionen. Große Dankbarkeit gebührt Prof. Dr. Thorsten Halle vom Institut für Werkstoff- und Füge-technik (IWF) Magdeburg für die Bereitstellung der, in dieser Arbeit verwendeten, temperaturabhängigen Parameter zum Werkstoff C45EN (Anhang B). Auch meine Projektpartner Dr. Daniel Niederwestberg vom Institut für Fertigungstechnik und Werkzeugmaschinen (IFW) Hannover und Dr. Jost Vehmeyer vom Zentrum für Technomathematik der Universität Bremen bedanke ich mich herzlichst für die tolle Zusammenarbeit. Dem IFW Hannover bin ich außerdem zu Dank verpflichtet, weil ohne die Bereitstellung der institutseigenen Software CutS keine Kopplung zwischen der FEM und dem Dixelmodell möglich gewesen wäre. Dank gilt auch der Universität Bremen und dem Zentrum für Technomathematik für die Unterstützung dieses Vorhabens.

Zum Schluss geht meine tiefste Dankbarkeit an meine Freunde und Kollegen, welche mich immer unterstützt haben, besonders während der schwierigen Phasen beim Anfertigen dieser Arbeit.

Carsten Niebuhr

Bremen im Juli 2017



## Kapitel 2

# Spanende Bearbeitung

Unter dem Begriff der spanenden Bearbeitung sind die unterschiedlichsten Verfahren des Stofftrennens zuzuordnen. Das Stofftrennen bezeichnet den Vorgang, wenn ein Werkzeug mit einem Werkstoff interagiert und dabei Material in Form von Spänen entfernt. Mehrere Begriffe der spanenden Bearbeitung werden in diesem Kapitel betrachtet. Zunächst wird die Zerspanung allgemein erläutert. Mit der Präsentation von Bohr- und Fräsprozessen sind anschließend einige Beispiele der mechanischen Zerspanung gegeben. In diesem Zusammenhang erfolgt eine Übersicht des Simulationssystems, von dem FE-CutS in der vorliegenden Arbeit ausführlich untersucht wird.

Der erste Abschnitt gibt einen Überblick über die Zerspanung. Anfangs ist eine Zuordnung der gängigen Verfahren vorzunehmen sowie der Unterschied zwischen dem Spanen mit geometrisch bestimmten und unbestimmten Schneiden zu erläutern. Anschließend werden die verwendeten Prozesse des Bohrens und Fräsen beschrieben. Im letzten Abschnitt wird das Simulationssystem detaillierter dargestellt. Der erste Teil betrachtet die Materialabtragssimulation und führt den Begriff des "Dexel" ein. Über eine kurze Beschreibung des Prozessmodells erfolgt eine kurze Vorstellung des thermomechanischen Modells (FE-CutS). Der Abschnitt endet mit der Zusammenführung aller Modelle zum Simulationssystem.

### 2.1 Zerspanprozesse

Der Begriff der Zerspanung ist ein Sammelbegriff der Gruppe von Fertigungsverfahren, die Werkstücken eine bestimmte Form geben. Heutzutage beschreibt der Begriff zumeist das mechanische Fertigen von Werkstücken durch Stofftrennen, dabei wird aus Rohlingen überschüssiges Material entfernt. Durch Schneiden eines Werkstücks mittels Werkzeug werden Stoffteile in Form von Spänen abgeführt. Das Spanen beschreibt demzufolge einen Prozess, indem eine Schneide des Zerspanwerkzeugs in das Werkstück eindringt und Späne abtrennt. Mit dem Begriff des Schneidkeils werden schließlich die Werkzeugteile bezeichnet, die bei der Bearbeitung wirksam sind.

Die formgebenden Verfahren sind allgemein in zwei Gruppen zu unterscheiden: Dem

Spanen mit geometrisch bestimmten und unbestimmten Schneiden, siehe dazu auch [25, 35]. Beim Spanen mit geometrisch bestimmten Schneiden sind die Schneidenanzahl, Form der Schneidkeile und ihre Lage zum Werkstück bekannt. Dazu zählen unter anderem folgende Fertigungsverfahren:

- Drehen;
- Bohren;
- Fräsen.

Dagegen lassen sich beim Spanen mit geometrisch unbestimmten Schneiden lediglich statistische Kenngrößen über die geometrische Ausbildung des Schneidhaufwerks angeben. Unbestimmte Schneiden bestehen zumeist aus kleinen harten Körnern. Sie werden unter anderem mit Bindemitteln zu Schleifscheiben, -steinen oder -bändern zusammengesetzt. Die Körner können auch lose in Form von Pulvern oder Pasten vorliegen, was wiederum als Spanen mit losem Korn bezeichnet wird. Die Verfahren mit geometrisch unbestimmten Schneiden sind weniger produktiv, erreichen jedoch höhere Genauigkeiten und Oberflächenqualitäten, als die Verfahren mit geometrisch bestimmten Schneiden.

Viele der spanenden Verfahren sind seit der Antike im Gebrauch. Durch die Industrialisierung wurden einige Prozesse maschinisiert, um die Genauigkeit bei der Fertigung mit Hilfe von Maschinen zu erhöhen [25, 35]. Heutzutage werden Zerspanprozesse vorwiegend in der Metallbearbeitung eingesetzt, aber auch viele Verbundwerkstoffe lassen sich dadurch bearbeiten.

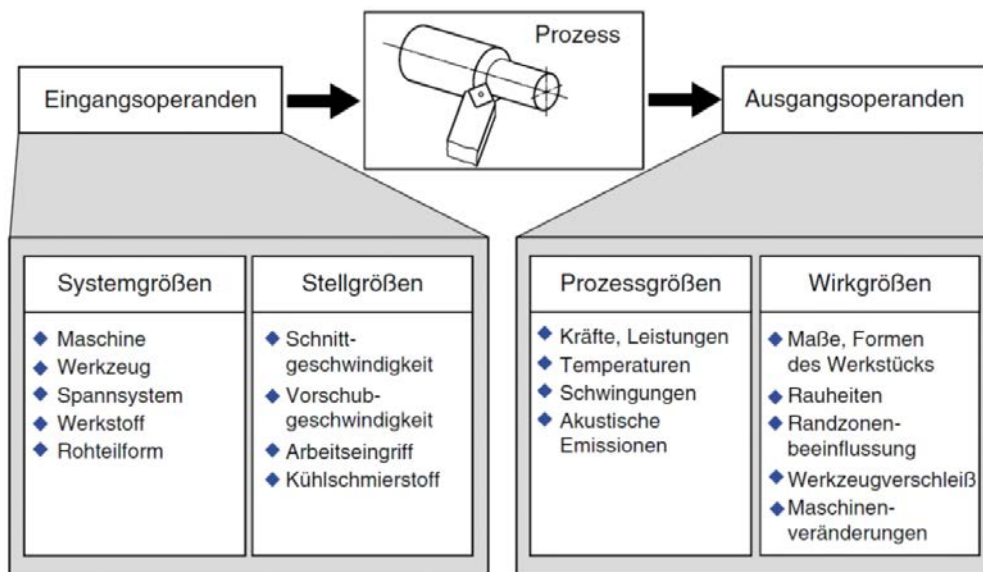


Abbildung 2.1: Der Zerspanprozess als System. Quelle: [25], S.6.

Der Zerspanprozess an sich kann auch als ein System von ein- und ausgehenden Parametern aufgefasst werden. Hierbei wird der eigentliche Prozess durch die Eingangsparameter beeinflusst, um entsprechende Ausgangsparameter zu erhalten (Abbildung 2.1).



Die Eingangsparameter unterscheiden sich durch Stell- und Systemgrößen. Unveränderliche Bedingungen des Prozesses, werden als Systemgrößen definiert. Diese sind von der jeweiligen Maschine, dem Werkzeug und Werkstück abhängig.

Stellgrößen hingegen können mit jedem Werkstück, auch während des laufenden Prozesses, variieren. Dazu gehört unter anderem die Drehzahl des Werkzeugs, die Schnittgeschwindigkeit, der Vorschub, die Eingriffsparameter oder die Zustellung des Werkzeugs. Weiter gehören sogenannte Kühlschmierstoffe (sofern diese verwendet werden) dazu sowie die Kraft der Einspannung, mit der das Werkstück auf der Werkbank bzw. dem Spanntisch gehalten wird.

Die Ausgangsparameter bestehen aus Prozess- und Wirkgrößen. Zu den Prozessgrößen gehören unter anderem die im laufenden Prozess auftretenden Größen wie Zerspankräfte, Temperaturen in der Spanbildungszone und Schwingungen [25]. Wirkgrößen lassen sich am Werkstück in Form von Maß- und Formabweichungen, am Werkzeug durch Verschleiß, an der Maschine durch Erwärmung sowie Verschleiß und an den Hilfsstoffen durch Verunreinigungen ablesen.

### 2.1.1 Fräsen

Das Fräsen beschreibt ein spanabhebendes Verfahren mit kreisförmiger Schnittbewegung eines mehrzahnigen Werkzeugs und einer senkrechten oder schräg zur Drehachse des Werkzeugs ausgerichteten Vorschubbewegung. Es werden verschiedene Fräsverfahren unterschieden, siehe dazu [25, 35].

Während des Prozesses befinden sich die Schneiden, im Gegensatz zu anderen Verfahren, nicht ständig im Eingriff. Bei jeder Umdrehung des Werkzeugs tritt mindestens eine Unterbrechung jeder Schneide auf. Das hat Auswirkungen auf den Verschleiß des Besagten. In Abhängigkeit von den durch Durchmesser, Eingriffsgröße und Schneidteilgeometrie bestimmten Verhältnissen, entstehen unterschiedliche Kontakte mit dem Werkstoff des Werkstücks [25].

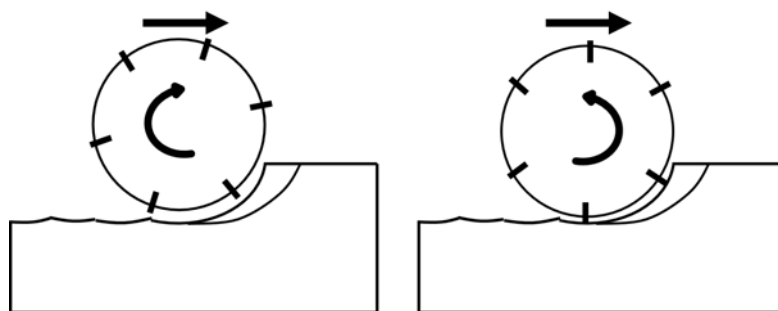


Abbildung 2.2: Darstellung des Gleich- (links) und GegenlaufräSENS (rechts). Nach [35].

Je nach Dreh- und Vorschubrichtung des Werkzeugs wird zwischen Gleich- und Gegenlaufräsen unterschieden (Abbildung 2.2). Beim Gleichlaufräsen greift die Schneide am dicken Ende des Spans ein. Sie baut hierbei die Zerspankraft stoßartig auf und tritt am dünnsten Ende des Spans wieder aus dem Werkstoff aus. Das Gegenlaufräsen erfolgt

spiegelverkehrt. Hier tritt die Schneide am dünnsten Ende des Spans in den Werkstoff ein und am dicksten Ende des Spans wieder aus, so dass es zunächst zu einem Drücken des Werkstoffs kommt. In der Literatur wird darauf hingewiesen, dass das Gleichlaufräsen oder eine Kombination aus Beidem die schonendste Variante für eine Werkzeugmaschine und das Werkzeug ist [25, 35].

In dieser Arbeit wird das Stirnfräsen mit nachlaufender Schneide und eine Kombination aus Gleich- und Gegenlaufräsen verwendet, um über Taschen und Auskofferungen von Strukturbauteilen Stegkonstruktionen bilden zu können (Siehe hierzu später Kapitel 5). Ein Vorteil hierbei ist eine deutlich größere Eingriffsweite und eine geringere Schnitttiefe. Zwar wird dadurch der eigentliche Fertigungsprozess deutlich verlängert, jedoch ist hiermit eine Analyse des thermischen und mechanischen Werkstückverhaltens viel effektiver.

### 2.1.2 Bohren

Der Bohrprozess beschreibt hingegen ein Verfahren mit rotierender Schnittbewegung in axialer Vorschubrichtung der Werkzeughachse. Hier sind verschiedene Verfahrensvarianten zu unterscheiden: Bohren ins Volle, Aufbohren einer vorhandenen Öffnung oder Kernbohrungen. Weitere Verfahren sind [25, 35] zu entnehmen.

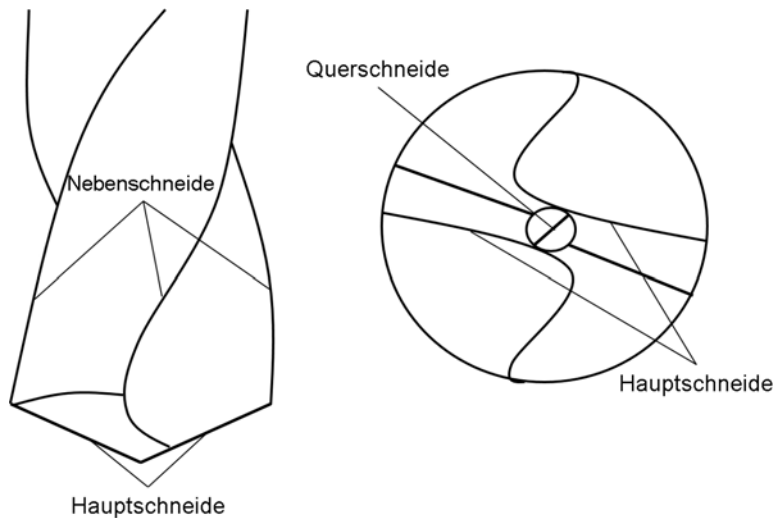


Abbildung 2.3: Schematische Darstellung eines Bohrkopfes. Nach [25].

Der Prozess an sich ist ein einfacher, doch weist er einige Besonderheiten auf. So fällt durch die rotierende Schnittbewegung die Schnittgeschwindigkeit zur Bohrermitte hin auf Null. Hier kann kein Schneiden auftreten, eine plastische Abdrängung ist die Folge. Im weiteren gestaltet sich der Abtransport der Späne mit zunehmender Bohrlochtiefe schwieriger. Dabei entstehen an der Bohrungswand weitere Effekte wie bspw. nachlaufende Wärmequellen, wodurch die Form und Größe der Späne ein wichtiger Aspekt ist. Darüber hinaus ist der Bohrdurchmesser nicht über eine Steuerung variierbar. Ein Austausch des Werkzeugs ist die Folge.

## 2.2 Simulationssystem

In dem von der DFG geförderten Projekt (Kapitel 1.3) entstand in interdisziplinärer Zusammenarbeit ein Simulationsmodell zur Identifizierung thermisch und mechanisch bedingter Form- und Maßabweichungen über Bohr- und Fräsprozesse. Das Modell gliedert sich in ein Werkstück- und Prozessmodell, die miteinander über einen NC-Interpreter in Interaktion stehen (Abbildung 2.4). Dabei vereint das Werkstückmodell eine Materialabtragssimulation basierend auf Dixel und eine Simulation der Thermomechanik durch die FEM.

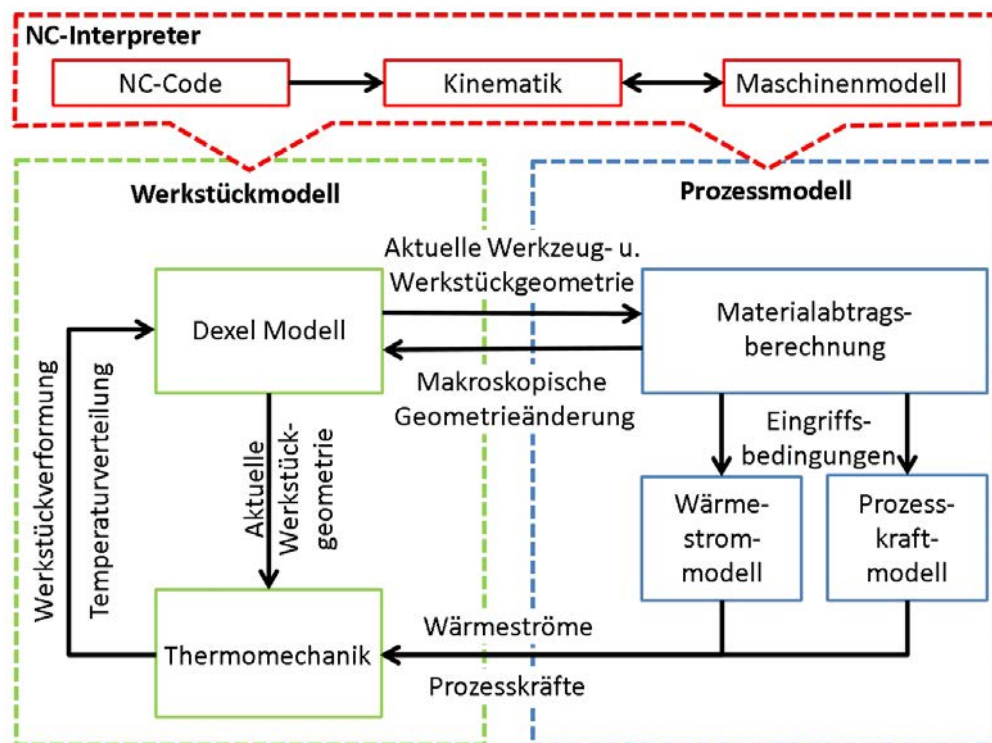


Abbildung 2.4: Schematischer Modellaufbau.

Die Abbildung der aktuellen Werkstückgeometrie zum Zeitpunkt  $t \in [0, T]$  erfolgt über das Dixelmodell. Dabei werden über die Materialabtragsberechnung aktuelle Eingriffsbedingungen ermittelt. Im Prozessmodell stehen diese wiederum zur Berechnung der resultierenden Wärmeströme und Prozesskräfte in der Kontaktzone zur Verfügung. Auf Basis der Wirkarbeit und der resultierenden Werkstückgeometrie zum Zeitpunkt  $t$  erfolgt in der FEM die thermomechanische Verformung des Werkstücks und dessen Temperaturverteilung. Durch die Kopplung zum Werkstückmodell wird eine schnelle und robuste Verformungsberechnung unter Berücksichtigung der sich stark ändernden Werkstückgestalt ermöglicht.

### 2.2.1 Materialabtragssimulation

Über ein rein geometrisches Simulationsmodell ist eine effiziente und Ressourcen sparende Materialabtragssimulation möglich. Dabei gibt es eine Vielzahl an Möglichkeiten diese

abzubilden. Rehling [52] und Stautner [62] geben in ihren Dissertationen einen Überblick unterschiedlicher Modelle. Darunter fallen unter anderem die Dixelmodelle. Eine erste Formulierung dieser Technik stammt von Benouamer et al. [13].

Ein Dixel, "*depth pixel*" oder auch "*depth picture element*" genannt, beschreibt ein Raster (Dixelfeld) von parallel verlaufenden Linien, ähnlich einem Nagelbrett. Über die Endpunkte der Linien werden immer zwei Punkte auf der Werkstückoberfläche beschrieben. Üblicherweise erfolgt die Bestimmung der Positionen der Endpunkte über das kartesische Koordinatensystem [52]. Die Endpunkte werden auf dem Dixelfeld bspw. in der  $x$ - $y$ -Ebene über die  $z$ -Koordinate dargestellt. Der Aufbau mehrerer Dixelfelder in den drei Hauptrichtungen ermöglicht so die Darstellung eines dreidimensionalen Werkstücks [67].

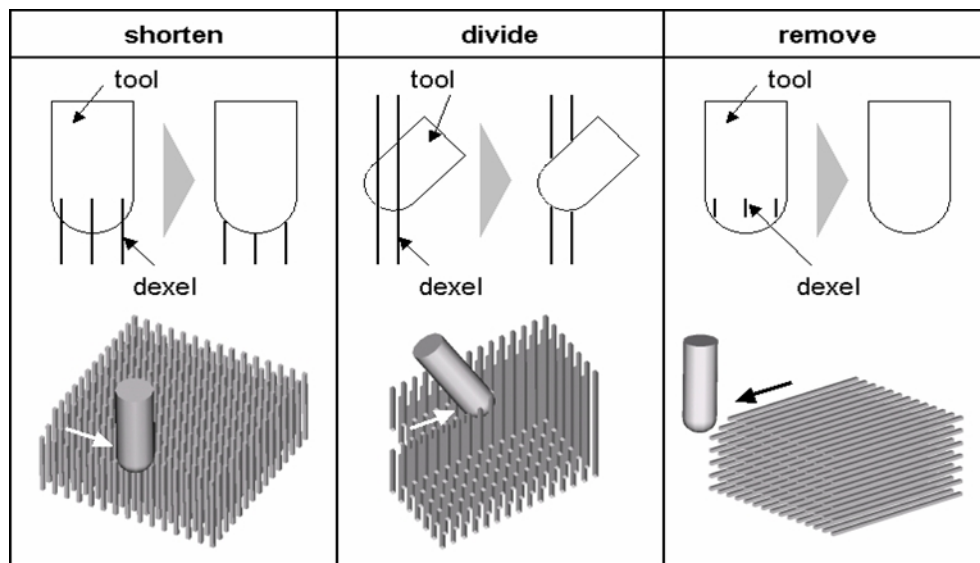


Abbildung 2.5: Boolesche Dixel Operationen. Quelle [67].

In der Berechnung des Materialabtrags sind drei Boolesche Operationen zulässig (Siehe Abbildung 2.5). Die meist genutzte Operation während der spanenden Bearbeitung ist das Kürzen der Dixel. Dabei werden die Dixel an den Endpunkten entlang der aktuellen Werkzeugposition geschnitten. Im Falle einschneidender Vertiefungen erfolgt eine Teilung des Dixel. Wird dieser geteilt, ist ein zusätzlicher Dixel in das Dixelfeld an der gleichen Position zu integrieren, so dass letztlich zwei gekürzte Dixel entstehen. Die letzte Boolesche Operation ist das Entfernen. Hierbei wird ein Dixel entfernt, wenn dieser gänzlich abgetragen wurde.

Durch Ausnutzen der beschriebenen Operationen sowie moderater Nutzung von Systemressourcen bieten Dixelmodelle eine effiziente Darstellung von Zerspanprozessen mit hoher Genauigkeit in den Schneidoperationen und der Visualisierung. Zudem legen diese Modelle durch Berechnung der Schnittgrößen (Spandicke, Scherwinkel, etc.) die Grundlage der Wärmestrom- und Kraftmodelle.

Eine Erweiterung des Dixelmodells um thermische und mechanische Informationen an den einzelnen Dixelendpunkten erlaubt schließlich eine Identifizierung temperatur-

und prozesskraftinduzierter Form- und Maßabweichungen. Detaillierte Ausführungen sind [23, 24, 46] zu entnehmen sowie später in Kapitel 4.4 zur Kopplung des Dixelmodells in FE-CutS.

### 2.2.2 Prozessmodell

Die Grundlage des Prozessmodells bilden bekannte Modelle von Altintas [4], die durch empirische Erhebungen verallgemeinert wurden. Die Parametrisierung des Prozessmodells erfolgte durch experimentelle Verifikation anhand unterschiedlicher Eingriffsbedingungen, -stellungen und Schneidkeile. Auf Basis dieser Daten entstand schließlich ein diskretes Prozesskraftmodell und ein lokalisiertes Wärmestrommodell zur Berechnung der Wirkarbeit und der daraus resultierenden thermischen und mechanischen Energie [21].

Wie in Abbildung 2.4 dargestellt, erfolgt die Berechnung der benötigten Lasten in zwei Schritten. Zunächst sind Prozesskräfte anhand der Eingriffsbedingungen zu ermitteln. Unter der Annahme, dass die mechanische Wirkarbeit fast vollständig in Wärmeenergie umgewandelt wird, bestimmt ein empirischer Ansatz den Anteil totaler thermischer Last, die ins Werkstück fließt. Das Prozessmodell ist somit eine datengesteuerte Abschätzung von Prozesskräften und Wärmeströmen, welches die Lasten der Thermomechanik in Form von Randbedingungen zur Verfügung stellt. Einen genaueren Einblick in Modellierung und Entwicklung der Modelle geben [21, 24].

### 2.2.3 Thermomechanik

Vervollständigt wird das Simulationsmodell durch die Berechnung der Thermomechanik im Werkstück, um schließlich Auswirkungen thermischer und mechanischer Lasten während der spanenden Bearbeitung zu ermitteln. Eines der weit verbreitetsten Verfahren zur Abbildung dieser Effekte ist die FEM.

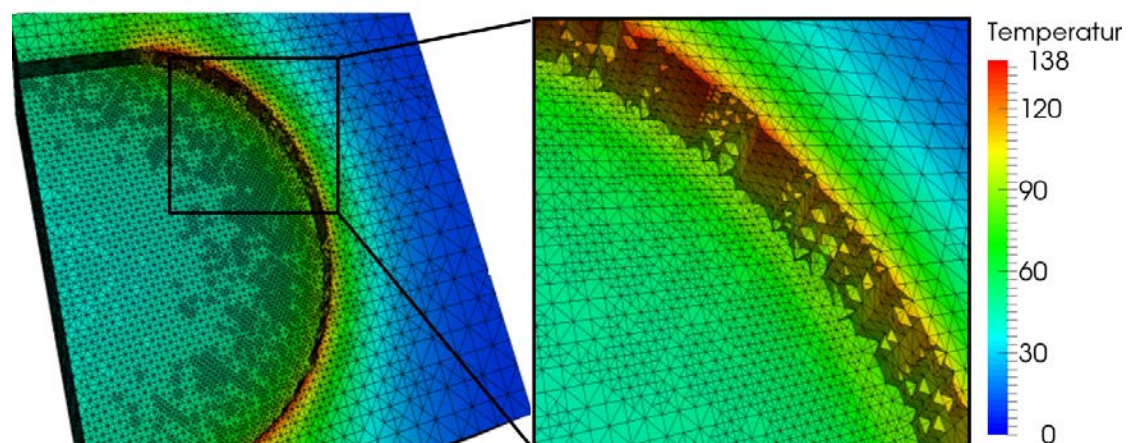


Abbildung 2.6: Wärmeeinbringung auf der Werkstückoberfläche am Beispiel des FräSENS.

Die FEM beschreibt die relevanten Aspekte des thermischen und mechanischen Ver-

haltens des Werkstücks beim Fräsen und Bohren, dazu zählen unter anderem die Werkstücktemperatur und -deformation. Abbildung 2.6 zeigt mögliche Temperaturverteilungen, wie sie bei der Zerspanung auf der Oberfläche eines zu bearbeitenden Werkstücks auftreten können.

Die Thermomechanik wird durch das in dieser Arbeit vorzustellende FE-CutS, kurz für *Finite Element Cutting Simulation*, repräsentiert. Neben einer rein thermoelastischen Betrachtung ist die Erweiterung um permanente Deformationseffekte möglich. Darunter fällt z.B. die Umwandlungsplastizität durch Phasenumwandlungen. Neu ist hierbei die Implementierung geeigneter sich in der Zeit ändernde Randbedingungen (zeitabhängige lokale thermische und mechanische Energieeinträge) und die Berücksichtigung der zeitlich stark ändernden Werkstückgestalt im Rahmen der spanenden Bearbeitung. Die Implementierung erfolgt in der FEM-Toolbox ALBERTA [57], welche eine automatische Anpassung der lokalen Gitterfeinheit an die Daten des Prozesses erlaubt.

#### 2.2.4 Kopplung der Modelle

Aus dem geschlossenen Simulationsmodell folgt ein Wirkkreis aus Eingriffsbedingungen und resultierenden Werkstückbelastungen, um die Vorhersage thermisch und mechanisch bedingter Form- und Maßabweichungen geometrisch komplexer Strukturbauteile zu ermöglichen. Dabei sind Prozesseinstellgrößen, Eingriffsbedingungen und der Materialabtrag zu berücksichtigen.

Strukturbauteile können hier aus dünnwandigen Strukturen, wie Taschen und Einkerbungen oder Stegkonstruktionen bestehen. Herausforderungen sind hierbei thermische und mechanische Wechselwirkungen, welche durch die Eingriffsbedingungen und Eigenspannungen an den Oberflächen des Werkstücks entstehen sowie Werkstückverformungen während des Zerspanprozesses. Durch temperaturabhängige Eingriffsbedingungen, besteht zusätzlich die Möglichkeit Rückschlüsse auf das Verhalten des Werkstücks während der spanenden Bearbeitung zu ziehen, um hieraus gezielte Kompensationsstrategien zur Minimierung der entstehenden Formabweichungen zu entwickeln [21].

In der Praxis zeichnen sich schließlich die gewonnenen Erkenntnisse durch Verbesserungen im Produktionsablauf oder in der Reduzierung der Produktionskosten sowie der Produktionszeit aus.

## Kapitel 3

# Thermomechanisches Modell

Dieses Kapitel beschreibt die Grundlage des mathematischen Modells von FE-CutS, welches bereits kurz in Kapitel 2.2.3 Erwähnung fand. Um das thermomechanische Verhalten des Werkstücks während der spanenden Bearbeitung zu untersuchen, ist zunächst ein zeitabhängiges Werkstückgebiet zu definieren. Danach erfolgen auf diesem die Formulierungen der Wärmeleitungs- und Deformationsgleichung. Abschließen wird dieses Kapitel mit schwachen Formulierungen der Zustandsgleichungen auf nicht-zylindrischen Raum-Zeit-Gebieten.

Der erste Abschnitt beschreibt eine abstrakte Formulierung des zeitabhängigen Werkstücks über die Begriffe: Gebietszerlegung, zeitabhängige Gebiete sowie nicht-zylindrische Raum-Zeit-Gebiete. Die darauffolgenden Abschnitte beinhalten die Modellierung der Wärmeleitung und linearen Elastizität. Im folgenden wird auf die Kopplung der beiden Gleichungen zum thermomechanischen Modell eingegangen. Anschließend wird die Herleitung der schwachen Form auf entsprechenden Funktionenräumen in nicht-zylindrischen Raum-Zeit Gebieten forciert. Zuvor ergeben sich Fragen zur Theorie parabolischer Probleme auf zeitabhängigen Gebieten. Mit Bemerkungen zu Lösungen solcher Problemstellungen endet dieses Kapitel.

Die folgenden Ausführungen erfolgen auf einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  mit  $d = 3$ . Das vorliegende Modell behält auch für Dimensionen  $d < 3$  seine Gültigkeit.

### 3.1 Beschreibung des zeitabhängigen Werkstückgebiets

Ziel dieses Abschnitts ist die Beschreibung eines zeitabhängigen Gebiets, um die bei der Zerspanung vorherrschende Gebietsänderung am Werkstück zu berücksichtigen. Auf diesem sind im späteren Verlauf die Modellgleichungen herzuleiten. Eine mathematische Formulierung dieser zeitlichen Änderung basiert auf der Idee ein festes Gebiet  $\Omega$  in zwei zeitabhängige Teilgebiete zu zerlegen, wobei ein Teil der Zerlegung dem Werkstück zugeordnet ist, während das andere Teilgebiet bereits entferntes Material beinhaltet. Letzteres findet im weiteren Verlauf des Prozesses keine Beachtung mehr. Eine Implementierung in die FEM erfolgt später in Kapitel 4.1.3.

### Zeitabhängiges Werkstückgebiet

Ein zeitabhängiges Werkstückgebiet ist durch die Zerlegung eines festen, zeitunabhängigen Gebiets in zwei zeitabhängige Teilgebiete möglich. Dabei ist ein Teilgebiet dem Werkstück zuzuordnen und das andere dem entfernten Material, welches durch den Zerspanprozess entfällt.

Das sich in der Zeit ändernde Werkstückgebiet ist durch  $\Omega(t) \subset \Omega$  in einen festen Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  gegeben. Dabei beschreibt letzteres hier einen Rohling, aus dem das Werkstück zu fertigen ist. Es gilt also:  $\Omega(0) := \Omega$ ,  $t = 0$ . Über dem Zerspanprozess wird das Entfernen von Material aus einem Rohling hin zu einem fertigen Werkstück beschrieben. Hieraus folgt, dass ein fertiges Werkstück ein Gebiet  $\Omega(T) \subset \Omega(0) = \Omega$  zur Zeit  $t = T$  beschreibt. Dieses ist damit eine zeitabhängige Teilmenge, die durch die zeitliche Änderung des Zerspanprozesses kleiner wird. Es gilt

$$\Omega(T) \subset \Omega(0)$$

und allgemeiner für beliebige Zeitpunkte  $t_0, t_1 \in [0, T]$  mit  $t_0 < t_1$ :

$$\Omega(t_1) \subset \Omega(t_0). \quad (3.1)$$

Obwohl sich ein Werkzeug nicht ständig im Eingriff befindet, wird das Werkstück im fortschreitenden Prozess insgesamt kleiner, so dass obige Beziehung (3.1) immer gilt.

Das entfernte Material wird durch eine weitere zeitabhängige Teilmenge beschrieben  $\Omega_m(t) \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$ . Speziell für  $t = 0$  ist die Teilmenge leer. Es gilt also  $\Omega(0) = \emptyset$ , da  $\Omega(0) = \Omega$ . Über die Zeit wächst schließlich diese Teilmenge, so dass sie immer aus dem Rest des Rohlings besteht:

$$\Omega_m(t) := \Omega \setminus \overline{\Omega(t)}. \quad (3.2)$$

Für die zugehörigen Gebietsränder gelten folgende Bezeichnungen:

$$\Gamma_w(t) := \partial\Omega(t) \cap \partial\Omega, \quad t \geq 0, \quad (3.3)$$

$$\Gamma_m(t) := \partial\Omega_m(t) \cap \partial\Omega, \quad t \geq 0. \quad (3.4)$$

Bezeichnung (3.3) beschreibt die Schnittmenge zwischen dem Rand des Werkstückgebiets  $\partial\Omega(t)$  und dem Rand des Grundgebiets  $\partial\Omega$  und (3.4) die Schnittmenge zum zeitabhängigen Rand des entfernten Materials  $\partial\Omega_m(t)$ . Eine weitere Schnittmenge über dem Rand zwischen den zwei zeitabhängigen Teilmengen beschreibt den trennenden und sich ändernden Rand des Werkstücks:

$$\Gamma(t) := \partial\Omega(t) \cap \partial\Omega_m(t), \quad t \geq 0. \quad (3.5)$$

Über (3.3)-(3.5) ist schließlich eine Beschreibung des Gebietsrands für das zeitabhän-



gige Werkstückgebiet gegeben:

$$\partial\Omega(t) = \Gamma(t) \cup \Gamma_w(t), \quad t \geq 0 \quad (3.6)$$

wobei speziell für  $t = 0$  gilt:  $\Gamma(0) = \Gamma_m(0) = \emptyset$  und  $\Gamma_w(0) = \partial\Omega(0) = \partial\Omega$ .

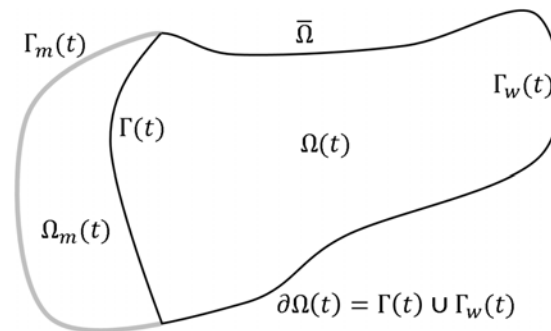


Abbildung 3.1: Skizze der zeitabhängigen Teilgebiete.

Abbildung 3.1 zeigt eine Skizze der Zerlegung des festen Gebiets  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  wie sie bei der spanenden Bearbeitung vorherrscht. Mit obigen Beschreibungen ist nun zu beliebigen Zeitpunkt  $t \in (0, T)$  über  $\bar{\Omega}$  eine Zerlegung in zwei zeitabhängige Teilgebiete gegeben.

Aus der Modellierung des zeitabhängigen Werkstückgebiets folgt schließlich, dass eine Betrachtung des zeitabhängigen Teilgebiets  $\Omega_m(t)$  in der weiteren Modellierung keine Beachtung mehr findet. Die nun folgenden Modellgleichungen werden ausschließlich auf  $\Omega(t)$  eingeführt. Erst später, in Kapitel 4, wird  $\Omega_m(t)$  nochmals Beachtung geschenkt, um das Gebiet  $\Omega$  zu diskretisieren. Mit einer Zusammenfassung des oben beschriebenen, zeitabhängigen Werkstückgebiets, endet dessen Beschreibung.

**Problem 3.1** (Zeitabhängiges Werkstückgebiet).

Es sei  $\Omega$  ein offenes, beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^d$ . Sei weiter  $t \in (0, T)$  sowie  $\Omega(t)$  und  $\Omega_m(t)$  zwei offene, beschränkte und von der Zeit  $t$  abhängige Teilgebiete, die  $\Omega$  in zwei disjunkte Gebiete zerlegen. Dann sei eine Beschreibung des zeitabhängigen Werkstückgebiets gegeben durch:

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= \Omega \setminus \bar{\Omega}_m(t), \quad t > 0, \\ \partial\Omega(t) &= \Gamma_w(t) \cup \Gamma(t), \quad t > 0, \\ \Gamma_w(t) &= \partial\Omega \cap \partial\Omega(t), \quad t > 0, \\ \Gamma(t) &= \partial\Omega(t) \cap \partial\Omega_m(t), \quad t > 0, \end{aligned}$$

und im speziellen für  $t = 0$  gilt:

$$\begin{aligned} \Omega(0) &= \Omega & \text{und} & & \Omega_m(0) &= \emptyset, \\ \Gamma(0) &= \emptyset & \text{und} & & \Gamma_w(0) &= \partial\Omega(0) = \partial\Omega. \end{aligned}$$

### Nicht-zylindrisches Raum-Zeit-Gebiet

Die Nutzung eines zeitabhängigen Gebiets  $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^d$  stellt Anforderungen an die herzuleitenden partiellen Differentialgleichungen (PDEs). Explizit sei hier die instationäre Wärmeleitungsgleichung genannt. Sie ist vom parabolischen Typ und besitzt eine Lösung sowohl im Raum als auch in der Zeit. Klassisch wird sie über ein zylindrisches Raum-Zeit-Gebiet gelöst.

Solch ein Raum-Zeit-Gebiet ist wie folgt beschrieben: Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ein offenes, beschränktes Gebiet und  $t \in [0, T]$ . Dann sei  $[0, T] \times \Omega \subset \mathbb{R}^{d+1}$  ein Raum-Zeit-Gebiet und  $[0, T] \times \partial\Omega$  der zugehörige Rand (Siehe Abbildung 3.2, links).

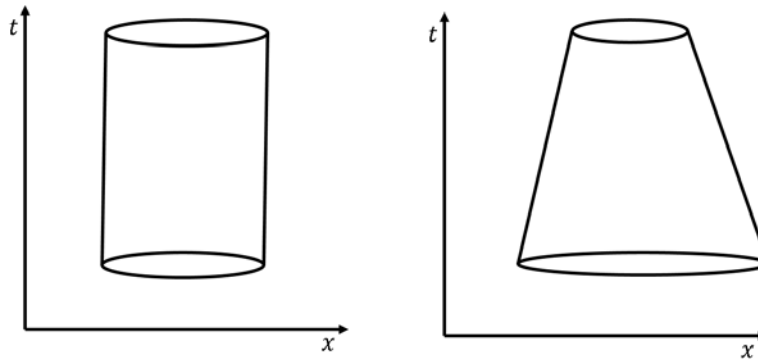


Abbildung 3.2: Skizze eines zylindrischen (links) und nicht-zylindrischen Raum-Zeit-Gebiets (rechts).

Für ein zeitabhängiges bzw. sich bewegendes Gebiet  $\Omega(t)$ , wie in Problem 3.1 formuliert, ist eine Lösung parabolischer Problemstellungen auf nicht-zylindrischen Raum-Zeit-Gebieten berechenbar. Diese ermöglichen die Verwendung von Gebieten, die sich über die Zeit verändern (Siehe Abbildung 3.2, rechts). Allgemein ist ein nicht-zylindrisches Raum-Zeit-Gebiet  $Q$  über ein offenes, beschränktes Gebiet  $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^d$  sowie über ein Zeitintervall  $\mathcal{T} = (0, T) \subset \mathbb{R}$  gegeben, so dass folgt:

$$Q := \bigcup_{t \in \mathcal{T}} (\{t\} \times \Omega(t)) \subset \mathbb{R}^{d+1}. \quad (3.7)$$

Vergleiche hierzu auch [1, 19, 40, 41]. Eine zugehörige Beschreibung des Gebietsrand  $\partial Q$  ist schwieriger. Durch zeitliche Änderung des Gebiets  $\Omega(t)$  und damit verbunden, auch die Änderung des Rands  $\partial\Omega(t)$  sind zusätzlich auch die Beschreibungen des Gebietsrand für den zu Beginn und zum Ende der Beobachtung zu berücksichtigen.

Eine entsprechende Formulierung von  $\partial Q$  sieht wie folgt aus: Es sei  $Q$  ein nicht-zylindrisches Raum-Zeit-Gebiet wie in (3.7) gegeben und  $\mathcal{T} = (0, T)$  ein Zeitintervall, dann sei der zugehörige Gebietsrand des nicht-zylindrischen Raum-Zeit-Gebiets durch

$$\Sigma := \mathcal{T} \times \partial\Omega(t) = \bigcup_{t \in \mathcal{T}} (\{t\} \times \partial\Omega(t)) \subset \partial Q \quad (3.8)$$

gegeben. Über das eben beschriebene, nicht-zylindrische Raum-Zeit-Gebiet (3.7) mit zu-

gehörigem Rand (3.8) ist im folgenden die instationäre Wärmeleitungsgleichung sowie die quasi-stationäre Deformationsgleichung herzuleiten, so dass eine Berechnung des thermischen und mechanischen Werkstückverhaltens während des Zerspanprozesses erfolgen kann.

### 3.2 Wärmeleitungsgleichung

Die Herleitung einer PDE zur Beschreibung der Wärmeleitung in einen Festkörper erfolgt oft über die Hauptsätze der Thermodynamik. Detaillierte Ausführungen auf zylindrischen Raum-Zeit-Gebieten  $[0, T] \times \Omega$  sind zum Beispiel in [7, 29] nachzulesen. Auf zeitabhängigen Gebieten ist die Herleitung ähnlich, allerdings ist die Änderung des Gebiets zu berücksichtigen. Zum Beispiel wird bei einem zweiphasigen Stefanproblem die Wärmeleitung für beide Phase separat berechnet, jedoch tritt an der Phasengrenze die Problematik der latenten Wärme auf, weil Energie aufgebracht werden muss, um von einer Phase in die andere wechseln zu können. Bei der Zerspanung existiert keine zweite Phase, so dass hier die Theorie des Stefanproblems nicht greift. Die Idee zur Herleitung der Wärmeleitungsgleichung basiert hier auf dem Modellierungsansatz von [64] und wird in den Bezug des Zerspanprozesses auf dem zeitabhängigen Werkstückgebiet gesetzt.

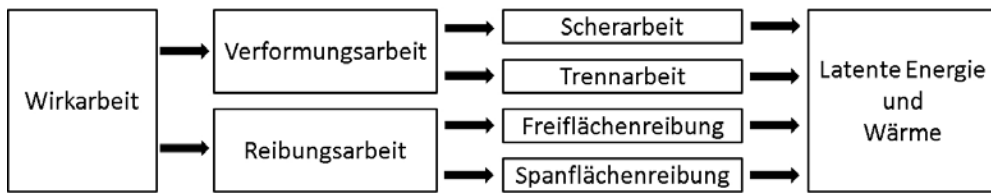


Abbildung 3.3: Umwandlung der Wirkarbeit bei der Zerspanung. Nach [35].

Zur Beschreibung der Wärmeverteilung im Werkstück ist zunächst ein Temperaturfeld

$$\theta = \theta(\mathbf{x}, t) \quad \text{in } Q$$

in Abhängigkeit von Raum und Zeit zu betrachten. In der Zerspanung entsteht solch ein Temperaturfeld durch die mechanische Wirkarbeit  $W_{mech}$ , die nahezu vollständig in Wärmeenergie umgewandelt wird. Die Umwandlung der zugeführten mechanischen Energie lässt sich nach [72] wie in Abbildung 3.3 unterteilen. Die verschiedenen Anteile der Arbeit hängen von der Spannungsdicke ab, wobei die Schearbeit den wichtigsten Anteil darstellt. Nach [25] und [35] haben die Span- und Freiflächenreibung sowie die Trennarbeit nur einen kleinen bis geringen Anteil an der Gesamtarbeit.

Abbildung 3.4 (links) gibt Aufschluss über die aufgenommenen und abgeführten Wärmemengen, die sich über das Werkstück, den Span und das Werkzeug verteilen. Aus der Verteilung ist folgende Bilanz abzulesen:

$$W_{mech} = Q_{Werkstueck} + Q_{Werkzeug} + Q_{Span}. \quad (3.9)$$

Nach der linken Grafik wird die meiste Energie über den Span (75%) und mit deutlichen Abstand über das Werkzeug (18%) abgeführt. Nur ein geringer Teil ( $\sim 7\%$ ) verbleibt im Werkstück. Mittels der Wärmeleitung ist zusätzlich die Abführung durch Strahlung und Konvektion der anfallenden Wärmemengen an die Umgebung möglich. Abbildung 3.4 (rechts) zeigt ein Beispiel, wie sich Temperaturfelder über Werkstück, Span und Werkzeug ausbilden können.

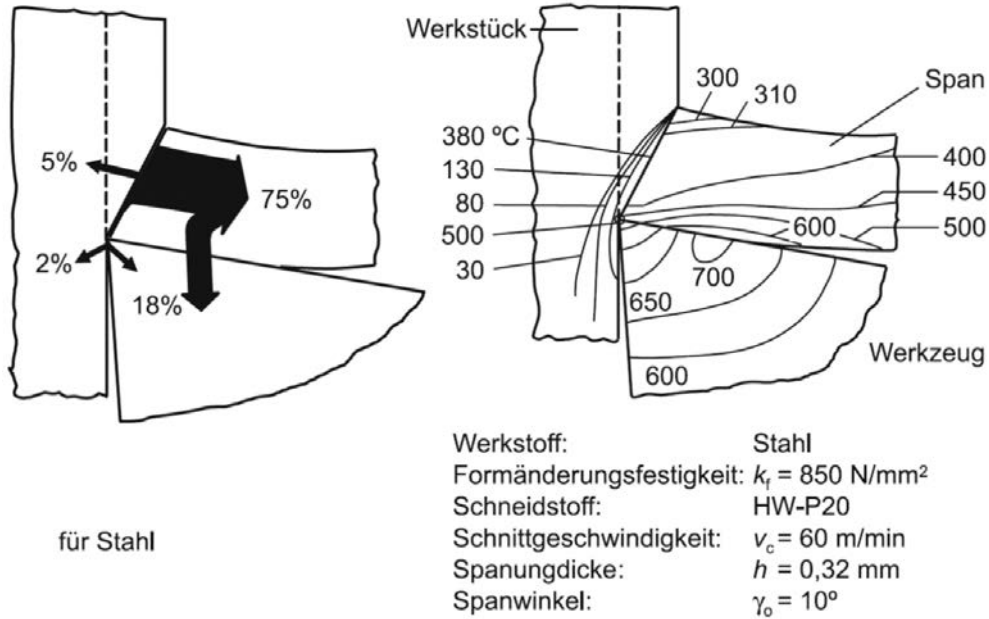


Abbildung 3.4: Wärmefluss und Temperaturverteilung in Werkzeug, Span und Werkstück bei der Zerspaltung, Quelle [35], S. 66.

Über die Aufteilung der mechanischen Energie in Span, Werkzeug und Werkstück (Gleichung (3.9)) gilt Energieerhaltung im thermodynamischen System, so dass die Gesamtenergie innerhalb des Systems konstant bleibt. Der erste Hauptsatz der Thermodynamik findet hier Anwendung.

Um die Herleitung der Wärmeleitungsgleichung auf dem in der Zeit sich stark ändernden Werkstück zu ermöglichen, ist  $\Omega(t)$  in endlich viele Teilmengen  $\omega \subset \Omega(t)$  zu zerlegen. Diese sind so klein zu wählen, dass zu jedem Zeitpunkt, durch Aufsummierung der Teilmengen, die aktuelle Geometrie des Werkstück dargestellt werden kann. Vorauszusetzen ist jedoch, dass  $\Omega(t)$  zu keinem Zeitpunkt eine nichtleere Menge wird. Die Referenzmenge  $\omega$  ist zudem so zu wählen, dass auf diesem die Wärmeleitung über ein zylindrisches Raum-Zeit-Gebiet hergeleitet werden kann. Durch Aufsummierung der Teilmengen ist schließlich die Wärmeleitung auch über ein nicht-zylindrisches Raum-Zeit-Gebiet lösbar.

Das Verhalten der Temperatur in  $\omega$  zu einen beliebigen Zeitintervall  $(t_1, t_2)$  betrachtet, beschreibt die Äquivalenz zwischen der Änderung thermischer Energie im Inneren, dem Fluss thermischer Energie über den Rand sowie der thermischen Energie durch Quellen und Senken im Inneren von  $\omega$  über die Zeit.

Die Änderung der thermischen Energie im Inneren von  $\omega$  ist durch

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \rho c_e \frac{d\theta}{dt} dx dt \quad (3.10)$$

gegeben. Das Integral charakterisiert die Zeitableitung der Temperatur  $\theta$  über Multiplikation mit der Dichte  $\rho$  und der spezifischen Wärmekapazität  $c_e$ . Die Dichte als auch die spezifische Wärmekapazität sind Werkstoffkennwerte und temperaturbehaftet (siehe auch Anhang B).

Als Folge der inneren Wärmeverteilung erschließt sich im Weiteren der ein- und ausfließende Fluss thermischer Energie über den Rand  $\partial\omega$ . Der Energiefluss ist über das Fourier'sche Gesetz formuliert, das als Fluss zwischen zwei Punkten (lokal) proportional zu der Temperaturdifferenz interpretierbar ist. So lautet der Wärmeflussvektor  $\mathbf{q}$  schließlich

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -\kappa \nabla \theta,$$

mit temperaturbehafteten Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten  $\kappa$ . Wird der Flussvektor  $\mathbf{q}$  mit der zugehörigen äußeren Normalen  $\mathbf{n}$  auf  $\partial\omega$  multipliziert, folgt das Integral der Randbedingungen:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} -\kappa \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} ds dt. \quad (3.11)$$

Über diesem sind später z.B. prozessrelevante Wärmeströme zu betrachten. Neben der Beschreibung von Wärmequellen über den Rand sind auch Quellen und Senken im inneren von  $\omega$  möglich. Diese werden meist zusammengefasst der Variablen  $f$  zugeordnet und eingeschränkt auf  $\omega$  mit  $\hat{f}$  bezeichnet. Die Modellierung der Quellen und Senken und damit der Menge thermischer Energie im inneren von  $\omega$  erfolgt durch

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \hat{f} dx dt. \quad (3.12)$$

In der Zerspanung wäre eine mögliche Nutzung von  $f$  durch aufzubringende Energie bei Phasenumwandlungen (Latente Wärme) oder mechanische Belastung (Dissipation) gegeben.

Werden die Gleichungen (3.10)-(3.12) in einen bestimmten Verhältnis zueinander gesetzt, ist eine erste Beschreibung der Wärmeleitung auf dem Referenzgebiet  $\omega$  und im Zeitintervall  $(t_1, t_2)$  wie folgt gegeben:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \rho c_e \frac{d\theta}{dt} dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} -\kappa \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} ds dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \hat{f} dx dt.$$

Durch den Gauss'schen Divergenzsatz und passender Umformungen folgt schließlich:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \left( \rho c_e \frac{d\theta}{dt} - \operatorname{div}(\kappa \nabla \theta) - \hat{f} \right) dx dt = 0. \quad (3.13)$$

Aus (3.13) und der Aufsummierung aller Teilmengen  $\omega$  ist nun die gesuchte, instationäre Wärmeleitungsgleichung auf einem nicht-zylindrischen Raum-Zeit Gebiet gegeben:

$$\rho c_e \frac{d\theta}{dt} - \operatorname{div}(\kappa \nabla \theta) = f \quad \text{in } Q. \quad (3.14)$$

Hier sei jedoch angemerkt, dass (3.14) eine lineare PDE vom parabolischen Typ ist. Die Abhängigkeit der Dichte  $\rho$ , der spezifischen Wärmekapazität  $c_e$  und des Wärmeleitkoeffizienten  $\kappa$  von der Temperatur, macht diese Gleichung zu einer nichtlinearen PDE.

Die Vervollständigung des Wärmeleitproblems durch Anfangs- und Randbedingungen macht (3.14) zu einem Anfangsrandwertproblem. Für Anfangsbedingungen gilt:

$$\theta(\mathbf{x}, 0) \equiv \theta_0 \quad \text{in } \Omega(0) = \Omega, \quad (3.15)$$

wobei  $\theta_0$  sowohl konstant als auch eine Anfangsverteilung im Temperaturfelds sein kann.

Bei Randbedingungen ist zwischen Dirichlet-, Neumann- und gemischte Neumann- bzw. Robinbedingungen zu unterscheiden. In der spanenden Bearbeitung eignen sich besonders Neumann- und gemischte Neumann- bzw. Robinbedingungen. Dabei beschreibt eine Neumannbedingung

$$-\kappa \nabla \theta \cdot \mathbf{n} = q_N(\mathbf{x}, t) \quad \text{auf } \Gamma_N(t), \quad t \geq 0, \quad (3.16)$$

die durch  $q_N(\mathbf{x}, t)$  vorhandenen, sich bewegenden Wärmequellen während der Werkzeug-Werkstück-Interaktion oder ortsfeste isolierte Flächen bspw. im Kontaktbereich von Spannelementen, die wiederum mit einer Null-Bedingung zu versehen sind. Die Robinbedingung bzw. gemischte Neumannbedingung

$$-\kappa \nabla \theta \cdot \mathbf{n} = \delta(\theta - \theta_{ext}) \quad \text{auf } \Gamma_R(t), \quad t \geq 0 \quad (3.17)$$

mit Wärmeübergangskoeffizient  $\delta$ , konkretisiert den Wärmeübergang vom Werkstück zum umgebenen Gas oder den Übergang zwischen zwei metallischen Werkstoffen (z.B. dem Spanntisch in der Werkzeugmaschine).  $\theta_{ext}$  charakterisiert die Temperatur des umgebenen Gases oder die eines anderen metallischen Werkstoffs.

Insgesamt bildet der Rand  $\partial\Omega(t)$  eine Menge aus abschnittsweise definierten Rändern mit Neumann- und Robinbedingungen. So gilt:

$$\partial\Omega(t) := \Gamma_N(t) \cup \Gamma_R(t) \quad \text{mit} \quad \Gamma_N(t) \cap \Gamma_R(t) = \emptyset.$$

Schließlich beschreiben die Gleichungen (3.14)-(3.17) ein Anfangsrandwertproblem der Wärmeleitungsgleichung im Innern des sich in der Zeit stark ändernden Werkstücks.

**Problem 3.2** (Wärmeleitung im Werkstück).

Es sei  $\Omega(t)$  eine zeitabhängige und beschränkte Menge im  $\mathbb{R}^d$  (Problem 3.1),  $t \in (0, T)$  und  $Q = \bigcup_{t \in \mathcal{T}} (\{t\} \times \Omega(t)) \subset \mathbb{R}^{d+1}$  ein nicht-zylindrisches Raum-Zeit-Gebiet, dann sei

$$\begin{aligned} \rho c_e \frac{d\theta}{dt} - \operatorname{div}(\kappa \nabla \theta) &= f && \text{in } Q \\ -\kappa \nabla \theta \cdot \mathbf{n} &= q_N(\mathbf{x}, t) && \text{auf } \Gamma_N(t), t \geq 0 \\ -\kappa \nabla \theta \cdot \mathbf{n} &= \delta(\theta - \theta_{ext}) && \text{auf } \Gamma_R(t), t \geq 0 \\ \partial\Omega(t) &= \Gamma_N(t) \cup \Gamma_R(t) \end{aligned}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\theta(\mathbf{x}, 0) \equiv \theta_0 \quad \text{in } \Omega(0) = \Omega$$

ein Anfangsrandwertproblem der Wärmeleitungsgleichung zur Abbildung des thermischen Werkstückverhaltens während der spanenden Bearbeitung.

### 3.3 Quasi-stationäres Verformungsverhalten

Die Modellierung des Verformungsverhalten eines Werkstoffs steht im Fokus dieses Abschnitts. Zur Beschreibung der Kontinuumsmechanik ist zunächst Anhand der Impulsbilanz die Deformationsgleichung auf einem nicht-zylindrischen Raum-Zeit Gebiet herzuleiten sowie einige Verhaltenstypen von Materialien zu erläutern.

In der Kontinuumsmechanik sind hauptsächlich drei Verhaltenstypen zu unterscheiden: Elastizität, klassische Plastizität und Umwandlungsplastizität. Die klassische Plastizität ist weiter in einen reinen und einen viskoplastischen Anteil zerlegbar, sofern das plastische Verhalten des Werkstoffs viskose (fließende) Eigenschaften annimmt. Diese treten z.B. beim Kriechen des Werkstoffs auf, worunter zeit- und temperaturabhängige plastische Verformungen unter konstanter Last zu verstehen sind, [3].

Beim Zerspanprozess auf makroskopischer Ebene ist der Einfluss klassischer Plastizität, Umwandlungs- sowie Viskoplastizität auf das Verhalten eines Werkstoffs vernachlässigbar. Während der Werkzeug-Werkstück-Interaktion treten zwar Temperaturgradienten von mehreren hundert Grad als auch Fließgrenzen überschreitende Spannungen auf, durch den Abtrag des Materials geht jedoch die meiste Energie über den Span wieder verloren, so dass die Wahrscheinlichkeit des Auftretens dieser Effekte sehr klein ist. Bei einer Betrachtung des Spanbildungsprozesses auf meso- bzw. mikroskopischer Ebene ist eine Berücksichtigung solchen Verhaltens sinnvoll. Hier treten auf jeden Fall plastische Verformungen bei der Spanbildung auf, da es sich hierbei um einen Materialumformungsprozess handelt. Zusätzlich sind auch Phasenumwandlungen im Gefüge des Werkstoffs

mit der Folge von weißen Schichten möglich. Diese entstehen meist im Bereich der Reibungszone, die sich anschließend im Nachlauf des Werkzeugs ausbilden. Vergleiche hierzu [58, 70].

Im folgenden wird nun angenommen, dass nur kleine Belastungen bzw. Deformationen auftreten. Teile der Modellierung werden durch diese Annahme vereinfacht. Aus der makroskopischen Betrachtung des Zerspanprozesses und insbesondere der Änderung des Werkstückgebiets, verbleibt auch nur ein kleiner Teil der Deformation im Werkstück. Die Verteilung der verbleibenden Spannung ist ähnlich der Wärmeverteilung in Abbildung 3.4. Die hier beschriebene Modellierung gibt lediglich einen Überblick. Für detailliertere Ausführungen können bspw. [3, 14, 29] herangezogen werden. Wie im vorherigen Abschnitt zur Wärmeleitungsgleichung sind die aufgeführten Herleitungen auf dem in Problem 3.1 formulierten Werkstückgebiet zu betrachten. Der Aufbau dieses Abschnitts ähnelt [64], jedoch wird hier auf die Modellierung von Phasenumwandlungen und Plastizität verzichtet.

### 3.3.1 Impulsbilanz

Die Basis der Kontinuumsmechanik bildet die Definition aller relevanten Größen auf einem Kontinuum. Mathematisch wird eine offene Teilmenge im  $\mathbb{R}^d$  betrachtet, die in der Regel zeitlich variiert. Solche Gebiete werden durch die Kinematik beschrieben, um erzeugte innere Gegenkräfte und zugeführte äußere Kräfte in einen neuen Zustand des Gleichgewichts zu überführen.

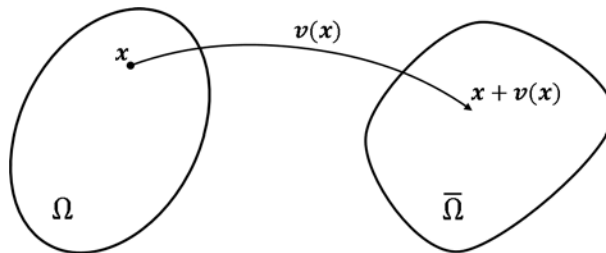


Abbildung 3.5: Referenz (links) und deformierte Konfiguration (rechts). Nach [64].

Ein Punkt im deformierten Gebiet wird durch seine Position  $\boldsymbol{x}$  in der Referenzkonfiguration  $\Omega(t) \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$  zum Zeitpunkt  $t \in [t_0, t_1]$  beschrieben. Dabei bezeichnet  $\boldsymbol{v} : \bigcup_{t \in \mathcal{T}} (\{t\} \times \bar{\Omega}(t)) \rightarrow \mathbb{R}^d$  den Verschiebungsvektor, der den Punkt im Referenzgebiet zu einem Punkt im deformierten Gebiet überführt. Abbildung 3.5 zeigt eine vereinfachte schematische Darstellung dieser Beziehung.

Zur Beschreibung des Referenzgebiets und des deformierten Gebiets werden verschiedene Darstellungen unterschieden, [3, 29]:

- **Die Eulerschen Koordinaten:** Ein räumlich fixierter Punkt wird festgehalten. Zu verschiedenen Zeitpunkten werden diesem Punkt unterschiedliche Materiepunkte zugeordnet, so dass die zeitliche Veränderung der Bewegung am fixierten Punkt untersucht wird.



- **Die "materiellen" oder Lagrangeschen Koordinaten:** Ein Materiepunkt wird festgehalten und dessen Bewegung im Raum beobachtet, um die Änderung der Eigenschaften dieses Materiepunktes in der Zeit zu untersuchen.

In der Strömungsmechanik, bspw. beschrieben durch die Navier-Stokes Gleichungen, liegt der Fokus in der momentanen Verschiebungsgeschwindigkeit, die in Eulerschen Koordinaten eines raumfesten Systems gegeben sind. Demgegenüber besteht das Interesse in der Mechanik von Feststoffen, wie auch in dieser Arbeit, an der Verschiebung von Materiepunkten eines Körpers aus einer gegebenen Referenzlage, die in Lagrangeschen Koordinaten beschreiben werden.

Sofern nicht explizit erwähnt, sind im Weiteren, wie auch im vorherigen Abschnitt, alle Gleichungen in Lagrangeschen Koordinaten gegeben.

Ist der Verschiebungsvektor  $\mathbf{v}$  bekannt und das entsprechende Koordinatensystem bestimmt, wird als nächstes ein Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\epsilon} : \bigcup_{t \in \mathcal{T}} (\{t\} \times \bar{\Omega}(t)) \rightarrow \mathbb{R}^d$  benötigt, der wie folgt zu beschreiben ist:

$$\boldsymbol{\epsilon} := \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T). \quad (3.18)$$

Dieser linearisierte Verzerrungstensor resultiert aus der Voraussetzung nur kleine Deformationen zuzulassen. Bei auftretenden großen Verzerrungen muss (3.18) um einen quadratischen Term  $\frac{1}{2} \nabla \mathbf{v} (\nabla \mathbf{v})^T$  erweitert werden. Hieraus ist zu folgern, dass die Verzerrung nichtlinear wäre.

Der Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\epsilon}$  beschreibt also ein Maß für die Deformationen des Körpers, die durch äußere Krafteinwirkungen resultiert. Ein Beanspruchungszustand im Inneren des Körpers ist die Folge. Dieser Zustand an einem Punkt des Körpers wird als, die dort herrschende, Spannung bezeichnet. Die Arbeiten von Euler und Cauchy führen auf das Spannungsprinzip als Ausgangspunkt des Beanspruchungszustands eines Körpers zurück [3]. Basierend auf diesem Prinzip werden im folgenden das Gleichgewichtsaxiom von Cauchy, der Cauchy Spannungsvektor und der Spannungstensor ausgenutzt sowie eingeführt.

Es sei zunächst zu einen festen Zeitpunkt  $t \geq 0$ ,  $\Omega(t)$  ein Körper und  $\partial\omega$  eine Teilfläche des Körpers, wobei  $\partial\omega$  entweder eine Schnittfläche zwischen zwei Teilkörpern ist oder auf dem äußeren Rand von  $\Omega(t)$  liegt. Jeder Teilfläche ist im Punkt  $\mathbf{x}$  eine nach außen zeigende Richtungsnormale  $\mathbf{n}$  zugeordnet. Das Axiom von Cauchy sagt nun aus, dass durch die Wirkung äußerer Kräfte längs jeder Teilfläche des Körpers ein Vektorfeld von Spannungsvektoren  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  existiert. Der Cauchy Spannungsvektor ist somit vom Ort  $\mathbf{x}$  und Zeit  $t$  abhängig. Der nun zu formulierende Cauchy Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma} : \bigcup_{t \in \mathcal{T}} (\{t\} \times \bar{\Omega}(t)) \rightarrow \mathbb{R}^d$  beschreibt folgende Relationen:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^T. \end{aligned}$$

Die Herleitung der Deformationsgleichung erfolgt analog zur Wärmeleitung und wird verkürzt wiedergegeben. Auch hier sind feste, zeitunabhängige Teilmengen  $\omega$  von  $\Omega(t)$  so klein zu wählen, das zu jeden Zeitpunkt eine Aufsummierung der Teilmengen das zeitabhängige Werkstückgebiet  $\Omega(t)$  darstellt. Anhand dieser ist das folgende System herzuleiten.

Angenommen wird, dass Wechselwirkungen der Kräfte, bestehend aus Volumenkräften und Flächenkräften, sich in einen Gleichgewichtszustand zu Null addieren. Dabei werden unter Flächenkräften  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  Kräfte zugeordnet, die von außen auf den Körper wirken (erster Term von (3.19)) und auf die Teilmenge eingeschränkte Volumenkräfte  $\hat{\mathbf{f}}$  im Inneren des Körpers (zweiter Term von (3.19)). Folglich ist die Gravitationskraft i.d.R. der Volumenkraft zuzuordnen. Im Kontext des Zerspanprozesses besteht die Volumenkraft zusätzlich aus Eigenspannungen des Werkstücks. Flächenkräfte beschreiben hier im Prozess entstehende Kräfte über den Schneideneingriff sowie Einspannungskräfte an den Fixierungen des Werkstücks. Die Beschleunigungs- bzw. Trägheitskräfte sind gegeben durch  $\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2}$  und werden dem dritten Term von (3.19) zugeordnet.

$$\int_{\partial\omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, ds + \int_{\omega} \rho \hat{\mathbf{f}} \, dx = \int_{\omega} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} \, dx. \quad (3.19)$$

Durch Anwendung des Gauss'schen Divergenzsatzes und weiterer Umformungen ergibt sich

$$\int_{\omega} \left( \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \hat{\mathbf{f}} \, dx - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} \right) dx = 0. \quad (3.20)$$

Aus (3.20) folgt letztlich die Deformationsgleichung vom hyperbolischen Typ.

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})) = \rho \mathbf{f} \quad \text{in } Q. \quad (3.21)$$

Der Beschleunigungsterm (erster Term von (3.21)) wird für die weitere Betrachtung zu Null gesetzt, so dass sich der Typ von hyperbolisch zu elliptisch ändert und die Deformationsgleichung nun quasi-stationär ist. Dies erschließt sich zum einen aus der Betrachtung des Zerspanprozesses und zum anderen aus den gewünschten Zeitskalen, weil diese deutlich größer sein werden als die Zeitskala zur Abbildung mechanischer Schwingungen (Vergleiche Kapitel 5). Diese sind in den vorliegenden Zerspanprozessen ausgeschlossen, da die Berechnung der Wärmeleitung, der Deformation und der Gebietsänderung quasi simultan auf Zeitskalen erfolgt (Vergleiche Kapitel 4.4.1), die erheblich größer sind als Zeitskalen, die einzelne Zahnstellungen abbilden. Ungeachtet der zeitlichen Gebietsänderung, ist schließlich eine Untersuchung von (3.21) auf  $\Omega(t)$  zu festen Zeitpunkten  $t \in \mathcal{T}$  ausreichend.

Zur Beschreibung eines Randwertproblems sind im weiterem geeignete Randbedingungen festzulegen, besonders eignen sich im vorliegenden Fall Dirichlet- und Neumannbedingungen. Bei der spanenden Fertigung beschreiben z. B. Dirichletbedingungen

$$\mathbf{v} = \mathbf{F}_D(\mathbf{x}, t) \quad \text{auf } \Gamma_D(t), \quad t \geq 0 \quad (3.22)$$

Auflagen und Fixierungspunkte des Werkstücks an der Fertigungsmaschine. An diesen ist eine mechanische Bewegung des Werkstücks nur bedingt oder gar nicht möglich. Neumannbedingungen charakterisieren hierbei

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_N(\mathbf{x}, t) \quad \text{auf } \Gamma_N(t), \quad t \geq 0 \quad (3.23)$$

die in der Zeit variierenden Prozesskräfte am Schneideneingriff in der Kontaktzone sowie Spannungskräfte an Spannelementen, mit denen das Werkstück auf der Fertigungsmaschine fixiert wird. Alle freien Oberflächen des Werkstücks, sind mit Neumann-Null-Randbedingungen zu versehen, um freie Ausdehnungen des Materials zu gewährleisten. Auch bei diesen Problem bildet der Rand  $\partial\Omega(t)$  eine Menge von disjunkten Teil-Rändern mit Dirichlet- und Neumannbedingungen.

Die Gleichungen (3.21)-(3.23) bilden nun ein Randwertproblem der quasi-stationären Deformation im Innern des Werkstücks.

**Problem 3.3** (Quasi-stationäre Deformationsgleichung).

*Es sei  $\Omega(t)$  eine zeitabhängige und beschränkte Menge im  $\mathbb{R}^d$  und  $t \in (0, T)$  ein beliebiger fester Zeitpunkt. Dann sei*

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})) &= \rho \mathbf{f} && \text{in } \Omega(t), t \geq 0 \\ \mathbf{v} &= \mathbf{F}_D(\mathbf{x}, t) && \text{auf } \Gamma_D(t), t \geq 0 \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{F}_N(\mathbf{x}, t) && \text{auf } \Gamma_N(t), t \geq 0 \\ \boldsymbol{\epsilon} &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) \\ \partial\Omega(t) &= \Gamma_D(t) \cup \Gamma_N(t) \end{aligned}$$

*ein quasi-stationäres Randwertproblem der quasi-stationären Deformationsgleichung für eine erste Beschreibung des mechanischen Werkstückverhaltens während der spannenden Bearbeitung.*

### 3.3.2 Lineare Elastizität

Das hergeleitete Problem 3.3 ist in seiner derzeitigen Form unterbestimmt, da keine Beziehung zwischen Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  und Deformation  $\mathbf{v}$  besteht. Erst durch die Vervollständigung der Problemstellung ist eine mathematische Berechnung des mechanischen Materialverhaltens möglich. Eine Beziehung ist über die Materialverhaltenstypen gegeben: Elastizität, reine Plastizität, Umwandlungs- und Viskoplastizität.

Die Elastizität ist an dieser Stelle das einfachste zu beschreibende Materialverhalten. Ein Körper ist elastisch, wenn ein Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen besteht. Verformungen sind ein Resultat aus der Wirkung von internen und externen

Kräften, die auf dem gleichen Lastpfad wieder in ihre Ausgangslage zurück versetzt werden, wenn diese nicht mehr wirken. In der linearen Elastizität liefert das Hookesche Gesetz den Zusammenhang zwischen Spannungs- und Verzerrungstensor durch

$$\boldsymbol{\sigma} = C\boldsymbol{\epsilon},$$

wobei  $C$  den Elastizitätstensor darstellt [3]. Der Tensor charakterisiert eine Abbildung vom Raum symmetrischer Matrizen in sich selbst. Für  $d = 3$  ist dieser ein Tensor vierter Stufe mit insgesamt 81 verschiedenen Einträgen. Durch Vereinfachungen lässt sich die Zahl der Komponenten reduzieren [14]. Zum Beispiel ist unter der Annahme, dass der Spannungstensor die Drehimpulsbilanz erfüllt, dieser symmetrisch. Unter der Voraussetzung nur kleine Deformationen zuzulassen, erfolgt sogar eine Linearisierung des Verzerrungstensors und folglich auch Symmetrie. Aus letzterem resultieren für die Nebendiagonalen folgende Beziehungen:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \quad \text{und} \quad C_{ijkl} = C_{ijlk}.$$

Zudem reduziert sich das System auf 36 linear-unabhängige Materialkonstanten. Die Literatur zeigt Möglichkeiten weitere Reduzierungen vorzunehmen. Bei orthogonal-anisotropem Materialverhalten reduziert sich die Anzahl der Materialkennwerte auf 9 [3, 14]. Bei dem in dieser Arbeit verwendeten Werkstoff C45EN (Anhang B) handelt es sich um ein homogenes isotropes Material. Solch ein Verhalten zeichnet sich unter linearer Elastizität dadurch aus, dass Reaktionen von Kräften unabhängig ihrer Wirkrichtung auftreten. Durch diese Eigenschaft reduziert sich die Anzahl der Materialkennwerte schließlich auf zwei, das Elastizitätsmodul (Young'sches Modul)  $E$  und die Querkontraktionszahl (Poissonzahl)  $\nu$ .

Das Elastizitätsmodul (E-Modul) beschreibt ein linear-elastisches Verhalten des Körpers. Je mehr Widerstand gegen einer elastischen Verformung ausgeübt wird, desto größere Werte nimmt das E-Modul an. Es ist also ein Maß für die Steifigkeit des Materials. Zum Beispiel würde das E-Modul für einen Gummiwerkstoff niedrige Werte annehmen, da Gummi, trotz niedriger von außen wirkender Kräfte, gut verformbar ist.

Die Querkontraktionszahl definiert das Verhältnis der relativen Änderung der Breite zur relativen Änderung der Länge, sobald eine äußere Kraft auf dem Körper wirkt. Sie beschreibt demnach ein Maß für die seitlichen Kontraktionen des Materials sowie die relative Änderung des Volumens. Ein hoher Wert, wie bspw. beim Gummi ( $\nu \sim 0.5$ ), verursacht keine Volumenänderung. Hingegen erhöht sich bei isotropen metallischen Werkstoffen das Volumen des Materials ( $\nu < 0.5$ ) und nimmt entsprechend Einfluss auf dessen Dichte.

In der mathematischen Theorie werden das Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl häufig durch die Lamé-Koeffizienten  $\lambda$  und  $\mu$  ausgedrückt. Für den Elastizi-

tätstensor ergibt sich damit folgende Darstellung

$$C_{ijkl} = \lambda \partial_i v_j \partial_k v_l + \mu (\partial_i v_k \partial_j v_l + \partial_i v_l \partial_j v_k)$$

mit Ableitungen  $\partial_i v_j$  in  $\epsilon(\mathbf{v})$  für alle  $i, j$ . Für den Spannungstensor folgt schließlich

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) = \lambda (\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}))) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}). \quad (3.24)$$

Die Lamé-Koeffizienten sind, wie die Kennwerte der Wärmeleitungsgleichung, von der Temperatur abhängig, was den Begriff quasi-stationär suggeriert. Aus den Materialkennwerten sind weitere Kennwerte ableitbar, wie das Schubmodul  $G$  und das Kompressionsmodul  $K$ . Diese finden in der vorliegenden Arbeit jedoch keine Berücksichtigung und werden nur zur Vervollständigung aufgeführt. Es ergeben sich an dieser Stelle folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, & \mu &= \frac{E}{2(1 + \nu)}, & K &= \frac{E}{3(1 - 2\nu)}, \\ E &= \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, & \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, & G &= \frac{E}{2 + 2\nu}. \end{aligned}$$

Mit Zusammenführung von Problem 3.3 und Gleichung (3.24) ist ein linear elastisches Materialverhalten zu beschreiben.

**Problem 3.4** (quasi-stationär linear-elastische Deformationsgleichung).

*Es sei  $\Omega(t)$  eine zeitabhängige und beschränkte Menge im  $\mathbb{R}^d$  und  $t \in (0, T)$  ein beliebiger fester Zeitpunkt, dann sei*

$$\begin{aligned} -\mu \Delta \mathbf{v} - (\mu + \lambda) \nabla \text{div}(\mathbf{v}) &= \rho \mathbf{f} && \text{in } \Omega(t), t \geq 0 \\ \mathbf{v} &= \mathbf{F}_D(\mathbf{x}, t) && \text{auf } \Gamma_D(t), t \geq 0 \\ (\lambda (\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}))) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v})) \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{F}_N(\mathbf{x}, t) && \text{auf } \Gamma_N(t), t \geq 0 \\ \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) \\ \partial\Omega(t) &= \Gamma_D(t) \cup \Gamma_N(t) \end{aligned}$$

*ein Randwertproblem der quasi-stationären, linear-elastischen Deformation.*

Der Zerspanprozess ist in der Meso-/Mikroebene ein Materialumformungsprozess, bei dem weitere Effekte des Materialverhaltens zu berücksichtigen sind. Dabei handelt es sich insbesondere um Plastizität für die Spanumformung und Umwandlungsplastizität sowie Phasenumwandlungen im Bereich der Reibzone zwischen Werkzeug und Werkstück [58, 70]. Eine Übertragung dieser Effekte auf die Makroebene ist möglich. Ohne experimentelle Verifikation, werden hier jedoch keine weiteren Arten von Materialverhalten berücksichtigt. Durch Betrachtung großer Zeitintervalle und damit große Zeitskalen, die

mehr als eine Zahnstellung beinhalten, sind einige Effekte vernachlässigbar. Mit Problem 3.4 ist somit ein geeignetes System gegeben, welches die gewünschten mechanischen Effekte im und am Werkstück während der spanenden Bearbeitung beschreibt.

### 3.4 Gekoppeltes Modellproblem

Für die Zusammenführung der zuvor betrachteten Modellgleichungen hin zu einem gekoppelten Modell sind weitere Terme notwendig, die Abhängigkeiten von Temperatur als auch Mechanik im jeweils anderen Modellproblem berücksichtigen. So beschreibt die Kopplung von Wärmeleitung und linear-elastischer Deformation die Interaktion von Temperatur- und Verschiebungsfeldern unter bestimmten Voraussetzungen. Hier sind unter anderem mechanische Eigenschaften metallischer Werkstoffe zu verstehen, die von der Temperatur abhängen (z.B. Phasenumwandlungen).

Eine Schnittstelle in der Wärmeleitungsgleichung (Kapitel 3.2) ist durch innere Quellen und Senken gegeben. Diese treten bei Phasenumwandlungen in Erscheinung, um die Transformation in einen anderen Aggregatzustand zu ermöglichen. Die hier aufzubringende thermische Energie ist unter den Begriff der latenten Wärme bekannt.

Für die vorliegende Problemstellung werden vereinfachte Annahmen getroffen. Es ist bekannt, dass nur rein elastisches Materialverhalten berücksichtigt wird. Somit bleiben Phasenumwandlungen, klassische Plastizität sowie Umwandlungs- und Viskoplastizität unbeachtet. Dies führt zum Ausschluss Innerer Wärmequellen und -senken in der Wärmeleitung. Die rechte Seite der Gleichung wird zu Null gesetzt. Eine Kopplung der Deformation in die Wärmeleitung ist hiermit vernachlässigbar. Indirekt werden zwar durch die Werkzeug-Werkstück-Interaktion inneren Wärmequellen berücksichtigt, jedoch sind diese, wegen der Abbildung makroskopischer Zerspanprozesses, auszuschließen. Gleichung (3.14) lautet letztlich:

$$\rho(\theta)c_e(\theta)\frac{d\theta}{dt} - \operatorname{div}(\kappa(\theta)\nabla\theta) = 0 \quad \text{in } Q. \quad (3.25)$$

Infolgedessen muss eine einseitige indirekte Kopplung der Wärmeleitung in die Deformation möglich sein. Diese zeichnet sich durch die temperaturabhängigen, mechanischen Werkstoffeigenschaften aus (Vergleiche dazu auch Kapitel 3.3.2). Neben temperaturabhängigen Lamé-Koeffizienten wird zusätzlich der Spannungstensor um einen weiteren Term erweitert. Dieser beschreibt thermische Expansion, die durch Wärmen und Kühlen des Werkstoffs auftritt, so dass folgender Spannungstensor zu beschreiben ist:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) = 2\mu(\theta)\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) + \lambda(\theta)(\operatorname{tr}(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v})) - 3\alpha(\theta)(\theta - \theta_0))\mathbf{I} \quad (3.26)$$

mit thermischen Expansionskoeffizienten  $\alpha$  und Anfangstemperatur  $\theta_0$ .

**Problem 3.5** (Thermomechanisches Modell).

Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ein offenes, beschränktes Gebiet,  $t \in (0, T)$  ein Zeitintervall und  $Q \subset \mathbb{R}^{d+1}$  ein nicht-zylindrisches Raum-Zeit-Gebiet nach (3.7). Dann wird das thermomechanische Modell durch folgende Komponenten beschrieben:

- dem zeitabhängigen Werkstückgebiet (Problem 3.1):

$$\begin{aligned}\Omega(t) &\subset \Omega \setminus \bar{\Omega}_m(t), \\ \partial\Omega(t) &= \Gamma_w(t) \cup \Gamma(t), \\ \Gamma_w(t) &= \partial\Omega \cap \partial\Omega(t), \\ \Gamma(t) &= \partial\Omega(t) \cap \partial\Omega_m(t)\end{aligned}$$

und speziell für  $t = 0$ :

$$\begin{aligned}\Omega(0) &= \Omega & \text{und} & & \Omega_m(0) &= \emptyset, \\ \Gamma(0) &= \emptyset & \text{und} & & \Gamma_w(0) &= \partial\Omega(0) = \partial\Omega;\end{aligned}$$

- der Wärmeleitung (Problem 3.2):

$$\begin{aligned}\rho(\theta)c_e(\theta)\frac{d\theta}{dt} - \operatorname{div}(\kappa(\theta)\nabla\theta) &= 0 & \text{in } Q \\ -\kappa(\theta)\nabla\theta \cdot \mathbf{n} &= q_N(\mathbf{x}, t) & \text{auf } \Gamma_N(t) \\ -\kappa(\theta)\nabla\theta \cdot \mathbf{n} &= \delta(\theta - \theta_{ext}) & \text{auf } \Gamma_R(t)\end{aligned}$$

mit Anfangsbedingung:

$$\theta(\cdot, 0) = \theta_0 \quad \text{in } \Omega(0) = \Omega;$$

- zu festen Zeitpunkt  $t$  die quasi-stationäre, linear-elastische Deformation (Problem 3.4):

$$\begin{aligned}-\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})) &= \rho(\theta)\mathbf{f} & \text{in } \Omega(t), t \geq 0 \\ \mathbf{v} &= \mathbf{F}_D(\mathbf{x}, t) & \text{auf } \Gamma_D(t), t \geq 0 \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{F}_N(\mathbf{x}, t) & \text{auf } \Gamma_N(t), t \geq 0\end{aligned}$$

- und dem zugehörigen Verzerrungs- und Spannungstensor:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) &= \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) &= 2\mu(\theta)\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) + \lambda(\theta)(\operatorname{tr}(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v})) - 3\alpha(\theta)(\theta - \theta_0))\mathbf{I}.\end{aligned}$$

### 3.5 Parabolische Probleme auf zeitabhängigen Gebieten

Aus obiger Formulierung der gekoppelten Thermomechanik stellt sich im weiteren, sowohl für die numerische wie auch analytische Diskussion des Systems, nun die Aufgabe einer Transformation der kontinuierlichen Gleichungen in ihre schwache Form. Die Überführung von Wärmeleitung und Deformation in ihre Variationsformulierungen über Funktionenräume auf einem festen nicht zeitlich ändernden Rechengebiet  $\Omega$  ist bereits hinlänglich bekannt und in der Literatur nachzuschlagen. Genannt sei z.B. Braess [18] und Eck [29].

#### 3.5.1 Bemerkungen zur analytischen Diskussion

In der analytischen Diskussion ist die Transformation parabolischer Problemstellungen in ihre schwache Form auf nicht-zylindrischen Raum-Zeit-Gebieten ein viel untersuchter Gegenstand. Hierbei wird im wesentlichen zwischen der Transformation des zeitabhängigen Gebiets auf ein festes Referenzgebiet, um auf diesen die Theorie zylindrischer Raum-Zeit-Gebiete anzuwenden und der Definition geeigneter Sobolev-Räume auf nicht-zylindrischen Raum-Zeit-Gebieten unterschieden.

Im ersten Fall zeigen Arbeiten von Alphonse et al. [1] und Cortéz et al. [19] Möglichkeiten auf, parabolische PDEs auf zeitabhängigen sich bewegenden Gebieten  $\Omega(t)$  zu lösen. Sie nutzen Transformationen, um gesuchte Lösungen in  $\Omega(t)$  auf ein Referenzgebiet  $\Omega$  zu finden. Ein Vorteil hierbei ist die Ausnutzung der Theorie über zylindrische Raum-Zeit-Gebiete.

Im Bezug auf den vorliegenden Zerspanprozess und damit verbunden ein zeitlich sehr stark änderndes Werkstückgebiet, scheint deren Vorgehensweise nur bedingt sinnvoll. Hier wäre wohl eine Zerlegung des zeitabhängigen Gebiets notwendig, um zwischen Bereichen mit und ohne zeitlicher Änderung zu unterscheiden. Über relativ kleine Zeitintervalle ist auf diesen schließlich eine analytische Diskussion über die Lösbarkeit, insbesondere des parabolischen Problems, möglich. Modellierung sowie analytische Lösung wären jedoch mit einem erheblichen Mehraufwand verbunden. Ein Beweis über Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen komplexer Prozesse wäre in diesem Fall wohl sehr aufwendig.

Ein weiterer Ansatz ist in Arbeiten von Böhm und Meier gegeben [41, 42]. Sie untersuchten ein mikroskopisches Zweiskalenmodell, in dem sich Zellen an verschiedenen Punkten eines Trägers in der Zeit verändern, z.B. in der Form oder in deren Position. Um analytische Untersuchungen über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen durchzuführen, konstruierten sie geeignete Funktionenräume der Form  $L_2(\Omega; H^1(Y_x))$  für ein Gebiet  $Y_x$ , welches von  $x \in \Omega$  abhängt. Der entwickelte Ansatz basiert auf Arbeiten von Showalter et al. [60]. Im Gegensatz zu [1, 19] nutzen sie hier lediglich lokale Transformationen auf dem, durch überlappende Umgebungen zerlegten, Gebietsrand  $\partial Y_x$ , um einen Lipschitz-Rand innerhalb der Umgebung zu gewährleisten.

Für eine analytische Diskussion des vorliegenden Zerspanprozesses wäre eine Zer-



legung des Gebietsrands  $\partial\Omega(t)$  in überlappende Umgebungen ein akzeptables Mittel. Über die, in den Arbeiten von Böhm und Meier [41, 42] definierten Sobolev-Räumen für nicht-zylindrische Raum-Zeit-Gebiete ist zusätzlich ein ideales Mittel gegeben, die schwache Form der obigen Modellgleichungen auf sich in der Zeit ändernden Gebieten zu formulieren. Den Beweis für die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des oben eingeführten thermomechanischen Modells (Problem 3.5) bleibt diese Arbeit hier jedoch schuldig. Die numerische Analyse einer Gebietsrandapproximation, zur hochauflösenden Darstellung der Werkstückgestalt und die möglichst realitätsnahe Abbildung diverser, in der Komplexität steigender, Zerspanprozesse steht hier im Fokus.

### 3.5.2 Sobolev-Räume auf nicht-zylindrischen Raum-Zeit-Gebieten

Um die oben eingeführten kontinuierlichen Modellgleichungen auf nicht-zylindrischen Raum-Zeit-Gebieten in ihre schwache Form zu überführen, sind im weiteren geeignete Funktionenräume zu konstruieren, die Funktionen auf einer Menge von Gebieten der Form  $\{\Omega(t) \subset \mathbb{R}^d : t \in \mathcal{T}\}$  und deren Ränder abbilden. Zunächst führt eine erste Definition den Lebesgue-Raum  $L_{p,q}(Q)$  ein. Anschließend ist der Sobolev-Raum  $W_{p,q}^{0,l}(Q)$  zu betrachten und zuletzt ist ein Spurraum notwendig, um Funktionen auf dem, sich in der Zeit ändernden, Gebietsrand  $\mathcal{T} \times \partial\Omega(t)$  abzubilden, wobei der Rand eine Menge von Rändern der Form  $\{\partial\Omega(t) : t \in \mathcal{T}\}$  darstellt. Hierbei basieren die folgenden Ausführungen auf den Arbeiten von Böhm und Meier [41, 42]. Diese werden im Kontext des vorliegenden Zerspanprozesses auf nicht-zylindrische Raum-Zeit-Gebiete betrachtet und geben nur einen Einblick in die umfassende analytische Theorie.

#### Konstruktionsidee

Die Konstruktion geeigneter Funktionenräume auf nicht-zylindrischen Raum-Zeit-Gebieten basiert auf der Idee, sämtliche Funktionen aus einer festen, zeitunabhängigen Obermenge Null zu setzen, die nicht zum Gebiet des aktuellen Zeitpunkts gehören. Im vorliegenden Zerspanprozess beschreibt die Obermenge den Rohling, aus dem das zu fertigende Werkstück entsteht,  $\Omega(0) = \Omega$ . Zu jedem Zeitpunkt  $t \in \mathcal{T} = (0, T)$  sind Funktionen auf  $\Omega(t)$  einzuschränken und außerhalb zu Null zu setzen:  $u(t, \cdot) = 0$  auf  $\Omega \setminus \Omega(t)$  (Abbildung 3.6).

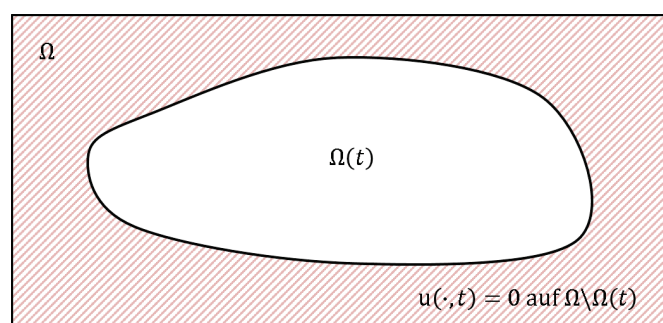


Abbildung 3.6: Konstruktionsidee des  $L_{p,q}$ .  $u(t, \cdot) = 0$  auf  $\Omega \setminus \Omega(t)$ .

Geeignete Funktionenräume werden also auf die zeitabhängigen Teilgebiete eingeschränkt. Die Konstruktionsidee ist nicht neu, sie findet in Problemstellungen mit freien Gebietsrändern (z.B. kapillare Oberflächen, Stefanproblem) Anwendung (Siehe hierzu [41, S. 67 f.] für einen Überblick).

### Lebesgue-Raum $L_{p,q}(Q)$

Gesucht wird nun ein Funktionenraum in dem alle auf  $\Omega(t)$  lebenden Funktionen  $p$ -fach integrierbar und messbar sind. Für die folgenden Ausführungen sei  $\mathcal{T} = [0, T] \subset \mathbb{R}$  ein abgeschlossenes Zeitintervall und  $\Omega(t) \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$  ein offenes, beschränktes und zeitabhängiges Gebiet. Dann sei

$$Q := \mathcal{T} \times \Omega(t) := \bigcup_{t \in \mathcal{T}} (t \times \Omega(t)) \subset \mathbb{R}^{d+1}$$

bzgl. des  $(d+1)$ -dimensionalen Lebesgue-Maßes messbar [42]. Seien weiter  $p \in [1, \infty]$  und  $q \in [1, \infty]$  gegebene Exponenten und  $p', q'$  die zugehörigen dualen Exponenten und es gelte:  $1/p + 1/p' = 1$  und  $1/q + 1/q' = 1$ . Zu dem sei der Raum  $L_q(\mathcal{T} \times \Omega)$  isometrisch isomorph zu  $L_q(\mathcal{T}; L_q(\Omega))$  und für  $p \leq q$  gelte  $L_q(\mathcal{T}; \Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega; \mathcal{T})$  [41].

Ein Lebesgue-Raum  $L_{p,q}(Q)$  sei nun wie folgt gegeben

$$\begin{aligned} L_{p,q}(Q) &\equiv L_p(\mathcal{T}; L_q(\Omega(t))) & (3.27) \\ &:= \{u \in L_p(\mathcal{T}; L_q(\Omega)) : u(\cdot, t) = 0 \text{ auf } \Omega \setminus \Omega(t) \text{ für alle } t \in \mathcal{T}\}. \end{aligned}$$

Mit der Norm

$$\|u\|_{L_{p,q}(Q)} := \begin{cases} \left( \int_{\mathcal{T}} \|u(x, t)\|_{L_q(\Omega(t))}^p dt \right)^{1/p}, & \text{falls } p < \infty, \\ \text{ess sup}_{t \in \mathcal{T}} \|u(x, t)\|_{L_q(\Omega(t))}, & \text{falls } p = \infty. \end{cases}$$

sei der Raum sogar ein Banach-Raum und die Norm endlich. Ist  $p = q = 2$ , dann ist  $L_{2,2}(Q)$  sogar ein Hilbert-Raum mit Skalarprodukt

$$(u, v)_{L_{2,2}(Q)} := \int_{\mathcal{T}} (u(t), v(t))_{L_2(\Omega(t))} dt.$$

Der Lebesgue-Raum (3.27) besitzt folgende Eigenschaften. Zunächst gelte in  $L_{p,q}(Q)$  die Hölder-Ungleichung. Dafür seien  $u \in L_p(\mathcal{T}; L_q(\Omega(t)))$  und  $v \in L_{p'}(\mathcal{T}; L_{q'}(\Omega(t)))$  dann folgt

$$\int_{\mathcal{T}} \int_{\Omega(t)} u(x, t)v(x, t) dx dt \leq \|u\|_{L_{p,q}(Q)} \|v\|_{L_{p',q'}(Q)}.$$

Weiter sei  $L_{p,p}(Q)$  isometrisch isomorph zu  $L_p(Q)$  und  $L_{p,q}(Q)$  sei sogar separabel, falls  $p < \infty$ .

Der Dualraum von  $L_{p,q}(Q)$  sei wie folgt gegeben: Sei  $p \in [1, \infty)$  und  $q \in (1, \infty)$ ,

dann ist der Operator

$$\langle J(f), g \rangle := \int_{\mathcal{T}} \int_{\Omega(t)} f(x, t) g(x, t) dx dt, \quad g \in L_{p,q}(Q), f \in L_{p',q'}(Q),$$

ein isometrischer Isomorphismus mit  $J : L_{p',q'}(Q) \rightarrow [L_{p,q}(Q)]'$  und nach [42] sei für  $p > 1$  der  $L_{p,q}(Q)$  sogar reflexiv.

### Sobolev-Raum $L_p(\mathcal{T}; W_q^l(\Omega(t)))$

Neben dem Lebesgue-Raum (3.27), über dem alle auf  $\Omega(t)$  lebenden,  $p$ -fach integrierbaren und messbaren Funktionen gebündelt werden, sind noch weitere Funktionenräume zu beschreiben. Folgend wird ein Raum gesucht, in dem  $p$ -fach integrierbare Funktionen leben, die schwach partiell ableitbar sind. Zunächst sei  $l \in \mathbb{N}$  und  $\alpha \in \{0, \dots, l\}^d$  ein Multiindex, so dass  $\partial^\alpha u(x, t)$  eine  $\alpha$ -fache Ableitung bzgl.  $x$  beschreibt.

Ein Sobolev-Raum  $W_{p,q}^{0,l}$  sei gegeben durch

$$W_{p,q}^{0,l}(Q) \equiv L_p(\mathcal{T}; W_q^l(\Omega(t))) := \{u \in L_{p,q}(Q) : \partial^\alpha u \in L_{p,q}(Q) \forall |\alpha| \leq l\}. \quad (3.28)$$

Dieser Raum ist mit der Norm

$$\|u\|_{W_{p,q}^{0,l}(Q)} := \sum_{|\alpha| \leq l} \|\partial^\alpha u\|_{L_{p,q}(Q)}.$$

ein Banach-Raum. Das  $W_{p,q}^{0,l}(Q)$  vollständig ist, wird verkürzt über die Vollständigkeit des  $L_{p,q}(Q)$  bewiesen. Das Argument erfolgt analog zu Standard Sobolev-Räumen (Siehe [41, S.18] für Details).

Ist  $p = q = 2$  dann sei  $W_{2,2}^{0,l}(Q)$  ein Hilbert-Raum mit Skalarprodukt

$$(u, v)_{W_{2,2}^{0,l}(Q)} := \sum_{|\alpha| \leq l} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{L_{2,2}(Q)}.$$

Die Schreibweise für den  $W_{p,q}^{0,l}(Q)$  sei analog zur Schreibweise von Sobolev-Räumen auf zylindrischen Raum-Zeit-Gebieten. Hier wird somit von  $W_p^0$ -Regularität bzgl.  $t$  und  $W_q^l$ -Regularität bzgl.  $\mathbf{x}$  gesprochen (Siehe [41] für Details).

### Spurraum $L_p(\mathcal{T}; L_q(\Gamma(t)))$

Durch die oben gegebenen Lebesgue- (3.27) und Sobolev-Räume (3.28) ist eine Beschreibung von Funktionen im Inneren von  $\Omega(t)$  möglich. Zur Vervollständigung wird ein weiterer Raum benötigt, der Funktionen auf dem sich zeitlich ändernden Rand  $\partial\Omega(t)$  beschreibt. Gesucht sei ein Integral der Form

$$\int_{\mathcal{T}} \int_{\partial\Omega(t)} u(s, t) ds dt$$

über  $\partial\Omega(t)$  im passenden Funktionenraum. Böhm und Meier beschreiben in [42] sehr detailliert die Konstruktion eines Spurraums über die Zerlegung des Gebietsrand in überlappende Nachbarschaften. Eine ähnliche Konstruktion ist auch in Alt [2] nachzulesen. Diese Zerlegung ist notwendig, um über Transformation einen Lipschitz-Rand zu erhalten. Dies ist jedoch nicht immer erfüllt. Ein klassisches Beispiel zeigt u.a. Braess in [18, S.31].

Der vorliegende Zerspanprozess wird auf einem polygonal berandeten Gebiet betrachtet (Kapitel 5), welches damit durch Konstruktion einen Lipschitz-Rand besitzt. Ein interagierendes Werkzeug besteht aus einem rotationssymmetrischen Körper, der ebenfalls einen Lipschitz-Rand besitzt. Während der Interaktion erfolgt der Materialabtrag im Werkstück, dessen Rand wieder Lipschitz ist. Eine Verletzung erfolgt nur, wenn das Werkzeug während der Interaktion diese verletzt, z.B. wenn das Werkzeug beim Austritt aus dem Werkstück, mit stumpfen Winkel auf den Rand trifft.

Für die folgenden Ausführungen sei  $\mathcal{T} \in \mathbb{R}$  ein abgeschlossenes Zeitintervall mit  $t \in \mathcal{T}$  und  $\Omega(t) \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$  ein offenes, beschränktes und zeitabhängiges Gebiet. Der zugehörige Gebietsrand eines nicht-zylindrischen Raum-Zeit-Gebiets sei gegeben durch

$$\Sigma := \mathcal{T} \times \partial\Omega(t) := \bigcup_{t \in \mathcal{T}} (t \times \partial\Omega(t)) \subset \partial Q.$$

für die folgenden Ausführungen sei  $\{(\Omega(t), \partial\Omega(t)) : \text{für fast alle } t \in \mathcal{T}\}$  eine reguläre Menge von Gebieten (siehe [42, S. 25]). Der Raum

$$\begin{aligned} L_{p,q}(\Sigma) &\equiv L_p(\mathcal{T}; L_q(\partial\Omega(t))) := \{u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist messbar, so dass} \\ &u(\cdot, t) \in L_q(\partial\Omega(t)) \text{ für f. a. } t \in \mathcal{T} \text{ und } \|u\|_{L_{p,q}(\Sigma)} < \infty\}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

sei mit zugehöriger Norm

$$\|u\|_{L_{p,q}(\Sigma)} := \begin{cases} \left( \int_{\mathcal{T}} \|u(\cdot, t)\|_{L_p(\partial\Omega(t))}^p dt \right)^{1/p}, & \text{falls } p < \infty, \\ \text{ess sup}_{t \in \mathcal{T}} \|u(\cdot, t)\|_{L_q(\partial\Omega(t))}, & \text{falls } p = \infty. \end{cases}$$

ein Banach-Raum. Ist  $p = q = 2$ , dann ist dieser ein Hilbert-Raum mit entsprechenden Skalarprodukt. Beweis siehe [41, S. 25].

Aus obigen Spurraum (3.29) lassen sich Folgerungen ableiten und beweisen, die in [41, S. 25 ff.] nachzuschlagen sind. Ein Satz über die Verbindung zwischen  $L_{p,q}(\Sigma)$  und  $W_{p,q}^{0,1}$  (3.28) schließt diesen Abschnitt ab.

Es sei  $p < \infty$  und  $\gamma_t : W_q^1(\Omega(t)) \rightarrow L_q(\partial\Omega(t))$  ein kontinuierlicher Spuroperator. Dann sei  $\|\gamma_t\|$  für fast alle  $t \in \mathcal{T}$  gleichmäßig beschränkt. Die Spur

$$\gamma : W_{p,q}^{0,1}(Q) \rightarrow L_{p,q}(\Sigma), \quad \gamma(u)(t) := \gamma_t(u(\cdot, t))$$

sei ein beschränkter linearer Operator. Beweis siehe [41, S. 28].

Zur Berechnung des thermischen und mechanischen Werkstückverhaltens während der Zerspanung, unter Berücksichtigung des Materialabtrags, genügen die obigen Ausführungen. Für detailliertere Informationen zu Herleitungen und Beweisen der aufgeführten Funktionenräume ist auf Arbeiten von Böhm und Meier [41, 42] zu verweisen.

## 3.6 Variationsformulierung der Modellgleichungen

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden die gewonnenen Resultate zu Funktionenräumen auf nicht-zyklindrischen Raum-Zeit-Gebieten genutzt, um eine schwache Form der Wärmeleitungsgleichung auf  $\mathcal{T} \times \Omega(t)$  zu erhalten. Neben der Wärmeleitung wird weiter zum festen Zeitpunkt  $t \in \mathcal{T}$  die schwache Form der quasi-stationären, linear-elastischen Deformationsgleichung auf dem zeitabhängigen Gebiet  $\Omega(t)$ ,  $t$  fest, gesucht. Den Abschluss bilden Bemerkungen zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen ähnlicher Problemstellungen.

### 3.6.1 Schwache Wärmeleitungsgleichung

Die zuvor eingeführten Funktionenräume auf nicht-zyklindrische Raum-Zeit-Gebiete erlauben nun die Überführung der Wärmeleitungsgleichung in ihre schwache Form. Dabei unterscheidet sich die Vorgehensweise unwesentlich von dem Vorgehen auf zylindrischen Raum-Zeit-Gebieten. Zunächst ist die Wärmeleitung mit Testfunktion zu multiplizieren und über das Gebiet  $\Omega(t)$  partiell zu integrieren. Hierbei ist die richtige Wahl des Funktionenraums, in dem eine Lösung gesucht wird, besonders wichtig.

In der analytischen Diskussion sticht die Ableitung in der Zeit im Dualraum hervor. Hier hat die Wahl des Funktionenraums große Bedeutung. In dieser Arbeit steht jedoch die Anwendung in der Numerik im Vordergrund, so dass letztlich eine Zeitableitung im Raum  $L_2(\mathcal{T}; [W_2^1(\Omega(t))])'$  mit  $l = 1$  und  $q = 2$  zu betrachten ist. Damit sei eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung (Problem 3.2) durch  $\theta \in L_2(\mathcal{T}; W_2^1(\Omega(t)))$  mit  $p = 2$  und zugehöriger Zeitableitung  $\theta_t \in L_2(\mathcal{T}; L_2(\Omega(t)))$  gegeben.

Durch Nichtlinearität der Gleichung existieren Abhängigkeiten zwischen den Materialparametern (z.B.  $\kappa, c_e$ ) und der Lösung selbst. Eine komplexe Analysis zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen dieser Art ist die Folge. In Kapitel 3.6.3 wird auf analytische Ergebnisse zur Existenz von nicht linearen Lösungen unter vereinfachten Annahmen eingegangen. Vorerst wird angenommen, dass die Materialparameter über  $\theta$  im Raum  $L_\infty(\mathcal{T}; L_2(\Omega(t)))$  auszuwerten sind.

Auf Herleitung und Umrechnung von der starken in die schwache Form wird verzichtet, so dass in der Variationsformulierung das vollständige Wärmeleitproblem auf nicht-zyklindrischen Raum-Zeit-Gebieten wie folgt gegeben ist:

**Problem 3.6** (schwache Form der Wärmeleitungsgleichung).

Gesucht wird eine Funktion

$$\theta \in X := \left\{ f : f \in L_2(\mathcal{T}; W_2^1(\Omega(t))), \frac{df}{dt} \in L_2(\mathcal{T}; [W_2^1(\Omega(t))]'') \right\}$$

mit der Bedingung

$$\theta(\cdot, 0) \in L_2(\mathcal{T}; L_2(\Omega(0))),$$

so dass für f.a.  $t \in \mathcal{T}$  und alle  $\varphi \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega(t)))$  gilt:

$$\begin{aligned} \left\langle \rho c_e \frac{d\theta}{dt}, \varphi \right\rangle + \int_{\Omega(t)} (\kappa \nabla \theta) \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\Gamma_R(t)} \delta \theta \varphi \, ds = \\ \int_{\Gamma_R(t)} \delta \theta_{ext} \varphi \, ds + \int_{\Gamma_N(t)} q_N(\mathbf{x}, t) \varphi \, ds \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \rho(\theta), c_e(\theta), \kappa(\theta) \in L_2(\mathcal{T}; L_\infty(\Omega(t))), q_N \in L_2(\mathcal{T}; L_2(\Gamma_N(t))), \\ \delta \in L_2(\mathcal{T}; L_\infty(\Gamma_R(t))), \theta_{ext} \in L_2(\mathcal{T}; L_2(\Gamma_R(t))). \end{aligned}$$

### 3.6.2 Schwache linear-elastische Deformation

Neben der schwachen Form der Wärmeleitung wird im Weiteren eine schwache Form der quasi-stationären, linear-elastischen Deformation gesucht. Aus den Annahmen, nur linear-elastische Verschiebungen sowie kleine Verzerrungen zuzulassen, vereinfacht sich auch der Lösungsraum für den Verschiebungsvektor  $\mathbf{v}$ . Durch Elimination des Diffusionsterms  $\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2}$  besitzt die Deformationsgleichung keine Ableitungen in der Zeit, so dass zu jedem Zeitpunkt  $t \in \mathcal{T}$  nur ein stationäres Problem zu lösen ist.

Die Vorgehensweise erfolgt analog zur Wärmeleitungsgleichung. Um die schwache Form der quasi-stationären, linear-elastischen Deformation zu erhalten ist die Gleichung mit vektoriellen Testfunktionen zu multiplizieren, anschließend über  $\Omega(t)$  partiell zu integrieren und mittels Umformungen in die gewünschte Form zu bringen. Da auch hier die Materialparameter von der Lösung des Wärmeleitproblems abhängen, besitzt die Gleichung eine Zeitabhängigkeit, aus dem der Begriff quasi-stationär abzuleiten ist.

Das vollständige, schwache, quasi-stationäre, linear-elastische Deformationsproblem sei schließlich wie folgt gegeben:

**Problem 3.7** (Die schwache, quasi-stationär, linear-elastische Deformation).

*Gesucht wird eine Funktion*

$$\mathbf{v} \in \mathcal{X} := \left\{ f : f \in L_2 \left( \mathcal{T}; (W_2^1(\Omega(t)))^d \right) \text{ mit } f = \mathbf{F}_D \text{ auf } \Gamma_D(t) \right\}$$

zu festem Zeitpunkt  $t \in \mathcal{T}$ , so dass alle  $\psi \in \mathcal{X}$  mit  $\psi = 0$  auf  $\Gamma_D(t)$  gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(t)} 2\mu \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\epsilon}(\psi) + \lambda \operatorname{div}(\mathbf{v}) \operatorname{div}(\psi) \, dx &= \int_{\Omega(t)} 3\alpha(\theta - \theta_0) I : \nabla \psi \, dx \\ &+ \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{f} \psi \, dx + \int_{\Gamma_N(t)} \mathbf{F}_N(\mathbf{x}, t) \psi \, ds \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \mu(\theta), \lambda(\theta), \rho(\theta), \alpha(\theta) &\in L_\infty(\mathcal{T}; L_2(\Omega(t))), \mathbf{f} \in L_2(\mathcal{T}; L_2(\Omega(t))^d), \\ \mathbf{F}_D(\mathbf{x}, t) &\in L_2(\mathcal{T}; (L_2(\Gamma_D(t)))^d), \mathbf{F}_N(\mathbf{x}, t) \in L_2(\mathcal{T}; (L_2(\Gamma_N(t)))^d). \end{aligned}$$

### 3.6.3 Bemerkungen zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Den Abschluss des Kapitels bilden Bemerkungen und Hinweise zu mehreren, aus der Literatur stammenden, Lösungsansätzen ähnlicher Problemstellungen, wie dem hier zu untersuchenden thermomechanischen Modell (Problem 3.5). Unter anderem sind analytische Ergebnisse zur Existenz und Eindeutigkeit parabolischer Probleme auf nicht-zylindrischen Raum-Zeit-Gebieten, als auch Modellierungsansätze zur Abbildung des thermomechanischen Werkstückverhaltens bei der spanenden Bearbeitung zu betrachten. In den meisten Fällen wurden in der Literatur vereinfachte Annahmen getroffen, die unterschiedliche Lösungsansätze verfolgen. Darunter fällt z.B. die Berücksichtigung konstanter nicht von der Temperatur abhängiger Materialparameter oder die Betrachtung entkoppelter Teilprobleme. Im folgenden werden hier Ergebnisse zu Existenz und Eindeutigkeit betrachtet, um zu zeigen, inwieweit das vorliegende thermomechanische Modell analytisch zu lösen ist.

Zunächst ist nochmals auf die Arbeit von Cortéz und Rodríguez-Bernal einzugehen. Sie behandeln in [19] ein PDE-System von Bilanzgleichungen, deren Bewegungen an einen Punkt  $x$  auf einem Gebiet  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$ , zu  $t = 0$  über eine Kurve  $t \mapsto Y(t; x)$  in  $\mathbb{R}^d$  beschrieben werden. Die Kurve ist durch Lösung eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen  $\dot{Y}(t; x) = \vec{V}(Y(t; x))$  mit Anfangsbedingung  $Y(0; x) = x \in \mathbb{R}^d$  gegeben, wobei  $\vec{V} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  ein Geschwindigkeitsfeld und  $\phi(t) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine Transformation mit  $\phi(t)(x) = Y(t; x)$  darstellt, welche das Startgebiet in ein zum Zeitpunkt  $t \in (0, T)$  deformiertes Gebiet  $\Omega(t) = \phi(t)\Omega_0$  überführt, mit zugehörigen Rand  $\partial\Omega(t) = \phi(t)\partial\Omega_0$ . Anhand der Wärmeleitungsgleichung zeigen sie, dass das Maximumprinzip für parabolische

sche Gleichungen auf zeitabhängigen Gebieten  $\Omega(t)$  mit der beschriebenen Transformation auf das Referenzgebiet  $\Omega_0$  eine eindeutige Lösung liefert, indem auf dem Referenzgebiet die Theorie zylindrischer Raum-Zeit-Gebiete angewendet werden kann.

Meier beschäftigt sich in seiner Dissertation [41] mit der Untersuchung eines Zwei-Skalen-Modells auf der Mikroebene, um mittels Homogenisierung Aussagen für ein makroskopisches, reaktives Modell zu treffen. Auf Basis der zuvor zitierten Funktionenräume (siehe Kapitel 3.5.2) untersucht Meier, auch in Zusammenarbeit mit Böhm in [42], die Existenz und Eindeutigkeit einer Problemstellung in sich entwickelnden Mikrostrukturen. Später werden im homogenisierten System auf der Makroebene, ebenfalls Existenz und Eindeutigkeitsaussagen von Lösungen der Problemstellung in Raum und Zeit bewiesen.

Die Autoren Alphonse, Elliott und Stinner haben in [1] einen abstrakten Rahmen "framework" geschaffen, um parabolische Probleme auf sich entwickelnden bzw. zeitabhängigen Gebieten zu lösen. Hierbei trugen sie Ergebnisse verschiedenster Veröffentlichungen zusammen, auch viele eigene Arbeiten sind berücksichtigt worden, um interessierte Leser einen Überblick über diverse Lösungsmethoden zu schaffen. Neben der analytischen Betrachtung zu Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen von parabolischen Problemstellungen auf nicht-zylindrischen Raum-Zeit-Gebieten, betrachten sie auch die numerische Lösung über das Galerkin-Verfahren.

Eine Übersichtsarbeit für ein thermodynamisches System bieten Wolff und Böhm in [75]. Dieses beschäftigt sich mit der Handhabung der Kinematik unter Einbezug verschiedenster mechanischer und thermischer Aspekte auf zeitabhängigen, sich entwickelnden Gebieten. Sie betrachten ausschließlich die Modellierung derartiger Problemstellungen. Einen Beweis der Existenz von zulässigen Lösungen ist nicht gegeben. Als mögliches Anwendungsfeld modellierten sie einen Zerspanprozess über ein kleiner werdendes, zeitabhängiges Gebiet mittels bewegender Randbedingungen.

In [40] betrachteten Límaco, Medeiros und Zuazua ein Cauchy-Problem für die Wärmeleitungsgleichung auf einem nicht-zylindrischen Raum-Zeit-Gebiet unter allgemeineren Annahmen an die Transformation. Sie suchen letztlich eine Transformation, die  $C^2$  bezüglich des Raumes und  $C^1$  bzgl. der Zeit ist. Existenz und Eindeutigkeitsaussagen der starken, schwachen und ultra-schwachen Lösung wurden hierbei untersucht.

Insgesamt zeigt sich, dass viele Forschungsarbeiten sich mit Lösungen parabolischer Problemstellungen auf zeitabhängigen, sich in der Zeit entwickelnden Gebieten beschäftigen. Hierbei werden die unterschiedlichsten Probleme betrachtet. Wenn es um Existenz und Eindeutigkeitsaussagen geht, werden zumeist vereinfachte Annahmen getroffen, die Dirichletbedingungen auf dem Rand genügen oder freie kapillare Oberflächen besitzen. Neumannbedingungen werden nur selten betrachtet, z.B. in [11, 12]. Hier zeigt sich jedoch, dass Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit in der Analysis nur unter vereinfachten Annahmen getroffen werden können. Es ist also davon auszugehen, dass Lösungen für die, in dieser Arbeit, betrachtete Problemstellung existieren, doch in der Theorie nur schwer zu beweisen sind.



## Kapitel 4

# Diskretisierung von FE-CutS

In diesem Kapitel wird die Implementierung der Thermomechanik in die FEM konkretisiert. Neben einer Approximationsmethode zur Darstellung der ändernden Werkstückgestalt steht hier die Diskretisierung der Modellgleichungen im Vordergrund. Zur Ausnutzung bestehender adaptiver Methoden ist eine Betrachtung von Fehlerabschätzungen über die Modellgleichungen vorzunehmen, so dass im Ziel der Fokus auf die Kopplung zwischen FEM und Dixelmodell (Vergleiche hierzu auch Kapitel 2.2) rückt. Letztendlich entsteht ein hier numerisches Modell, welches das thermomechanische Werkstückverhalten während der spanenden Bearbeitung beschreibt.

Der erste Abschnitt betrachtet unterschiedliche Methoden zur numerischen Darstellung des in Kapitel 3.1 vorgestellten Werkstückgebiets. Ziel ist die Implementierung von bekannten, dem Problem angepassten Methoden, um die zeitabhängige Geometrie des Werkstücks in ein diskretes Werkstückgebiet  $\Omega_h(t)$  zu überführen. Nachfolgend werden neben einigen Grundlagen zur FEM, die schwachen Formulierungen des thermomechanischen Modells (Problem 3.6 und 3.7) in Raum und Zeit über  $\Omega_h(t)$  diskretisiert. Zur Ausnutzung adaptiver Methoden sind darüber hinaus *a priori* und *a posteriori* Fehlerabschätzungen anzugeben. Durch die anschließende Betrachtung der implementierten adaptiven Methoden in der vorliegenden Toolbox ALBERTA [57], sind modifizierte Strategien zu entwickeln, die unter anderem eine Abbildung des sich in der Zeit stark ändernden Werkstücks steuern. Bevor das Kapitel mit dem erarbeiteten numerischen Lösungsalgorithmus endet, steht die Kopplung des Dixelmodells in die FEM im Fokus. Über die Diskussion der auszutauschenden Informationen, ist auf die Abbildungsstruktur der Dixel in die FEM einzugehen sowie die Darstellung der ändernden Geometrie des Werkstücks. Separat ist auch die Berücksichtigung von sich ändernden Randbedingungen auf dem zeitabhängigen Geometrierand zu diskutieren.

### 4.1 Approximationsmethoden für zeitabhängige Gebiete

Zur Darstellung bzw. Approximation der Geometrie des zeitabhängigen Werkstückgebiets finden sich in der Literatur unterschiedlichste Methoden (Vergleiche [34]). Die

Level-Set-Methode ist ein weitverbreitetes Werkzeug zur Beschreibung einer virtuellen sich ändernden Geometrie auf einen festen Rechengebiet. Wie aus Kapitel 3.1 bekannt, basiert das zeitabhängige Werkstückgebiet auf einen festen, beschränkten Gebiet  $\Omega$ , welches in zwei zeitabhängige disjunkte Teilgebiete  $\Omega(t)$  (Werkstück) und  $\Omega_m(t)$  (entferntes Material) zerlegt ist. Die Wahl einer geeigneten Approximationsmethode, zur Anpassung des diskreten Gebiets  $\Omega_h$  an die zeitabhängigen Teilgebiete, hängt im Wesentlichen von der verwendeten Software und deren mögliche Unterstützung ab. Die folgenden Methoden zeigen auf, inwiefern diese in der verwendeten Toolbox ALBERTA berücksichtigt werden können. Neben der Methode von Cut-Cells ist die Methode des Moving-Mesh erläutert. Zum Schluss ist auf die, in FE-CutS implementierte, Approximationsmethode einzugehen.

#### 4.1.1 Beschreibung der Werkstückoberfläche durch Level-Set

Eine weitverbreitete Technik zur Abbildung zeitabhängiger Gebiete über ein im Raum festes Gebiet, ist die Methode des Level-Set. Zuerst erwähnt von Osher und Sethian in [50]. Die Idee kam ihnen bei der Untersuchung des Hamilton-Jacobi-Formalismus, um Lösungen zeitabhängiger partieller Differentialgleichungen (PDEs) auf sich bewegenden impliziten Gebieten zu beschreiben.

Die Methode beschreibt die Abbildung eines zeitabhängigen Gebiets  $\Omega(t) \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$  zum Zeitpunkt  $t \in \mathcal{T}$ , indem der zugehörige  $(d-1)$ -dimensionale, sich in der Zeit ändernde Rand  $\partial\Omega(t)$  mittels einer Hilfsfunktion  $\phi(x, t)$  in  $\Omega$  eingebettet wird. Der Rand stellt das sogenannte "Null-Level-Set" dar. Die Beschreibung des sich in der Zeit ändernden Gebiets zu einen beliebigen Zeitpunkt soll nur über eine Lokalisierung des bewegenden Gebietsrand möglich sein [49, 59].

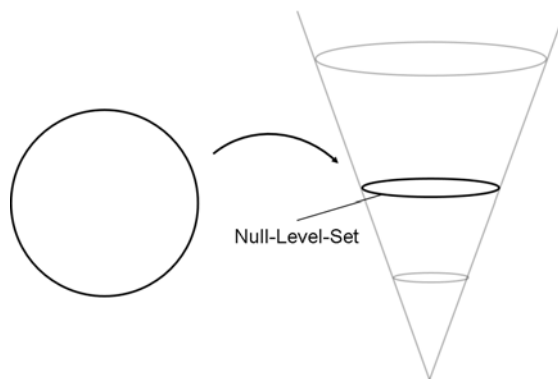


Abbildung 4.1: Kurve (links) eingebettet in die Level-Set Oberfläche (rechts).

Abbildung 4.1 visualisiert die Idee von Osher und Sethian. Anstatt die initialisierte Kurve (links) zu bewegen, wird eine beschreibende Funktion (rechts), das Level-Set, bewegt. Diese ist flexibel genug, um jede Bewegung mittels eines Geschwindigkeitsfeldes abzubilden. Hierbei sind Expansion, Schrumpfen oder sogar Verschwinden des Null-Level-Set möglich.

Für eine formelle Beschreibung des Level-Set sei eine initialisierte Grenzfläche  $\partial\Omega(0)$  gegeben, die ein offenes Gebiet  $\Omega(0)$  umgibt. Zu jedem Zeitpunkt  $t > 0$  ist eine abgeschlossene, bewegende Fläche  $\partial\Omega(t) \subset \mathbb{R}^d$  über ein Geschwindigkeitsfeld zu suchen, die das offene Gebiet  $\Omega(t)$  umschließt [50]. Hierbei ist  $\phi(x, t) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  eine Indikatorfunktion, die zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$ , durch ihr Null-Level, die gesuchte Kurve  $\partial\Omega(t)$  beschreibt,  $\partial\Omega(t) = \{x : \phi(x, t) = 0\}$ . Die Indikatorfunktion genügt dabei folgenden Eigenschaften:

$$\begin{cases} \phi(x, t) > 0 & \text{in } \Omega(t) \\ \phi(x, t) = 0 & \text{auf } \partial\Omega(t) \\ \phi(x, t) < 0 & \text{in } \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}(t). \end{cases} \quad (4.1)$$

Mittels dieser ist  $\Omega(t)$  über den umgebenden, sich ändernden Rand  $\partial\Omega(t)$  zu jedem Zeitpunkt eindeutig abzubilden.

Das beste erklärende Beispiel einer Level-Set-Gleichung ist durch die Transport- oder Advektionsgleichung gegeben [49, 50, 59]. Unter anderen können hier auch Änderungen des zu untersuchenden Gebiets berücksichtigt werden. Die Gleichung ist gegeben durch:

$$\dot{\phi} + c \cdot \nabla \phi = 0,$$

wobei  $c$  ein Geschwindigkeitsfeld beschreibt. Dieses ist, sofern nicht konstant, als Funktion in Abhängigkeit von Ort  $x$ , Zeit  $t$ , der mittleren Krümmung, der Normalenrichtung und weiterer Größen auffassbar. Im Zusammenhang mit dem vorliegenden Zerspanprozess ist das Geschwindigkeitsfeld in Abhängigkeit des Werkzeugwegs gegeben (somit auch von Ort und Zeit abhängig) sowie evtl. weiterer Größen, wie dem Durchmesser des Werkzeugs, der Schnitttiefe, der Vorschubgeschwindigkeit und weiterer prozessbedingter Parameter. Eine geeignete Level-Set-Gleichung beschreibt somit die Abmessungen des aktuellen Werkstücks über den Rand  $\partial\Omega(t)$ .

Die Level-Set-Formulierung findet in vielen praktischen Problemstellungen Anwendung, genannt sei hier zum Beispiel Narimanyan, der in seiner Dissertation [45] die Methode nutzte, um über die Modellierung von Plasmaschneidprozessen, diese zu untersuchen. In folgenden wird die Methode immer wieder aufgegriffen, um die Beschreibung der zeitabhängigen Werkstückgestalt in die FEM zu realisieren.

### 4.1.2 Anpassung des Rechengitters an das Werkstückgebiet

Neben der Beschreibung von Gebietsänderungen durch Funktionen (Level-Set-Methode) gibt es unterschiedliche Methoden, die Genauigkeit des veränderlichen Gebiets durch gezielte Anpassung des diskreten Rechengitters bzw. der Gitterelemente zu erhöhen. Diesbezüglich gibt es eine Vielzahl unterschiedlicher Software zur Generierung von Rechengittern zur Abbildung komplexer Geometrien (z.B. Tetgen [61]). Diese basieren in der Regel auf nicht-strukturierten Gittern, die es ermöglichen unterschiedlichste Geometrien abzubilden. Jedoch kann die Robustheit der Gitter leiden bspw. durch die Verzerrung

der Gitterelemente, um sich Krümmungen anzupassen [34]. Folgend werden zwei unterschiedliche Methoden vorgestellt, die eine Anpassung des diskreten Rechengitters an die, sich in der Zeit ändernde, Werkstückgeometrie ermöglichen ohne die Robustheit des FE-Gitters nachhaltig zu verändern.

### Cut-Cell-Methode

Die Methode der Cut-Cells ist eine Vorgehensweise die Robustheit des diskreten Rechengitters weitestgehend beizubehalten. Unabhängig von der abzubildenden Geometrie werden im Wesentlichen strukturierte Gitter verwendet (siehe Abbildung 4.2). Am Geometrierand sind schließlich überstehende Gitterelemente abzuschneiden. Es entstehen die sogenannten Cut-Cells. Die Methode ermöglicht eine hohe Abbildungsgenauigkeit der darzustellenden Geometrie. Weitere Vorteile sind die Ausnutzung adaptiver Methoden und die Möglichkeit zur voll automatisierten Generierung des Rechengitters.

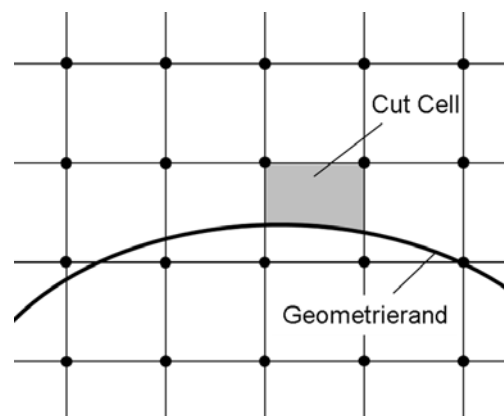


Abbildung 4.2: Beispiel eines strukturierten Rechengitters. Das Rechteckgitter wird am Geometrierand geschnitten. Cut-Cells sind geschnittene Elemente die im inneren des Rechengitters liegen (hier oberhalb des Geometrierands). Nach [27].

Von strukturierten Rechengittern wird zumeist gesprochen, wenn die Konnektivität des FE-Gitters nicht explizit gespeichert wird, sondern implizit über die Anordnung von Knotenpunkten und/oder Elementen. Meistens werden strukturierte Gitter mit Formen, wie Rechtecke (2D) und Hexaeder (3D), in Verbindung gebracht. Die darauf verknüpften Lösungsverfahren benötigen hierbei nur wenige Ressourcen und sind schnell, was ein weiterer Vorteil ist.

Eines der bekanntesten Verfahren zur Abbildung strukturierter Rechengitter in Form von rechteckigen/hexaedrischen Elementen ist die kartesische Methode. Weitere sind die Octree-Methode und die Unstructured-Grid-Methode. Fidkowski gibt in seiner Dissertation [33] hierzu einen interessanten Überblick. Weiter fasst er die geschichtliche Entwicklung der Cut-Cells sehr gut zusammen. Alles begann mit der Untersuchung kartesischer Cut-Cells in Arbeiten von Purvis und Burkhalter in 1979 [51] und Wedan und South in 1983 [74]. Heute ist es möglich die Methode der Cut-Cells auf beliebige geometrische Formen anzuwenden (z.B. Dreiecke in 2D und Tetraeder in 3D) [39].

Die rein geometrische Umsetzung der Cut-Cells erfordert, je nach verwendeter Software, tiefgreifende Umstrukturierungen der gegebenen FEM. Herausforderungen bestehen hier bei der Verwendung adaptiver Methoden im Zusammenhang mit Cut-Cells. Der Begriff, der Gebietsrand konformen Abbildung, sticht hier heraus [33]. Auch die numerische Diskretisierung des zu untersuchenden Gleichungssystems ist ein entscheidender Aspekt. Dröge präsentiert in seiner Dissertation [27] die Abbildung turbulenter Fließbewegungen der Navier-Stokes Gleichungen über das Verfahren der direkten numerischen Simulation (DNS) in komplexen Geometrien mittels der Finiten Volumen Methode (FVM). Das flüssige Gebiet wurde hierbei durch ein kartesisches Rechengitter zerlegt. Die Ränder des flüssigen Gebiets, die nicht mit den Gitterlinien des Rechengitters übereinstimmen, sind über die Cut-Cell Methode geschnitten worden. Er zeigt, dass die Diskretisierung an die geschnittenen Elemente anzupassen ist.

Neben großen Vorteilen, wie die voll automatische Generierung von Cut-Cells als auch die Ausnutzung adaptiver Methoden täuscht die Methode nicht darüber hinweg, dass tiefgreifende Umstrukturierungen in der vorliegenden Toolbox ALBERTA vorzunehmen sind. Auch die Anpassung der Diskretisierung der Modellgleichungen auf die diversen Formen von Cut-Cells ist ein komplexer Bearbeitungsprozess, der viel Zeit in Anspruch nimmt. Aus diesen Gründen ist die Cut-Cell-Methode in ihrer eigentlichen Form, im Rahmen des vorliegenden Zerspanprozesses, nur bedingt umsetzbar. In Kapitel 4.1.3 wird jedoch gezeigt, wie der wichtigste Aspekt der Cut-Cell-Methode in FE-CutS verwendet wird.

### Moving-Mesh-Methode

Neben der Cut-Cell-Methode gibt es weitere Varianten das diskrete Rechengitter an komplexe sowie bewegende Gebiete anzupassen. In numerischen Simulationen zeitabhängiger PDEs wird bei der Anpassung des Rechengitters zwischen statischen und dynamischen Methoden unterschieden. Statischen Methoden werden die sogenannten  $h$ -Methoden zugeordnet (Vergleiche Kapitel 4.3 und [34]).  $h$ -Methoden sind adaptive Strategien, die auf festen, adaptiv anpassbaren Rechengittern eingesetzt werden, um den numerischen Fehler der Lösung durch lokale oder globale Verfeinerung und Vergrößerung des Rechengitters zu reduzieren.

Im Zusammenhang mit dynamischen Methoden wird oft der Begriff des Moving-Mesh genannt. Hierunter ist die lokale Verschiebung von Knotenpunkten eines Rechengitters zu verstehen. Diese erfolgt auf dem Gitter hin zu Regionen, in denen sich die numerische Lösung rapide ändert, bzw. der numerische Fehler sehr hoch ist [65]. In der Regel ist die Menge der Knotenpunkte konstant und ändert sich während der laufenden Simulation nicht. Eine Erweiterung der Moving-Mesh-Methode um adaptive Methoden ist jedoch möglich. Eines der häufigsten Anwendungsfelder dieser Methode ist die *Computational Fluid Dynamics* (CFD). In der CFD beschreiben Strömungsmodelle oft starke Änderungen in Lösungen von PDE-Systemen, z.B. Navier-Stokes-Gleichungen. Auch bei Problemen mit kapillaren Oberflächen findet die Methode Anwendung, z.B. beim zwei-

phasigen Stefanproblem am Beispiel der Kristallbildung [8] oder bei Stoffanhäufungsprozessen [9]. In diesem Zusammenhang wird oft auch die *arbitrary-Lagrangian-Eulerian* (ALE)-Methode verwendet [34, 9].

Im Kompendium von Frey und George [34] sind neben der Moving-Mesh-Methode eine Vielzahl weiterer Methoden zur Gittergenerierung beschrieben. Des Weiteren werden sowohl Anwendungen in der linearen Elastizität, als auch in der Spanbildungssimulation präsentiert. Insgesamt bieten sie eine sehr umfangreiche Übersicht der unterschiedlichsten Methoden zur Generierung von Rechengittern. Ein Beispiel von Ducrot und Frey [28] zeigt einen Algorithmus, der die Kontrolle einer Gebietsrandapproximation mittels Interface in einer anisotropen Metrik beschreibt (Abbildung 4.3).

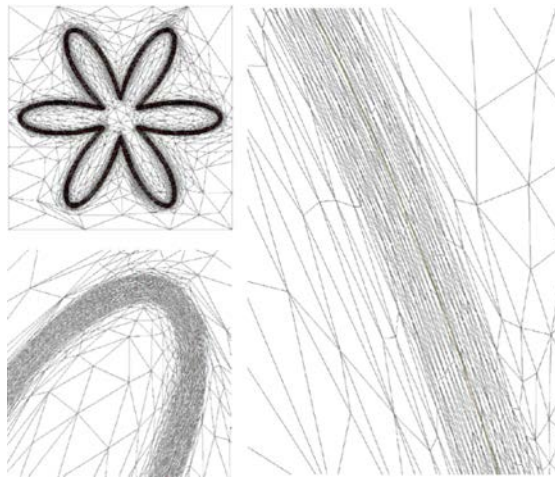


Abbildung 4.3: Anisotrope Kontrolle eines Rechengitters in der Umgebung einer zeitabhängig verändernden Kurve mit der Moving-Mesh-Methode. Quelle: [28].

Tang [65] beschreibt die Moving-Mesh-Methode als Abbildung eines irregulären Gebiets  $\Omega$ , eines physikalischen Raums, in ein parametrisiertes Gebiet  $\Omega_c$ . Durch die Verbindung von Punkten im physikalischen Gebiet mit entsprechenden diskreten Punkten im parametrisierten Gebiet, wird der physikalische Raum über ein computergestütztes Rechengitter abgebildet, auf dem numerische Lösungen untersucht werden können. Hierbei beschreibt Tang unterschiedliche Vorgehensweisen in der finiten Differenzen Methode (FDM), FVM, und FEM. Über die Präsentation eines Beispiels für jede der unterschiedlichen Verfahrensansätze, zeigt Tang die Anwendung der Moving-Mesh-Methode in der CFD.

Neben dem Vorteil, dass die Moving-Mesh-Methode gute Approximationseigenschaften bzgl. sich ändernder Ränder aufweist, ist sie jedoch in ihrer numerischen Umsetzung sehr kostenintensiv. So ist nicht nur eine tiefgreifende Umstrukturierung der hier vorliegenden Toolbox ALBERTA nötig. Die Verschiebung des Rechengebiets an relevanten Stellen verbraucht viele Ressourcen, das sich wiederum erheblich auf die Simulationszeit auswirkt. Zwar ist die Methode, insbesondere in der Spanbildungssimulation, durchaus interessant, weil der Span hoch aufgelöst werden kann. Sogar ohne zusätzliche Punkte hinzuzufügen oder eine Neuvernetzung durchführen zu müssen. Für den vorliegenden,

makroskopisch betrachtenden Zerspanprozess ist die Methode, wegen der stark ändernden Werkstückgestalt, jedoch nicht geeignet.

### 4.1.3 Diskretes Werkstückgebiet in FE-CutS

Eine Gebietsapproximation in FE-CutS sollte nun möglichst ohne großen Implementierungsaufwand auskommen und die vorhandenen Strukturen der verwendeten Toolbox ALBERTA [57] ausnutzen. Aus dem Grund sind die im vorherigen Abschnitt beschriebenen Methoden der Cut-Cells und des Moving-Mesh nicht geeignet, da beide Varianten große Umstrukturierungen der Toolbox voraussetzen. Die Verwendung einer anderen Software, wäre in diesen Fällen anzuraten. Vorteile bietet die Toolbox hingegen in ihrer Anwendung. Durch Ausnutzung simplizialer Gitterstrukturen ist die Nutzung adaptiver Methoden prädestiniert, so dass dieser Vorteil gewinnbringend zu verwenden ist.

Im folgenden wird nun die Grundlage geschaffen auf dem im späteren Verlauf (Kapitel 4.4), mittels einer Level-Set Formulierung, die zeitabhängige Zerlegung des zugrundeliegenden, diskreten Rechengitters in zwei separate, diskrete Teilgitter erfolgen kann.

#### Gitterstruktur des diskreten Rechengebiets

Die Toolbox ALBERTA [57] nutzt simpliziale unstrukturierte Gitterelemente, so dass sich Rechengitter an beliebige komplexe Strukturen anpassen können. In dieser Arbeit wird eine Gitterstruktur verwendet die aus der Kombination eines strukturierten und unstrukturierten Gitters besteht. Hierbei wird ein Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  in eine Menge von

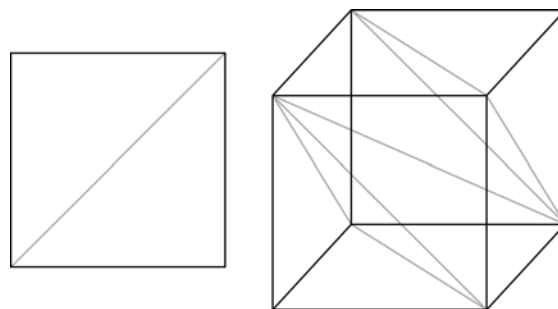


Abbildung 4.4: Kombination aus strukturierten Gitter in Form von Rechtecken bzw. Hexaedern und unstrukturierten Gittern in Form von Dreiecken bzw. Tetraedern in 2D (links) und 3D (rechts).

Gitterelementen  $\mathcal{G}_h$  der Dimension  $\{0, \dots, N_{x_i}\} \times \dots \times \{0, \dots, N_{x_d}\}$ , mit  $N_{x_i} \in \mathbb{N}$  und  $i = 1, \dots, d$  zerlegt mit zugehöriger Gitterweite  $h = \min\{1/N_{x_1}, \dots, 1/N_{x_d}\}$ . Jedes Elemente von  $\mathcal{G}_h$  ist gemäß Abbildung 4.4 in zwei Dreiecke ( $d = 2$ ) bzw. sechs Tetraeder ( $d = 3$ ) zu zerlegen, so dass eine Triangulierung  $\mathcal{S}_h = \bigcup_{S \in \mathcal{S}_h} S$  durch ein trigonales bzw. tetraedrisches FE-Gitter von  $\Omega$  entsteht. Die Zerlegung eines Hexaeders in 6 Tetraeder basiert auf der Kuhn-Triangulation [15]. Für  $d = 1$  gilt diese Zerlegung nicht. Hier erfolgt eine Unterteilung in Intervalle [39]. Das hierdurch entstandene Gitterelement  $S \in \mathcal{S}_h$  wird  $d$ -Simplex genannt und sei als konvexe Hülle von Punkten  $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{R}^d$  gegeben, so

dass  $a_1 - a_0, \dots, a_d - a_0$  linear unabhängige Vektoren im  $\mathbb{R}^d$  bilden.

$$S := \text{conv hull } \{a_0, \dots, a_d\}$$

Gibt es ein  $k < d$ , dann ist

$$S' := \text{conv hull } \{a'_0, \dots, a'_k\}$$

ein  $k$ -Simplex von  $S$  mit  $a'_0, \dots, a'_k \in \{a_0, \dots, a_d\}$ . Für  $k = 0$  ist der Simplex ein Eckpunkt, für  $k = 1$  eine Kante und für  $k = 2$  eine Fläche.

Die Triangulierung  $\mathcal{S}_h$  selbst sei eine Menge von  $d$ -Simplizes, für die gilt

$$\bar{\Omega}_h = \bigcup_{S \in \mathcal{S}_h} S \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d.$$

Die Menge wird konform genannt, wenn für zwei Simplizes  $S_1, S_2 \in \mathcal{S}_h$  mit  $S_1 \neq S_2$  gilt, dass deren Schnittmenge  $S_1 \cap S_2$  entweder leer ist oder ein komplettes  $k$ -Simplex für  $0 \leq k < d$  darstellt. Hieraus ist zu folgern, dass  $\mathcal{S}_h$  eine zulässige Triangulierung von  $\Omega$  genau dann gewährleistet ist, wenn jede Seite aller  $S_1 \in \mathcal{S}_h$  entweder eine Seite eines anderen  $S_2 \in \mathcal{S}_h$  oder dem Rand  $\partial\Omega$  zuzuordnen ist.

Auf diesem diskreten FE-Gitter erfolgt nun eine Zerlegung hin zum diskreten Werkstückgebiet. Später sind über diesen adaptive Methoden einzuführen (siehe Kapitel 4.3.2), um die Abbildungsgenauigkeit der sich zeitlich stark ändernden Werkstückgestalt zu erhöhen.

### Level-Set-Gleichung zur Beschreibung des Werkstückgebiets

Um letztendlich ein diskretes, zeitabhängiges Werkstückgebiet abzubilden ist eine Zerlegung der Triangulierung  $\mathcal{S}_h$  in zwei zeitabhängige Triangulierungen  $\mathcal{S}_{w,h}(t), \mathcal{S}_{m,h}(t) \subset \mathcal{S}_h = \bar{\Omega}_h$  mit  $\mathcal{S}_{w,h}(t) \cup \mathcal{S}_{m,h}(t) = \mathcal{S}_h$  nötig. Die Zuordnung der Simplizes zu einer der Teilmengen erfolgt über eine Level-Set-Gleichung. Die Funktion beschreibt hier eine zeitabhängige geometrische Hülle der Werkstückoberfläche, deren Innerstes und die Hülle selbst das diskrete Werkstückgebiet  $\Omega_h(t)$  (Vergleiche hierzu Problem 3.1) charakterisieren. Für  $d = 3$  definiert die Hülle eine Schnittfläche von niedriger Dimension, welche den  $\mathbb{R}^3$  in zwei separate Teilräume zerlegt und deren Volumina in der Regel nicht Null sind [49].

Eine explizite Beschreibung der Level-Set-Gleichung zur Änderung der Werkstückgestalt während des Zerspanprozesses ist in der Regel nicht möglich. In der spanenden Bearbeitung entstehen sehr komplexe Oberflächen, die über eine direkte Formulierung des zeitabhängigen Gebietsrand  $\partial\Omega(t) = \{\mathbf{x} : \phi(\mathbf{x}, t) = 0\}$  nicht beschrieben werden können. Später in Kapitel 4.4.3 wird die Zuordnung der Level-Set-Formulierung über die Kopplung zwischen Dixelmodell und FEM konkretisiert. Vorerst ist eine Level-Set-Funktion als unspezifizierte Abstandsfunktion einzuführen, die das feste, beschränkte Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  in separate zeitabhängige Teilgebiete zerlegt. Das folgende Problem fasst



zunächst eine kontinuierliche Formulierung der Level-Set-Problemstellung zusammen. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels ist die Formulierung schließlich zu konkretisieren.

**Problem 4.1** (Level-Set Formulierung).

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ein beschränktes Gebiet und  $\Omega(t)$  sowie  $\Omega_m(t)$  zwei Teilmengen, die eine zulässige, zeitabhängige Zerlegung von  $\Omega$  gemäß Problem 3.1 beschreiben. Gesucht sei eine Indikatorfunktion

$$\phi(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R},$$

die für alle  $\mathbf{x} \in \Omega$  und  $t \in \mathcal{T}$  folgende Eigenschaften besitzt

$$\begin{cases} \Omega(t) = \{\mathbf{x} : \phi(\mathbf{x}, t) > 0\}, \\ \partial\Omega(t) = \{\mathbf{x} : \phi(\mathbf{x}, t) = 0\}, \\ \Omega_m(t) = \{\mathbf{x} : \phi(\mathbf{x}, t) < 0\}. \end{cases} \quad (4.2)$$

Speziell für  $t = 0$  gilt:

$$\begin{aligned} \Omega(0) &= \Omega = \{\mathbf{x} : \phi(\mathbf{x}, 0) > 0\}, \\ \partial\Omega(0) &= \partial\Omega = \{\mathbf{x} : \phi(\mathbf{x}, 0) = 0\}, \\ \Omega_m(0) &= \emptyset. \end{aligned}$$

Die Funktion beschreibt den Abstand zum Null-Level-Set über eine Abstandsfunktion  $d(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  gemäß

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} d(\mathbf{x}), & \text{für } \mathbf{x} \in \Omega(t), \\ 0, & \text{für } \mathbf{x} \in \partial\Omega(t), \\ -d(\mathbf{x}), & \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_m(t). \end{cases} \quad (4.3)$$

## Diskretes Werkstückgebiet

Mit obiger Level-Set-Formulierung ist eine erste Beschreibung des sich in der Zeit stark ändernden Werkstücks während der spanenden Bearbeitung gegeben. Eine diskrete Abbildung des Rechengebiets  $\Omega_h(t)$  in FE-CutS erfolgt nun.

Das diskrete Werkstückgebiet und ein zugehöriger Algorithmus basieren auf Arbeiten von Bänsch und Schmidt [10]. Sie implementierten ein zeitabhängiges, zweiphasiges Gebiet zur Beschreibung des Kristallwachstums über ein gekoppeltes Navier-Stokes- und Stefan-Problem. Narimanyan griff in seiner Dissertation [45] die Idee auf, um ein Gebiet mit fest-geschmolzen-Phasen abzubilden, um über diesem das Plasmaschneiden von metallischen Werkstoffen zu untersuchen.

Das diskrete Werkstückgebiet zur Zeit  $t \in \mathcal{T}$  ist nun wie folgt definiert: Ein  $d$ -Simplex  $S$  wird zur Zeit  $t$  als entfernt bezeichnet, wenn  $S$  komplett entfernt wurde, also  $S \cap \bar{\Omega}_h(t) =$

$\emptyset$ .  $S$  gilt als entfernt, wenn alle Eckpunkte  $a_n(\mathbf{x}) \in S$  entfernt wurden. Ein  $d$ -Simplex sei dem diskreten Werkstück zuzuordnen, wenn es nicht komplett entfernt wurde. Das diskrete, zeitabhängige Werkstückgebiet ist durch

$$\bar{\Omega}_h(t) = S_{w,h}(t) := \bigcup_S \{S \in \mathcal{S}_h : S \text{ ist Werkstück zur Zeit } t; S \cap \bar{\Omega}_h(t) \neq \emptyset\} \quad (4.4)$$

gegeben.

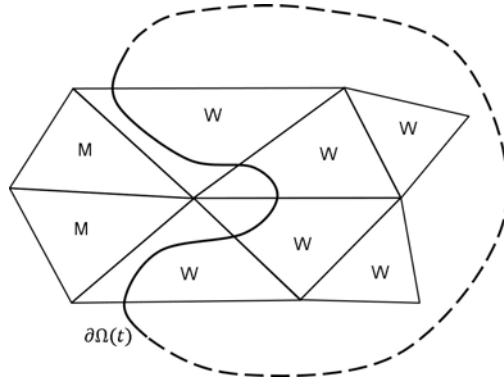


Abbildung 4.5: Entfernte (M) und als Werkstück (W) markierte Dreiecke entlang des Geometrierands  $\partial\Omega(t)$ .

Ein Beispiel des diskreten Werkstückgebiets gibt Abbildung 4.5. Dieser ist zu entnehmen, dass Simplizes, die den abgebildeten Geometrierand  $\partial\Omega(t)$  schneiden, dem Werkstück zugeordnet, sowie Elemente die den Geometrierand nicht mehr berühren als "entfernt" markiert sind. Damit gilt für fast alle  $t \in \mathcal{T}$ :  $\Omega_h(t) \supset \Omega(t)$ .

Über die beschriebene Menge des Werkstückgebiets (4.4) lässt sich ein Algorithmus ableiten, der alle Simplizes  $S$  der Triangulierung  $\mathcal{S}_h$  berücksichtigt und jedes entsprechend seiner Position in  $\Omega_h$  zuordnet. Somit folgt zu jedem Zeitpunkt der Simulation eine eindeutige Zuordnung der Simplizes zu einer der Teilmengen  $\mathcal{S}_{w,h}(t)$  und  $\mathcal{S}_{m,h}(t)$ . Der folgende Algorithmus zeigt die wesentlichen Schritte zur diskreten Gebietsmarkierung auf.

**Algorithmus 4.1** (Markierung als Werkstück).

Start with  $\mathcal{S}_{w,h}(t_k) := \emptyset$  and  $\mathcal{S}_{m,h}(t_k) := \emptyset$  at time  $t_k$

for all  $S \in \mathcal{S}_h$

if  $\Phi(a_n, t_k) < 0$  for all  $a_n \in S$

mark as "removed":  $\mathcal{S}_{m,h}(t_k) = \mathcal{S}_{m,h}(t_k) \cup S$

else

mark as "workpiece":  $\mathcal{S}_{w,h}(t_k) = \mathcal{S}_{w,h}(t_k) \cup S$

end if

end for

$\Rightarrow \mathcal{S}_h = \mathcal{S}_{w,h}(t_k) \cup \mathcal{S}_{m,h}(t_k)$ .

Damit ist eine zeitabhängige Zerlegung der Triangulierung  $\mathcal{S}_h$  zur Beschreibung der einzelnen Teilgebiete möglich. Die Teilmenge  $\mathcal{S}_{w,h}(t_k)$  beschreibt zum Zeitpunkt  $t_k$  das

diskrete Werkstück und  $\mathcal{S}_{m,h}(t_k)$  das entfernte Material.  $\Phi_k(a_n, t_k)$  ist hier der diskrete Abstand zwischen Eckpunkt  $a_n$  und dem kontinuierlichen Geometrierand  $\partial\Omega(t_k)$  zum Zeitpunkt  $t_k, k \in \mathbb{Z}$ . Der obige Algorithmus hat eine Rechenkomplexität, die linear zur Anzahl der Simplizes anwächst. Durch Verwendung adaptiver Methoden in FE-CutS, ändert sich die Rechenkomplexität ständig durch die variierende Menge an Simplizes in der Triangulierung.

Letztendlich ist eine geeignete Grundlage geschaffen worden, die gewünschte Gebietszerlegung in ein Werkstückgebiet und ein Gebiet, welches entferntes Material beinhaltet, zu realisieren. Später in Kapitel 4.3 wird der präsentierte Algorithmus um adaptive Methoden erweitert, der eine höhere Auflösung des diskreten Werkstückgebiets verspricht. Ziel ist eine hohe Abbildungsgenauigkeit der sich zeitlich stark ändernden Werkstückoberfläche. Zwar würde die präsentierte Methode der Cut-Cells (Kapitel 4.1.2) viel bessere Ergebnisse liefern, durch den deutlich höheren Implementierungs- sowie Simulationsaufwand ist die Methode nicht weiter verfolgt worden.

## 4.2 Diskretisierung des thermomechanischen Modells

Auf Basis des, im vorherigen Abschnitt eingeführten, diskreten Werkstückgebiet  $\Omega_h(t)$  sind auf diesem im Weiteren die Diskretisierungen des thermomechanischen Modells (Problem 3.5) für FE-CutS vorzunehmen. Zuvor sind ein paar Grundlagen zur FEM zu behandeln. Im Laufe der zeitlichen und räumlichen Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung sind Unterschiede zur Diskretisierung auf zylindrischen Raum-Zeit-Gebieten aufzuzeigen. Die Diskretisierung der quasi-stationären Deformationsgleichung ist nur im Ort durchzuführen und schließt den Abschnitt ab. Interessant ist hierbei die Abbildung auf das zeitabhängige, diskrete Werkstückgebiet  $\Omega_h(t)$  zu festen Zeitpunkt  $t \in (0, T)$ .

### 4.2.1 Grundlagen der Finiten Elemente Methode

Die Methode der finiten Elemente wurde bereits in den 1940er Jahren durch Courant [20] erstmals für den einfachsten Fall linearer, finiter Elemente ( $d = 2$ ) im Rahmen der Variationsrechnung vorgeschlagen. Leider ist seine Arbeit in den folgenden Jahren weitestgehend in Vergessenheit geraten. Erst im Jahr 1956 wurde durch Turner et al. [69] die Methode erneut vorgeschlagen. Sie untersuchten in ihrer Arbeit elastische Strukturen durch Einführung von Dreieckelementen als Unterteilungsstruktur. Weiter zeigten sie, dass Rechteckelemente in Dreieckelemente unterteilt werden können (Siehe hierzu auch Kapitel 4.1.3). Ausgehend vom Wissen der westlichen Welt entwickelten in den 1960er Jahren chinesische Wissenschaftler um Feng [32], unabhängig davon, eine ähnliche Methodik, [18, 26].

### Ritz-Galerkin-Methode

Die wohl weit verbreitetste Methode zur näherungsweise Lösung von Operatorgleichungen, wie PDEs, durch finite Elemente ist die Galerkin-Methode. Ihre Idee basiert auf der Berechnung von Lösungen PDEs durch Minimaleigenschaften. Die zugehörigen Variationsformulierungen besitzen Lösungen in Funktionenräumen, die in der Regel Sobolev-Räume sind, [18]. Einen Überblick der hier genutzten Sobolev-Räume und den Spurraum für Neumann-Randbedingungen bietet bereits Kapitel 3.5.2.

Allgemein wird eine approximierete diskrete Lösung  $u_h \in V_h \subset V = H_0^1(\Omega)$  auf einen sich zeitlich nicht ändernden Raum  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  gesucht, die die Variationsaufgabe

$$a(u_h, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V_h$$

erfüllt, wobei  $a : V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Bilinearform bezeichnet und  $f \in X'$  im Dualraum des Funktionenraums  $X$  liegt, [18]. Um die Variationsaufgabe zu lösen wird  $v$  durch eine Basis des  $V_h$  ausgedrückt. Sei  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$  eine solche Basis und  $N \in \mathbb{N}$ . Dann lässt sich die diskrete Lösung  $u_h$  durch

$$u_h = \sum_{k=1}^N v_k \varphi_k$$

ausdrücken, was zu den folgenden Gleichungssystem führt:

$$\sum_{k=1}^N a(\varphi_k, \varphi_i) v_k = \langle f, \varphi_i \rangle \quad i = 1, \dots, N.$$

Das Gleichungssystem lässt sich auch in Matrixform umschreiben.

### Finite Elemente Räume

Das Lösen der Variationsaufgabe über das Galerkin-Verfahren ist in Funktionenräumen durchzuführen, die finite Elemente (FE)-Räume genannt werden. Allgemein bestehen diese endlich dimensionalen Unterräume  $V_h \subset V$  aus Funktionen, deren Einschränkung auf  $S \in \mathcal{S}_h$  Polynome sind. Sind sie zusätzlich in den Sobolev-Räumen der Variationsaufgabe enthalten, so wird hier von konformen finiten Elementen gesprochen. Der Raum dieser Polynome wird mit  $\mathbb{P}_k(S)$  von Ordnung  $k \geq 1$  bezeichnet.

Die Diskretisierungen im Ort des diskreten Werkstückgebiet  $\Omega_h(t)$  erfolgen in endlich dimensional FE-Räumen, die wieder einen Unterraum von  $X$  bilden. Skalare Werte, wie  $\Theta_n$ , sind als Linearkombination der folgenden skalaren Basis aufzufassen:

$$\begin{aligned} X_h(t) &= \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_{N(t)}\} \\ &\subset \{f \in C^0(\bar{\Omega}_h(t)) : f|_S \in \mathbb{P}_k(S) \text{ für alle } S \in \mathcal{S}_{w,h}(t)\}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

wobei  $N(t)$  die Dimension des Raumes zum Zeitpunkt  $t \in \mathcal{T} = (0, T)$  angibt. Sie ist immer gleich der Anzahl der möglichen Freiheitsgrade, also immer  $N(t)$  (Vergleiche [18])

für festes  $\Omega$ ). Die Verschiebung  $\mathbf{V}_n$  beschreibt hier ein  $d$ -dimensionales Vektorfeld mit FE-Raum

$$\begin{aligned} X_h^d &= \{\varphi_i e_1, \dots, \varphi_i e_d\}_{i=1, \dots, N(t)} = \text{span}\{\psi_1, \dots, \psi_{dN(t)}\} \\ &\subset \left\{ f \in C^0(\bar{\Omega}_h(t))^d : f|_S \in \mathbb{P}_k(S) \text{ für alle } S \in S_{w,h}(t), f = 0 \text{ auf } \Gamma_{D,h}(t) \right\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

der Dimension  $dN(t)$ .

In der vorgestellten Konfiguration sind die Tensoren  $\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}$  symmetrisch (Siehe hierzu Kapitel 3.3.2). Ein zugehöriger symmetrischer FE-Raum erlaubt hier zusätzlich eine deutliche Reduzierung der benötigten Speicherressourcen, so ergibt sich für  $d = 3$  der FE-Raum

$$X_h^6 = \text{span} \left\{ \Psi_{kl}^i; k, l = 1, 2, 3; k \leq l \right\}_{i=1, \dots, N(t)},$$

mit Dimension  $6N(t)$  sowie folgenden diagonalen und nicht-diagonalen Elementen:

$$\Psi_{11}^i = \begin{bmatrix} \varphi_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi_{12}^i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & \varphi_i & 0 \\ \varphi_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{etc.}$$

Der Faktor  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , der nicht-diagonal Einträgen ergibt sich aus dem Skalarprodukt

$$\left( \Psi_{kl}^i | \Psi_{kl}^j \right)_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega(t)))} = \int_{\Omega(t)} \varphi_i \varphi_j \, dx.$$

Mit den genannten Grundlagen der FEM sind weiter die Diskretisierungen der Wärmeleitung und der quasi-stationären, linearen Elastizität zu beschreiben. Später in Kapitel 4.5 werden die Diskretisierungen zu einen Lösungsschema für FE-CutS zusammengefasst.

## 4.2.2 Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung

Das Lösen des schwachen Wärmeleitproblems 3.6 erfolgt in der computergestützten Mathematik nur über die Diskretisierung in Ort und Zeit. Hier wird die Rothe-Methode verwendet. D.h., zunächst wird das schwache Problem in der Zeit diskretisiert und anschließend erst im Ort [18]. So ist eine Approximation  $\theta_n \in X_h(t)$  anstatt der Lösung  $\theta \in X(t)$  des kontinuierlichen Problems gesucht, die die diskrete Wärmeleitungsgleichung löst. Über die Galerkin-Methode (Kapitel 4.2.1) ist  $\theta_n$  als Kombination von

$$\theta_n = \sum_{i=1}^N \theta_n^i \phi_i \quad (4.7)$$

mit Koeffizientenvektor  $(\Theta_n)_i = \theta_n^i$  aufzufassen. Die Vorgehensweise der Diskretisierung wird, wie bereits bei der Herleitung der Wärmeleitungsgleichung, ähnlich wie in [64] erfolgen.

### Diskretisierung in der Zeit

Zuerst steht die Diskretisierung in der Zeit im Vordergrund. Diese ist über das implizite Euler-Verfahren durchzuführen [57]. Es ist eine Gleichung der Form

$$\frac{d\theta}{dt} = F\left(\mathbf{x}, t, \theta, \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{x}}, \frac{\partial^2\theta}{\partial\mathbf{x}^2}\right)$$

über ein diskretes Zeitintervall  $t_0 = 0, \dots, t_m = T$  mit  $\tau_n = t_n - t_{n-1}$  zu betrachten, so dass folgt

$$\frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{\tau_n} = F_n\left(\mathbf{x}, t, \theta, \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{x}}, \frac{\partial^2\theta}{\partial\mathbf{x}^2}\right), \quad n = 1, \dots, m.$$

Um die in der Zeit diskretisierte schwache Wärmeleitung zu erhalten ist das implizite Euler-Verfahren auf das Problem 3.6 mit  $\varphi_j \in \mathbb{P}_k(X(t_n)), j = 1, \dots, N(t_n)$  als Testfunktionen und  $k \in \mathbb{N}$  anzuwenden, so dass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(t_n)} \rho_{n-1} c_{e,n-1} \frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \varphi_j + \kappa_{n-1} \nabla \theta_n \nabla \varphi_j \, dx + \int_{\Gamma_R(t_n)} \delta \theta_n \varphi_j \, ds = \\ \int_{\Gamma_R(t_n)} \delta \theta_{ext} \varphi_j \, ds + \int_{\Gamma_N(t_n)} q_N(\mathbf{x}, t_n) \varphi_j \, ds, \quad \text{für } j = 1, \dots, N(t_n). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Hierbei fließen die von der Temperatur abhängigen Koeffizienten  $\kappa, \rho$  und  $c_e$  immer in Abhängigkeit der bekannten Temperatur des vorherigen Zeitschritts in die Lösung ein. Aus Gründen der Einfachheit wird im Weiteren auf die Notation  $n-1$  verzichtet. Zudem gilt  $\Omega(t_n) \subset \Omega(t_{n-1})$ , so dass  $\theta_{n-1}, \kappa_{n-1}, \rho_{n-1}$  und  $c_{e,n-1}$  auf  $\Omega(t_n)$  wohldefiniert sind.

### Integration im Ort

Für die Diskretisierung im Ort ist die in Kapitel 4.2.1 erwähnte Galerkin-Methode über dem diskreten Werkstückgebiet  $\Omega_h(t)$  auf das zeitlich diskretisierte Wärmeleitproblem 3.6 anzuwenden, so dass sich mit den Gleichungen (4.7) und (4.8) ein vollständig diskretes Wärmeleitproblem ergibt.

**Problem 4.2** (Diskretes Wärmeleitproblem).

Für  $j = 1, \dots, N(t_n), n = 1, \dots, m$  und  $\varphi_j \in X_h(t)$  gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N(t_n)} \left( \int_{\Omega_h(t_n)} \frac{\rho c_e}{\tau_n} \varphi_i \varphi_j \, dx + \int_{\Omega_h(t_n)} \kappa \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j \, dx + \int_{\Gamma_{R,h}(t_n)} \delta \varphi_i \varphi_j \, ds \right) (\Theta_n)_i = \\ \sum_{i=1}^{N(t_n)} \left( \int_{\Omega_h(t_n)} \frac{\rho c_e}{\tau_n} \varphi_i \varphi_j \, dx (\Theta_{n-1})_i + \int_{\Gamma_{R,h}(t_n)} \delta \theta_{ext} \varphi_j \, ds + \int_{\Gamma_{N,h}(t_n)} q_{N,i}(\mathbf{x}, t_n) \varphi_j \, ds \right) \end{aligned}$$

Das obige System ist ein lineares Gleichungssystem der Dimension  $N(t_n) \times N(t_n)$ , dessen Lösung  $\Theta_n$  die approximierte Lösung  $\theta_n$  liefert, die wiederum eine Approximation

von  $\theta(t_n)$  zum Zeitpunkt  $t_n$  in  $X_h(t_n)$  ist.

In der Literatur wird oftmals eine Matrixschreibweise verwendet, die auch die Implementierung des Gleichungssystems in die FEM erleichtert. Hierfür gelten folgende Notationen:  $M_{n-1}^{ij} = \int_{\Omega(t_n)} \rho c_e \varphi_i \varphi_j \, dx$  bezeichnet die Massematrix,  $A_{n-1}^{ij} = \int_{\Omega(t_n)} \kappa \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j \, dx$  die Steifigkeitsmatrix und  $C_{n-1}^{ij} = \int_{\Gamma_{R,h}(t_n)} \delta \varphi_i \varphi_j \, dx$  die Matrix der Robinbedingung. So folgt

$$\frac{1}{\tau_n} M_{n-1} \Theta_n + A_{n-1} \Theta_n + C_{n-1} \Theta_n = b_n,$$

wobei  $b_n$  die rechte Seite von Problem 4.2 beschreibt. Im Weiteren ist bei Verwendung stückweise linearer Testfunktionen (Funktionen in  $\mathbb{P}_1(X_h(t))$ ) die Nutzung eines so genannten gelumpten Skalarprodukts in der Massenmatrix sinnvoll. Das Lumpen ermöglicht die Diagonalisierung dieser, so dass die Lösung des Gleichungssystems zusätzlich erleichtert wird. Für weitere Details siehe auch [18].

Bei der Simulation des Zerspanprozesses sowie der Abbildung des thermomechanischen Werkstückverhaltens während des laufenden Prozesses und damit verbunden, die sich stark ändernde Geometrie des Werkstücks, sind folgende Punkte zu beachten:

- (1) Das diskrete Wärmeleitproblem 4.2 wird immer eingeschränkt auf der aktuellen Werkstückgeometrie  $\Omega_h(t_n)$  gelöst, d.h. dass das entfernte Teilgebiet, welches über den Span abgetragen wurde, der Lösung im aktuellen Zeitschritt nicht mehr zur Verfügung steht. Hier wird also bewusst ein numerischer Fehler gemacht, der nicht genauer untersucht wird.
- (2) Die Informationen der sich zeitlich ändernden Wärmequelle in der Kontaktzone zwischen Werkzeug und Werkstück werden später in Kapitel 4.4.4 separat betrachtet. Dort ist auch genauer auf die Approximation des exakten durch den diskreten Geometrierand einzugehen. Vergleiche hierzu auch Kapitel 4.4.3.

### 4.2.3 Diskretisierung der Deformationsgleichung

Die linear-elastische Deformationsgleichung (Siehe Kapitel 3.3) berücksichtigt nur kleine linear-elastische Verzerrungen, so dass sich der Typ der Gleichung (3.21) durch Wegfall des Beschleunigungsterms von hyperbolisch zu elliptisch ändert. Dies führt darauf zurück, dass die später zu zeigenden Simulationen (Kapitel 5) Zeitschrittweiten verwenden, die deutlich größer sind als Schrittweiten, die für die Abbildung mechanischer Schwingungen nötig wären. Hieraus resultiert die implizite Abhängigkeit der Zeit durch die temperaturabhängigen Werkstoffparameter, woraus sich der Begriff quasi-stationär begründet. Eine Diskretisierung in der Zeit ist damit nicht notwendig.

Auch hier ähnelt die Vorgehensweise der Dissertation von Suhr [64]. Während dort die Deformationsgleichung für weitere Arten von Materialverhalten erweitert wurde, um entsprechendes Verhalten des Werkstoffs beim Abschrecken aus hohen Temperaturen abzubilden, ist hier nur die lineare Elastizität auf den Zerspanprozess im niederen Temperaturbereich zu untersuchen und die folgenden Schritte werden erheblich vereinfacht.

### Annäherungsverfahren für die Deformationsgleichung

In der Literatur ist eine Vielzahl unterschiedlicher numerischer Lösungsverfahren zu finden. Selbst für den quasi-stationären Fall gibt es Verfahren, die sich in der Frage unterscheiden, ob Verschiebungsvektor, Stress- und Spannungstensor als direkte Größen berücksichtigt oder ob einer bzw. mehrere dieser indirekt durch andere Größen ausgedrückt werden sollen. Drei mögliche Vorgehensweisen sind kurz wiederzugeben. Für weitere Details siehe auch [18, 64].

Die folgenden Beispiele sind wegen der Einfachheit auf einen beschränkten, offenen Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  zu betrachten, welches sich zeitlich nicht ändert. Zum einen weil das vorliegende Problem quasi-stationär ist und zum anderen wäre die Betrachtung auf einen nicht-zylindrischen Raum-Zeit-Gebiet ähnlich.

**Reine Verschiebungsmethode** Bei dieser Vorgehensweise werden sowohl Verzerrungen, als auch Spannungen indirekt über Verschiebung und Lamé-Koeffizienten ausgedrückt. Es ergibt sich folgender Ansatz:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \left( \mu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) + \lambda \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \mathbf{I} \right) &= \mathbf{f} && \text{in } \Omega \\ \mathbf{v} &= g_D && \text{auf } \Gamma_D \\ \left( \mu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) + \lambda \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \mathbf{I} \right) \cdot \mathbf{n} &= g_N && \text{auf } \Gamma_N \end{aligned}$$

Werden Tensoren für weitere Berechnungen, wie bspw. für die Berechnung von klassischer Plastizität, benötigt, so können diese im Nachhinein mit zusätzlichem Rechenaufwand indirekt bestimmt werden.

**Gemischte Methode nach Hellinger und Reissner** Hier werden Spannung und Verschiebung direkt berücksichtigt. Lediglich der Verzerrungstensor ist indirekt über die Verschiebung zu bestimmen. Der Ansatz lautet:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) &= \mathbf{f} && \text{in } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) + \lambda \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \mathbf{I} && \text{in } \Omega \\ \mathbf{v} &= g_D && \text{auf } \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= g_N && \text{auf } \Gamma_N \end{aligned}$$

Sofern diverse Arten von Materialverhalten (klassische Plastizität, Visko-, Umwandlungsplastizität, usw.) berücksichtigt werden sollen, wäre dies eine geeignete Variante zum Lösen des Deformationsproblems.



**Gemischte Methode nach Hu-Washizu** Diese letzte Methode berücksichtigt alle Größen durch direkte Berechnung. Sie ist damit auch die komplexeste. Das System lautet:

$$\begin{aligned}
 -\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) &= \mathbf{f} && \text{in } \Omega \\
 \boldsymbol{\sigma} &= 2\mu\boldsymbol{\epsilon} + \lambda\operatorname{tr}(\boldsymbol{\epsilon})\mathbf{I} && \text{in } \Omega \\
 \boldsymbol{\epsilon} &= \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T) && \text{in } \Omega \\
 \mathbf{v} &= g_D && \text{auf } \Gamma_D \\
 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= g_N && \text{auf } \Gamma_N
 \end{aligned}$$

Nach [64] ist nicht ganz klar, welche der hier vorgeschlagenen Lösungsansätze die beste Variante zum Lösen der quasi-stationären Deformationsgleichung ist. Jede Methode hat ihre Vor- und Nachteile im Bezug auf die Einfachheit ihrer Implementierung, der Eigenschaften der Systemmatrix und der Anwendung adaptiver Methoden.

In FE-CutS ist die reine Verschiebungsmethode umzusetzen, weil die resultierende Systemmatrix gute Eigenschaften unter Berücksichtigung von Dirichlet-Randbedingungen besitzt. In diesem Fall ist sie symmetrisch und positiv definit. Zudem ist der Ansatz einfach zu implementieren und spiegelt das gewünschte mechanische Werkstückverhalten während des Zerspanprozesses gut wieder.

### Diskretisierung im Ort

Da die Zeit nur als ein Parameter berücksichtigt wird, ist eine Diskretisierung in der Zeit nicht nötig. Die Diskretisierung im Ort ist hierbei ähnlich der Wärmeleitung (siehe Kapitel 4.2.2).

Gesucht wird nun eine Approximation  $\mathbf{v}_n \in X_h^d(t)$  der exakten Lösung  $\mathbf{v} \in \mathcal{X}(t)$  zu festen Zeitpunkt  $t \in \mathcal{T}$ . Nach der oben erläuterten Galerkin-Methode (Kapitel 4.2.1) lässt sich  $\mathbf{v}_n$  als Kombination von

$$\mathbf{v}_n = \sum_{i=1}^{dN(t_n)} \mathbf{v}_n^i \psi_i \tag{4.9}$$

auffassen, mit Koeffizientenvektor  $(\mathbf{V}_n)_i = \mathbf{v}_n^i$ . Durch Anwendung der Galerkin-Methode mit (4.9) über dem diskreten Werkstückgebiet (Gleichung 4.4) und auf das schwache quasi-stationäre, linear-elastische Deformationsproblem 3.7 angewandt, ergibt sich die folgende diskrete Problemstellung.

**Problem 4.3** (Diskretes quasi-stationäres Elastizitätsproblem).

Für  $j = 1, \dots, N(t_n)$ ,  $n = 1, \dots, m$ ,  $\psi_j \in X_h^d(t)$  und  $\psi_j = 0$  auf  $\Gamma_{D,h}(t)$  gilt:

$$\sum_{i=1}^{dN(t_n)} \left( \int_{\Omega_h(t_n)} 2\mu \boldsymbol{\epsilon}(\psi_i) : \boldsymbol{\epsilon}(\psi_j) + \lambda \operatorname{div}(\psi_i) \operatorname{div}(\psi_j) \, dx \right) (\mathbf{V}_n)_i = \int_{\Omega_h(t_n)} \rho \mathbf{f} \psi_j \, dx + \int_{\Omega_h(t_n)} 3\alpha(\theta_n^i - \theta_0) : \nabla \psi_j + \int_{\Gamma_{N,h}(t_n)} \mathbf{F}_N \cdot \psi_j \, ds$$

Es folgt ein lineares Gleichungssystem der Dimension  $dN(t_n) \times dN(t_n)$ , dessen Lösung  $\mathbf{V}_n$  die approximierte Lösung  $\mathbf{v}_n$  liefert, die wiederum eine Approximation von  $\mathbf{v}$  in  $X_h^d(t_n)$  eingeschränkt zu festen Zeitpunkt  $t_n$  ist.

Mit den diskreten Problemen 4.2 und 4.3 ist eine grundlegende Diskretisierung des thermomechanischen Modells aus Problem 3.5 gegeben, welches eine numerische Lösung des thermomechanischen Werkstückverhaltens während der spanenden Bearbeitung durch Bohr- und Fräsprozesse gewährleistet. Zur Vervollständigung des Modells fehlt schließlich noch die Kopplung an das Dixelmodell, um während des Prozesses geeignete Randbedingungen, wie Wärmequellen und Prozesskräfte an der Schneidkante, zu berücksichtigen. Auf diese wird später in Kapitel 4.4 genauer eingegangen.

### 4.3 Adaptive Methoden

Dieser Abschnitt des Kapitels beschäftigt sich mit Fehlerabschätzungen und adaptiven Methoden, wie sie bereits in der Toolbox ALBERTA [57] implementiert sind. Die Anpassung der Methoden auf das vorliegende Modellproblem über dem zeitabhängigen Werkstückgebiet steht nun im Fokus.

Die meisten Ausführungen basieren auf der Anleitung zur Toolbox ALBERTA [57]. Die folgende Reihenfolge hingegen orientiert sich an der Dissertation von Narimanyan [45] und ist um die Deformationsgleichung erweitert worden.

Eine der einfachsten Möglichkeiten zur Reduzierung des numerischen Fehlers ist globale bzw. uniforme Verfeinerung des Rechengitters zu Beginn der Simulation. Große Nachteile sind hierbei ein deutlicher Anstieg der Zahl an Freiheitsgraden (FE-Knotenpunkte) und damit verbunden höherer Ressourcenverbrauch sowie eine größere Zahl an unbekanntem Größen, die einen enormen Einfluss auf die resultierende Lösung und die Dauer der Simulation haben. Demgegenüber steht die Nutzung adaptiver Methoden zur gezielten Anpassung des Rechengitters, um ein Gitter lokal an Stellen adaptiv anzupassen, an denen große Gradienten auftreten. Adaptive Methoden ermöglichen somit Anpassungen des Rechengitters nur dort durchzuführen, wo es lokal wirklich notwendig ist. Das Ergebnis ist schließlich ein moderater akzeptabler Fehler, der durch den Gebrauch

von so wenig Freiheitsgraden wie möglich entsteht. Dies wird mit der Generierung eines Rechengitters ermöglicht, welches an das zu lösende Problem über Kriterien gekoppelt ist. Ein solches Kriterium kann z.B. die Vorgabe einer Toleranz für die Fehlerabschätzung zwischen exakter und approximierter Lösung sein, die sich durch Abschätzungen der Form:

$$\|u - u_h\| \leq tol$$

ergeben. Die Wahl der richtigen Norm ist dabei entscheidend. Ein optimales Ergebnis über adaptive Methoden sollte ein, so weit wie möglich, vergrößertes Gitter sein, bei welchem die gegebene Toleranz nicht überschritten wird. Die größtmögliche Einsparung an Rechenzeit und Ressourcen sind hierbei als Ziel definiert [45].

Die Abfolge einer adaptiven FEM erfolgt nach immer dem gleichen Muster. Zunächst wird ein System von Gleichungen durch iterative Lösungsansätze wie Mehr-Gitter- oder Krylov-Raum-Methoden gelöst, welches dem Modellproblem unterliegt [57].

Durch Abschätzungen zwischen exakter und approximierter Lösung über lokale Fehlerindikatoren oder globale Fehlerabschätzungen wird eine adaptive Kontrolle des Fehlers ermöglicht. Der Fehlerindikator ist eine an jedem  $d$ -Simplex zugeordnete nicht-negative reelle Zahl, welche ihren größten Wert an Simplizes annimmt, die am besten geeignet sind, durch Verfeinerung, den Diskretisierungsfehler zu reduzieren. Eine Fehlerabschätzung kann hingegen nur global definiert werden, in der Regel durch Aufsummierung der Fehlerindikatoren. Es zeigt sich, dass der Fehlerindikator ein guter Anhaltspunkt zur lokalen, adaptiven Gitteranpassung ist, während die Fehlerabschätzung als Abbruchkriterium der laufenden Simulation geeignet ist und dem Nutzer eine Möglichkeit bietet, die Güte der Approximation abzuschätzen. Es gibt zwei Arten von globalen Fehlerabschätzungen:

- a priori Fehlerabschätzungen und
- a posteriori Fehlerabschätzungen.

Eine a priori Fehlerabschätzung gibt einen Fehler zurück der zwischen exakter und approximierter Lösung besteht. Dieser ist als Indikator für Aussagen über die Regularität der exakten Lösung aufzufassen [18]. Eine a posteriori Fehlerabschätzung ist hingegen eine Abschätzung des Fehlers in einer geeigneten Norm im Zusammenhang mit der aktuellen numerischen Lösung und Daten des Modellproblems. Solch eine Abschätzung erlaubt die numerische Lösung mit einer geeigneten Fehlertoleranz [57]. Die Vorgehensweise ist hierbei immer gleich:

In jedem Berechnungsschritt wird eine a posteriori Fehlerabschätzung bestimmt. Anschließend werden durch Informationen lokaler Fehlerindikatoren die Simplizes markiert, die für eine Verfeinerung oder Vergrößerung des Rechengitters in Frage kommen [45]. Sind Simplizes markiert worden, sind Verfeinerungs- und Vergrößerungsstrategien durchzuführen. Im Laufe dieses Prozesses greifen die Routinen auf Interpolation bzw. Extrapolation zurück, um auf den neu entstehenden Simplizes (durch Teilung oder Zusammenlegung)

die FE-Funktionen zu berechnen. Die Übertragung der FE-Räume auf die neu geschaffenen Simplizes ist genauso relevant, wie die Anordnung der Freiheitsgrade [45]. Dieses Vorgehen lässt sich ggf. beliebig oft wiederholen bis die gewünschte Fehlertoleranz erreicht ist.

### 4.3.1 Fehlerabschätzungen

FE-CutS verfolgt zur Kontrolle der Gitteradaption im Inneren des diskreten Werkstückgebiets einen Ansatz über die Wärmeleitung. Zur Anpassung der Triangulierung  $S_{w,h}(t)$  an das zeitabhängige Werkstückgebiet  $\Omega(t)$  ist ein rein geometrischer Ansatz zu verfolgen, auf dem später in Kapitel 4.3.3 eingegangen wird. Eine Fehlerabschätzung über die Verschiebung erfolgt gleichermaßen, doch wird ihre Kontrolle auf die Gitteradaption nicht ausgenutzt. Im Folgenden sind bekannte Abschätzungen a priori als auch a posteriori für Temperatur und Verschiebung gegeben, die nur eingeschränkt auf dem diskreten Werkstückgebiet  $\bar{\Omega}_h(t)$  Anwendung finden. Nachzuschlagen sind die Abschätzungen z.B. im Vorlesungsskript von Braack [17] und in Braess [18].

#### A priori Abschätzungen

Um die Güte einer numerischen Lösung zur exakten Lösung einer Problemstellung zu bestimmen, wird auf das Lemma von Céa verwiesen [18]. Soll die Abschätzung numerisch berechnet werden, ist das Lemma von Céa nicht anwendbar, weil das Infimum nicht explizit berechenbar ist. Dieses ist wiederum abzuschätzen. Der erste Schritt hin zu einer numerisch berechenbaren Schätzung ist eine zusätzliche Abschätzung des Lemmas durch die Interpolationsabschätzung. Es gilt

$$\|u - u_h\|_X \leq c \inf_{v \in X_h(t)} \|u - v\|_X \leq c \|u - I_h u\|_X,$$

wobei  $I_h$  den Interpolationsoperator, angewandt auf die Lösung  $u$ , bezeichnet [18]. Eine a priori Abschätzung beschreibt einen Fehler zwischen der exakten und der diskreten Lösung eines Problems, sofern die exakte bekannt ist, um Aussagen über die Güte des gestellten Problems treffen zu können.

**Wärmeleitungsgleichung** Die Abschätzung für das Wärmeleitproblem erfolgt in zwei Schritten: Zunächst semi-diskret im Ort und anschließend in der Zeit. Andere Vorgehensweisen sind möglich. Eine Abschätzung für Problem 4.2 mit genügend glatter Lösung  $\theta$  über ein festes, zeitabhängiges Gebiet  $\Omega(t)$  sowohl im Ort als auch der Zeit lautet:

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq n \leq m} \|\theta(t_n) - \Theta_n\|_{L_2(\mathcal{T}; L_2(\Omega(t)))} &\leq c \left( \|\theta_0 - \Theta_{n,0}\|_{L_2(\mathcal{T}; L_2(\Omega(t)))} \right. \\ &+ \left( h^4(\mathcal{S}_h) \|\theta_0\|_{L_2(\mathcal{T}; W_2^2(\Omega(t)))}^2 \right. \\ &+ h^4(\mathcal{S}_h) \int_0^{t_m} \|\dot{\theta}\|_{L_2(\mathcal{T}; W_2^2(\Omega(t)))}^2 dt \\ &\left. \left. + \tau^2 \int_0^{t_m} \|\ddot{\theta}\|_{L_2(\mathcal{T}; L_2(\Omega(t)))}^2 dt \right)^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Die hier betrachteten Terme sind auf das zeitabhängige Werkstückgebiet einzuschränken. Zusätzlich sind für den vorliegenden Zerspanprozess Terme für die Gebietsänderung als auch über das zeitunabhängige Gebiet anzugeben. Eine analytische Betrachtung bleibt diese Arbeit jedoch schuldig.

**Deformationsgleichung** Wie für die Wärmeleitung ist auch eine a priori Abschätzung der linear-elastischen Deformation möglich. Grundlage einer gültigen elliptischen Abschätzung ist die 2. Kornsche Ungleichung [18]:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(u) : \boldsymbol{\epsilon}(u) dx \geq \frac{1}{c_K} \|u\|_{L_2(\mathcal{T}; W_2^1(\Omega(t)))}^2 \quad \text{für } u \in L_2(\mathcal{T}; W_2^1(\Omega(t))).$$

Es lässt sich zeigen, dass die Ungleichung auf die diskrete Deformationsgleichung (Problem 4.3) mit zusätzlichen Termen für Dirichlet-Randbedingungen anzuwenden ist. Aus der Stetigkeits- und Koerzivitätskonstanten der Bilinearform des linear elliptischen Problems ergibt sich schließlich folgende Abschätzung des Fehlers auf festem Gebiet  $\Omega$ :

$$\|\mathbf{v}(t_n) - \mathbf{V}\|_{L_2(\mathcal{T}; W_2^1(\Omega(t)))} \leq \left( \frac{2\mu + \lambda}{2\mu c_K} h^2(\mathcal{S}_h) \|\mathbf{v}(t_n)\|_{L_2(\mathcal{T}; W_2^2(\Omega(t)))}^2 \right)^{1/2}.$$

Das lineare Problem ist bzgl. der Norm genau dann schlecht konditioniert, wenn das Material fast inkompressibel ( $\lambda \gg \mu$ ) oder die Kornsche Konstante  $c_K \ll 1$  ist. Da es sich bei der linear-elastischen Deformation um ein stationäres Problem handelt sind weitere Terme für die Gebietsänderung nicht nötig. Hier ist eine Einschränkung auf das zeitabhängige Werkstückgebiet  $\Omega(t)$ , unter Bedingungen möglich.

Die präsentierten a priori Fehlerabschätzungen sind auf Zerspanprozesse und auf, sich in der Zeit stark ändernden, Werkstückgeometrien anwendbar, so dass Aussagen zur Güte der Abschätzungen möglich sind. Um "gute" Fehlerabschätzungen für höhere Normen der exakten Lösung zu erhalten ist es sinnvoll die folgenden a posteriori Fehlerabschätzungen genauer zu betrachten.

## A posteriori Abschätzungen

A posteriori Fehlerabschätzung finden sehr häufig in praktischen Problemen Anwendung, da exakte Lösungen in der Regel nicht bekannt sind. Mit Hilfe dieser und der Ausnutzung adaptiver Methoden wird die Genauigkeit der finiten Elemente Approximation gesteigert. Letztere ermöglichen lokale Verfeinerungen des Rechengitters nur dort durchzuführen, wo es notwendig ist.

Die Vorgehensweise ist hierbei sehr einfach. Zunächst ist eine Lösung auf dem vorliegenden Rechengitter zu berechnen. Das Ergebnis ist anschließend der a posteriori Fehlerabschätzung zu unterziehen, die über Größe der Fehlerindikatoren an den Knotenpunkten im Rechengitter informiert. Auf Basis dieser Informationen sind obere und untere Schranken zu definieren, die bei Unter- bzw. Überschreitung das Rechengitter adaptiv anpassen:

$$\frac{1}{c} \|f - Lu_h\|_{X'} \leq \|u - u_h\|_X \leq \frac{1}{c} \|f - Lu_h\|_{X'} \quad \text{mit } L : u \mapsto f.$$

Die Berechnungen als auch die Anpassung des FE-Gitters können beliebig oft wiederholt werden, um die vorhandene Lösung zu korrigieren bzw. zu verbessern [18]. Die oberen und unteren Schranken schätzen die Lösung des Problems über die Norm im Dualraum ab. Diese ist explizit nicht zu bestimmen und muss deshalb abgeschätzt werden. Eine eindeutige a posteriori Fehlerabschätzung über den Dualraum setzt sich aus mehreren Fehlerindikatoren zusammen. Unter anderem handelt es sich hierbei um das Initialisierungsresiduum ( $\eta_0$ ), das Diskretisierungsresiduum in der Zeit ( $\eta_\tau$ ), das Element- und Kantensprungresiduum im Ort ( $\eta_h$ ) sowie um das Vergrößerungsresiduum ( $\eta_c$ ) zwischen zwei Zeitschritten. Je nach Problemstellung und Typ der PDE werden unterschiedliche Indikatoren zur Bestimmung der Schranken benötigt oder müssen weitere hinzugefügt werden.

**Wärmeleitungsgleichung** Im Fall parabolischer Probleme, wie dem der Wärmeleitungsgleichung ist eine a posteriori Fehlerabschätzung gegeben durch

$$\|\theta(t_n) - \Theta_n\|_{L_2(\mathcal{T}; L_2(\Omega(t_n)))} \leq \eta_0 + \max_{1 \leq k \leq n} (\eta_\tau(t_k) + \eta_h(t_k) + \eta_c(t_k)). \quad (4.10)$$

Für ein adaptiv angepasstes Rechengitter sollte der Initialisierungsfehler möglichst klein sein und nahe einer gegebenen Toleranz  $tol$  liegen. Dies wird erreicht durch die Einführung von Fehleranteilen  $\Gamma$  unter der Annahme, dass

$$\Gamma_0 + \Gamma_h + \Gamma_\tau \leq 1, \quad \eta_0 \approx \Gamma_0 tol, \quad \eta_h + \eta_c \approx \Gamma_h tol, \quad \eta_\tau \approx \Gamma_\tau tol$$

Die Approximation dieser Fehleranteile ist in einem Algorithmus implementiert, welcher entweder nur die Gitteranpassung kontrolliert oder beides, Gitteranpassung und Zeitschrittweite. Nähere Informationen sind Kapitel 4.3.2 und [57] zu entnehmen.

Die Indikatoren der a posteriori Fehlerabschätzung der Wärmeleitungsgleichung ein-

geschränkt auf dem zeitabhängigen Werkstückgebiet  $\Omega(t)$ , ohne einen Term für die Gitteranpassung, werden wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= \|\theta_0 - \Theta_0\|_{L_2(\Omega_h(0))}, \\
\eta_h &= \left( \sum_{S \in \mathcal{S}_{w,h}(t_k)} C_1 h_S^4 \left\| \frac{\Theta_k - I_h(\Theta_{k-1})}{\tau_k} - \nabla \kappa \nabla \Theta_k \right\|_{L_\infty(\mathcal{T}_k; L_2(S))}^2 \right)^{1/2} \\
&\quad + \left( \sum_{S \in \mathcal{S}_{w,h}(t_k)} C_2 h_S^3 \left\| [\kappa \nabla \Theta_k] \right\|_{L_\infty(\mathcal{T}_k; L_2(\partial S \cap \Omega_h(t_k)))}^2 \right)^{1/2} \\
&\quad + \left( \sum_{S \in \mathcal{S}_{w,h}(t_k)} C_4 h_S^3 \left\| \kappa \nabla \Theta_k \cdot \mathbf{n} - \delta(\Theta_n - \theta_{ext}) \right\|_{L_\infty(\mathcal{T}_k; L_2(\partial S \cap \Gamma_{R,h}(t_k)))}^2 \right)^{1/2}, \\
&\quad + \left( \sum_{S \in \mathcal{S}_{w,h}(t_k)} C_4 h_S^3 \left\| \kappa \nabla \Theta_k \cdot \mathbf{n} - q_N \right\|_{L_\infty(\mathcal{T}_k; L_2(\partial S \cap \Gamma_{N,h}(t_k)))}^2 \right)^{1/2}, \\
\eta_c &= \left( \sum_{S \in \mathcal{S}_{w,h}(t_k)} C_3 h_S^3 \left\| [\nabla \Theta_k] \right\|_{L_2(S)}^2 \right)^{1/2}, \\
\eta_\tau &= C_5 \|\Theta_k - I_h(\Theta_{k-1})\|_{L_2(\Omega_h(t_k))}.
\end{aligned}$$

wobei  $\Theta_k$  die diskrete Lösung auf  $\mathcal{T}_k = (t_{k-1}, t_k)$ ,  $\tau_k = t_k - t_{k-1}$  im  $k$ -ten Zeitschritt sowie  $[\cdot]$  der Sprung über Elementkanten oder zwischen zwei Zeitintervallen ist. Weiter sind die  $C_i$ 's Konstanten, die von der Zeit  $t_k$  abhängen und der Größe des letzten Zeitschritts:  $C_i = C_i \left( \log \left( \frac{t_{k-1}}{\tau_{k-1}} \right) \right)$ . Die Größe bzw. längste Kante vom Simplex  $S$  wird mit  $h_S$  bezeichnet und  $I_h(\Theta_{k-1})$  beschreibt den Interpolationsoperator von  $\Theta_{k-1}$  über der verfeinerten bzw. vergrößerten Triangulierung  $\mathcal{S}_{w,h}(t_k)$ , [57].

Erwähnenswert ist, dass Eriksson und Johnson eine Reihe von Arbeiten veröffentlichten, in denen sie sich mit der adaptiven FEM für parabolische Probleme über zylindrische Raum-Zeit-Gebiete beschäftigten. Z.B. betrachteten sie in [31] ein lineares, parabolisches Problem und bewiesen eine a priori sowie a posteriori Fehlerabschätzung. Ihre Ergebnisse zeigten sie anhand effizienter, adaptiver Methoden. Die obigen Überlegungen basieren auf diesen Ergebnissen und wurden in den Bezug des vorliegenden Zerspanprozesses angepasst.

Später wird angenommen, dass die Zeitschrittweite  $\tau_k$  konstant ist, sodass gilt:  $\tau = \frac{t_m - t_0}{m}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Dies hat zur Folge, dass eine explizite Strategie von a posteriori Fehlerabschätzungen für parabolische Probleme genutzt werden kann (Siehe hierzu Kapitel 4.3.3).

**Deformationsgleichung** Für die quasi-stationäre, lineare Elastizität (Siehe Problem 3.7) lautet die a posteriori Fehlerabschätzung eingeschränkt auf das zeitabhängige Werk-

stückgebiet zu festen Zeitpunkt  $t_n$ :

$$\|\mathbf{v}(t_n) - \mathbf{V}\|_{L_2(\Omega(t_n))} \leq \max_{1 \leq k \leq n} (\eta_h(t_k) + \eta_c(t_k)). \quad (4.11)$$

Diese besteht lediglich aus den Element- und Kantensprungresiduum sowie dem Vergrößerungsresiduum, wobei letzteres nur als Vergrößerungsindikator fungiert. Das Diskretisierungsresiduum in der Zeit  $\eta_\tau$  wird wegen des stationären Problems nicht berücksichtigt (Vergleiche hierzu Kapitel 3.3). Auf das Initialisierungsresiduum wird ebenfalls verzichtet. So ergibt sich für die verbleibenden Indikatoren nach [64, 71]:

$$\begin{aligned} \eta_h &= c_1 \left( \sum_{S \in \mathcal{S}_{w,h}(t_k)} h_S^2 \| -\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{V})) + \mathbf{f} \|_{L_2(S)} \right)^{1/2} \\ &+ c_2 \left( \sum_{S \in \mathcal{S}_{w,h}(t_k)} h_S \| \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{F}_N \|_{L_2(\partial S \cap \Gamma_{N,h}(t_k))} \right)^{1/2} \\ &+ c_3 \left( \sum_{S \in \mathcal{S}_{w,h}(t_k)} h_S \| [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}] \|_{L_2(\partial S \cap \Omega_h(t_k))}^2 \right)^{1/2}, \\ \eta_c &= c_4 \left( \sum_{S \in \mathcal{S}_{w,h}(t_k)} h_S \| [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}] \|_{L_2(\partial S \cap \Omega_h(t_k))}^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

wobei die  $c_i$ 's vom  $\Omega_h(t_k)$  abhängen und der diskrete Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{V})$  eingeschränkt auf  $S \in \mathcal{S}_{w,h}(t_k)$  wie folgt formuliert wird:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{V}) = \mu(\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) + \lambda \sum_{i=1}^d \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial x_i} \mathbf{I}.$$

Erwähnenswert ist, dass Verfürth in [71] eine Vielzahl unterschiedlicher a posteriori Fehlerabschätzungen behandelt, u.a. auch unterschiedliche Abschätzungen für die lineare Elastizität. Diese Griff auch Suhr in ihrer Dissertation [64] auf, aus der die obigen Indikatoren entnommen wurden.

Über die präsentierten a posteriori Fehlerabschätzungen für Wärmeleitung, als auch für lineare Elastizität, ist eine Nutzung von adaptiven Methoden im Inneren des zeitabhängigen Werkstückgebiets in Abhängigkeit großer, lokaler Fehleranteile möglich als auch eine adaptive Anpassung an den sich in der Zeit stark ändernden Geometrierand.

### 4.3.2 Adaptive Strategien

Gitterverfeinerungen sind im Allgemeinen ein sehr hilfreiches Mittel um die Güte einer numerischen Lösung zu verbessern. Die adaptive Anpassung unstrukturierter Rechengitter an die Lösung eines Problems oder die Approximation eines Teilgebiets innerhalb des Werkstückgebiets ist das Ziel dieses Abschnitts. Adaptive Methoden basieren auf



lokaler Verfeinerung und Vergrößerung gestützt durch Fehlerabschätzungen und Fehlerindikatoren, welche a posteriori durch die diskrete Lösung und gegebenen Daten im zeitabhängigen Werkstückgebiet bestimmt werden.

Grundlage zur Implementierung adaptiver Methoden ist eine geeignete hierarchische Netzstruktur des Rechengitters. Zunächst wird ein Überblick über den generellen Ablauf der Gitterverfeinerung bzw. -vergrößerung gegeben. Anschließend sind adaptive Strategien für elliptische und parabolische Probleme vorzustellen, die in der Toolbox ALBERTA implementiert sind. Zum Schluss ist eine geeignete Strategie für die Verwendung in FE-CutS, insbesondere zur Anpassung des Rechengitters an das zeitabhängige Werkstückgebiet, zu diskutieren.

Die folgenden Ausführungen basieren im Wesentlichen auf Schmidt und Siebert [57]. Sofern andere Quellen genutzt werden, sind diese separat kenntlich gemacht.

### Grundlagen der Gitterverfeinerung und -vergrößerung

Die verwendete Toolbox ALBERTA verwendet zur Vergrößerung und Verfeinerung simplizialer Rechengitter die Bisektionsmethode. Bei der Bisektion wird an jedem Element, welches zur Verfeinerung ausgewählt wurde, zum Beispiel seine längste Kante als Verfeinerungskante markiert. Eine andere Wahl der Verfeinerungskante ist möglich. Anschließend wird das Element in zwei neue Elemente durch den Mittelpunkt der Verfeinerungskante und dem gegenüberliegenden Eckpunkt zerlegt (siehe Abbildung 4.6). Im Fall von Dreiecken in 2D wird die *newest vertex* Bisektion aus [43] und bei Tetraedern in 3D die Bisektion von Kossaczky [36] verwendet.

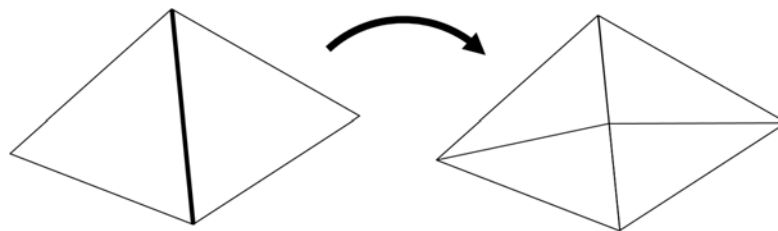


Abbildung 4.6: Verfeinerung in 2D. Die hervorgehobene Kante (links) ist die Verfeinerungskante für die beiden, benachbarten Dreiecke. Nach [57].

Ist ein Element zur Verfeinerung markiert und die Verfeinerungskante bestimmt, sind alle Elemente, die die gleiche Kante besitzen, ebenfalls zur Verfeinerung zu markieren. Dieses Vorgehen wird *atomic refinement operation* genannt und ist für den 2D-Fall in Abbildung 4.6 (rechts) dargestellt. Handelt es sich bei der Verfeinerungskante um einen Teil des Gebietsrand, ist lediglich eine einzelne Bisektion durchzuführen. In [57] ist nachzulesen, dass in der Toolbox unterschiedliche rekursive Algorithmen implementiert sind, die in 2D und 3D verwendet werden können. Einen allgemeinen Algorithmus für die adaptiven Methoden lautet wie folgt (siehe auch [45]):

**Algorithmus 4.2** (Allgemeine adaptive Strategie).

Initialization of the discrete problem on  $\mathcal{S}_{h,0}$  with error tolerance  $\xi$

```

for  $k = 0$  till  $n$ 
  solve the discrete Problem on  $\mathcal{S}_{h,k}$ 
  compute local error estimate  $\eta$  and their indicators for every  $S \in \mathcal{S}_{h,k}$ 
  if  $\eta \leq \xi$ 
    do nothing
  else
    mark  $S$  for refinement or coarsening
    refine mesh  $\mathcal{S}_{h,k}$  and produce a modified  $\mathcal{S}_{h,k}$ 
  end if
end for

```

Die Vergrößerung des simplizialen FE-Gitters erfolgt quasi invers zur Verfeinerung. Das Eltern-Element, welches während der Verfeinerung in zwei Kinder-Elemente zerlegt wurde, bildet eine passende Kombination zur Vergrößerung. Erst wenn alle Kinder-Elemente des benachbarten Eltern-Elements ebenfalls zur Vergrößerung markiert wurden, können die Elemente vergrößert werden, andernfalls nicht. Hier besteht der wesentliche Unterschied zur Verfeinerung. Während dort die Bisektion eines markierten Elements auch bei einem nicht-markierten Nachbar-Element durchgeführt werden kann, ist dies bei der Vergrößerung nur dann möglich, wenn auch alle Kinder-Elemente des benachbarten Eltern-Elements zur Vergrößerung markiert sind. Diese sogenannte *atomic coarsening Operation* wird bei der Vergrößerung angewendet, ohne hängende Knoten zuzulassen [57].

Während der Vergrößerung bzw. der Verfeinerung sind 4 wichtige Operationen durchzuführen. Zunächst ist die Topologie der Gitterstruktur ständig anzupassen. Durch Verfeinerung sind zusätzliche Elemente hinzuzufügen und bei Vergrößerung entsprechend aus der Topologie zu entfernen.

Die Verwaltung der Freiheitsgrade (Knotenpunkte) ist ein weiterer wichtiger Aspekt für die Verwendung adaptiver Methoden und den darauf zu verwendeten FE-Räumen. Bei Verfeinerung sind an den richtigen Stellen Freiheitsgrade hinzuzufügen und bei Vergrößerung entsprechend zu entfernen. Alle Strukturen, die in Abhängigkeit der Freiheitsgrade stehen, sind ebenfalls anzupassen [57].

Der Transfer von Geometriedaten über die Freiheitsgrade ist ebenfalls ein wichtiger Punkt der zu berücksichtigen ist. Insbesondere im Fall isoparametrischer Elemente, die sich gekrümmten Rändern anpassen (Siehe hierzu z.B. [18]).

Schließlich gilt es unter Ausnutzung geeigneter Interpolationssroutinen die Informationen der jeweiligen FE-Räume zu vererben bzw. zusammenzuführen.

### Adaptive Strategie elliptischer Probleme

Eine geeignete Markierungsstrategie sollte in jedem Durchlauf nicht zu wenige Elemente zur Verfeinerung markieren. Auf der anderen Seite sollte diese auch nur so viele Elemente wie unbedingt notwendig markieren, um unter Einhaltung der gegebenen Toleranz den

Fehler zu reduzieren. Die Toolbox hält hierfür drei Strategien bereit, die bei der adaptiven Verfeinerung bzw. Vergrößerung im Ort und bei stationären Problemstellungen Anwendung finden. Eine ist im folgenden kurz vorzustellen. Weitere Strategien sind dem Handbuch zur Toolbox [57] zu entnehmen.

Die Strategie der Gleichverteilung liefert eine möglichst gleichverteilte Fehlertoleranz, an denen sich die Fehlerindikatoren an jedem Element orientieren. Vorteil ist hierbei, dass alle Elemente gleich behandelt werden und keins vorverurteilt wird. Hierfür sei  $N_K$  die Anzahl von Gitterelementen in  $\mathcal{S}_{h,k}$ . Sind die Fehlerindikatoren über alle Elemente gleich verteilt, so dass  $\eta_h(S) = \eta_h(S')$  für alle  $S, S' \in \mathcal{S}_{h,k}$  gilt, dann ist

$$\eta = \left( \sum_{S \in \mathcal{S}_{h,k}} \eta_h^2 \right)^{1/2} = N_k^{1/2} \eta_h(S) \stackrel{!}{=} tol \quad \text{und} \quad \eta_h(S) = \frac{tol}{N_k^{1/2}}.$$

Durch Gleichverteilung werden nur diejenigen Elemente markiert, deren Fehlerindikatoren größer als  $tol/N_k^{1/2}$  sind. Durch die Hinzunahme eines Parameters  $\gamma \in (0, 1)$  wird die Verfeinerung gesteuert, so dass gilt:

$$\eta_h(S) > \gamma \frac{tol}{N_k^{1/2}}.$$

Bei Vergrößerung wiederum gilt: Ist der lokale Fehler eines Elements deutlich kleiner als der mittlere Fehler, wird dieses Element zur Vergrößerung markiert. Sei  $\gamma_c$  ein weiterer Parameter mit  $\gamma_c < \gamma$ , dann gilt

$$\eta_h(S) + \eta_c(S) \leq \gamma_c \frac{tol}{N_k^{1/2}}.$$

### Adaptive Strategie parabolischer Problemstellungen

Neben elliptischen Problemstellungen sind in der Toolbox auch Strategien für parabolische Probleme implementiert. Durch deren Ausnutzung besteht in jedem Zeitschritt die Möglichkeit das Rechengitter adaptiv durch geeignete a posteriori Fehlerabschätzungen bzw. -indikatoren anzupassen. Neben der adaptiven Steuerung im Ort wird diese zusätzlich um eine adaptive Steuerung der Zeitschrittweite erweitert. Bänsch gibt in [8] einen Überblick zu verschiedenen Strategien zum Lösen der Navier-Stokes-Gleichungen und weiterer Problemstellungen.

Im wesentlichen ist in eine explizite und implizite Strategie zur Zeitschrittweitenkontrolle zu unterscheiden. Das Lösen des Problems mit konstanter Zeitschrittweite und adaptiver Anpassung im Ort beschreibt die explizite Strategie. Bei der impliziten Strategie ist die Anpassung der Zeitschrittweite an die Gegebenheiten des zu lösenden Problems möglich. Der folgende Algorithmus gibt einen Überblick (Vergleiche hierzu auch [57]).

**Algorithmus 4.3** (Adaptiver Algorithmus in Ort und Zeit).

Start with parameter  $tol$ ,  $v_1 \in (0, 1)$ ,  $v_2 > 1$ ,  $\gamma_1 \in (0, 1)$ ,  $\gamma_2 \in (0, \gamma_1)$ ,

```

solution  $U_k$  of previous time step  $t_k$  on  $\mathcal{S}_{h,k}$  with time step size  $\tau_k$ 
 $\mathcal{S}_h(t_{k+1}) = \mathcal{S}_h(t_k)$ 
solve the discrete problem  $U_{k+1}$  on  $\mathcal{S}_h(t_{k+1})$  for  $t_{k+1} := t_k + \tau_{k+1}$ 
compute error estimates  $\eta_\tau(t_{k+1})$  and  $\eta_h(t_{k+1})$  on  $\mathcal{S}_h(t_{k+1})$ 
mark elements for refinement and coarsening
adapt mesh and produce modified  $\mathcal{S}_h(t_{k+1})$ 
while  $\eta_\tau(t_{k+1}) > \gamma_1 \Gamma_\tau tol$ 
   $\tau_{k+1} := v_1 \tau_{k+1}$ 
  solve the discrete problem on  $\mathcal{S}_h(t_{k+1})$  for  $t_{k+1} := t_k + \tau_{k+1}$ 
  compute error estimates  $\eta_\tau(t_{k+1})$  and  $\eta_h(t_{k+1})$  on  $\mathcal{S}_h(t_{k+1})$ 
  if  $\eta_\tau < \gamma_2 \Gamma_\tau tol$ 
     $\tau_{k+1} := v_2 \tau_{k+1}$ 
  end if
  if  $\eta_h > tol$ 
    mark elements for refinement and coarsening
    adapt mesh and produce modified  $\mathcal{S}_h(t_{k+1})$ 
  end if
end while

```

Die Parameter  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  unterstützen den Algorithmus.  $v_1 \in (0, 1)$  reduziert schrittweise die Zeitschrittweite bis der resultierende Fehler unterhalb der gegebenen Grenze  $tol$  liegt. Unterstützt wird die Zeitschrittweitenkontrolle durch adaptive Anpassung des Rechengitters durch das Element- und Kantensprungresiduum. Liegt der geschätzte Zeitdiskretisierungsfehler deutlich unter der Grenze  $tol$ , ist die Zeitschrittweite mit  $v_2 > 1$  wieder zu vergrößern. Die Parameter  $\gamma_1 \in (0, 1)$  und  $\gamma_2 \in (0, \gamma_1)$  sind Schranken um die Robustheit des Algorithmus zu gewährleisten. So wird ein Oszillieren der Fehlerabschätzung vermieden [57].

### 4.3.3 Adaptive Strategie von FE-CutS

Eine adaptive Strategie zur Abbildung des thermomechanischen Werkstückverhaltens während der spanenden Bearbeitung muss zwei Aspekte berücksichtigen: Die zeitabhängige Änderung des Werkstückgebiets und die Reduzierung des numerischen Fehlers über die Modellgleichungen innerhalb des Werkstückgebiets. Das Ergebnis ist eine adaptive Strategie, die aus diesen beiden besteht.

#### Gebietsadaption

Die Beschreibung der, sich in der Zeit ändernden, Werkstückgeometrie ist bereits bekannt und in Kapitel 3.1 und 4.1 nachzulesen. Um die Abbildungsgenauigkeit des Werkstücks zu erhöhen, ist der Markierungsalgorithmus (Algorithmus 4.1) mit einer adaptiven Strategie zu erweitern.

Aus der Überlagerung von Geometrierand  $\partial\Omega(t)$  und nicht-angepassten Rechengitter

$\overline{\Omega}_h$ , lässt sich das diskrete Werkstückgebiet  $\overline{\Omega}_h(t)$  bestimmen (Siehe hierzu auch Kapitel 4.1.3 sowie 4.4.3). Dieses ist in der Regel größer als das kontinuierliche Werkstückgebiet  $\Omega(t)$ . Es gilt:  $\Omega_h(t) \supset \Omega(t)$ . Adaptive Methoden sind eine Möglichkeit, das diskrete Werkstückgebiet an die kontinuierliche bzw. exakte Werkstückgeometrie anzunähern. Wie bereits in Kapitel 4.1.2 vorgestellt, ist die Abbildung der zeitabhängigen Werkstückgeometrie durch verschiedene Methoden realisierbar. Hierbei zeigen diese, dass zum Teil sehr große Umstrukturierungen der vorliegenden Toolbox ALBERTA vorzunehmen sind. Aus diesem Grund ist ein Verfahren zu wählen, welches die bereits vorhandenen Strukturen nutzt.

Die Idee besteht nun darin, auf den nicht-angepassten, diskreten Rechengebiet  $\Omega_h$ , die Abbildung des Werkstücks  $\Omega_h(t)$ , so genau wie möglich zu gestalten. Die Erweiterung des Markierungsalgorithmus liefert einen genauen Blick auf jene Elemente, die den kontinuierlichen Geometrierand schneiden. Mit Hilfe adaptiver Methoden sind diese adaptiv anzupassen, um ein akzeptables, im Volumen minimal größeres, Werkstückgebiet zu konstruieren, die den Ansprüchen des Modells genügen.

Das Ergebnis ist ein Algorithmus, der neben der Zugehörigkeitsmarkierung eine adaptive Anpassung der Elemente an dem kontinuierlichen Geometrierand ermöglicht. Hierbei sind folgende Bedingungen zu erfüllen:

1. Ein  $d$ -Simplex  $S \in \mathcal{S}_{w,h}(t)$  muss auf dem exakten Geometrierand liegen und darf eine bestimmte Verfeinerungslevel  $\xi_{tol}$  nicht unterschreiten;
2. Der Abstand zwischen diskreten und kontinuierlichen Geometrierand darf nicht größer sein, als die kleinste Gitterweite  $h$ .

Die Verfeinerungslevel bezeichnet hierbei eine einzelne Bisektion, die durchzuführen ist. Bei einer Verfeinerungsstufe werden solange einzelne Bisektionen wiederholt, bis das FE-Gitter einmal gleichmäßig verfeinert wurde. So sind für  $d = 2$  zwei einzelne Bisektionen vorzunehmen, um einmal gleichmäßig zu verfeinern, was wiederum zwei Verfeinerungslevel entspricht. Für  $d = 3$  werden drei einzelne Bisektionen für eine Verfeinerungsstufe benötigt bzw. 3 Verfeinerungslevel.

Der erweiterte Markierungsalgorithmus 4.4 erfüllt die obigen Bedingungen und genügt somit den gesetzten Anforderungen der zeitlich ändernden Geometrie des Werkstücks.

**Algorithmus 4.4** (Markierung und Anpassung des diskreten Werkstückgebiets).

**Start with**  $\mathcal{S}_{w,h}(t_{k+1}) = \emptyset$ ;  $\mathcal{S}_{m,h}(t_{k+1}) = \emptyset$ ,  $\xi_{tol} \in \mathbb{N}$  and  $\mathcal{S}_h(t_k)$  of time  $t_k$

$\mathcal{S}_h(t_{k+1}) = \mathcal{S}_h(t_k)$

**while**  $S \in \mathcal{S}_h(t_{k+1})$

**if**  $\Phi(a_n, t_{k+1}) > 0 \ \forall a_n \in S$

$\mathcal{S}_{w,h}(t_{k+1}) = \mathcal{S}_{w,h}(t_{k+1}) \cup S$

**else if** at least for one  $a_n \in S : \Phi(a_n, t_{k+1}) > 0$

and at least for one  $a_n \in S : \Phi(a_n, t_{k+1}) \leq 0$

**if** refinement level of  $S < \xi_{tol}$

```

    mark  $S$  for refinement
  else if refinement level of  $S > \xi_{tol}$ 
    mark  $S$  for coarsening
  end if
   $\mathcal{S}_{w,h}(t_{k+1}) = \mathcal{S}_{w,h}(t_{k+1}) \cup S$ 
else
   $\mathcal{S}_{m,h}(t_{k+1}) = \mathcal{S}_{m,h}(t_{k+1}) \cup S$ 
  if possible mark  $S$  for coarsening
end if
end while
 $\Rightarrow \mathcal{S}_h(t_{k+1}) = \mathcal{S}_{w,h}(t_{k+1}) \cup \mathcal{S}_{m,h}(t_{k+1})$ 
refine mesh

```

$\Phi(a_n, t_{k+1})$  (Vergleiche Problem 4.1) beschreibt hier den diskreten Abstand zwischen einem Eckpunkt  $a_n$  zum kontinuierlichen Geometrierand  $\Gamma(t_{k+1})$  zum Zeitpunkt  $t_{k+1}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Die Erweiterung um adaptive Methoden zeigt sich hier durch entsprechende Markierung aller Elemente, die mindestens einen Eckpunkt  $a_n \in S$  besitzen, für den gilt  $\Phi(a_n, t_{k+1}) > 0$  und mindestens einen Eckpunkt, für den gilt  $\Phi(a_n, t_{k+1}) \leq 0$ . Bei Überschreitung der höchstmöglichen Verfeinerungslevel  $\xi_{tol}$  ist dieses Element zu vergrößern, andernfalls zu verfeinern.

Mit diesem Algorithmus ist eine relativ einfache Gebietsapproximation zur Erhöhung der Abbildungsgenauigkeit des Werkstückgebiets  $\overline{\Omega}_h(t)$  gegeben. Später in Kapitel 5.2 wird der Algorithmus einer genaueren Analyse unterzogen.

### Problemspezifische Adaption

Die problemspezifische Anpassung des FE-Gitters im Werkstückgebiet beruht auf der Idee das diskrete Gitter nur dort lokal anzupassen, wo es für die Lösung des Problems erforderlich ist. Gerade die Wärme- bzw. Kraftquellen an der Kontaktzone zwischen Werkzeug und Werkstück können sehr hohe Gradienten in der Lösung hervorrufen, aus denen ein großer numerischer Fehler resultiert. Eine adaptive Anpassung des Rechengitters ist hier erforderlich und reduziert den entstehenden numerischen Fehler. Durch adaptive Anpassung in Abhängigkeit der Temperaturänderung und/oder der Deformation kann dies erreicht werden.

Aus der Praxis ist bekannt, dass durch den Zerspanprozess das Werkzeug immer wieder in das Werkstück eingreift bzw. aus dem Werkstück austritt. Dabei treten Effekte wie nachlaufende Schneiden oder Reibungswärme beim Spanabtransport in Bohrungen auf. Die problemspezifische Anpassung des Rechengebiets ermöglicht gerade dort, wo Quellen am bewegenden Rand auftreten eine hohe Abbildungsgenauigkeit des Werkstücks. Bei bereits bearbeiteten Flächen, die längere Zeit nicht bearbeitet wurden, sind die Gradienten der Lösung deutlich kleiner, so dass hier die hohe Auflösung des FE-Gitters nicht zu gewährleisten ist. Eine problemspezifische Anpassung des Rechengitters ist nur dann möglich, wenn die Auflösung, in bereits bearbeiteten Bereichen, akzeptabel bleibt.

Neben der Gebietsadaption ist die problemspezifische Adaption des Rechengitters nur als ein unterstützendes Mittel zu verwenden, um die Abbildungsgenauigkeit des Werkstückgebiets zu erhöhen sowie zu erhalten. Genutzt wird die temperaturabhängige Adaption, so dass das Rechengitter nur in Abhängigkeit der Temperatur  $\theta_n$  anzupassen ist. Diese wird in Kombination mit einer konstanten Zeitschrittweite über eine explizite Verfeinerungs- und Vergrößerungsstrategie zur Reduzierung des numerischen Fehlers am vorliegenden parabolischen Problem verwendet. Der nun folgende Algorithmus zeigt abstrakt dessen Ablauf für einen Zeitschritt mittels der Gleichverteilungsstrategie (siehe Kapitel 4.3.2).

**Algorithmus 4.5** (Explizite Strategie für problemspezifische Adaption).

```

Start with  $\mathcal{S}_{w,h}(t_k)$   $\mathcal{S}_{m,h}(t_k)$  and error tolerance  $tol$  on time  $t_k$ 
solve the discrete heat problem on  $\mathcal{S}_{w,h}(t_k)$ 
compute local and global error estimates  $\eta, \eta_h$ 
while  $\eta > tol$ 
  for all  $S$  in  $\mathcal{S}_{w,h}(t_k)$ 
    if  $\eta_h > \gamma tol / \sqrt{N_k}$  then mark elements for refinement
    if  $\eta_h + \eta_c < \gamma_c tol / \sqrt{N_k}$  then mark elements for coarsening
  end for
adapt mesh  $\mathcal{S}_{w,h}(t_k)$  and produce a modified  $\mathcal{S}_{w,h}(t_k)$ 
end while
start algorithm 4.4 for updating  $\mathcal{S}_{w,h}(t_k)$  and  $\mathcal{S}_{m,h}(t_k)$ 
solve the discrete linear elastic problem on  $\mathcal{S}_{w,h}(t_k)$ 
compute local and global error estimates  $\eta, \eta_h$ 
while  $\eta > tol$ 
  for all  $S$  in  $\mathcal{S}_{w,h}(t_k)$ 
    if  $\eta_h > \gamma tol / \sqrt{N_k}$  then mark elements for refinement
    if  $\eta_h + \eta_c < \gamma_c tol / \sqrt{N_k}$  then mark elements for coarsening
  end for
adapt mesh  $\mathcal{S}_{w,h}(t_k)$  and produce a modified  $\mathcal{S}_{w,h}(t_k)$ 
end while
start algorithm 4.4 for updating  $\mathcal{S}_{w,h}(t_k)$  and  $\mathcal{S}_{m,h}(t_k)$ 

```

Nach Überprüfung der Fehlerindikatoren und der adaptiven Anpassung von  $\mathcal{S}_{w,h}(t_k)$  ist Algorithmus 4.4 aufzurufen, um mögliche Änderungen der Zugehörigkeit von Elementen in  $\mathcal{S}_{w,h}(t_k)$  und  $\mathcal{S}_{m,h}(t_k)$  zu überprüfen. Zu der temperaturabhängigen Adaption ist im obigen Algorithmus zusätzlich auch die Adaption über den Deformationsvektor möglich. Diese ist jedoch nur ein weiteres, unterstützendes Mittel die Abbildungsgenauigkeit des diskreten Werkstückgebiets zu erhöhen. Letztere wird jedoch in den später folgenden Simulationsergebnissen nicht verwendet.

### Kombinierte adaptive Strategie

Das Ergebnis dieses Abschnitts ist eine kombinierte adaptive Strategie für FE-CutS, die aus den eben beschriebenen adaptiven Strategien besteht. Hierbei handelt es sich um

- die adaptive Verfeinerung des FE-Gitters innerhalb des diskreten Werkstückgebiets durch a posteriori Fehlerabschätzungen in der Wärmeleitung und optional der linearen Elastizität, und
- der adaptiven Anpassung des FE-Gitters an die sich in der Zeit stark ändernde Werkstückgeometrie.

Für die Gegebenheiten des vorliegenden Zerspanprozesses ist die beschriebene adaptive Strategie von FE-CutS die bestmögliche Wahl ohne tiefgreifende Änderungen in der Toolbox ALBERTA vornehmen zu müssen. Damit ist gewährleistet, dass zu jedem Zeitpunkt des Prozesses die stark ändernde Werkstückgeometrie abgebildet werden kann.

Abbildung 4.7 zeigt ein zeitabhängiges Werkstückgebiet (unten), welches über einen kreisförmigen Geometrierand in der Zeit schrumpft. Zu sehen sind hier zu festen Zeitpunkt  $t$  unterschiedliche Verfeinerungsstufen (maximal 7, 8 und 9 Verfeinerungen). Das zugehörige Rechengebiet mit adaptiv angepassten Rechengitter ist den obigen Grafiken zu entnehmen. Deutlich ist zu erkennen, dass die Abbildungsgenauigkeit mit zunehmender Gitterfeinheit zunimmt. Auch der Volumenfehler über die unterschiedlichen Verfeinerungslevel wird kleiner. Wie hoch die maximale Verfeinerungslevel  $\xi_{tol}$  sein darf, hängt jedoch von der gewünschten Abbildungsgenauigkeit des diskreten Werkstückgebiets ab, welches manuell festzulegen ist. Ziel bleibt jedoch, das diskrete Werkstückgebiet so genau wie möglich abzubilden und dabei so wenig Elemente wie benötigt zu verwenden.

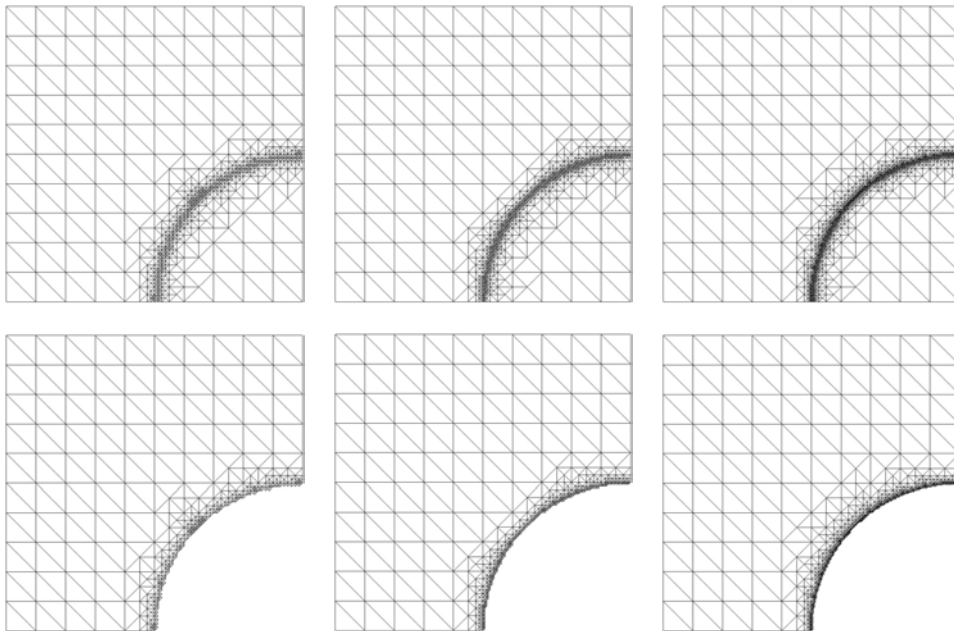


Abbildung 4.7: Adaptive Strategie zur Approximation des Geometrierandes auf Rechengebiet  $\overline{\Omega}_h$  (oben) und zeitabhängigen Werkstückgebiet  $\overline{\Omega}_h(t)$  (unten) mit unterschiedlichen Verfeinerungen. Von links nach rechts: 7, 8 und 9 Verfeinerungslevel.



## 4.4 Kopplung von Dixelmodell mit FE-CutS

Die Abbildung komplexer Zerspanprozesse durch Bohren und Fräsen kann ohne entsprechende Maschinenkinematik, repräsentiert durch einen NC-Code, und Materialabtragsberechnung, inklusive der Bestimmung von Wärmeströmen und Prozesskräften, nicht realisiert werden. Eine Kopplung zu einem Dixelmodell, welches die obigen Eigenschaften besitzt und übergibt, ist notwendig und komplettiert FE-CutS (Siehe hierzu auch Kapitel 2.2).

Die Kopplung vom Dixelmodell mit FE-CutS steht nun im Fokus. Zunächst ist zu diskutieren, welche Daten zwischen den Modellen auszutauschen sind. Die Verwaltungsstruktur für den Datenaustausch und dessen Implementierung ist ein weiterer wichtiger Aspekt, der Beachtung findet. Insbesondere ist hier auf die Beschreibung des Dixel einzugehen. Anschließend sind Schnittstellen zur Abbildung der Geometriegestalt des, sich in der Zeit stark ändernden, Werkstücks zu betrachten. Zum Schluss steht die Approximation von Daten auf dem sich ändernden Gebietsrand im Mittelpunkt, um relevante thermische wie mechanische Effekte während der Zerspanung zu berücksichtigen.

### 4.4.1 Datenaustausch

Für eine Kopplung zwischen unterschiedlichen Modellen existiert nicht die eine Lösung sondern jeweils nur individuelle Ansätze. Bevor eine Kopplung realisierbar wird, sind viele Fragen zu klären. Darunter fällt zum Beispiel, welche Daten zwischen den Modellen auszutauschen sind. Die folgenden Ausführungen geben einen Überblick, welche Daten das jeweils andere Modell benötigt, welches Format den Informationsaustausch gewährleistet und wie oft Daten zwischen den Modellen verschickt werden sollten.

#### Kommunikationsumgebung

Die vorliegenden Modelle sind in unterschiedlichen Programmiersprachen geschrieben und auf verschiedenen Betriebssystemen realisiert. Um miteinander zu kommunizieren ist ein einheitliches Format notwendig, auf das beide Modelle zugreifen können. Ein auf dem universellen Datenformat XML (*Extensible Markup Language*) basierendes Austauschformat ist die Lösung. XML ist eine maschinenlesbare Sprache (Auszeichnungssprache) für die Gliederung und Formatierung von Daten in Form von Textdateien, welches häufig für den plattform- und implementierungsunabhängigen Austausch von Daten zwischen unterschiedlichen Computersystemen genutzt wird [48].

Neben den unterschiedlichen Programmiersprachen und den verschiedenen Betriebssystemen, sind die grundverschiedenen Diskretisierungen im Raum von Dixelmodell und FE-CutS zu berücksichtigen. Werden in der FEM Triangulierungen aus simplizialen Elementen (In 3D: Tetraeder) verwendet, basiert die Diskretisierung im Dixelmodell auf zwei-dimensionalen Rastern, die in jeder Raumrichtung aufzuspannen sind. Jedes dieser Raster besteht aus einer Anordnung von Dixel mit jeweils einem Anfangs- und Endpunkt, die ein Höhenprofil in jeder Raumrichtung ermöglichen (siehe auch Abbildung

4.9). Durch unterschiedliche, boolesche Operationen (Vergleiche Kapitel 2.2) können zusätzliche Anfangs- und Endpunkte im Laufe des Prozesses hinzugefügt oder entfernt werden. Diese sehr einfache Struktur bildet die Grundlage für eine Kommunikation zwischen den Modellen.

### Eingangsgrößen für FE-CutS

Die Struktur des XML erlaubt an jedem Anfangs- und Endpunkt der Dixel zusätzliche Informationen. Wie dem Flussdiagramm in Abbildung 2.4 aus Kapitel 2.2 zu entnehmen ist, werden für die Thermomechanik unterschiedliche Informationen benötigt. Hier sind folgende Eingangsparameter für FE-CutS zu entnehmen:

- Die aktuelle Werkstückgeometrie aus dem Materialabtragsmodell, um das Werkstück abzubilden;
- Die Wärmestrom- und Prozesskraftdaten aus dem Prozessmodell, um den Prozess darzustellen und
- Die Normalenvektoren, insbesondere an der Kontaktzone, um Informationen über die Wirkrichtung der Wärmeströme und Prozesskräfte zu erhalten.

Durch die im Dixelmodell befindliche Materialabtragsberechnung besteht eine direkte Kopplung zu den Prozessmodellen, um die in der Kontaktzone auftretenden Kräfte anhand von Schnittbedingungen zu ermitteln. Eine zusätzliche Kommunikation zwischen FE-CutS und den Prozessmodellen ist damit zu vernachlässigen.

Durch die Übergabe der Werkstückgeometrie sind in FE-CutS Abbildungen der unterschiedlichsten Zerspanprozesse möglich. Neben den hier zu betrachtenden Prozessen des Bohrens und FräSENS sind weitere Prozesse möglich. Diese werden jedoch nur implizit über die Werkstückgeometrie und den Informationen in der Kontaktzone in FE-CutS wiedergegeben. Die Werkstückgeometrie ermöglicht eine Darstellung des zeitabhängigen Werkstückgebiets  $\Omega_h(t)$ , um so Änderungen der Geometrie während des laufenden Prozesses zu berücksichtigen. Eine realitätsnahe Abbildung des zerspanenden Werkstücks im laufenden Prozess ist die Folge.

Die im Prozessmodell ermittelten Daten für Wärmestrom und Prozesskräfte erlauben die Simulation des thermischen und mechanischen Werkstückverhaltens über den Prozess. Diese sind in FE-CutS über Randbedingungen zu berücksichtigen. Zusätzliche Informationen über Wirkrichtung der Daten durch Normalenvektoren erlauben schließlich Simulationen unter realitätsnahen Bedingungen. Zur Bestätigung dieser Aussagen werden in Kapitel 5 diverse Vergleiche zwischen Simulationen und Experimenten vorgestellt.

### Ausgangsgrößen von FE-CutS

Im Gegenzug zu den Daten, die FE-CutS benötigt, um das thermische wie mechanische Werkstückverhalten zu ermitteln, werden Daten an das Dixelmodell übermittelt, um dort

die Identifizierung des thermisch und mechanisch induzierten Verzugs zu ermöglichen. Diese Ausgangsparameter sind:

- Die Temperaturverteilung und
- die Vektoren der thermisch und mechanisch bedingten Verschiebung an den Dexelendpunkten.

Hierbei sind Dexelendpunkte eine allgemeinere Bezeichnung für die Anfangs- und Endpunkte eines jeden Dixel. Sowohl die Temperaturverteilung auf der Werkstückoberfläche, als auch die Verschiebung stehen wiederum für die Ermittlung von Prozessdaten in den Prozessmodellen zur Verfügung. Die prozessinduzierte Deformation der Werkstückgeometrie erlaubt im Dixelmodell zusätzlich die Bestimmung von Gestaltabweichungen während der laufenden Simulation [21, 24].

### **Festlegung von festen Austauschzeitpunkten**

Bei der Kopplung sind nicht nur unterschiedliche Diskretisierungen im Raum zu berücksichtigen, auch jene in der Zeit sind nicht einheitlich. Im Dixelmodell sind die Zeitschritte so klein gewählt, dass wegen des rotierenden Werkzeugs jede Zahnstellung berechenbar ist, die während der Rotation eines Werkzeugs, um die eigene Achse, entsteht. Zum Beispiel sind pro Umdrehung des Werkzeugs mit fünf Schneiden ebenso viele Zahnstellungen notwendig, um eine vollständige Drehung abzubilden. Sehr kleine Zeitschritte sind die Konsequenz. FE-CutS nutzt hingegen deutlich größere Zeitschrittweiten und erhält trotzdem eine hohe Genauigkeit des thermomechanischen Werkstückverhaltens.

Die Berücksichtigung der unterschiedlichen Diskretisierungen in der Zeit erfolgt durch Festlegung von festen Austauschzeitschritten, an denen Informationen zwischen den Modellen ausgetauscht werden sollen. Diese entsprechen genau einem Zeitschritt in FE-CutS. Die Folge ist eine erhebliche Steigerung der Effizienz des gekoppelten Systems, da nicht zu jeder Zahnstellung entsprechende thermomechanische Informationen zur Verfügung stehen müssen.

Abbildung 4.8 zeigt einen Vergleich verschiedener Austauschzeitschritte anhand der Bündelung von Vielfachheiten einer Zahnstellung. Experimente dazu wurden auf einer Maschine vom Typ MC16 (Heller) und einem Werkzeug vom Typ MILL 1-14 mit Wendeschneidplatten vom Typ EDPT140404PDERHD (Kennametal) durchgeführt. Die zur Messung der Werkstücktemperatur genutzten Thermoelemente vom Typ K (NiCr-Ni) wurden so angeordnet, dass die eingebrachte Wärme in unterschiedlichen Höhen über der Vollnut und an gegenüberliegenden Seiten des Werkstücks eine optimale Bestimmung der eingebrachten Wärme gewährleisten (Abbildung 4.8, Mitte).

Die, in Abbildung 4.8 dargestellten, Simulationen zeigen an den ausgewählten Thermoelementpositionen eine starke Streuung. Diese ist durch unterschiedliche Verfeinerungen am Geometrierand zu erklären, denn je kleiner der Zeitschritt zum Austauschen von Informationen ist, desto häufiger findet auch eine adaptive Anpassung der Werkstückabmessungen statt, so dass der sich ändernde Geometrierand besser approximiert wird,

als bei größeren Zeitschritten. Die maximale Verfeinerungslevel am Geometrierand ist in allen Simulationen gleich und auf 5 begrenzt.

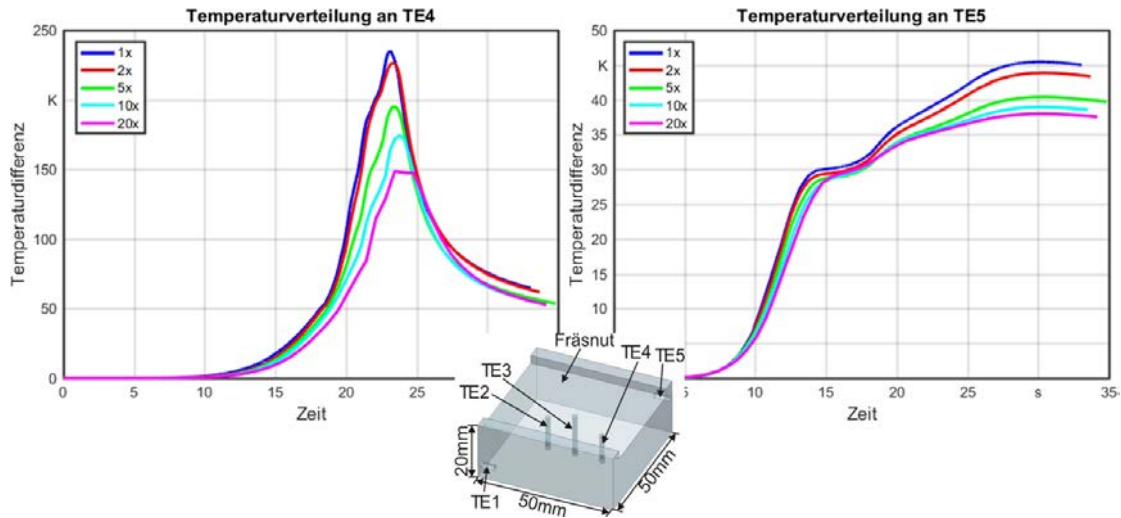


Abbildung 4.8: Vergleich von mehreren Austauschzeitschritten für das Fräsen einer Vollnut an zwei Thermoelementpositionen (TE). Dargestellt sind die Positionen TE4 über der Vollnut (links) und TE5 an der Werkstückwand (rechts).

Für diesen Prozess entspricht eine Zahnstellung einen Zeitschritt von  $t = 0.03351 \text{ s}$ . Ein genauer Blick auf die Ergebnisse zeigt eindeutig, dass für diesen Prozess die Bündelung von Zahnstellungen nicht größer sein sollte als zwei Vielfachheiten ( $t = 0.06702 \text{ s}$ ). Für diesen einfachen Prozess, bei dem das Werkzeug mit einer Eingriffstiefe von  $3 \text{ mm}$  durch das Werkstück fährt, ist dies durchaus akzeptabel (Siehe hierzu später Kapitel 5.3.1). Bei komplexeren Prozessen sind jedoch deutlich größere Zeitschritte zu wählen. Ein Grund hierfür wären merklich längere Simulationszeiten und mehr benötigte Austauschzeitschritte, was wiederum zu deutlich höheren Ressourcenverbrauch führt. Um die Waage zwischen realitätsnaher Abbildung der Prozesse und effiziente Simulation des gekoppelten Systems zu halten sind für jeden abzubildenden Prozess entsprechende Austauschzeitschritte zu wählen.

#### 4.4.2 Implementierungen in FE-CutS

Um Daten über das XML-Format in FE-CutS verwalten und nutzen zu können, ist eine Verwaltung der Datenstruktur zu implementieren. Durch geschicktes Ausnutzen dieser wird eine effiziente Nutzung in FE-CutS möglich. Bevor auf die Datenstruktur im Detail eingegangen wird, ist zunächst einmal das Werkstück im Dixelmodell zu beschreiben und der Begriff des Dixel zu definieren. Anschließend zeigt eine Übersicht, wie effizient die Datenstruktur beim Lesen und Schreiben der Daten vorgeht.

##### Definition des Dixel im Dixelfeld

Bereits in Kapitel 2.2.1 wird erläutert, dass Dixel ein Raster (Dixelfeld) von parallel verlaufenden Linien charakterisieren, die, über deren Endpunkte, immer zwei Oberflä-

chenpunkte auf der Werkstückoberfläche definieren. Abbildung 4.9 zeigt anhand eines Quaders, dessen Zerlegung im Dixelmodell durch ein Dexelfeld in der  $x$ - $y$ -Ebene mit Paaren von Anfangs- und Endpunkten in  $z$ -Richtung, die durch eine imaginäre Linie verbunden sind.

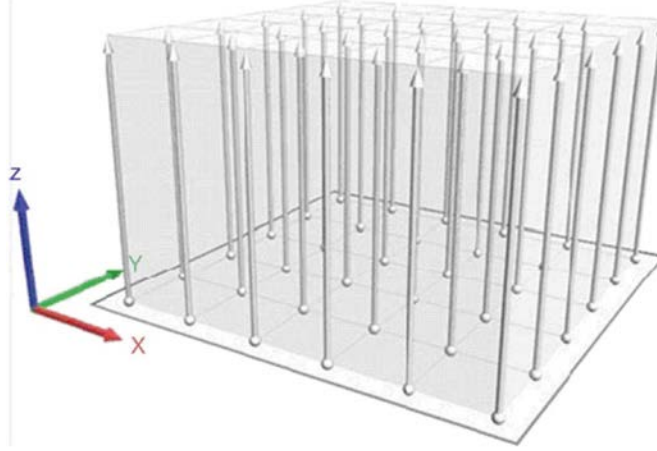


Abbildung 4.9: Dixelmodell eines Quaders. Quelle: [25].

Die Positionen der Endpunkte sind, sofern nicht anders gegeben, über das kartesische Koordinatensystem anzugeben und beginnen im Koordinatenursprung  $(0, 0, 0)^T$ . Ein abzubildendes Werkstück ist im Dixelmodell durch eine einfache quaderförmige Menge

$$G := [0, a] \times [0, b] \times [0, c] \subset \mathbb{R}^3,$$

festgelegt, wobei mit  $a, b, c$  die Seitenlängen des Werkstücks in  $x_1$ -,  $x_2$ - und  $x_3$ -Richtung bezeichnet werden. Das Raster der Dixel ist immer in derjenigen Ebene der Menge  $G$  definiert, in der die Endpunkte des Dixel liegen. Sind zum Beispiel Dixelendpunkte in  $x_1$ -Richtung orientiert, sind die Dixel der  $x_2$ - $x_3$ -Ebene zuzuordnen. Für jede Raumrichtung gibt es eine zweidimensionale Menge

$$G_{x_1} := [0, b] \times [0, c], \quad G_{x_2} := [0, a] \times [0, c] \text{ und } G_{x_3} := [0, a] \times [0, b],$$

die jeweils eine Ebene in  $G$  beschreibt. Ein Raster bzw. Dexelfeld ist eine Menge von endlich vielen Dixel, die  $G_{x_l}$ ,  $l = 1, 2, 3$ , in endlich viele äquidistante Teilmengen zerlegt. Jede Teilmenge der Ebene definiert den Abstand zwischen einem Dixel an Rasterposition  $(i, j)$  und seinen nächsten Nachbar-Dixel. Für die diskrete Ebene folgt

$$G_{x_l, h} := \{(i\Delta x, j\Delta y) | i = 0, \dots, (N-1), j = 0, \dots, (M-1)\} \cap G_{x_l}.$$

Der Abstand wird mit  $\Delta x$  bzw.  $\Delta y$  bezeichnet. In der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene lauten die äquidistanten Abstände zum Beispiel  $\Delta x = a/(N-1)$  bzw.  $\Delta y = b/(M-1)$ , wobei  $N$  bzw.  $M$  jeweils die Anzahl der Dixel in  $x_1$ - bzw.  $x_2$ -Richtung sind. Durch  $G_{x_l, h}$  ist an jeder Rasterposition  $(i, j)$  ein Paar von Dixelendpunkten in  $G$  eindeutig zuzuordnen.

Der Dixel selbst, also das Paar von Anfangs- und Endpunkten, ist wie folgt zu beschreiben. Es sei  $p_{i,j} \in G_{x_l,h}$  die Rasterposition des Dixel und  $k = 1, \dots, n_{i,j}$ , dann ist

$$d_{l,k}(p_{i,j}) := (z_{k,1}, z_{k,2}) \quad (4.12)$$

ein Paar von Dixelendpunkten  $z_{k,i}$ ,  $i = 1, 2$  mit  $z_{k,1} < z_{k,2}$ . Zudem gelte für  $k + 1$ :  $z_{k,2} < z_{k+1,1}$ . Ein Dixel bezeichnet hierbei indirekt die Verbindungsstrecke zwischen zwei Dixelendpunkten und sämtliche Endpunkte sind aufsteigend sortiert. Weiter seien zwei Dixel  $d_{l,m}(p_{i,j}), d_{l,n}(p_{i,j})$ ,  $m \neq n$  und  $m, n = 1, \dots, n_{i,j}$  an der gleichen Rasterposition disjunkt zueinander, so dass gilt  $d_{l,m} \cap d_{l,n} = \emptyset$ . Es folgt, dass sie sich lediglich die gleiche Rasterposition teilen, eine weitere Verbindung besteht nicht.

Jeder Dixel  $d_{l,k}$  besteht also aus einem Paar von Anfangs- und Endpunkten, die jeweils einen Punkt auf der Werkstückoberfläche beschreiben und aufsteigend angeordnet sind. Über die Verbindungsstrecke zwischen zwei Endpunkten ist die Höhe des Werkstücks gegeben. Durch Operationen im Dixelmodell kann die Anzahl von Paaren in Rasterposition  $(i, j)$  variieren. Existiert ein Dixel nicht oder wurde er entfernt, ist die Position im Dixelfeld leer. Wird ein Dixel geteilt ist an der gleichen Stelle ein weiterer Dixel mit jeweils einem Anfangs- und Endpunkt hinzuzufügen. Beim Kürzen des Dixel ist nur der betroffene Dixelendpunkt abzuändern.

### Implementierung der Datenstruktur des Dixelfelds

Die Implementierung der Datenstruktur sollte folgendes beachten: Alle Daten sind administrativ verwaltbar und besitzen eine eigene RAM-Speicherverwaltung. Die zugehörige Allokation benötigten RAM-Speichers erfolgt dynamisch, so dass Änderungen in der Simulation, z.B. durch Hinzufügen von weiteren oder Entfernen von vorhandenen Dixelendpunkten, möglich sind.

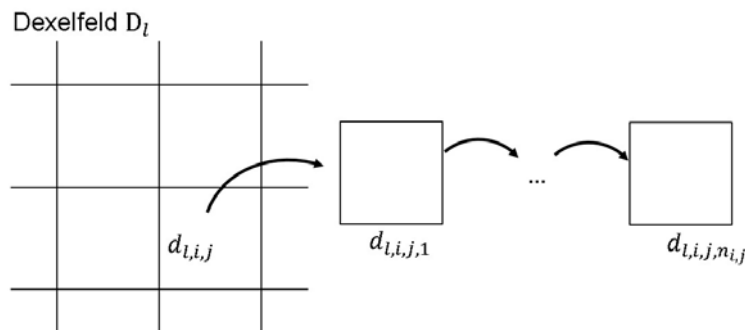


Abbildung 4.10: Darstellung der Datenstruktur eines Dixelfelds  $D_l$  mit mehreren verlinkten Dixel  $d_{l,i,j,k}$ , mit  $i, j \in \mathbb{Z}$  und  $k = 1, \dots, n_{i,j}$ .

Durch das Aufstellen von Matrizen in der Speicherverwaltung wird eine effiziente Verarbeitung der Dixelfelder und insbesondere der Dixelendpunkte ermöglicht. Jedes Dixelfeld  $G_{x_l,h}$  der Ebene  $G_{x_l}$ ,  $l = 1, 2, 3$  ist durch eine mengenwertige Matrix  $D_l = (d_{l,i,j,k})$  zu repräsentieren. Hierbei bringt eine effiziente Speicherverwaltung über verlinkte

Listen große Vorteile. In jeden Eintrag der Matrix (Rasterposition  $(i, j)$ ) verweist ein Pointer auf eine verlinkte Liste von Dexelpaaren  $d_{l,k}(p_{i,j})$  ( $l = 1, 2, 3$ ,  $i = 0, \dots, N - 1$ ,  $j = 0, \dots, M - 1$ ,  $k = 1, \dots, n_{i,j}$ ), die jeweils einen Anfangs- und Endpunkt  $z_{k,i}$ ,  $i = 1, 2$  beinhalten. Da die Anzahl der Dexelendpunkte in  $d_{l,i,j,k}$  auf Rasterposition  $(i, j)$  im  $l$ -ten Dexelfeld in der Simulation variieren kann, ist eine dynamisch verlinkte Liste sinnvoll (Abbildung 4.10). Die Liste erlaubt an jeder Position im Dexelfeld das Hinzufügen und Entfernen von Dexelendpunkten während der Simulation. Ist an einer Position kein Dixel vorhanden, so ist diese Null zu setzen.

### Lesen und Schreiben der Dexelfelder

An jeder Datenstruktur des Dixel  $d_{l,i,j,k}$  sind weitere Informationen wie Raumkoordinaten, Wärmestrom, Prozesskraft - und Normalenvektor zugeordnet (Siehe Kapitel 4.4.1). Nach Einlesen der Daten in die Speicherstruktur, sind diese zur Berechnung des thermischen wie mechanischen Werkstückverhaltens in FE-CutS zu verwenden.

Nachdem Temperaturverteilung und thermische wie mechanische Ausdehnung des Werkstücks im aktuellen Austauschzeitschritt ermittelt wurden, sind diese in das Austauschformat zu schreiben. Dafür ist die bestehende Datei zu modifizieren. Die Eingangsdaten (Wärmestrom, Prozesskraft und Normalenvektor) werden entfernt und durch Temperatur sowie Deformationsvektor ersetzt. Diese sind an den Dixelendpunkten  $d_{l,i,j,k}$  nicht explizit gespeichert, sondern sind direkt beim Schreiben über interne Interpolationsroutinen an den jeweiligen Dixelendpunkten zu bestimmen und in die Austauschdatei einzutragen. Die Tabelle 4.1 zeigt, dass die benötigte Zeit zum Schreiben der Daten mit Temperatur und Deformationsvektor deutlich mehr Zeit in Anspruch nimmt, als das Einlesen der Daten. Dies ist durch das direkte Berechnen der Werte an jeden Dixelendpunkt zu erklären.

Knotenpunkte	Dexelpunkte	Lesen	Schreiben	Zeitschritt
12.880	114.688	0.740s	2.165s	5.9917s
156.571	130.180	0.841s	2.733s	48.1424s
194.254	147.708	0.923s	3.166s	59.7803s
207.964	164.736	1.043s	3.577s	76.2339s
213.308	180.170	1.070s	3.952s	72.3662s
216.920	180.648	1.101s	3.957s	73.2952s
221.719	181.426	1.085s	3.976s	73.1134s

Tabelle 4.1: Benötigte Zeit zum Lesen und Schreiben von Informationen sowie die gesamt benötigte Zeit zum Lösen eines Zeitschritts während der Simulation zu unterschiedlichen Zeitpunkten.

Die in Tabelle 4.1 verwendeten Simulationszeiten und -daten stammen aus der Simulation eines Fräsprozesses. In dem Prozess werden in einem  $195 \times 145 \times 42 \text{ mm}^3$  großen Werkstück 3 Taschen mit unterschiedlichen Wandstärken an den Stegkonstruktionen gefräst (Siehe Kapitel 5.3). Die simulierte Prozesszeit beträgt ca. 1620 Sekunden

( $\approx 27$  Minuten). In jeder simulierten Sekunde wurden 4 Austauschzeitschritte durchgeführt. Insgesamt ergibt sich hiermit eine Zahl von 6480 Zeitschritten. Jede Zeile der Tabelle entspricht dem Istzustand nach jeweils 1.000 Zeitschritten. Die Simulation dieses Prozesses in Realzeit dauert durchschnittlich 6 Tage.

Es zeigt sich, dass mit fortschreitender Zeit die Zahl der Knoten- und Dexelendpunkte zunimmt. Entsprechend wird auch die benötigte Zeit zum Lesen und Schreiben größer. Deren Einfluss auf die benötigte Zeit zum Lösen des Zeitschritts ist jedoch sehr gering ( $\tilde{6}\%$ ). Nur bei der Initialisierung des Problems (Zeile 1) hat das Lesen und Schreiben der Daten großen Einfluss auf die Gesamtdauer des Zeitschritts. Die Tabelle zeigt auch, dass die Datenstruktur beim Lesen und Schreiben sehr effizient arbeitet. Die Zunahme der Zeit zum Einlesen und Schreiben über die Länge des Prozesses im Verhältnis zu den Knoten- und Dexelendpunkten verhält sich nahezu linear zueinander. Trotzdem benötigt der Austausch von Informationen viel Zeit, so dass die Simulation deutlich länger dauert.

#### 4.4.3 Approximation der Werkstückgeometrie

Durch die Kopplung wird eine Abbildung der sich, in der Zeit, stark ändernden Werkstückgeometrie in FE-CutS realisiert. Dieser Abschnitt wird die Beschreibung des zeitabhängigen Werkstückgebiets (Kapitel 4.1.3) sowie die adaptiven Methoden zur Approximation der Werkstückgestalt (Kapitel 4.3.3) bündeln und in den Bezug der Kopplung setzen. Ziel ist eine Verbindung zwischen Dexelendpunkten und FE-Knotenpunkten über die Level-Set-Formulierung (Problem 4.1) und deren Anwendung über modifizierte Algorithmen zur Darstellung und Erhöhung der Abbildungsgenauigkeit des zeitabhängigen Werkstückgebiets.

#### Zuordnung der Dexelendpunkte in $\Omega_h$

Die aktuelle Werkstückgeometrie ergibt sich aus Koordinaten in  $G$ , die die Dexelendpunkte eindeutig der Werkstückoberfläche zuordnen (Vergleiche hierzu Kapitel 4.4.2). Über die Position  $p_{i,j} = (i\Delta x, j\Delta y)$  ist einer oder sind mehrere Dexel  $d_{l,k}(p_{i,j})$  der diskreten Ebene  $G_{x_l,h}$  zugewiesen,  $l = 1, 2, 3, k = 1, \dots, n_{i,j}$ . Die Paare von Dexelendpunkten im Dexel selbst liegen nur in einer  $x_l$ -Richtung und erlauben schließlich die eindeutige Zuordnung der Dexelendpunkte in  $G$ . Die zugehörigen Raumkoordinaten sind je nach Orientierung des Dexelfelds der Tabelle 4.2 zu entnehmen.

Koordinaten in $G$	Dexelfeld		
	$G_{x_1,h}$	$G_{x_2,h}$	$G_{x_3,h}$
$x_1$	$z_{k,n}$	$j\Delta y$	$i\Delta x$
$x_2$	$i\Delta x$	$z_{k,n}$	$j\Delta y$
$x_3$	$j\Delta y$	$i\Delta x$	$z_{k,n}$

Tabelle 4.2: Zuordnung der Raumkoordinaten der Dexelendpunkte in  $G$ .

Über die Zuordnung der Dexel auf die Elemente in FE-CutS, folgt schließlich ei-



ne Abbildung des diskreten Werkstücks  $\bar{\Omega}_h$ . Durch Überprüfung, ob ein Element dem Werkstück angehört oder nicht, und entsprechender Markierung der Elemente, soll eine Darstellung gewährleistet werden. Zusätzliche Algorithmen über adaptive Methoden (Kapitel 4.3.3) erlauben zudem die Anpassung des diskreten Werkstückgebiets an die Abmessungen der aktuellen Werkstückgeometrie, um so die Abbildungsgenauigkeit zu erhöhen. Auf diesem Rechengebiet ist im Anschluss ein Zeitschritt zur Bestimmung des thermischen und mechanischen Werkstückverhaltens zu lösen.

### Stückweise Interpolation der Werkstückoberfläche über alle Dixel

Zur besseren Darstellung sind die folgenden Abbildungen in 2D. Die Ergebnisse sind durch Erweiterung auf drei Raumdimensionen übertragbar. In 2D besteht die Raumtiefe nur durch ein Dexelfeld der Dimension  $N \times 1$ . Durch Hinzunahme weiterer Reihen von Dixel in die Tiefe des Raums folgt schließlich eine Betrachtung in 3D mit einer Dimension von  $N \times M$  Dixel.

Die Projektion der Werkstückoberfläche in FE-CutS erfolgt in mehreren Schritten durch stückweise Interpolation zwischen den Dixelendpunkten. Zunächst ist jedes Dexelfeld für sich zu betrachten (Abbildung 4.11(a)). Die dunkelgraue, gestrichelte Linie zeigt die tatsächliche Werkstückoberfläche. Hier ist ersichtlich, dass die Diskretisierung der Dixel so grob ist, dass eine genaue Abbildung der Werkstückoberfläche durch ein einziges Dexelfeld nicht möglich ist.

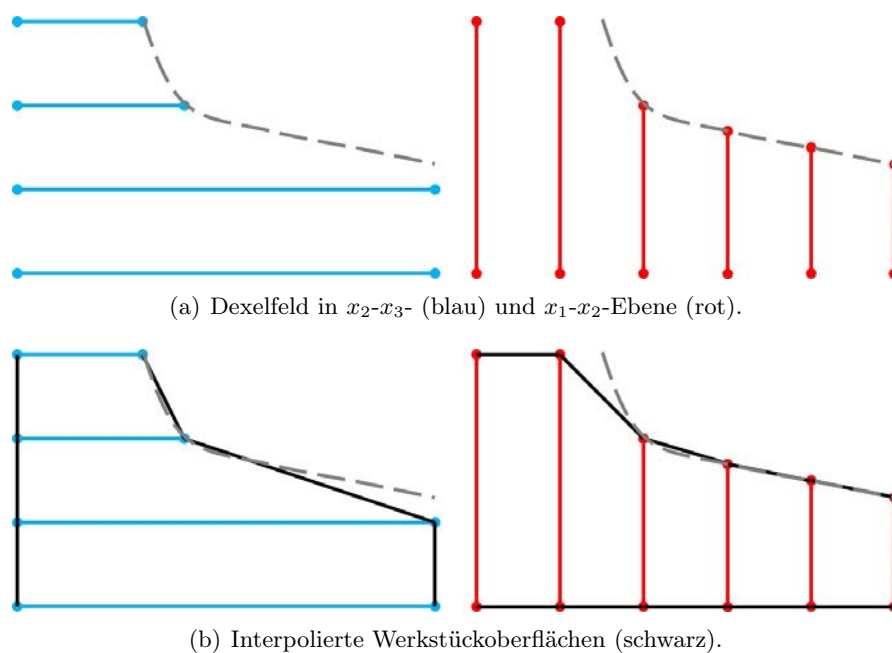


Abbildung 4.11: Stückweise (bi)-lineare Interpolation der Werkstückoberfläche über Dixelendpunkte in FE-CutS.

Abbildung 4.11(b) veranschaulicht die stückweise Interpolation der Werkstückoberfläche separat für jeden Anfangs und Endpunkt im Dexelfeld. Diese bilden in der jeweiligen

Raumrichtung die obere und untere Werkstückoberfläche. Im linken wie rechten Dexelfeld sind größere Ungenauigkeiten zur tatsächlichen Werkstückoberfläche auszumachen. Dies zeigt, dass eine Betrachtung eines einzelnen Dexelfelds die Abbildungsgenauigkeit verschlechtert. Die Berücksichtigung weiterer Dexelfelder scheint sinnvoll.

Sind an einer Rasterposition im Dexelfeld zusätzliche Anfangs- und Endpunkte gegeben, also  $k > 1$  für einige  $p_{i,j}$ , dann sind diese separat zu betrachten und anschließend miteinander in Verbindung zu bringen (Abbildung 4.12).



Abbildung 4.12: Interpolierte Werkstückoberfläche (schwarz) mit mehreren Anfangs- und Endpunkten in einer Raumrichtung.

Nun sind die einzelnen, stückweise interpolierten Oberflächen über alle Dexelfelder zusammenzuführen. Im Fall von Gebieten im  $\mathbb{R}^2$  besteht die Möglichkeit alle Dexelfelder (hier lägen sie in  $\mathbb{R}$ ) übereinander zu legen. Anschließend sind die Dexelendpunkte, über den kleinsten Abstand zwischen zwei Punkten, miteinander zu verbinden. Eine bestmögliche, approximierte Werkstückoberfläche ist das Ergebnis. Abbildung 4.13 veranschaulicht diesen Sachverhalt. Sehr gut ist hier zu sehen, dass beide Dexelfelder übereinandergelegt eine sehr gute Approximation der diskreten, stückweise linearen Werkstückoberfläche über die Dexelendpunkte liefern.

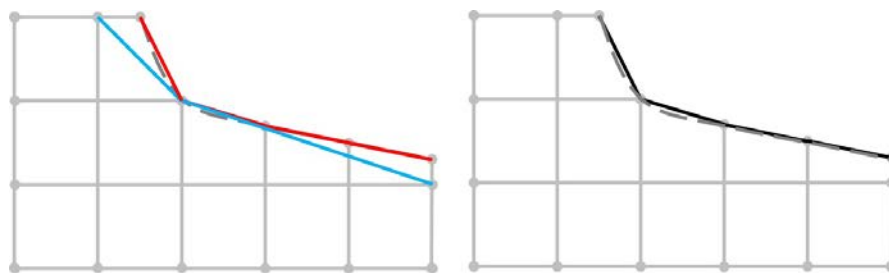


Abbildung 4.13: Überlagerung der Dexelfelder (links) und bestmögliche, approximierte Werkstückoberfläche (rechts) in  $\mathbb{R}^2$ .

Eine Zusammenführung der Dexelfelder im  $\mathbb{R}^3$  gestaltet sich schwieriger. Während im  $\mathbb{R}^2$  benachbarte Punkte mit einem stückweise linearen Polygonzug verbunden werden, ist in drei Raumdimensionen eine Verbindung über stückweise bilineare Interpolation zwischen vier Punkten im Raum möglich. Auch eine Triangulierung der Oberfläche zwischen mindestens drei Punkten wäre eine machbare Überlegung. Allerdings ist hier noch abzuwägen, wie die triangulierte Werkstückoberfläche mit dem Rechengitter in Verbindung zu bringen ist.

### Level-Set-Formulierung der Werkstückoberfläche

Eine Vorgehensweise, wie die diskreten Dexelendpunkte mit dem FE-Gitter bzw. den FE-Knotenpunkten abzugleichen sind, wird in FE-CutS wie folgt umgesetzt. Jedes Dexelfeld ist separat auf das FE-Gitter abzubilden. Anschließend ist für jeden FE-Knotenpunkt der minimale Abstand zu einem Dexelendpunkt zu ermitteln. Liegt die Koordinate  $x_l$  des Punkts über Dexelfeld  $G_{x_l,h}$  zwischen zwei Dexelendpunkten im Dexel  $d_{l,k}(p_{i,j})$ , dann ist der FE-Knotenpunkt dem Werkstückgebiet zuzuordnen, andernfalls gehört dieser nicht dazu. Ist nach Überprüfung aller Dexelfelder mindestens ein FE-Knotenpunkt, eines Elements, dem Werkstückgebiet zugeordnet, so ist das Element  $S_{w,h}(t) = \bar{\Omega}_h(t)$  zuzuweisen.

Am Beispiel des Dexelfelds der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene wird im folgenden die Vorgehensweise im Detail erläutert. Für jedes Element  $S \in \mathcal{S}_h(t) = \bar{\Omega}_h$  und jeden Eckpunkt  $a_n = (x_1, x_2, x_3)^T \in S$ ,  $n = 0, \dots, d$ , ist eine bilineare Interpolation durchzuführen, um zu entscheiden, ob  $a_n \in \bar{\Omega}(t)$  liegt oder nicht. Hierfür wird ein Interpolationsoperator gesucht, der die bilineare Interpolation zwischen Stützstellen im Dexelfeld durchführt und die interpolierte Position der  $x_3$ -Koordinate für  $a_n$  zurück gibt. Es sei

$$L_{x_3,k} : G_{x_3,h} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (4.13)$$

ein solcher Operator mit

$$L_{x_3,k}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} z_{k,1}(x_1, x_2) \\ z_{k,2}(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

der die interpolierte Position der  $x_3$ -Koordinate an jeden Anfangs- und Endpunkt eines jeden Dexel  $d_{3,k}(x_1, x_2)$  zurückgibt,  $k = 1, \dots, n_{i,j}$ . Falls die Anzahl der Dexel an allen vier Stützstellen nicht gleich ist (Vergleiche Abbildung 4.12), dann ist das Minimum der  $n_{i,j}$  zu verwenden. Hierdurch entsteht bewusst ein Fehler in der Abbildung des Dexelfelds. Durch die Berücksichtigung weiterer Dexelfelder wird jedoch der Fehler minimiert, so dass dieser klein bleibt.

Anschließend ist für alle  $k$  zu überprüfen, in welchen Intervall die  $x_3$ -Koordinate liegt. Gilt für ein  $k$ :

$$z_{k,1}(x_1, x_2) \leq x_3 \leq z_{k,2}(x_1, x_2),$$

dann liegt der Eckpunkt  $a_n$  in  $\bar{\Omega}(t)$ , andernfalls nicht. Damit ist eine erste Beschreibung über die Zuordnung von Eckpunkten und Dexelendpunkten gegeben. Die abschnittsweise definierte Abstandsfunktion der Level-Set-Formulierung aus Problem 4.1 berücksichtigt schließlich die Zuordnung zur Abbildung des diskreten Werkstückgebiets. Jeder Eckpunkt  $a_n \in S$ ,  $n = 0, \dots, d$  sei mit obigen Interpolationsoperator  $L_{x_3,k}$  über der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene durch die Abstandsfunktion

$$\Phi_{x_3}(a_n, t) := \begin{cases} \min \{x_3 - L_{x_3,k}(1), L_{x_3,k}(2) - x_3\}, & \text{falls } z_{k,1} \leq x_3 \leq z_{k,2}, \\ -\min \{|x_3 - L_{x_3,k}(1)|, |L_{x_3,k}(2) - x_3|\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.14)$$

eindeutig  $\bar{\Omega}(t)$  oder  $\bar{\Omega}_m(t)$  zugeordnet. Die Vorgehensweise ist analog auch auf der  $x_2$ - $x_3$ - bzw.  $x_1$ - $x_3$ -Ebene anzuwenden. Dort ist die  $x_1$ - bzw.  $x_2$ -Koordinate zu überprüfen.

Sind alle  $a_n \in S$  jeweils über jedem Dexelfeld eindeutig  $\bar{\Omega}(t)$  oder  $\bar{\Omega}_m(t)$  zugeteilt, sind im nächsten Schritt die Elemente  $S \in \mathcal{S}_h(t)$  einzuordnen. Ist  $\Phi_{x_l}(a_n, t) < 0$ ,  $l = 1, 2, 3$  für alle  $a_n \in S$ , dann  $\mathcal{S}_{m,h}(t) = S \cup \mathcal{S}_{m,h}(t)$ . Gilt für mindestens ein  $a_n \in S$ :  $\Phi_{x_l}(a_n, t) \geq 0$ , dann ist  $S$  dem diskreten Werkstück  $\mathcal{S}_{w,h}(t)$  einzureihen.

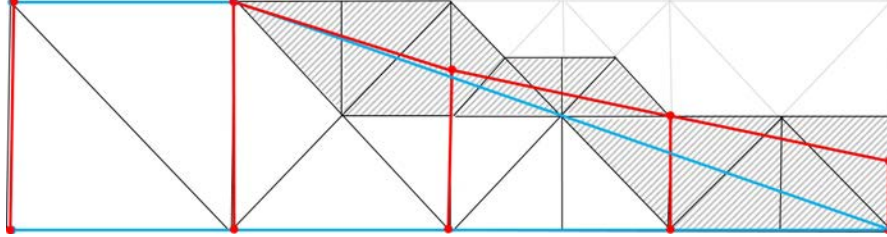


Abbildung 4.14: Angepasstes FE-Gitter mit überlagerten Dexelfeldern und markierten Elementen, die nicht eindeutig zuzuordnen sind.

Abbildung 4.14 zeigt ein Beispiel in 2D über die Zuordnung der Elemente. Die blauen und roten Linien zeigen die überlagerten Dexelfelder in je einer Raumrichtung mit interpolierter Werkstückoberfläche. Die grau umrandeten Elemente sind hier  $\bar{\Omega}_{m,h}(t)$  zugeordnet und die schwarz berandeten Elemente  $\bar{\Omega}_h(t)$ . Die schraffierten Elemente liegen auf der Grenze zwischen den eindeutig zugeordneten Elementen. Um die Zuordnung aller, dem Werkstück zugewiesenen, Eckpunkte beizubehalten, sind die schraffierten Elemente ebenfalls dem diskreten Werkstück hinzuzufügen. Alle schwarz umrandeten und alle schraffierten Elemente bilden letztlich das diskrete Werkstückgebiet  $\bar{\Omega}_h(t) = \mathcal{S}_{w,h}(t)$ .

Aus der oben beschriebenen Vorgehensweise ergibt sich der folgende modifizierte Markierungsalgorithmus 4.1.

**Algorithmus 4.6** (Modifizierte Markierung des Werkstückgebiets).

```

Start with  $\mathcal{S}_{w,h}(t_k) = \emptyset$  and  $\mathcal{S}_{m,h}(t_k) = \emptyset$  at time  $t_k$ 
for all  $S \in \mathcal{S}_h(t_k)$ 
  for all  $a_n \in S$ 
    workpiece = 0
    loop over all dexelfields
      if  $\Phi_{x_l}(a_n, t_k) \geq 0$  for at least one  $l = 1, 2, 3$ : workpiece ++
    end loop
  end for
  if workpiece > 0:  $\mathcal{S}_{w,h}(t_k) = S \cup \mathcal{S}_{w,h}(t_k)$ 
  else:  $\mathcal{S}_{m,h}(t_k) = S \cup \mathcal{S}_{m,h}(t_k)$ 
end for

```

Die oben beschriebene Vorgehensweise als auch der modifizierte Markierungsalgorithmus implizieren, dass der Abstand zwischen dem diskreten Gebietsrand und dem aus der Abtragungssimulation übergebenen Rand  $\Gamma(t)$  eingeschränkt auf ein Simplex, nicht größer

ist, als dessen Durchmesser bzw. zugehöriger Gitterweite. Das bedeutet, jeder Simplex  $S \in S_h$  der vom kontinuierlichen Rand  $\Gamma(t)$  geschnitten wird und dem ein Seitensimplex dem diskreten Rand  $\Gamma_h(t)$  zugeordnet ist, gilt:

$$|\Gamma_h(t) - \Gamma(t)|_S \leq \{\text{diam}(S)\} \quad \forall S, S \cap (\Gamma(t) \cup \Gamma_h(t)).$$

Mit der Level-Set-Formulierung (4.14) besteht nun eine Verbindung zwischen den diskreten Dixelendpunkten des Dixelmodells und den Eckpunkten der Elemente in FE-CutS über, die in Kapitel 4.1.3 formulierte, Problemstellung 4.1. Die Darstellung der sich, im laufenden Zerspanprozess, stark ändernden Werkstückgestalt in der FEM ist somit zu jedem Zeitpunkt der Simulation möglich. Die Implementierung der Zuordnung zum Werkstückgebiets erlaubt Geometrieänderungen, unabhängig der Komplexität des zu untersuchenden Zerspanprozesses.

Neben der hier vorgestellten Kopplung ist unabhängig davon auch eine Geometrieänderung über explizit berechenbare Level-Set-Gleichungen möglich. Jedoch ist je nach Komplexität des darzustellenden Zerspanprozesses, eine konkrete Formulierung der Level-Set-Gleichung sehr aufwendig, so dass ab einem gewissen Grad die explizite Berechnung über direkt berechenbare Gleichungen nicht mehr möglich ist. Zusätzlich bestehen Probleme bei der Rückkopplung mit der Deformation in die explizite Darstellung, die nicht einfach zu lösen sind. Aus diesen Gründen wurde in dieser Arbeit die Kopplung mit einer Materialabtragssimulation favorisiert und damit ein einfacher, effizienter Ansatz implementiert.

#### 4.4.4 Berücksichtigung von Informationen am Rand des Werkstücks

Die Berücksichtigung von Randbedingungen schließt die Kopplung zwischen Materialabtragssimulation und FE-CutS ab. Neben der in diesen Abschnitt zu betrachtenden Berücksichtigung von sich, in der Zeit, ändernden Randbedingungen sind zunächst Bedingungen an der Urform  $\Omega_h$  festzulegen. Die Festlegung ist für jeden zu untersuchenden Prozess neu durchzuführen.

Für die linear-elastische Deformation ist zu bestimmen, an welchen Stellen das Werkstück zu fixieren ist, damit hier die Dirichletbedingung greift. Dies verhindert ein Abdriften des Werkstücks. Im Weiteren sind Flächen zu identifizieren, die sich frei im Raum bewegen dürfen. Eine Neumann-Null-Bedingung ist hierfür zu verwenden. Bei der Wärmeleitung sind gegebenenfalls isolierte Bereiche zu lokalisieren, an denen das Werkstück auf der Werkzeugmaschine gehalten wird, ohne dass sich ein Wärmeübergang zum Spannelement ereignet. Hier sind ebenfalls Neumann-Null-Bedingungen zu verwenden. Auch sind Flächen zu berücksichtigen, an denen ein Wärmeübergang zwischen unterschiedlichen metallischen Werkstoffen erfolgt oder Wärme an das umgebene Gas abzugeben ist. Diese Flächen benötigen eine Robinbedingung bzw. gemischte Neumannbedingung.

### Markierung des Gebietsrands im Inneren von $\Omega_h$

Was bei der Modellierung der Urform jedoch nicht mit einbezogen werden kann, sind ändernde Randbedingungen, die durch den Zerspanprozess in Form von äußerlich wirkenden Wärme- und Kraftquellen zu beschreiben sind. Die Bezeichnung ändernder Rand folgt aus der Tatsache, dass durch die Werkzeug-Werkstück-Interaktion keine dauerhafte Zufuhr von Wärme und Kräften herrscht. Die, nur örtlich und zeitlich, auf einen Teil des Randes auftretenden Wärmeströme und Kräfte werden durch eine Kontaktzonenanalyse mit Hilfe von Prozessmodellen ermittelt und an den entsprechenden Dixelendpunkten zur Verfügung gestellt. Diese Informationen sind separat zu berücksichtigen.

Bevor die Berücksichtigung von Informationen auf dem sich ändernden Rand erfolgt, ist zunächst die Bestimmung von Randflächen im Inneren von  $\bar{\Omega}_h$  näher zu erläutern. Denn durch den Zerspanprozess wird Material aus  $\Omega(t)$  abgetragen, so dass der zwischen  $\Omega(t)$  und  $\Omega_m(t)$  trennende Rand  $\Gamma(t)$  (Siehe Problem 3.1) im Inneren von  $\Omega$  liegt.

Ein Suchalgorithmus über alle, dem Werkstück zugehörigen, Elemente  $S \in \mathcal{S}_{w,h}(t)$  ist solch eine Möglichkeit (Siehe Algorithmus 4.7). In diesem sind Nachbarelemente  $S'$  von  $S$  zu überprüfen ob sie dem Werkstück angehören ( $S' \in \mathcal{S}_{w,h}(t)$ ) oder nicht ( $S' \in \mathcal{S}_{m,h}(t)$ ). Falls ein Nachbarerement nicht dem Werkstück angehört, ist die trennende Fläche/Kante/Ecke zwischen diesen beiden Elementen als Rand zu definieren.

#### Algorithmus 4.7. Markierung des inneren Gebietsrands

```

Start with  $\mathcal{S}_{w,h}(t_k)$  and  $\mathcal{S}_{m,h}(t_k)$  at time  $t_k$ 
while  $S \in \mathcal{S}_{w,h}(t_k)$ 
  if neigh  $S' \in \mathcal{S}_{m,h}(t_k)$ 
    set the  $(d-1)$ -Simplex  $S^*$  between  $S$  and  $S'$  as bound
     $\Rightarrow S^* = S \cap S'$  is bound
  end if
end while

```

Mit obigen Suchalgorithmus ist ein ständig aktueller Gebietsrand auch im Inneren von  $\bar{\Omega}_h$  gegeben, der die Teilgebiete  $\bar{\Omega}_{m,h}(t)$  und  $\bar{\Omega}_h(t)$  voneinander trennt.

Während des Prozesses besteht am inneren, sich ändernden Rand  $\Gamma_h(t)$  keine dauerhafte Wärme- oder Kraftzufuhr, so dass am inneren diskreten Rand bei der Wärmeleitung zwischen Robin- und Neumannbedingung abschnittsweise zu unterscheiden ist. Bei der linear-elastischen Deformation ist die Neumannbedingung zu setzten, wobei hier abschnittsweise zwischen Null und ungleich Null unterschieden wird. Dies ermöglicht sowohl von außen wirkende Kräfte als auch freie thermisch und mechanisch induzierte Ausdehnung. Diese abschnittsweise gegebene Randbedingung lautet wie folgt:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = \begin{cases} \mathbf{F}_N(\mathbf{x}, t), & \text{falls } \mathbf{F}_N(\mathbf{x}, t) \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{auf } \Gamma(t). \quad (4.15)$$

Bei der Wärmeleitung ist folgendes zu unterscheiden. Tritt eine Wärmequelle auf, so ist die Robinbedingung durch eine Neumannbedingung mit entsprechenden Wärmestrom zu ersetzen, andernfalls bleibt die Robinbedingung bestehen und ein Wärmeaustausch mit dem umgebenen Gas ist möglich (Das Werkstück kann abkühlen). Diese abschnittsweise gegebene Randbedingung lautet nun:

$$-\kappa \nabla \theta \cdot \mathbf{n} = \begin{cases} q_N(\mathbf{x}, t), & \text{falls } q_N(\mathbf{x}, t) \neq 0, \\ \delta(\theta - \theta_{ext}), & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{auf } \Gamma(t). \quad (4.16)$$

### Korrektur der Wirkrichtung

Wie bereits im vorherigen Abschnitt zu beobachten war (Siehe Abbildung 4.14), ergibt sich in FE-CutS durch die adaptive Anpassung des diskreten Gebietsrand an die aus der Abtragssimulation übergebene Werkstückoberfläche, ein im Volumen deutlich größeres diskretes Werkstückgebiet und damit auch ein größerer, diskreter Gebietsrand  $\partial\Omega_h(t)$ . Abbildung 4.15 verdeutlicht nochmals das Ergebnis des diskreten, sich ändernden Gebietsrand  $\Gamma_h(t)$  (rot) nach adaptiver Anpassung des Rechengitters. In grün ist der typischerweise kleinere Rand durch die Abtragssimulation gegeben und in grau gestrichelt die exakte Werkstückoberfläche. Wegen der Übersichtlichkeit ist der Sachverhalt in 2D dargestellt und auf die Darstellung der Dixel ist verzichtet worden.

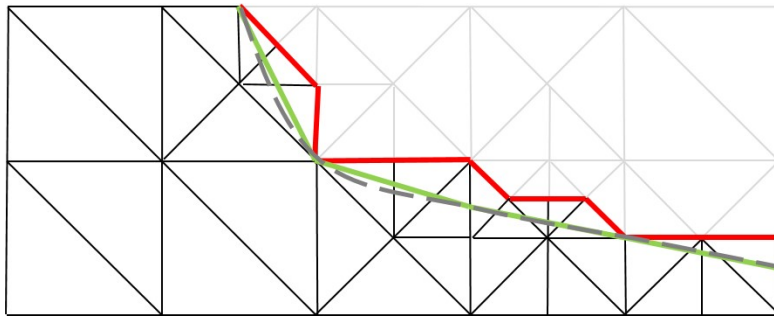


Abbildung 4.15: kleinere, aus Abtragssimulation stammende Werkstückoberfläche (grün) und diskrete (rot) auf angepassten FE-Gitter.

Sowohl die Randflächen der Elemente am adaptiv angepassten, diskreten Gebietsrand als auch der übergebene Geometrierand aus der Abtragssimulation besitzen eine eigene äußere Normalenrichtung, durch die die Wirkrichtung der Wärmeströme als auch der Prozesskräfte in das Bauteil gesteuert werden. Statt wie in Problem 3.6 ein Randintegral der Form

$$\int_{\Gamma_N(t)} q_N(\mathbf{x}, t) \varphi \, ds$$

zu lösen wird nun eine numerische Approximation der Form

$$\int_{\Gamma_{N,h}(t)} \tilde{q}_N(\mathbf{x}, t) \varphi_h \, ds$$

gelöst. Es folgt zudem, dass die Oberfläche des diskreten Werkstückgebiets in FE-CutS

deutlich größer ist, als die übergebene Werkstückoberfläche. hieraus ergeben sich durch die Wirkrichtung am diskreten Gebietsrand in FE-CutS deutlich höhere Kraft- und Wärmeeinträge in die Simulation. Eine Anpassung der Wirkrichtung an die Randdiskretisierung ist nötig.

Ein einfacher Skalierungsfaktor ist durch das Skalarprodukt zwischen den Normalenvektoren des diskreten Gebietsrand und dem übergebenen Rand gegeben, welcher dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels  $\alpha$  entspricht (Siehe Abbildung 4.16).

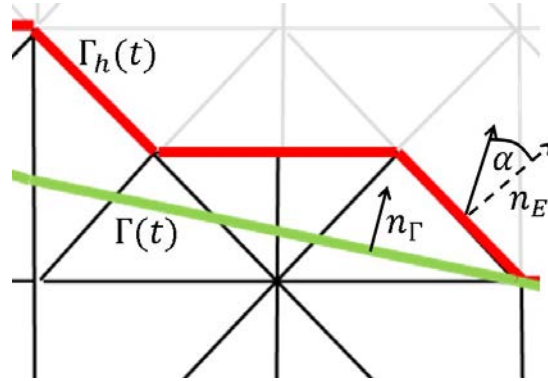


Abbildung 4.16: Skizze zur Korrektur zwischen kontinuierlichem und diskretem Geometrierand durch den Cosinus des eingeschlossenen Winkels der beiden Normalenvektoren.

Der Cosinus des eingeschlossenen Winkels ist lokal an jeden Dixelendpunkt gegeben durch

$$\cos(\mathbf{n}_\Gamma, \mathbf{n}_E) = \frac{\mathbf{n}_\Gamma \cdot \mathbf{n}_E}{\|\mathbf{n}_\Gamma\| \cdot \|\mathbf{n}_E\|}. \quad (4.17)$$

Dabei ist  $\mathbf{n}_E$  die Normale auf dem zum äußeren Rand markierten Seitensimplex des gerade betrachtenden Elements  $S \in \mathcal{S}_{w,h}(t)$  gegeben. Die Normalenrichtung  $\mathbf{n}_\Gamma$  ist an jeden einzelnen Dixelendpunkt vorhanden und gilt auch nur für diesen. Die hier verwendete normalisierte Schreibweise verhindert einen Berechnungsfehler, falls einer der Vektoren nicht die Länge 1 besitzt. Eine Berücksichtigung der Daten auf der diskreten Werkstückoberfläche  $\partial\Omega_h(t)$  erfolgt hier noch nicht. Zuvor sind die vorhandenen Werte für Wärmestrom  $q$  und Prozesskraft  $\mathbf{f}$  an den jeweiligen Dixelendpunkten mit dem Skalierungsfaktor (4.17) zu multiplizieren. Es sei nun

$$\tilde{q} = q \cdot \cos(\mathbf{n}_E, \mathbf{n}_\Gamma) \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f} \cdot \cos(\mathbf{n}_E, \mathbf{n}_\Gamma). \quad (4.18)$$

### Berücksichtigung der Daten am Rand

Durch unterschiedliche Diskretisierungen in FEM und Abtragssimulation sind nur wenige Informationen am Rand für Wärmestrom und Prozesskraft verfügbar. Eine Berücksichtigung der Daten, ähnlich wie in Kapitel 4.4.3, soll nun abschnittsweise auftretende Informationen über Wärmeströme und Prozesskräfte an der diskreten Werkstückoberfläche berechnen. Der Vorgehensweise ist hierbei analog zur Berücksichtigung der Geometrieinformationen.



Zunächst ist über Interpolation der Dexelfelder das passende Höhenprofil zu bestimmen, an dem der Randpunkt zuzuordnen ist. Anschließend sind zugehörige Informationen zu Wärmestrom und Kraftvektor durch Interpolation zu ermitteln. Alle Raumrichtungen sind separat zu betrachten. Am Ende sind die ermittelten Informationen aufzusummieren. Das Dividieren durch die aktuelle Zeitschrittweite erlaubt schließlich die Bestimmung der in das Bauteil fließenden Wärmestrom- bzw. Prozesskraftdichte.

Am Beispiel des Dexelfelds der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene passiert folgendes. Zunächst sind die Intervalle zu ermitteln, in denen die  $x_1$ - und  $x_2$ -Koordinaten über  $G_{x_3,h}$  liegen. Gesucht sind also Paare von Indizes  $(i, i + 1) \in N$  sowie  $(j, j + 1) \in M$  für die gilt:

$$x_1 \in [i\Delta x, (i + 1)\Delta x] \quad \text{und} \quad x_2 \in [j\Delta y, (j + 1)\Delta y].$$

Anschließend ist das Höhenprofil zur Raumkoordinate  $x_3$  zu ermitteln. Dies erfolgt analog zur Berücksichtigung der Geometrie (Siehe Kapitel 4.4.3). Allerdings wird nicht die Abstandsfunktion (4.14) aufgerufen. Stattdessen ist die zugehörige Information zu Wärmestrom  $\tilde{q}_{x_3}$  und Prozesskraft  $\tilde{\mathbf{f}}_{x_3}$  zu entnehmen und anschließend über die Stützstellen zu interpolieren.

Nachdem auch Informationen über Wärmestrom und Prozesskraft in den anderen Dexelfelder bestimmt wurden, ergeben sich durch aufsummieren der Werte über alle Dexelfelder und dividieren durch die aktuelle Zeitschrittweite, die gewünschten Wärmestrom- bzw. Prozesskraftdichten am jeweiligen Randpunkt im FE-Gitter.

$$\tilde{q}_N(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\tau} \sum_{l=1}^3 \tilde{q}_{x_l}(\mathbf{x}, t) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\mathbf{F}}_N(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\tau} \sum_{l=1}^3 \tilde{\mathbf{f}}_{x_l}(\mathbf{x}, t) \quad (4.19)$$

Eine Korrektur über die Zeitschrittweite ist nötig, weil die übergebenen Daten für Wärmestrom und Prozesskraft im Prozessmodell lokal über die Zeit integriert werden. Um rückwirkend die Temperaturverteilung und das zugehörige thermische und mechanische Werkstückverhalten im diskreten Werkstückgebiet ermitteln zu können, ist die Korrektur notwendig.

Aus den beschriebenen, abschnittsweise gegebenen Bedingungen (4.15) und (4.16) sind nun mit (4.19) über die Zeit sich ändernde Randbedingungen gegeben, die einen Zerspanprozess abbilden können. Hieraus folgt schließlich ein geschlossenes System, welches die Approximation von Wärmeflüssen und Prozesskräften in der Kontaktzone ermöglicht.

## 4.5 Numerisches Lösungsschema von FE-CutS

Den Abschluss dieses Kapitels bildet die Beschreibung eines geeigneten numerischen Lösungswegs, um das thermische und mechanische Werkstückverhalten bei der Zerspanung komplexer Geometrien abbilden zu können. Die vorliegende Konfiguration besitzt, neben der Kopplung von Systemen partieller Differentialgleichungen (Problem 3.5), auch die Kopplung der oben beschriebenen Simulationsmodelle FE-CutS und Dexelmodell

mit ebenfalls unterschiedlichen Diskretisierungen, welche bereits in Kapitel 4.4 genauer betrachtet wurden.

Das nun folgende Lösungsschema wird aufzeigen, in welcher Reihenfolge die in diesem Kapitel beschriebenen Algorithmen, Diskretisierungen der Modellgleichungen und der Austausch von Informationen zwischen den Modellen abgearbeitet werden. Das entstandene Modell FE-CutS erlaubt neben der parallel verlaufenden Simulation des Materialabtrags und der Thermomechanik auch den separaten, nacheinander geschalteten Ablauf der Simulation, wobei zunächst ein Datensatz im durch die Materialabtragungssimulation erstellt wird.

Zunächst ist das Zeitintervall  $\mathcal{T}$  in diskrete, äquidistante Zeitschritte zu zerlegen ( $t_0 = 0, \dots, t_m = T$ ), dessen Zeitschrittweite durch den Austauschzeitschritt vorgegeben ist. Eine implizite Zeitschrittweitensteuerung wird nicht favorisiert (siehe Kapitel 4.3.3).

Neben der Initialisierung beschreibt der nun folgende Simulationsablauf einen Lösungsschritt in FE-CutS, der sich bis Ende der Simulation wiederholt.

**Algorithmus 4.8** (Numerisches Lösungsschema).

Initialisierung der Startwerte für  $t_0$  :  $\Omega_{w,h}(t_0), \Theta_0$

Sind alle Werte für  $t_{k-1}$  bekannt, Berechnung der Werte für  $t_k$ :

*Schritt 1:* Import der Daten: Geometrie, Wärmestrom, Prozesskraft und Normalenvektor an den Dixelendpunkten (Kapitel 4.4.1);

*Schritt 2:* Aktualisierung des diskreten Werkstückgebiets  $\bar{\Omega}_h(t_k)$  über die Geometrieinformationen (Kapitel 4.4.3);

$$\bar{\Omega}_h(t_k) = \mathcal{S}_{w,h}(t_k) \quad \text{und} \quad \bar{\Omega}_{m,h}(t_k) = \mathcal{S}_{m,h}(t_k)$$

*Schritt 3:* Adaption des Rechengitters an die aktualisierte Werkstückgeometrie (Algorithmus 4.6);

*Schritt 4:* Berücksichtigung der Wärmestromdichte auf der diskreten Werkstückoberfläche (Kapitel 4.4.4) und Berechnung von  $\Theta_k$  auf  $\bar{\Omega}_h(t_k)$  durch Lösen der Wärmeleitung (Kapitel 4.2.2);

*Schritt 5:* Berechnung der Fehlerschätzer für die Wärmeleitung und ggf. Anpassung des Rechengitters an die Werkstückgeometrie (Algorithmus 4.5);

*Schritt 6:* Berücksichtigung der Prozesskraftdichte auf der diskreten Werkstückoberfläche (Kapitel 4.4.4) und Berechnung von  $\mathbf{V}_k$  auf  $\bar{\Omega}_h(t_k)$  durch Lösen der linearen Elastizität unter Ausnutzung der aktualisierten Temperatur  $\Theta_k$  (Kapitel 4.2.3);

*Schritt 7:* Optional: Berechnung der Fehlerschätzer für die lineare Elastizität und ggf. Anpassung des Rechengitters an die Werkstückgeometrie (Kapitel 4.3.3);

*Schritt 8:* Export der aktualisierten Temperatur- und Deformationsdaten an die Materialabtragssimulation (Kapitel 4.4.1);

*Schritt 9:* Sofern  $t_k < T$ : Setze  $k = k + 1$  und wiederhole *Schritte 1-8*, andernfalls Ende der Simulation.

Details zum Simulationsablauf sind den vorangegangenen Abschnitten dieses Kapitels zu entnehmen. Mit obigen Ablaufschema schließt sich der Kreis der Diskretisierung von FE-CutS. Im folgenden Kapitel wird auf die Validierung des vorliegenden Modells eingegangen. Neben verschiedenen Simulationsergebnissen zur Approximation der Werkstückgeometrie sind die Berechnungen des thermischen und mechanischen Werkstückverhaltens durch Simulation realer Prozesse sehr interessant.



## Kapitel 5

# Numerische Simulation

In diesem Kapitel werden Anwendungsfelder sowie Analysen der Gebietsapproximation durch FE-CutS betrachtet. Neben Bemerkungen zur Visualisierung der Simulationsdaten wird über die Güte der Gebietsapproximation diskutiert. Das Anwendungsfeld ist geprägt vom Bohren und Fräsen, die in steigender Komplexität die Variabilität von FE-CutS beweisen. Ein Ausblick, inwiefern das Modell in die Optimierung und Kompensation des thermisch und mechanisch induzierten Verzugs eingebunden wird, rundet dieses Kapitel ab.

Zu Beginn sind Anmerkungen zur Visualisierung und Filterung der Simulationsdaten anzuführen. Hierbei ist die Visualisierungssoftware ParaView vorzustellen. Durch Filterung der Simulationsdaten ist die Darstellung des sich in der Zeit stark ändernden Werkstücks sowie des thermischen und mechanischen Werkstückverhaltens möglich. Eine Analyse der Gebietsanpassung ist im zweiten Abschnitt zu behandeln. Anhand von Testbeispielen wird die Genauigkeit der Randapproximation am sich bewegenden Geometrierand untersucht. Die Simulation unterschiedlicher Fräs- und Bohrprozesse mit steigender Komplexität sind im zentralen Abschnitt zu finden. Hierbei ist neben der Validierung von FE-CutS mittels experimenteller Daten, auch die Identifizierung der mechanisch induzierten Verschiebung zu betrachten. Im Abschluss dieses Kapitels zeigt FE-CutS, welche Möglichkeiten mit dem gekoppelten Simulationssystem in der Minimierung bzw. Kompensation des thermisch und mechanisch induzierten Verzugs machbar sind. Diverse Ergebnisse sowie die Beschreibung unterschiedlicher Optimierungsstrategien schließt dieses Kapitel ab.

### 5.1 Anmerkungen zur Visualisierung

Die Präsentation der Simulationsergebnisse erfolgt mit der Visualisierungssoftware ParaView. ParaView wurde 2000 von Kiteware entwickelt und wird stetig erweitert. Die Software ist ein plattformübergreifendes wissenschaftliches Datenanalyse- und Visualisierungswerkzeug, das die Analyse und Visualisierung großer Datenmengen ermöglicht [6]. Es ist als Open-Source-Projekt angelegt, so dass jeder Anwender eigene Ideen in die Software einbringen kann. Durch die Community sind stetige Aktualisierungen so-

wie Erweiterungen in vielen Bereichen möglich, z.B. um neue Visualisierungsfiler zu entwickeln. Abbildung 5.1 zeigt die Benutzeroberfläche von ParaView für Anwender.

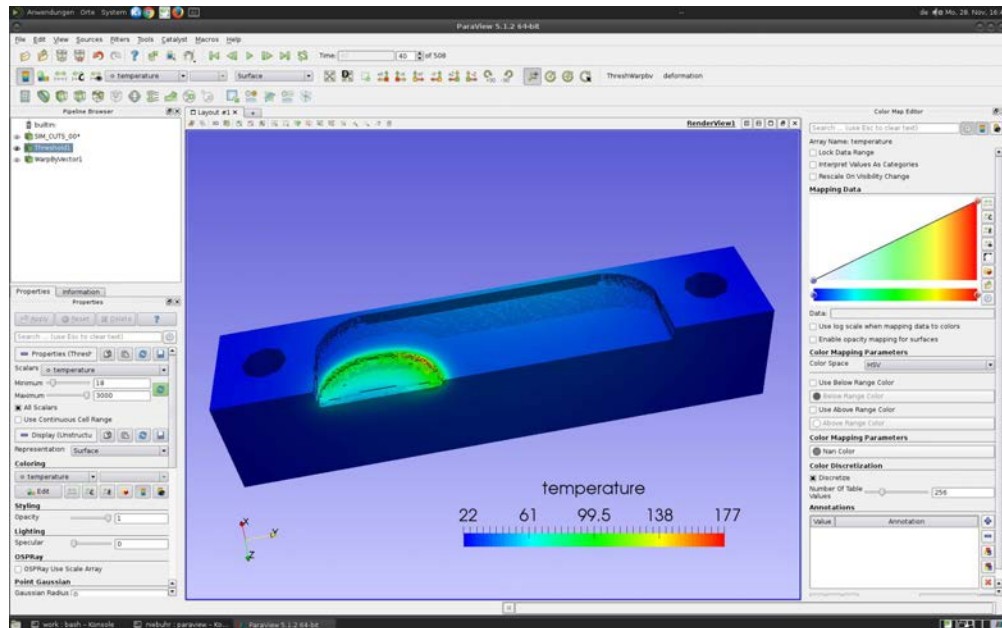


Abbildung 5.1: Benutzeroberfläche von Paraview.

Die Visualisierung an sich beschreibt den Prozess von der Überführung roher Daten (z.B. in Form von Vektoren oder Matrizen) in Bilder zum besseren Verständnis der vorliegenden Datenmengen. ParaView nutzt hierbei VTK, das *Visualization Toolkit*, um Visualisierung und Datenverarbeitung zu ermöglichen [5, 6]. VTK ist ein plattformunabhängiges Datenformat und unterscheidet zwischen zwei unterschiedlichen Dateiformaten. Das einfachste Format sind die veralteten seriellen Formate, die einfach händisch oder computergestützt zu lesen und schreiben sind. Diese sind jedoch weniger flexibel als heutige XML-basierte Datenformate. Die XML-Formate unterstützen zusätzlich den zufälligen Zugriff auf Daten, die Parallelisierung sowie Kompression von Daten [6].

Um Daten aus der FEM-Toolbox ALBERTA in ParaView zu visualisieren wird das VTU-Format für *unstructured grids* verwendet. Ein *unstructured grid* ist eine topologisch irreguläre Menge von Elementen und Punkten, die ein Gebiet beschreiben. Es zeichnet sich dadurch aus, dass jedes Element über seine Eckpunkte eindeutig darstellbar ist. Die Zuordnung der Daten (Skalare, Vektoren, Tensoren und weitere) erfolgt ebenfalls über die Eckpunkte, kann aber auch Elementweise erfolgen [5].

### **Threshold-Filter**

Die Lösung eines abzubildenden Zerspanprozesses erfolgt über ein festes Rechengebiet, welches in zwei zeitabhängige Teilgebiete zerlegt wird (Siehe hierzu z.B. Kapitel 3.1 und 4.1). Die Visualisierung des zeitabhängigen Werkstückgebiets  $\bar{\Omega}_h(t)$  erfolgt mit Hilfe des *Threshold*-Filters. Dieser extrahiert Datenmengen, die in einem bestimmten skalaren Wertebereich liegen. Eine Filterung wird durch Ausnutzung von element- und/oder

punktorientierten Informationen möglich. Während bei elementorientierten Daten nur die Elemente ausgewählt werden, die im gefilterten Bereich liegen, sind bei punktorientierten Daten nur diejenigen Elemente zu wählen, deren zugehörigen Punkte alle das zu filternde Kriterium erfüllen.



(a) Rechengebiet  $\bar{\Omega}_h$  mit beiden Teilgebieten  $\bar{\Omega}_h(t)$  (weiß) und  $\bar{\Omega}_{m,h}(t)$  (schwarz).



(b) Extrahiertes Werkstückgebiet  $\bar{\Omega}_h(t)$  mittels *Threshold*-Filter.

Abbildung 5.2: Extraktion des Werkstückgebiets durch den *Threshold*-Filter.

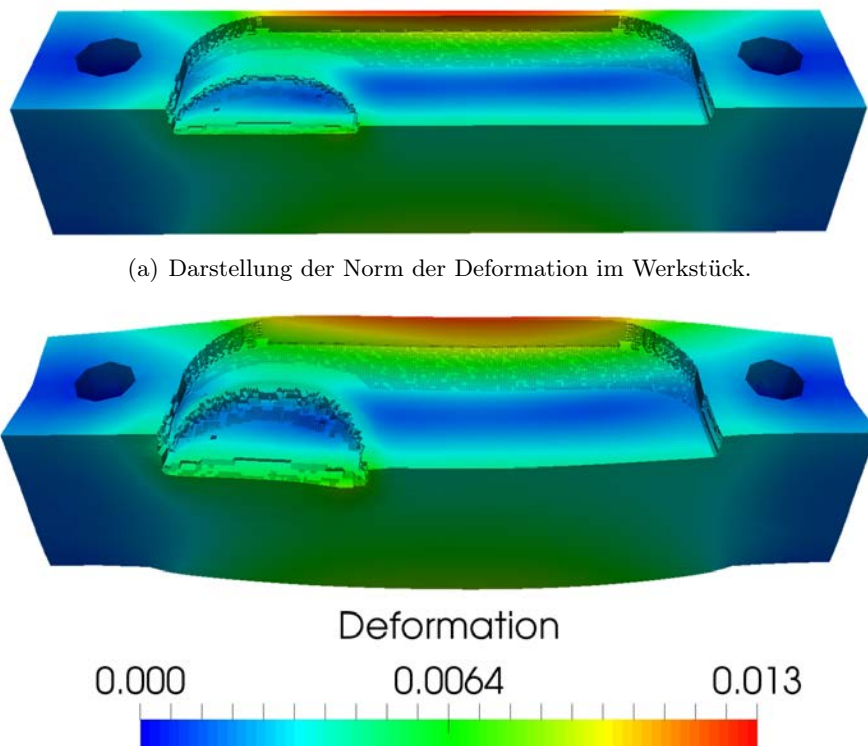
Ein Beispiel zeigt Abbildung 5.2. Das zeitabhängige Werkstückgebiet  $\bar{\Omega}_h(t)$ ,  $t \geq 0$  ist hier durch den *Threshold*-Filter dargestellt. Abbildung 5.2(a) repräsentiert das komplette Rechengebiet  $\bar{\Omega}_h$ , welches über punktorientierte Informationen eingefärbt wurde. Weiß definiert hier das Werkstück und schwarz das entfernte Material. Die Unterscheidung der zeitabhängigen Teilgebiete erfolgt durch skalare Werte, die an jedem Eckpunkt hinterlegt sind. Die Filterung erlaubt schließlich die separate Darstellung des Werkstückgebiets (Abbildung 5.2(b)). Die dargestellten Geometriedaten stammen aus einem moderat-komplexen Fräsprozess (Siehe hierzu Kapitel 5.3.2).

### ***Warp-by-Vector-Filter***

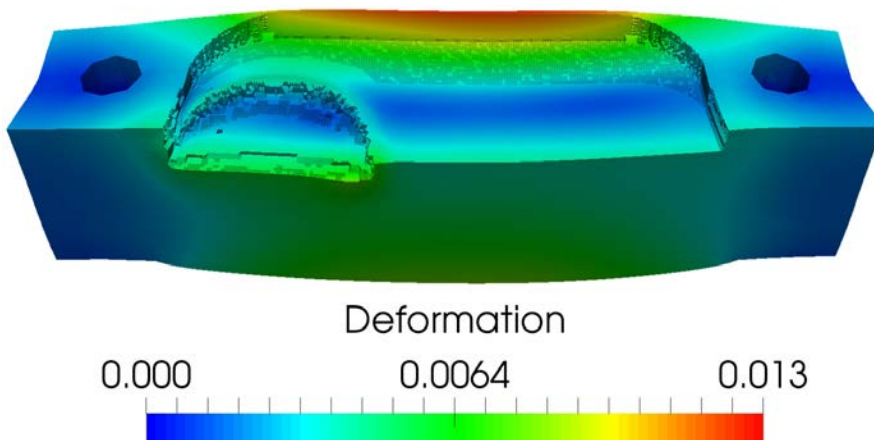
Ein weiterer Filter ist zur Visualisierung der thermischen und mechanischen Verschiebung nötig. Hierbei handelt es sich um den *Warp-by-Vector*-Filter. Dieser erlaubt die Verschiebung von Punktkoordinaten eines initialisierten FE-Gitters durch Vektoren. Zusätzlich ist die Verwendung eines Skalierungsfaktors möglich, um Effekte der thermischen und mechanischen Ausdehnung des Werkstücks zu verstärken bzw. diese sichtbar zu machen.

Abbildung 5.3 zeigt die Anwendung des Filters für die thermisch und mechanisch induzierte Verschiebung des zu bearbeitenden Werkstücks. In Abbildung 5.3(a) ist die Visualisierung des Verschiebungsvektors durch dessen Norm in Form von RGB-Farben dargestellt. Rotfärbung bedeutet hier eine starke Ausdehnung des Materials und blau, eine geringe oder sogar gar keine Ausdehnung des Werkstoffs. Die Visualisierung erfolgt

durch den *Warp-by-Vector*-Filter (Abbildung 5.3(b)). Da die thermische und mechanische Ausdehnung im  $\mu\text{m}$ -Bereich liegt, wurde die Verformung des Werkstücks durch den Faktor 1.000 verstärkt, um diese optisch sichtbar zu machen und zu verdeutlichen. Die dargestellten Simulationsdaten stammen aus einem moderat-komplexen Fräsprozess (Siehe hierzu Kapitel 5.3.2).



(a) Darstellung der Norm der Deformation im Werkstück.



(b) Darstellung der Norm mit *Warp-by-Vector*-Filter und Skalierungsfaktor 1000.

Abbildung 5.3: Visualisierung der Werkstückverformung durch *Warp-by-Vector*-Filter.

## 5.2 Analyse der adaptiven Gitteranpassung an den bewegenden Gebietsrand

In diesem ersten großen Abschnitt des Kapitels erfolgt eine genaue Analyse der adaptiven Anpassung des Rechengitters an den bewegenden Gebietsrand im Inneren des Rechengebiets durch die, in Kapitel 4.3.3 vorgestellte, adaptive Strategie. Anhand einfacher Beispiele ist die Güte der Approximation zu überprüfen. Um Aussagen über die Gebietsapproximation zu erhalten, wird unter anderem die Entwicklung der  $L_2(\Omega(t))$ -Norm des numerischen Fehlers betrachtet.

Zunächst ist auf die Konstruktion von Testbeispielen einzugehen, welche, in der Komplexität unterschiedliche, bewegende Gebietsränder in der Zeit über ein Referenzgebiet beobachten. Im folgenden numerischen Teil zeigen Simulationsergebnisse die Veränderung des Fehlers in der  $W_2^1(\Omega(t))$ -Halbnorm und  $L_2(\Omega(t))$ -Norm durch globale und adaptive Anpassungen des FE-Gitters an den bewegenden Gebietsrand. Die zusätzliche Betrachtung



tung des Diskretisierungsfehlers in der Zeit sowie die Überprüfung von dominierenden Fehlern im Inneren des Werkstückgebiets runden die Analyse ab.

Einige Fälle wurden bereits im Rahmen einer Diplomarbeit betrachtet [66]. Diese werden hier mit mehr Details aufgearbeitet und durch ein weiteres Testbeispiel in zwei und drei Raumdimensionen ergänzt sowie um die adaptive Anpassung des Rechengebiets erweitert.

### 5.2.1 Konstruktion von Testbeispielen

Um die adaptive Anpassung des Rechengitters numerisch genauer zu untersuchen, ist es wenig sinnvoll einen vollständigen bzw. komplexen Zerspanprozess zu betrachten. Geeignete Untersuchungen zur Güte der adaptiven Anpassung sind über ein Referenzgebiet mit vereinfachten Annahmen möglich. Die Idee dieses Referenzgebiets ist der Abbildung 5.4 zu entnehmen. Hierbei steht die Überlegung im Fokus, nur einen repräsentativen Ausschnitt der vorliegenden Prozesse von Bohren und Fräsen abzubilden, damit der zu betrachtende Prozess nicht zu komplex wird.

#### Beispiel 1: Planare Hyperfläche als bewegenden Gebietsrand

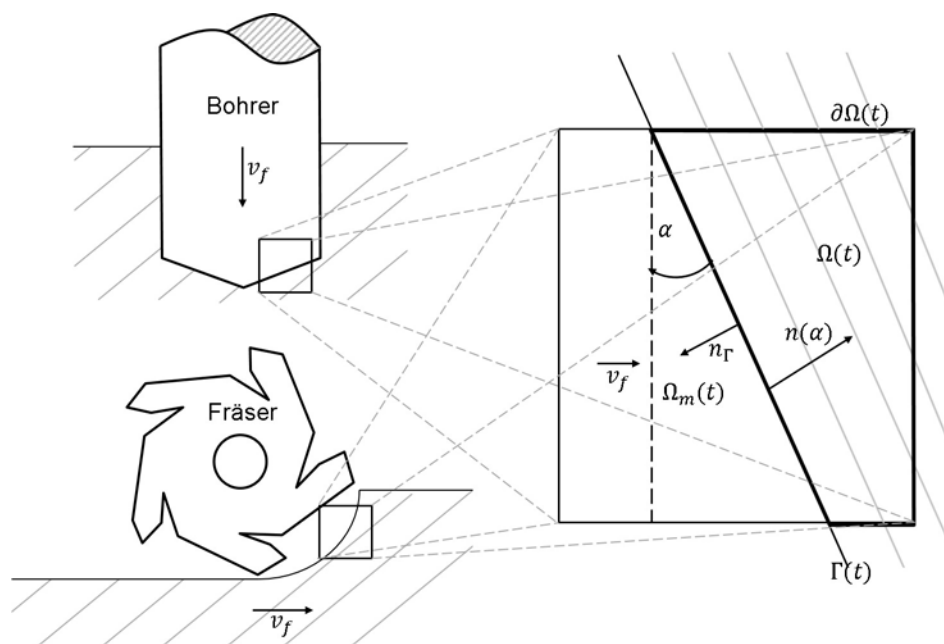


Abbildung 5.4: Skizze des zu betrachteten Ausschnitts für den idealisierten Bohr- und Fräsprozess mit planarem, angewinkeltem Gebietsrand.

Solch ein vereinfachter Prozess betrachtet nur einen Ausschnitt in der Kontaktzone zwischen Werkzeug und Werkstück. Für das erste Beispiel ist auf der rechten Seite in Abbildung 5.4 ein festes Referenzgebiet  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$  mit einem zeitabhängigen, bewegenden Gebietsrand  $\Gamma(t)$  skizziert, der durch eine planare Hyperfläche gegeben ist und ein zeitabhängiges Gebiet  $\Omega(t)$  verändert. Die hier verwendete Hyperebene lässt sich mit

Hilfe eines Anstellwinkels  $\alpha \in [0^\circ, 90^\circ)$  kippen, so dass im Referenzgebiet unterschiedliche Winkel zwischen Vorschubrichtung und Materialabtrag am bewegenden Gebietsrand untersucht werden können. Ein Anstellwinkel von 90 Grad ist hierbei uninteressant, denn nach Konstruktion (siehe Abbildung 5.4) würden sich die zeitabhängigen Teilgebiete über die Zeit nicht ändern, weil sich der bewegende Gebietsrand parallel zur Vorschubrichtung des Werkzeugs bewegen würde, daher ist der  $90^\circ$ -Winkel von den Untersuchungen auszuschließen.

Die Wärmeleitungsgleichung (Siehe Problem 3.2, Kapitel 3.2) ist hier als ein zeitabhängiges Anfangsrandwertproblem über  $\Omega(t)$  zu betrachten. auf dem Rand  $\partial\Omega(t)$  ist die Neumannbedingung zu wählen. Schließlich beschreibt das vorliegende Modellproblem einen Ausschnitt aus den, in Abbildung 5.4 skizzierten, Zerspanprozessen.

Für dieses Testbeispiel sind die Werkstoffparameter  $\rho = c_e = \kappa = 1$  sind konstant. Die zu betrachtende Lösung der Wärmeleitungsgleichung (Problem 3.2) ist

$$\theta_{ex}(\mathbf{x}, t) = Ae^{-\phi(\mathbf{x}, t)v_f}. \quad (5.1)$$

Hierbei ist  $A$  eine Konstante und  $v_f$  bezeichnet die Vorschubgeschwindigkeit.  $A$  ist im folgenden gleich Eins zu setzen.  $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  beschreibt den zeitabhängigen Gebietsrand durch eine planare Hyperfläche. Die Level-Set-Gleichung ist gegeben durch

$$\phi(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{n}_\alpha, \mathbf{x}) - t \cdot v_f. \quad (5.2)$$

Über das Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$  wird der Anstellwinkel  $\alpha$  berücksichtigt.  $\phi(\mathbf{x}, t)$  zerlegt das zu betrachtende Referenzgebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  in Teilgebiete, für die gilt:

$$\begin{aligned} \Omega(t) \cap \Omega_0 &= \{\mathbf{x} : \phi(\mathbf{x}, t) > 0\}, \\ \Gamma(t) &= \Omega_0 \setminus \partial\Omega(t) = \{\mathbf{x} : \phi(\mathbf{x}, t) = 0\}, \\ \Omega_m(t) &= \Omega_0 \setminus \Omega(t) = \{\mathbf{x} : \phi(\mathbf{x}, t) < 0\}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Die Lösung (5.1) ist so gewählt, dass bei einsetzen dieser in die Wärmeleitungsgleichung auf der rechten Seite eine Null heraus kommt. Auf dem Rand  $\partial\Omega(t)$  ist eine Neumannbedingung zu betrachten. Eine Robinbedingung auf dem Rand wird nicht berücksichtigt. Für die Neumannbedingung ist der Gradient der exakten Lösung einzusetzen. Auf dem bewegenden Rand  $\Gamma(t)$ , der durch die Level-Set-Gleichung (5.2) beschrieben wird, gilt

$$-\nabla\theta \cdot \mathbf{n} = q \quad \text{auf } \Gamma(t), \quad (5.4)$$

wobei  $q$  nach obiger Wahl der Lösung konstant Eins ist. Dies ergibt sich aus Berechnung der Neumannbedingung für  $\phi = 0$  auf  $\Gamma(t)$ . Für die später folgende numerische Betrachtung wird das schwache Wärmeleitproblem (Problem 3.6) gelöst.

### Beispiel 2: Gekrümmte Hyperfläche als bewegenden Gebietsrand

Im zweiten Beispiel wird die planare Hyperfläche durch eine gekrümmte ersetzt (Abbildung 5.5). Während im ersten Beispiel die Hyperebene zu einen bestimmten Anstellwinkel beobachtet wird, werden hier alle möglichen Winkel zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  berücksichtigt.

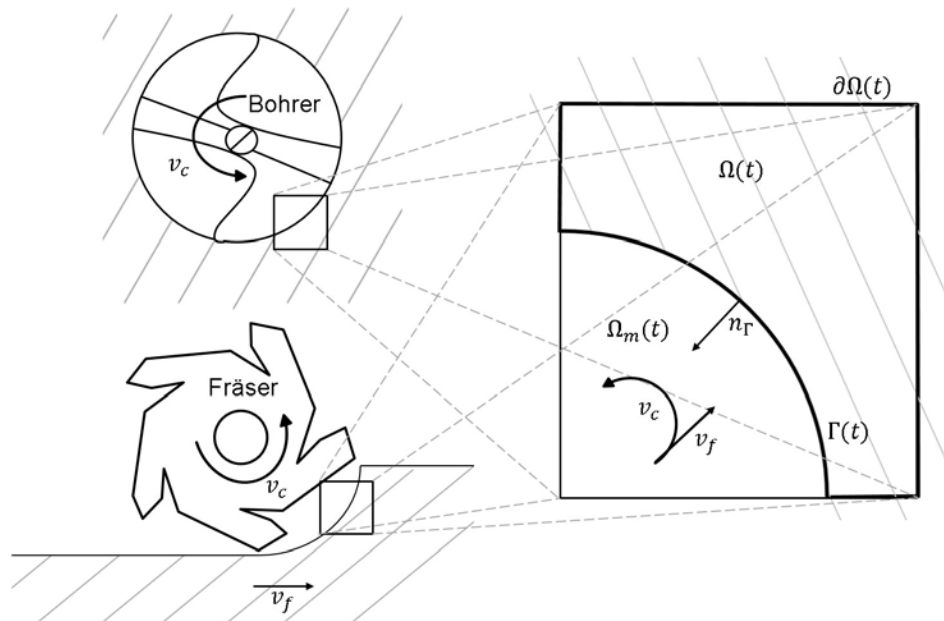


Abbildung 5.5: Skizze des zu betrachteten Ausschnitts für den idealisierten Bohr- und Fräsprozess mit gekrümmten Gebietsrand.

Wie im vorherigen Beispiel wird ein, durch die Wärmeleitung, zu lösendes Anfangsrandwertproblem betrachtet. Die exakte Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist wieder durch (5.1) gegeben. Auch hier ist die Konstante  $A = 1$  zu setzen und  $v_f$  beschreibt wieder die Vorschubgeschwindigkeit. Die Level-Set-Funktion  $\phi(\mathbf{x}, t)$  definiert hier eine gekrümmte Hyperfläche im Raum und charakterisiert den bewegenden Gebietsrand  $\Gamma(t)$ .

$$\phi(\mathbf{x}, t) = r(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0 - t \cdot v_f, \quad (5.5)$$

mit  $r(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  der Radius, der aus dem Skalarprodukt zwischen Ort  $\mathbf{x}$  auf dem Rand und Rotationsachse des Werkzeugs  $\mathbf{x}_0$  resultiert. Für die Level-Set-Funktion gelten die gleichen Bedingungen wie in (5.3). Durch einsetzen der exakten Lösung in die Wärmeleitung ergibt sich auch hier wieder eine Null auf der rechten Seite. Auf dem Gebietsrand  $\partial\Omega(t)$  wird wieder eine Neumannbedingung betrachtet. Eine Robinbedingung wird nicht berücksichtigt. Aus der Berechnung ergibt sich, dass die Neumannbedingung auf  $\Gamma(t)$  wieder konstant ist, so dass gilt:  $q = 1$  (Siehe (5.4)).

Die Skizze in Abbildung 5.5 verdeutlicht die Vorgehensweise mit der gekrümmten Hyperfläche. Beim Bohren wäre der Prozess zwischen dem Eintreten der kegelförmigen Bohrer Spitze in axialer Vorschubrichtung und dem Erreichen des Werkzeugdurchmessers zu beschreiben, so dass im  $\mathbb{R}^2$  die Richtung des Vorschubs wie in Abbildung 5.5 (rechts)

charakterisiert ist. Beim Fräsen wird durch das Zusammenspiel zwischen der Schnittgeschwindigkeit  $v_c$  und der Vorschubgeschwindigkeit  $v_f$  ein rotationssymmetrisches Gebiet abgetragen, welches in Vorschubrichtung bewegt wird. Die Normale  $\mathbf{n}_\Gamma$  am gekrümmten Gebietsrand ist durch die Verbindungsstrecke zwischen der Rotationsachse des rotationssymmetrischen Körpers und dem betrachteten Punkt am Rand beschrieben.

### 5.2.2 Adaptive Gitteranpassung an die planare Hyperfläche

Das obige Testbeispiel 1 mit planarer Hyperfläche (5.2) als bewegenden Gebietsrand  $\Gamma(t)$  wird im folgenden auf einem zweidimensionalen Rechteckgebiet  $\Omega = (0, 1)^2$  betrachtet und numerisch über die schwache Wärmeleitungsgleichung (Problem 3.6) gelöst. Die Untersuchung des Fehlers in der  $L_2(\Omega(t))$ -Norm und der  $W_2^1(\Omega(t))$ -Halbnorm erfolgt durch die Lösung des Wärmeleitproblems bei zunehmender globaler und adaptiv angepasster Gitterverfeinerung über das, in der Zeit, kleiner werdende Teilgebiet  $\bar{\Omega}_h(t)$ . Aus den Normen soll die Güte der Gebietsanpassung über gleichmäßig verfeinerte und adaptiv angepasste Rechengitter bestimmt werden.

Das Entfernen des zeitabhängigen Werkstückgebiets mit planarer Hyperfläche und konstanten Anstellwinkel über dem Referenzgebiet  $\Omega_0$  ermöglicht eine genauere Untersuchung der adaptiven Strategie (Algorithmus 4.4, Kapitel 4.3.3) zu unterschiedlichen Winkeln, die zwischen 0 und 90 Grad liegen. Über die Drehung des Referenzgebiets sind letztlich auch Aussagen zu Winkeln möglich, die zwischen 90 und 360 Grad liegen. Eine Untersuchung aller Winkel würde den Rahmen dieser Arbeit übersteigen, so dass Winkel mit 0 und 30 Grad genauer untersucht werden.

Die folgenden Untersuchungen sind für unterschiedlich gleichmäßig verfeinerte FE-Gitter bereits zum Teil im Rahmen einer Diplomarbeit [66] betrachtet worden, die sich mit dem Diskretisierungsfehler auf gleichmäßig in Ort und Zeit verfeinerten Referenzgebieten (Abbildung 5.6, links) beschäftigte. Diese werden nun genauer interpretiert und mit der adaptiven Anpassung des FE-Gitters verglichen.

#### Planare Hyperfläche mit Anstellwinkel $0^\circ$

Das Entfernen des Referenzgebiets über die planare Hyperfläche mit Winkel  $0^\circ$  ist ein sehr interessanter, zu untersuchender Fall. Durch diesen Winkel wird das Referenzgebiet  $\Omega_0$  parallel zur  $y$ -Achse kleiner ( $\Omega_0$  ist hierbei im Koordinatenursprung und im ersten positiven Quadranten ausgerichtet), so dass im diskreten Referenzgebiet  $\bar{\Omega}_{0,h}$  immer stoßweise eine große Zahl von Elementen gleichzeitig von  $\bar{\Omega}_h(t)$  nach  $\bar{\Omega}_{m,h}(t)$  überführt wird. Dieser ruckartige Wechsel wird sich in den folgenden Ergebnissen niederschlagen.

Das Referenzgebiet wird über eine simulierte Zeiteinheit ( $\mathcal{T} = [0, 1]$ ) mit konstanter Vorschubgeschwindigkeit (1 pro Zeiteinheit) betrachtet. Nach Konstruktion ist das  $\Omega_{0,h}$  nach der Zeiteinheit vollständig entfernt worden. Alle Simulationen wurden mit einer konstanten Zeitschrittweite durchgeführt ( $\tau = 0.001$ ).

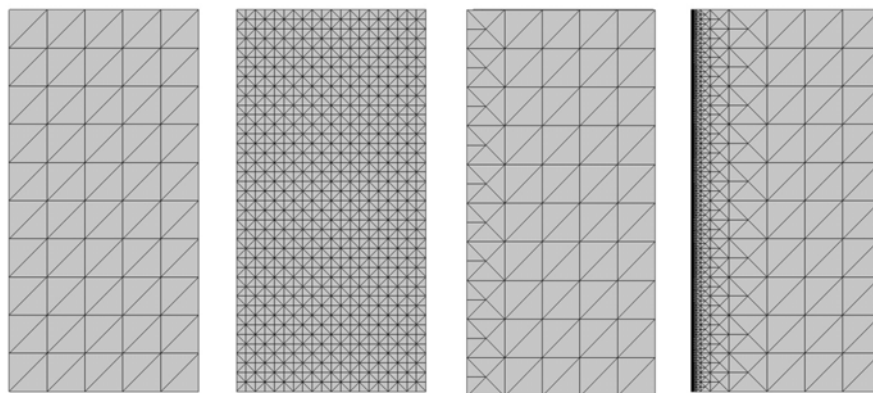


Abbildung 5.6: Global verfeinerte und adaptiv angepasste Rechengitter im Werkstückgebiet nach 0.5 s. Von links: 0- und 1-fache globale Verfeinerung sowie adaptive Anpassung bis Verfeinerungslevel 3 bzw. 10.

Abbildung 5.6 zeigt die Gitterstruktur des Werkstückgebiets nach 0.5 Zeiteinheiten. Zu sehen sind hier zwei unterschiedlich global verfeinerte Rechengitter und zwei, am Gebietsrand adaptiv angepasste, Rechengitter mit maximal 3 und 10 Verfeinerungslevel. Über die global verfeinerten FE-Gitter ist der stoßweise Wechsel einer ganzen Schicht von Elementen zu erahnen. Mit zunehmender gleichmäßiger Verfeinerung des Rechengitters nimmt die Häufigkeit der Wechsel von  $\bar{\Omega}_h(t)$  nach  $\bar{\Omega}_{m,h}(t)$  zu und die Approximation des Rechengebiets wird entsprechend besser, so dass die Norm des Fehlers abnehmen sollte.

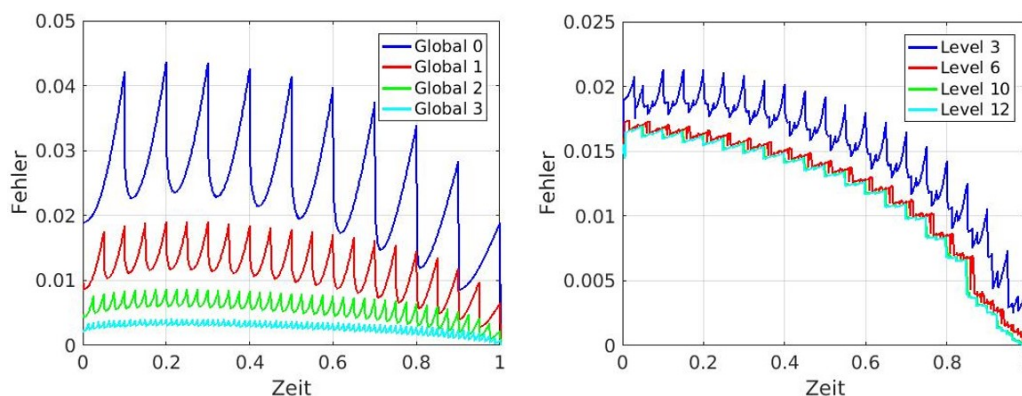


Abbildung 5.7: Fehler in  $W_2^1(\Omega_h(t))$ -Halbnorm über die Zeit mit gleichmäßig verfeinerten (links) und adaptiv angepassten Rechengitter (rechts) über planaren, sich bewegendem Gebietsrand zum Winkel 0 Grad.

In Abbildung 5.7 ist der Fehler über die Zeit in  $W_2^1(\Omega_h(t))$ -Halbnorm (Welche auf festem Rechengebiet der  $H_1(\Omega_h)$ -Halbnorm entspricht) zu unterschiedlich global verfeinerte und adaptiv angepasste Rechengitter dargestellt. Hier zeigt sich insbesondere in der linken Grafik, dass Wechsel einer ganzen Schicht zwischen den zeitabhängigen Teilgebieten mit höherer Gitterverfeinerung zu nimmt, weil die Gitterelemente entsprechend kleiner werden. Dementsprechend nimmt auch die Aufstauung des Fehlers ab, weil weniger Zeitschritte benötigt werden, bis ein Wechsel der Schichten stattfindet. Insgesamt ist

hier eine Halbierung des Fehlers in der  $W_2^1(\Omega_h(t))$ -Halbnorm bei zunehmender globaler Verfeinerung des Rechengitters festzustellen. Auch der Tabelle 5.1 ist die Halbierung des Fehlers über die Norm, bei Halbierung der Gitterweite, ersichtlich. Außerdem zeigt sich hier, dass die Zeitschrittweite klein genug ist, um keinen Einfluss auf den Fehler durch die Zeitdiskretisierung zu verursachen.

Verfeinerungen	Gitterweite	Knoten	$W_2^1(\Omega_h(t))$	$L_2(\Omega_h(t))$
0	0.1414	200	0.0436	0.0407
1	0.0707	800	0.0190	0.0176
2	0.0354	3.200	0.0086	0.0078
3	0.0177	12.800	0.0041	0.0037
4	0.0088	51.200	0.0019	0.0018
5	0.0044	204.800	0.0009	0.0009

Tabelle 5.1: Entwicklung des Fehlers in  $W_2^1(\Omega_h(t))$ -Halbnorm und  $L_2(\Omega_h(t))$ -Norm bei gleichmäßiger Verfeinerung des Rechengitters über das Innere des Werkstückgebiets.

Die rechte Grafik in Abbildung 5.7 beschreibt die Entwicklung der  $W_2^1(\Omega_h(t))$ -Halbnorm des Fehlers über die Zeit zu adaptiv angepassten Rechengitter am Rand des zeitabhängigen Werkstückgebiets. Hier ist deutlich zu erkennen, dass die Ausschläge des Fehlers beim gleichzeitigen Wechsel mehrerer Elemente von einem zeitabhängigen Teilgebiet ins andere wesentlich kleiner ist und bei hohen Verfeinerungsleveln in eine Art Stufenform übergeht. Hier wird jedoch mit zunehmender Gitterfeinheit am Gebietsrand erfolgt keine Halbierung des Fehlers. Auffällig ist, dass zu Beginn der Simulation der Fehler bei allen Verfeinerungen auf dem gleichen Niveau liegt und sich von der größten globalen Verfeinerung so gut wie nicht unterscheidet. Für die Untersuchungen mit adaptiv anpassbaren Rechengittern wurde die erste Schicht der Makrotriangulierung (auf dem der bewegende Rand liegt) so oft verfeinert, wie maximal am bewegenden Rand zulässig sind. Jedoch zeigt sich hier keine Halbierung des Fehlers. Was genau in der Toolbox geschieht ist nicht eindeutig zu erklären. Die Toolbox erlaubt Vergrößerungen, wo es zulässig ist. Es könnte also an einen Programmierfehler liegen, der aber nicht offensichtlich ist. Andererseits kann es auch daran liegen, dass der Fehler durch das gröbere FE-Gitter im Inneren von  $\Omega_h(t)$  dominiert und deswegen so schlecht ausfällt. Eine genauere Analyse dieses Problems sollte durchgeführt werden.

Allerdings zeigen die Verläufe, dass eine Abnahme des Fehlers erfolgt und die starken Schwankungen, wie sie bei gleichmäßiger Verfeinerung auftreten, beim adaptiv angepassten Rechengitter nicht zu beobachten sind. Alle Normen des Fehlers gehen gegen Null, weil nach Konstruktion das Werkstückgebiet innerhalb der simulierten Zeiteinheit komplett abgetragen wird.

Die Entwicklung des Fehlers in der  $L_2(\Omega_h(t))$ -Norm für gleichmäßig verfeinerte und adaptiv angepasste Rechengitter ist in der Abbildung 5.8 dargestellt. Das gleichmäßig verfeinerten Werkstückgebiet (links) als auch die obige Tabelle 5.1 zeigen, dass sich mit zunehmender Gitterfeinheit der Fehler in der  $L_2(\Omega_h(t))$ -Norm halbiert. Dagegen wird in

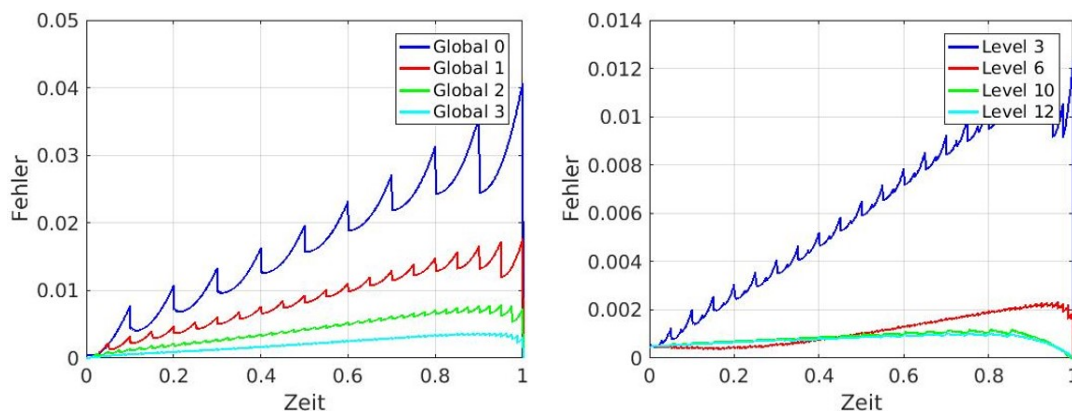


Abbildung 5.8: Fehler in  $L_2$ -Norm über die Zeit mit gleichmäßig verfeinerten (links) und adaptiv angepassten Rechengitter (rechts) über das Werkstückgebiet zum Winkel 0 Grad.

der rechten Grafik sehr deutlich, dass mit zunehmender Anzahl adaptiver Anpassungen an den bewegenden Gebietsrand (5.2) der Fehler in der  $L_2(\Omega_h(t))$ -Norm für grobe Verfeinerungslevel stetig ansteigt, bis dieser am Ende der Simulation und mit Entfernen des Werkstückgebiets abrupt zu Null abfällt. Bei höheren Verfeinerungslevel steigt der Fehler mit adaptiv angepasstem Gebietsrand nur noch leicht an, bis dieser zum Ende der Simulation zu Null abfällt. Sehr gut ist hier zu erkennen, dass die Norm des Fehlers kleiner ist, als bei gleichmäßiger Verfeinerung. Der starke Anstieg des Fehlers in der  $L_2(\Omega_h(t))$ -Norm bei wenigen adaptiven Anpassungen an den bewegenden Gebietsrand ist wohl durch den dominierenden Fehler im Inneren des Gebiets zu erklären, weil dort das FE-Gitter wesentlich gröber ist.

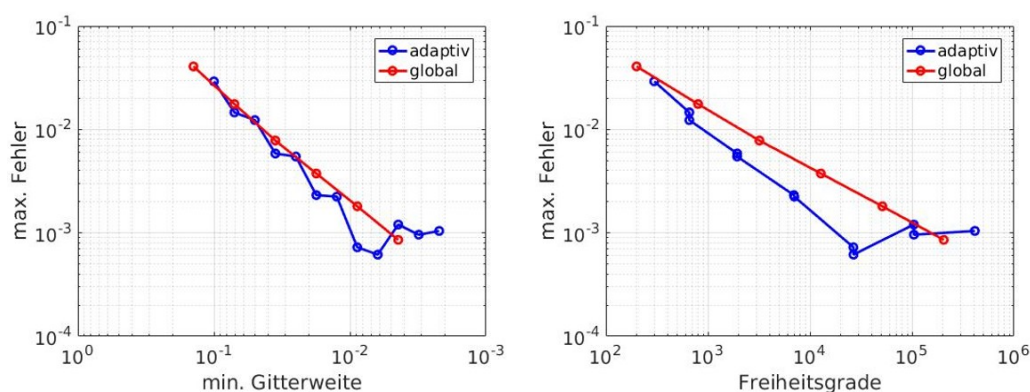


Abbildung 5.9: Logarithmische Darstellung der  $L_2$ -Norm in Abhängigkeit der minimalen Gitterweite (links) und der Anzahl von Freiheitsgraden (rechts) für gleichmäßig verfeinerte und adaptiv angepasste Rechengitter zum Winkel 0 Grad.

Abbildung 5.9 zeigt die logarithmische Entwicklung der  $L_2(\Omega_h(t))$ -Norm im Bezug zur minimalen Gitterweite (links) und der Anzahl von Freiheitsgraden (rechts) mit zunehmenden global verfeinerten (rot) und adaptiv angepassten Rechengittern (blau). Hier ist zu sehen, dass die gleichmäßig verfeinerten Rechengitter (pro Verfeinerungsstufe werden 2 Bi-

sektionen durchgeführt) im Bezug auf die minimale Gitterweite, eine Fehlerordnung  $\mathcal{O}(h)$  aufweisen, was zu erwarten ist. Die adaptiv an den bewegenden Gebietsrand angepassten Rechengitter zeigen, im Bezug auf die kleinste Gitterweite, dass bei zunehmender Verfeinerunglevel (Je Level wird eine Bisektion durchgeführt) kaum eine Besserung der maximalen Norm des Fehlers eintritt. In Gegenüberstellung zur Anzahl der FE-Knotenpunkte (Freiheitsgrade) zeigt sich hingegen, dass die Norm des Fehlers im Maximum über die Zeit schneller abnimmt, als bei gleichmäßig verfeinerten Rechengittern.

Allerdings zeigen beide Grafiken, dass die adaptive Anpassung bei hohen Verfeinerunglevel schlechter wird. Dies kann zum einen mit einem Zeitdiskretisierungsfehler zusammen hängen, oder mit einem dominierenden Fehler durch das gröbere FE-Gitter im Inneren von  $\Omega_h(t)$ . Beide möglichen Ursachen werden im folgenden genauer betrachtet.

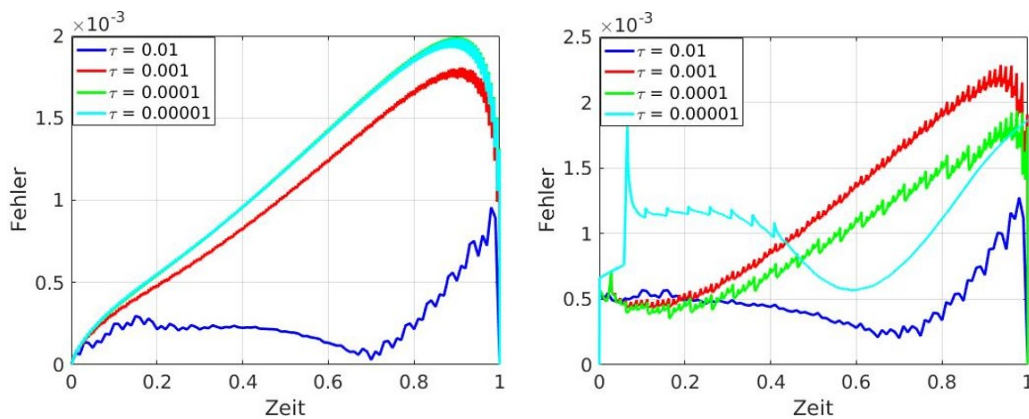


Abbildung 5.10: Darstellung des Fehlers in  $L_2$ -Norm zu unterschiedlichen Zeitdiskretisierungen zum Winkel 0 Grad auf 4-fach gleichmäßig verfeinerten (links) und bis Level 7 adaptiv angepassten Rechengitter (rechts).

Eine Entwicklung der  $L_2(\Omega_h(t))$ -Norm zu unterschiedlichen Zeitschrittweiten, ist in Abbildung 5.10 dargestellt. Für die linke Grafik wurde das FE-Gitter 4-mal gleichmäßig ( $h = 0.0088$ ) verfeinert, für die rechte Grafik wurde das Rechengitter an den bewegenden Gebietsrand mit bis zu 7 Verfeinerunglevel ( $h_{min} = 0.0125$ ) angenähert. Hierbei zeigt der Fehler in der  $L_2(\Omega_h(t))$ -Norm bei einer Zeitschrittweite von  $\tau = 0.01$  in beiden Grafiken das beste Ergebnis. Es scheint für dieses Testbeispiel die geeignetste Konstellation zwischen Zeitschrittweite, Vorschubgeschwindigkeit des bewegenden Rands sowie die gleichmäßige Verfeinerung bzw. adaptive Anpassung des Rechengitters zu sein. Während der Simulation wird in jedem Zeitschritt mindestens eine Ebene der Elemente von Werkstückgebiet als entfernt markiert, so dass geschnittene Elemente niemals lange genug im Werkstück verbleiben um den Diskretisierungsfehler merklich zu erhöhen. Andernfalls wäre für kleiner werdende Zeitschrittweiten ein Konvergenzverhalten zu erwarten.

Die Norm des Fehlers über das adaptiv angepasste Rechengitter (Grafik, rechts) ist hier besonders interessant, denn die Ergebnisse zeigen keinen eindeutigen Trend, inwiefern die Zeitdiskretisierung einen Einfluss auf die Approximationsgüte des bewegenden Gebietsrand hat. Besonders der Verlauf der Fehlernorm für die kleinste Zeitschrittweite



passt nicht so recht ins Bild. Vom Verlauf her, ähnelt dieser dem der größten Zeitschrittweite, aber deutlich schlechter. Hier liegt die Vermutung nahe, dass andere Faktoren einen Einfluss haben. Z.B. könnten hohe Fehleranteile im Inneren des diskreten Werkstückgebiets, bedingt durch das grobe Rechengitter, eine Ursache sein. Aber auch hier besteht die Möglichkeit, dass die Konstruktion des Testbeispiels die Norm des Fehlers beeinflusst. Zu  $\tau = 0.0001$  zeigt sich, dass der Fehler in der  $L_2(\Omega_h(t))$ -Norm im Gegensatz zu  $\tau = 0.001$  kleiner wird, was zu erwarten ist. Die dargestellten Ergebnisse lassen vermuten, dass hier ein Zeitdiskretisierungsfehler extrahiert werden kann, dieser jedoch evtl. von weiteren Einflussfaktoren abhängt, die ggf. zu identifizieren sind.

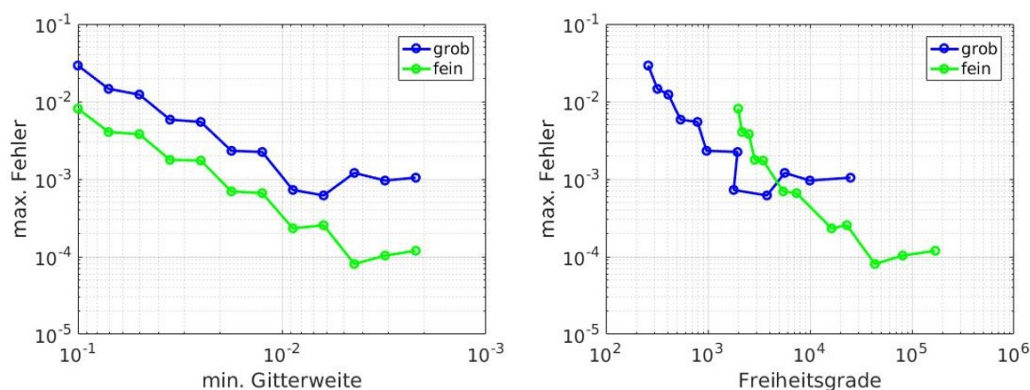


Abbildung 5.11: Logarithmische Darstellung der  $L_2$ -Norm in Abhängigkeit der minimalen Gitterweite (links) und der Anzahl von Freiheitsgraden (rechts) für das adaptiv angepasste Rechengitter im Werkstückgebiet.

Für Abbildung 5.11 wurden die gleichen Ergebnisse (blau) der adaptiven Anpassung an den bewegenden Gebietsrand verwendet, wie sie bereits in Abbildung 5.9 präsentiert wurden. In dieser Darstellung werden zwei unterschiedlich feine Rechengitter miteinander verglichen, auf denen der bewegende Gebietsrand mit zunehmenden maximalen Level adaptiv angepasst wird. Für die logarithmische Darstellung der  $L_2(\Omega_h(t))$ -Norm des Fehlers lag für das grobe Rechengitter ein FE-Gitter mit 121 FE-Knotenpunkten und 200 Elementen mit max. Gitterweite  $h = 0.1414$  zu Grunde und für das feine Rechengitter ein FE-Gitter mit 961 FE-Knotenpunkten, 1.800 Elementen und mit max. Gitterweite  $h = 0.0471$ . Entsprechend wird die minimale Gitterweite bei gleicher Anzahl von Verfeinerungen deutlich kleiner. Zum Beispiel wird bei 10 Verfeinerungslevel eine minimale Gitterweite von  $h = 0.0015$  erreicht statt  $h = 0.0044$ .

Die Entwicklung des Fehlers in der logarithmischen Darstellung zeigt, dass im feineren FE-Gitter bessere Ergebnisse erzielt werden, als über dem größeren Rechengitter. Hier wird deutlich, dass der Ortsdiskretisierungsfehler im Inneren des zeitabhängigen Werkstückgebiets bei zunehmender Anpassung des Rechengitters an den Gebietsrand dominiert. Die Resultate zeigen, dass neben der adaptiven Anpassung des Rechengitters am bewegenden Rand auch eine Berechnung von Fehleranteilen im Inneren des Werkstückgebiets über die Wärmeleitungsgleichung sinnvoll ist, um ggf. das FE-Gitter adaptiv anzupassen.

### Planare Hyperfläche mit Anstellwinkel $30^\circ$

Beim Abtrag über die planare Hyperfläche mit einen Anstellwinkel von 30 Grad werden nicht mehr stoßweise Elemente von einen Teilgebiet ins andere übertragen, sondern die Zahl der Elemente variiert über die Zeit und ist fließender. Ebenfalls variiert die Länge des bewegendes Gebietsrand mit der Zeit, weil das Werkzeug nicht parallel zum Referenzgebiet ausgerichtet ist (Abbildung 5.4 und 5.12). Auch hier wird wieder das Referenzgebiet eine simulierte Zeiteinheit mit konstanter Vorschubgeschwindigkeit von 1 pro Zeiteinheit untersucht. Nach Konstruktion wird das Werkstückgebiet nach dieser Zeiteinheit nicht komplett abgetragen. Es bleibt ein Rest des Werkstückgebiets bestehen. Erst nach ca. 1.3 Zeiteinheiten wäre es vollständig abgetragen. Zur Vergleichbarkeit der Simulationen wurden alle mit einer konstanten Zeitschrittweite von  $\tau = 0.001$  durchgeführt.

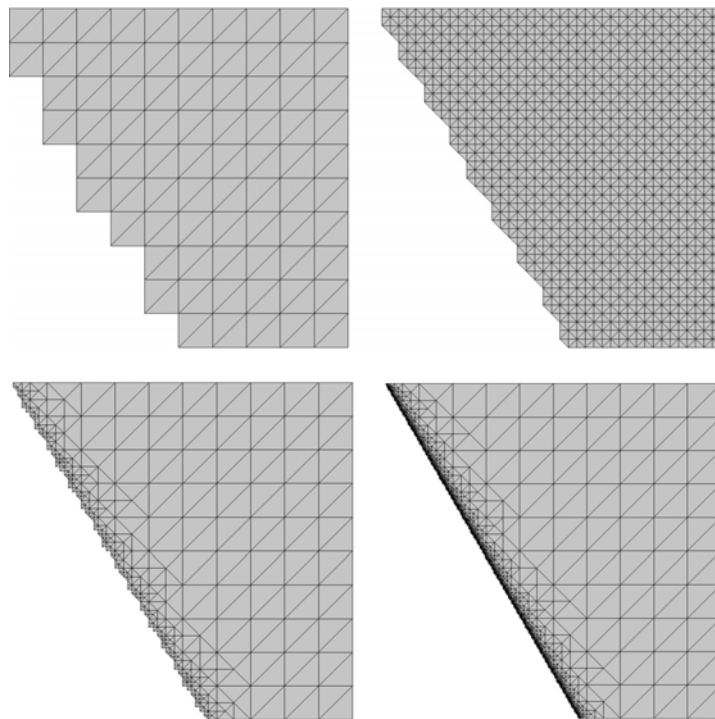


Abbildung 5.12: Rechengitter des diskreten Werkstückgebiets mit planarer Hyperfläche und Anstellwinkel 30 Grad zum Zeitpunkt  $t = 0.5$  s. Von links oben: 0-, 2-mal gleichmäßig verfeinert sowie maximal 6 bzw. 10 adaptiv angepasste Verfeinerungslevel.

In Abbildung 5.12 sind unterschiedliche gleichmäßig verfeinerte und adaptiv angepasste Rechengitter des zeitabhängigen Werkstückgebiets nach 0.5 Zeiteinheiten gegeben. Hier wird deutlich, dass die Makro-Triangulierung (oben links) nur eine ungenügende Anpassung an die planare Hyperfläche bietet. Mit zwei gleichmäßigen Verfeinerungen (oben rechts) ist schon eine bessere Anpassung an den bewegendes Gebietsrand möglich. Die beste adaptive Anpassung an die planare Hyperfläche liefern die unteren beiden adaptiv angepassten Rechengitter an den Gebietsrand zu maximal 6 (links) und 10 (rechts) Verfeinerungslevel.

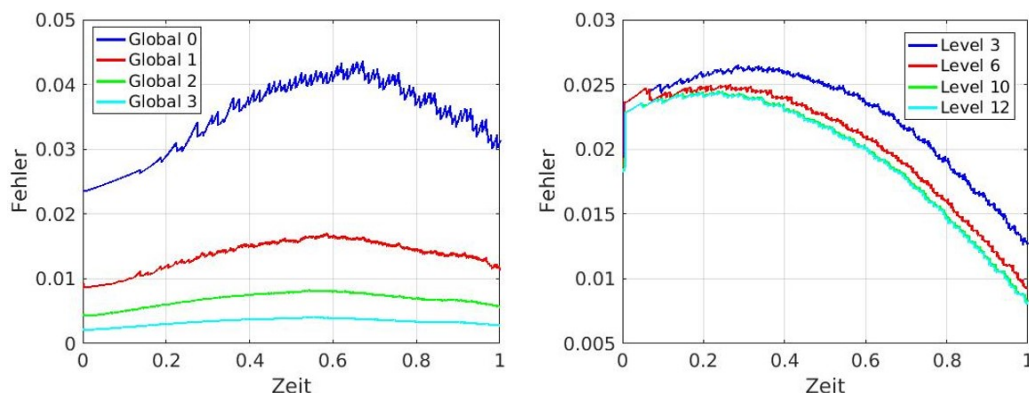


Abbildung 5.13: Fehler in der  $H_1$ -Halbnorm über die Zeit zu zunehmenden gleichmäßig verfeinerten (links) und adaptiv angepassten Rechengitter (rechts) über das diskrete Werkstückgebiet mit Anstellwinkel 30 Grad.

Abbildung 5.13 (links) zeigt die zu erwartende Halbierung des Fehlers in der  $W_2^1(\Omega(t))$ -Halbnorm über die Zeit. Interessant ist hier zu beobachten, dass zunächst ein Anstieg des Fehlers in der Halbnorm erfolgt, der anschließend wieder kleiner wird, nachdem der bewegende Gebietsrand seine größte Ausdehnung erreicht und zum Ende der Simulation wieder kleiner wird.

In Abbildung 5.13 (rechts) ist die Entwicklung des Fehlers in der Halbnorm über adaptiv angepasste Rechengitter mit unterschiedlichen maximalen Verfeinerungslevel dargestellt. Das FE-Gitter wird anfangs im Bereich, an dem die planare Hyperfläche auf das Referenzgebiet auftritt entsprechend der maximalen Verfeinerungslevel vorverfeinert, so dass der Fehler in der Halbnorm nicht durch die adaptive Anpassung über die Makro-Triangulierung beeinflusst wird. Wie zum Winkel  $0^\circ$  (Siehe Abbildung 5.7, links) startet jede Simulation mit einem relativ hohen Initialisierungsfehler. Es ist unklar, woran das liegt und bedarf weiterer Untersuchungen.

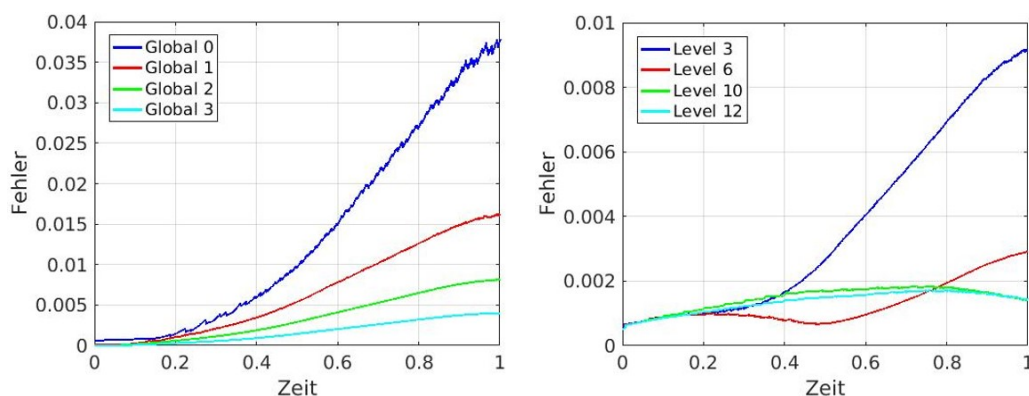


Abbildung 5.14: Fehler in der  $L_2$ -Norm über die Zeit zu unterschiedlich gleichmäßig verfeinerten (links) und adaptiv angepassten Rechengittern (rechts) über das diskrete Werkstückgebiet zum Winkel 30 Grad.

Durch Abbildung 5.14 (links) zeigt sich, dass bei zunehmender gleichmäßiger Ver-

feinerung die  $L_2(\Omega_h(t))$ -Norm des Fehlers je Verfeinerungsstufe halbiert wird, aber zum Ende der Simulation maximal ist. In der rechten Grafik sind keine genauen Aussagen über das Verhalten der Norm des Fehlers möglich. Zu den maximal, adaptiv anzupassenden Verfeinerungsleveln 3 und 6 ist das Verhalten der Norm des Fehlers nur bedingt aussagekräftig. Es zeigt sich jedoch, dass sich diese dem Verhalten mit gleichmäßiger Verfeinerung ähneln. Erst ab Level 6 zeigt sich zunächst ein seichter Anstieg der Norm des Fehlers über die Zeit, um anschließend leicht abzufallen. Die resultierende Norm des Fehlers ist deutlich besser, als bei gleichmäßiger Verfeinerung.

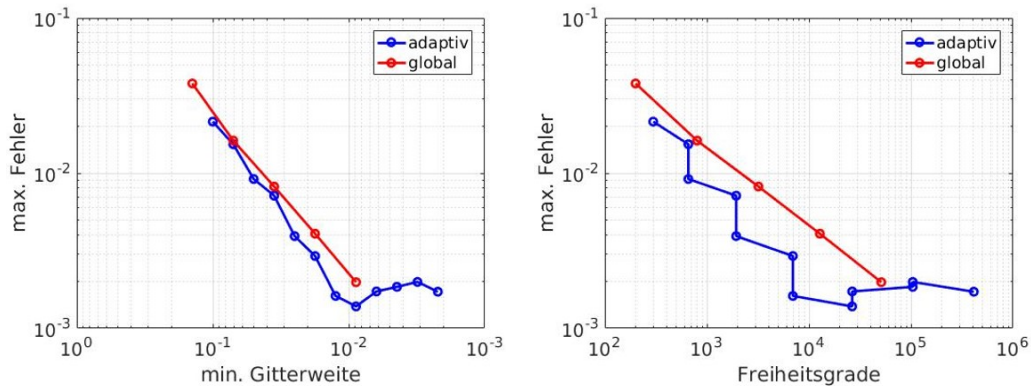


Abbildung 5.15: Logarithmischer Plot der maximalen  $L_2$ -Norm des Fehlers in Abhängigkeit der minimalen Gitterweite (links) und benötigten Zahl von Freiheitsgraden (rechts) zum Winkel  $30^\circ$ .

Abbildung 5.15 zeigt in logarithmischer Darstellung den maximalen Fehler in der  $L_2(\Omega_h(t))$ -Norm über die Zeit in Abhängigkeit der minimalen Gitterweite (links) und der Anzahl benötigter Freiheitsgrade (rechts). Wie bei einem Anstellwinkel von  $0^\circ$  lässt sich auch bei einem Winkel von  $30^\circ$  eine Ordnung der Norm des Fehlers von  $\mathcal{O}(h)$  über gleichmäßig verfeinerte Rechengitter im Bezug auf die minimale Gitterweite feststellen. Auch hier zeigt sich in Abhängigkeit der Freiheitsgrade, dass eine adaptive Anpassung des Rechengitters an den bewegenden Gebietsrand (bis  $h \approx 10^{-2}$ ) deutlich bessere Resultate liefert. Es ist auch zu beobachten, dass die vorgeschlagene adaptive Strategie (Kapitel 4.3.3) effizient und Ressourcen sparend arbeitet.

Für hohe adaptive Verfeinerungslevel steigt der maximale Fehler in der  $L_2$ -Norm auch hier im Verhältnis zur Gitterweite sowie der FE-Knotenpunkte wieder an. Die Identifizierung eines dominierenden Fehlers im Inneren des diskreten Werkstückgebiets durch ein sehr grobes FE-Gitter ist damit möglich und wird im folgenden näher betrachtet.

Die Überprüfung des Ortsdiskretisierungsfehler wie in Abbildung 5.11 mit zwei unterschiedlichen feinen Rechengittern ermöglicht auch hier eine Analyse der Theorie, dass der Ortsfehler im Inneren des Werkstückgebiets ab einen gewissen Verfeinerungslevel dominiert. Für das grobe Rechengitter (blau) sind wieder 121 FE-Knotenpunkte und 200 Elemente mit einer maximalen Gitterweite von  $h = 0.1414$  verwendet worden, das feine Rechengitter (grün) beinhaltet 961 FE-Knotenpunkte und 1.800 Elemente mit einer maximalen Gitterweite von  $h = 0.0471$  (Abbildung 5.16). Sowohl in Abhängigkeit der

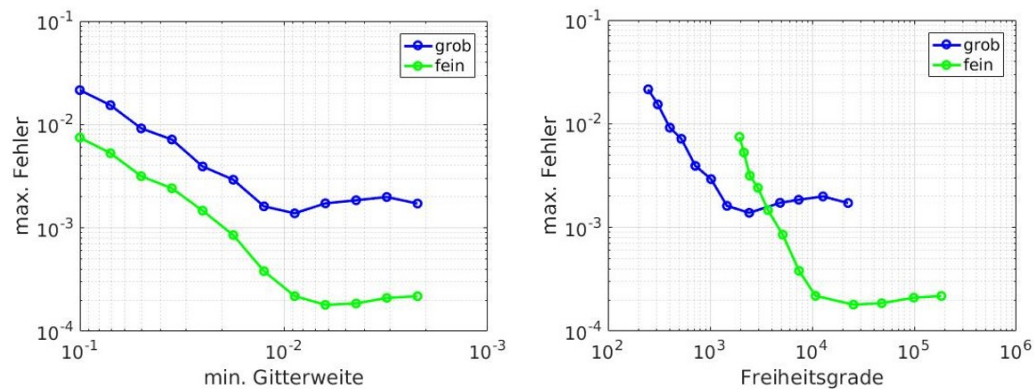


Abbildung 5.16:  $L_2$ -Norm des Fehlers auf groben (blau) und feinen Rechengitter (grün) über das zeitabhängige Werkstückgebiet.

Gitterweite als auch der FE-Knotenpunkte ist ein innerer dominierender Ortsdiskretisierungsfehler zu identifizieren, der mit einer feineren Gitterweite im Inneren des Werkstückgebiets eine bessere Reduktion des resultierenden maximalen  $L_2$ -Fehlers ermöglicht. Auch hier zeigt sich, dass eine zusätzliche adaptive Anpassung im Inneren des Werkstückgebiets mittels zu berechnender Fehleranteile über die Wärmeleitungsgleichung sinnvoll und erstrebenswert ist.

### 5.2.3 Adaptive Gitteranpassung an die gekrümmte Hyperfläche

Die zuvor analysierten Resultate zur planaren Hyperfläche mit Anstellwinkel 0 bzw. 30 Grad zeigen sehr gute Ergebnisse für die Verwendung der vorgestellten adaptiven Strategie zur Anpassung des Rechengitters an den, sich bewegenden, Gebietsrand (Kapitel 4.3.3). Sie zeigen aber auch, dass bei zu hohen adaptiven Anpassungen am Gebietsrand der Fehler im Inneren dominiert und somit eine zusätzliche adaptive Anpassung über die Fehlerschätzer der Wärmeleitung im Inneren des Werkstückgebiets erfolgen muss. Um Untersuchungen an komplexeren Strukturen des bewegenden Gebietsrand durchführen zu können wurde in Kapitel 5.2.1 neben dem Testbeispiel mit planarer Hyperfläche ebenfalls ein Testbeispiel mit gekrümmter Hyperfläche konstruiert. Dieses ist im folgenden zunächst für  $d = 2$  zu betrachten und anschließend für  $d = 3$ . Für den 2D-Fall wird wieder das Einheitsgebiet  $\Omega = (0, 1)^2$  verwendet und im 3D-Fall ein Einheitswürfel  $\Omega = (0, 1)^3$ .

#### Gekrümmte Hyperfläche in 2D

Für  $d = 2$  beschreibt die gekrümmte Hyperfläche (Gleichung (5.5)) einen Kreisbogen. Das Innere des Kreisbogens wird dem entfernten Gebiet  $\Omega_m(t)$  zugeordnet, der Rest dem zeitabhängigen Werkstückgebiet. Abbildung 5.17 veranschaulicht den Kreisbogen zum Zeitpunkt  $t = 0.5$  Zeiteinheiten. Sowohl im gleichmäßig verfeinerten als auch im adaptiv angepassten Rechengitter wird der Kreisbogen gut angenähert. Zu diesem Testbeispiel werden ebenfalls Untersuchungen durchgeführt die eine simulierte Zeiteinheit  $\mathcal{T} = [0, 1]$  dauern. Die Vorschubgeschwindigkeit beträgt hier ebenfalls 1 pro Zeiteinheit. damit wird

der Radius des Kreisbogens nicht größer als Eins. Die Zeitschrittweite ist wie zuvor  $\tau = 0.001$

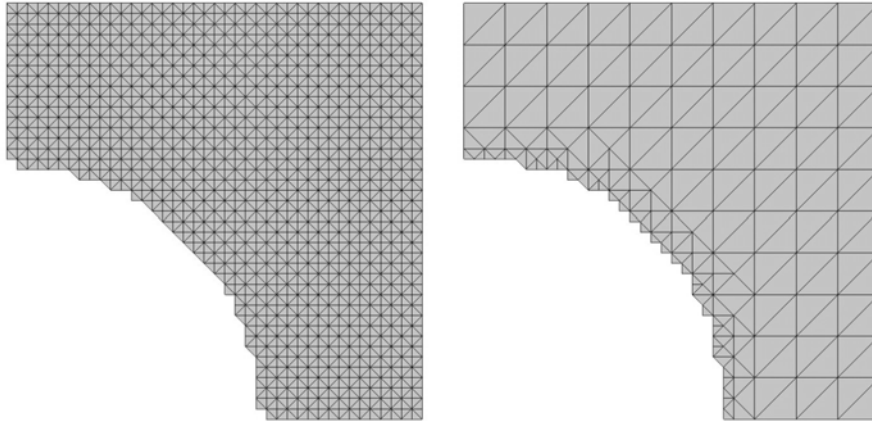


Abbildung 5.17: Das diskrete Werkstückgebiet mit gekrümmter Hyperfläche zum Zeitpunkt  $t = 0.5$ . Von links: 2-mal gleichmäßig verfeinert sowie maximal 6 adaptiv angepasste Verfeinerungslevel.

Abbildung 5.18 stellt den Fehler in der  $W_2^1(\Omega_h(t))$ -Halbnorm dar. Die Grafiken zeigen, dass die Norm des Fehlers schon bei einer groben adaptiven Anpassung an den bewegenden Gebietsrand deutlich kleiner ist, als bei zwei gleichmäßigen Verfeinerungen. In der rechten Grafik ist für alle dargestellten adaptiven Anpassungen ein ähnlicher Verlauf des Fehlers auszumachen. Bis ungefähr  $t = 0.9$  steigt dieser an und fällt anschließend ab. Die Verläufe des Fehlers in der linken Grafik zeigen ein anderes Bild. Zunächst erfolgt ein Sinus-förmiger Verlauf bis  $t \approx 0.2$ . Nach einem längeren Abfall des Fehlers, steigt dieser bis zum Zeitpunkt  $t = 0.9$  wieder an, um anschließend nochmals abzufallen. Was zu Beginn der Simulationen zu unterschiedlich gleichmäßig verfeinerten Rechengittern passiert, ist nicht ganz klar. Der steile Anstieg tritt bei den adaptiv angepassten Rechengittern nicht auf.

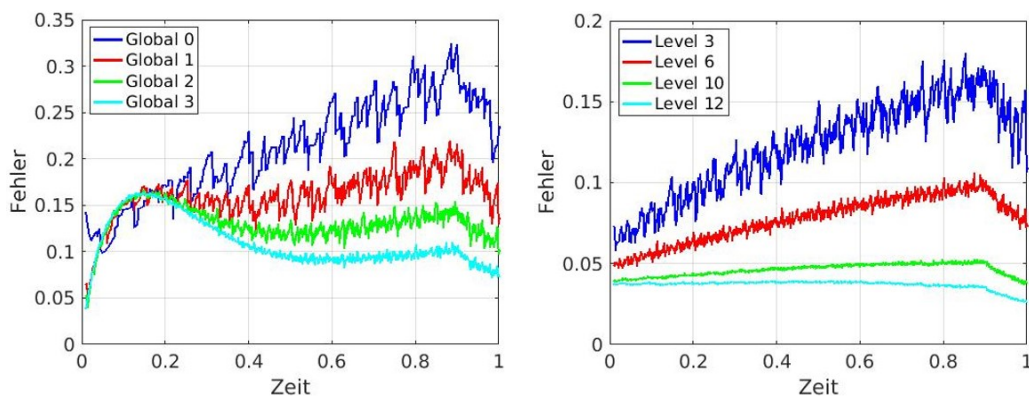


Abbildung 5.18:  $H_1$ -Halbnorm des Fehlers über die Zeit bei zunehmenden gleichmäßig verfeinerten (links) und adaptiv angepassten FE-Gitter (rechts).

Abbildung 5.19 zeigt die  $L_2(\Omega_h(t))$ -Norm des Fehlers über die Zeit mit zunehmenden gleichmäßig verfeinerten und adaptiv angepassten Rechengitter über das zeitlich

ändernde Werkstückgebiet. Hier zeigt der Verlauf des  $L_2$ -Fehlers, dass sich dieser, der in Abbildung 5.18 (rechts) dargestellten Verläufe, ähnelt. Auch hier ist der Fehler selbst bei groben adaptiven Anpassungen an den bewegenden Gebietsrand deutlich geringer, als bei gleichmäßiger Verfeinerung. In beiden Grafiken ist zudem ein ähnlicher Verlauf des Fehlers zu beobachten. Bis ungefähr 0.9 steigt der Fehler an, um anschließend abzufallen.

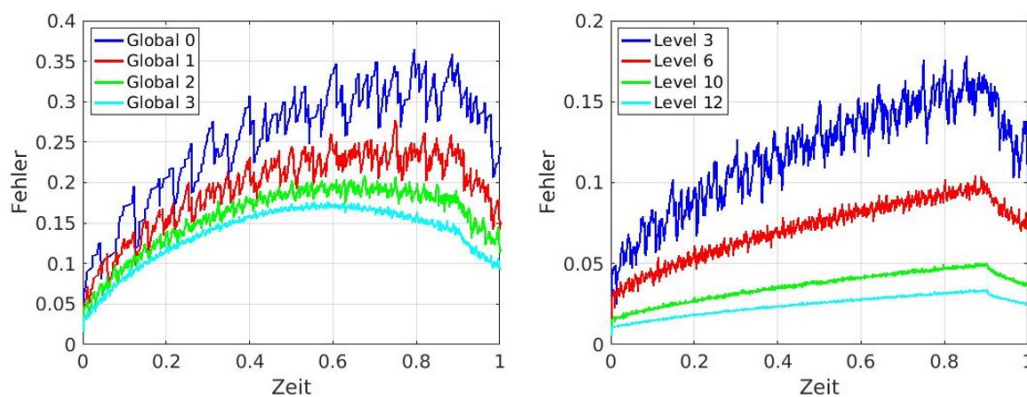


Abbildung 5.19:  $L_2$ -Norm des Fehlers über die Zeit zu unterschiedlich gleichmäßig verfeinerten (links) und adaptiv angepassten FE-Gitter (rechts) im Werkstückgebiet.

Die  $L_2(\Omega(t))$ -Norm in logarithmischer Darstellung ist der Abbildung 5.20 zu entnehmen. Es fällt auf, dass die Abnahme der Fehlernorm schlechter ist, als bei der obigen planaren Hyperfläche. Schlecht zu erklären ist der bei dreimaliger, gleichmäßiger Verfeinerung des Rechengitters auftretende Knick, im sonst monoton abfallenden Verlauf. Hier tritt evtl. ein Zeitdiskretisierungsfehler auf. Während die Fehler in Abhängigkeit der Gitterweite nahezu parallel verlaufen und sich angleichen, zeigt sich in Abhängigkeit der Freiheitsgrade, dass die adaptive Strategie zur Anpassung des bewegenden Gebietsrand eine gute Wahl darstellt. Insgesamt liefert die modifizierte adaptive Strategie von FE-CutS bei komplexeren Strukturen der Hyperfläche gute Ergebnisse, die eine globale, gleichmäßige Verfeinerung des Rechengitters nicht ermöglicht.

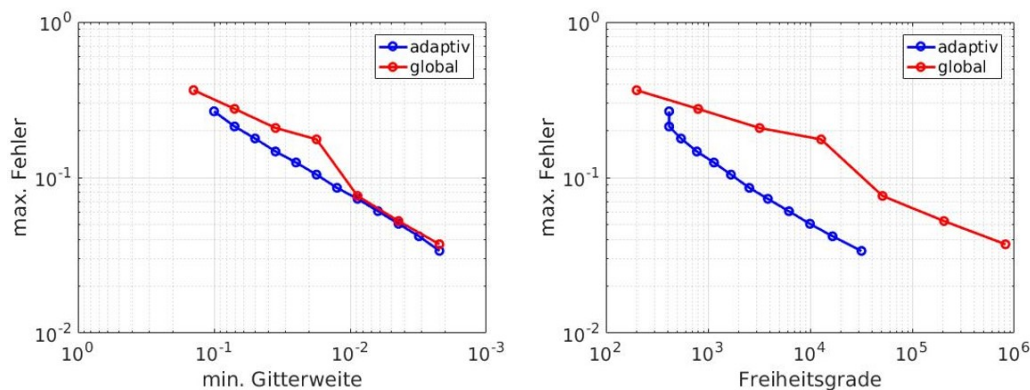


Abbildung 5.20: Logarithmische Darstellung des  $L_2$ -Fehlers im Maximum über die Zeit in Abhängigkeit der minimalen Gitterweite (links) und Freiheitsgrade (rechts) über das diskrete Werkstückgebiet mit bewegender, gekrümmter Hyperfläche.

### Gekrümmte Hyperfläche in 3D

Eine Raumdimension höher (für  $d = 3$ ) beschreibt die gekrümmte Hyperfläche (5.5) eine Kugeloberfläche bzw. Sphäre. Das Innere der Kugel ist wieder dem entfernten Gebiet  $\Omega_m(t)$  zuzuordnen. Wie bereits erwähnt erfolgt die Untersuchung auf den Einheitswürfel:  $\Omega = (0, 1)^3$ . Auch dieses Testbeispiel wurde eine simulierte Zeiteinheit  $\mathcal{T} = [0, 1]$  mit einer Vorschubgeschwindigkeit von 1 pro Zeiteinheit mit Zeitschrittweite  $\tau = 0.001$  untersucht. Wie im zweidimensionalen Fall wird der Radius nicht größer als Eins.

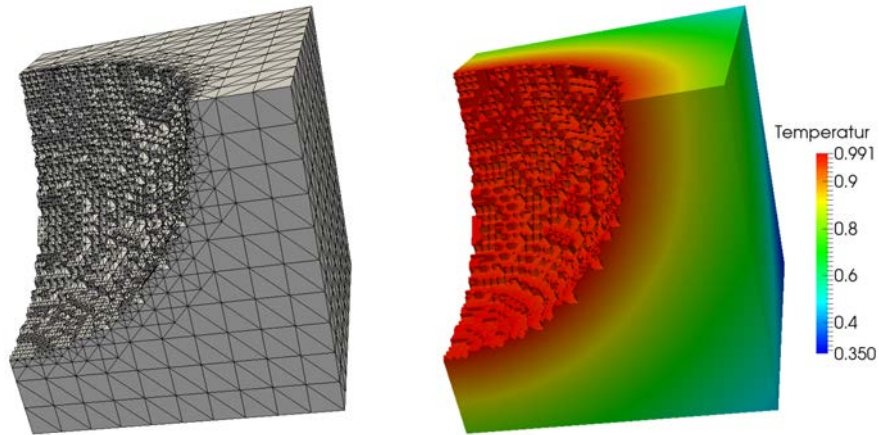


Abbildung 5.21: Darstellung des kugelförmigen Materialabtrags in 3D. Gitterstruktur des Werkstückgebiets (links) und zugehörige numerische Lösung der Exponentialfunktion (rechts).

Das Werkstückgebiet mit kugelförmigen Abtrag ist in Abbildung 5.21 grafisch dargestellt. Die linke Grafik zeigt das adaptiv an die gekrümmte Hyperfläche angepasste Rechengitter nach 0.5 Zeiteinheiten. Die Anpassung an den Gebietsrand erfolgt mit 5 Verfeinerung. Die rechte Grafik zeigt die zum Werkstückgebiet zugehörige numerische Lösung des Wärmeleitproblems (Gleichung (5.1)). Die Darstellungen zum Verlauf des Fehlers sowohl in  $W_2^1$ -Halbnorm als auch  $L_2$ -Norm sind von den Ergebnissen in 2D kaum zu unterscheiden, so dass auf die ausführliche Interpretation verzichtet wird.

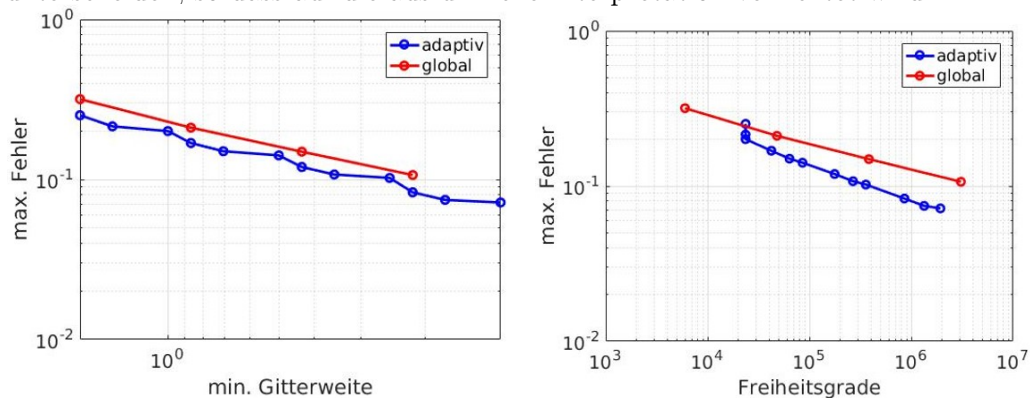


Abbildung 5.22: Logarithmische Darstellung der  $L_2$ -Norm des Fehlers über die minimale Gitterweite (links) und Anzahl von Freiheitsgraden (rechts) für gleichmäßige verfeinerte und adaptiv angepasste Rechengitter in 3D.



Die logarithmische Darstellung des maximalen  $L_2$ -Fehlers über die Zeit in Abhängigkeit der minimalen Gitterweite (Abbildung 5.22, links) zeigt sowohl für gleichmäßig verfeinerte als auch für adaptiv angepasste FE-Gitter einen ähnlichen Verlauf. Der Fehler ist jedoch deutlich schlechter als in 2D. Im Gegensatz hierzu zeigt die rechte Grafik der Abbildung 5.22, dass in Abhängigkeit der FE-Knotenpunkte die adaptive Anpassung des Rechengitters bessere Resultate gegenüber des gleichmäßig, global verfeinerten FE-Gitters zeigt.

### 5.3 Anwendungen in der Zerspanung

Im vorangegangenen Abschnitt 5.2 wurde gezeigt, dass mit einer vorhandenen Finite Elemente Toolbox und relativ wenig Aufwand eine gute Approximation zeitabhängiger Teilgebiete mit sich in der Zeit bewegende Gebietsränder auf einen festen nur adaptiv anpassbaren Rechengitter umzusetzen ist und der dabei entstehende numerische Fehler berechenbar bleibt.

Die Implementierung der adaptiven Anpassung des FE-Gitters an zeitabhängige Teilgebiete in FE-CutS erlaubt schließlich die Abbildung der sich zeitlich ändernden Geometrie durch Kopplung zu einer Materialabtragssimulation, welche auf DEXEL basiert (Kapitel 4.4). Ziel hierbei ist die realitätsnahe Abbildung des thermischen und mechanischen Werkstückverhaltens bei der spanenden Bearbeitung am Beispiel von Fräs- und Bohrprozessen. Neben dem Aufbau von FE-CutS erfolgten parallel dazu die Simulation verschiedener Zerspanprozesse mit steigender Komplexität.

Die berechneten Ergebnisse werden nun im folgenden präsentiert. Zu Beginn sind sehr einfache Zerspanprozesse darzustellen, die sowohl das Fräsen einer Vollnut als auch das Bohren ins Volle betrachten. Hierbei erfolgt die Berechnung der rein thermischen und mechanischen Ausdehnung des Werkstücks während der spanenden Bearbeitung zum Teil anhand vorgegebener Daten aus der Materialabtragssimulation. Andere wiederum sind nur durch den Abgleich experimentell erfasster Daten errechnet worden. Unter steigender Komplexität wird in diesem Fall das Fräsen mehrerer Ebenen in einem Werkstück, um eine Tasche auszukoffern verstanden, so dass am Ende des Prozesses eine Stegkonstruktion entsteht. Ein Vergleich der Simulationsdaten sowohl für die Wärmeverteilung in diesem Werkstück als auch für die thermische und mechanische Ausdehnung erfolgt mit experimentellen Daten. Eine Simulation von mehreren Bohrungen über die selbe Urform beschreibt die Steigerung der Komplexität beim Bohren. Den Abschluss bildet das Fräsen mehrerer Taschen zur Herstellung eines Strukturbauteils. Dieses entspricht hier einen Prozess mit der höchsten zu betrachteten Komplexitätsstufe.

Einige Arbeiten wurden bereits im Rahmen von Publikationen und Konferenzbeiträgen einem breiten Publikum zur Verfügung gestellt. Die Ergebnisse werden hier nochmals zitiert und ausführlich dargestellt.

### 5.3.1 Einfache Zerspanprozesse

Parallel zum Aufbau von FE-CutS dienten geometrisch einfache Prozesse zur Überprüfung des Modells, um den Materialabtrag in FE-CutS zu entwickeln sowie die Kopplung zu implementieren. Unter einen geometrisch einfachen Fräsprozess ist zum Beispiel das Fräsen einer geradlinig verlaufenden Vollnut in ein Werkstück sowie als einfacher Bohrprozess eine Bohrung ins Volle ohne Durchstoß zu verstehen.

Bevor die Kopplung mit der Materialabtragssimulation in FE-CutS realisiert wurde, ist zunächst das mathematische Modell, welches in Kapitel 3 bereits ausführlich erläutert und in Kapitel 4.2 diskretisiert wurde, implementiert worden. Auch die numerische Gebietszerlegung wurde anfangs ohne der auf Dixel basierenden Materialabtragssimulation implementiert (Siehe hierzu den folgenden einfachen Bohrprozess). Ein simpler NC-Interpreter (NC steht für *Numerical Control*) ist implementiert worden, der einfache Aufgaben des NC-Controllers der Materialabtragssimulation übernehmen kann. Dabei ist dieser über Level-Set-Funktionen beschreibbar. Der Wärmeeintrag über den Rand wurde mit Hilfe von konstanten, über die Kontaktzone gleichverteilten, Wärmeströme verwirklicht. Das Ergebnis war ein erster konkreter Ansatz zur Abbildung des thermomechanischen Werkstückverhaltens während der spanenden Bearbeitung. Erst später wurde die Kopplung zwischen der FEM und der Abtragssimulation verwirklicht.

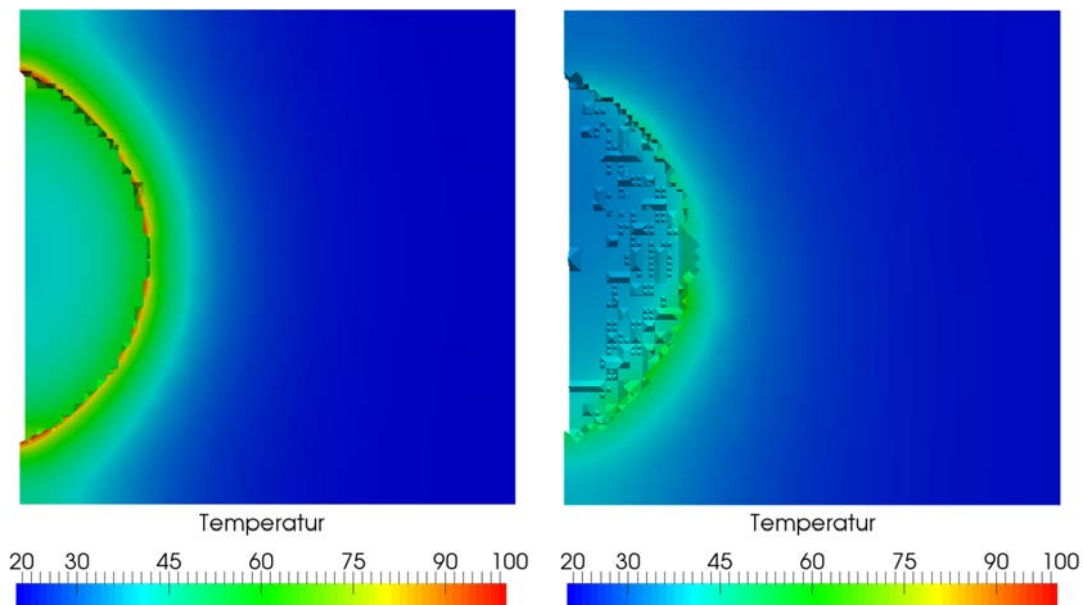


Abbildung 5.23: Darstellung des gleichverteilten Wärmestroms über der Kontaktzone (links) und Kopplung mit Materialabtragssimulation mit Wärmestrominformationen an den Dixelendpunkten (rechts).

Nachteil eines gleichverteilten, konstanten Wärmeeintrags ist die Vernachlässigung einiger Effekte, die nur durch die Kopplung sichtbar werden. In Abbildung 5.23 ist der Unterschied zwischen gleichverteilter Wärmequelle ohne Kopplung (links) und gekoppelten FE-CutS mit Materialabtragssimulation (rechts) dargestellt. Einerseits ist die Tem-

peratur bei einer gleichverteilten Wärmequelle über die Kontaktzone deutlich höher als in der gekoppelten Simulation, andererseits wird erst im gekoppelten System sichtbar, dass die Anzahl der Zähne am Werkzeug, die sich in der Kontaktzone im Eingriff befinden (hier handelt es sich um einen einzelnen Zahn), einen erheblichen Einfluss auf die Wärmeverteilung im Werkstück haben. Insbesondere die Unterscheidung zwischen Gegen- und Gleichlaufräsen (siehe hierzu Kapitel 2.1.1), wird hier erst durch die asymmetrische Ausbildung der Wärmeverteilung am Werkstück sichtbar.

Im Bereich des Gleichlaufräsen ist klar zu erkennen, dass die Energie, die auf das Werkstück wirkt, erst langsam aufgebaut werden muss, während die Energie im Bereich des Gegenlaufräsen viel intensiver wirkt, da die volle Spandicke bereits erreicht wurde und somit viel Material abgetragen werden muss. All diese Effekte sind bei einer gleichverteilten, konstanten Wärmequelle über der Kontaktzone nicht sichtbar.

### Fräsen einer Vollnut

Der erste Prozess beschreibt das Fräsen einer Vollnut. Über ein Werkstück mit den Abmessungen  $50 \times 50 \times 20 \text{ mm}$  wird oben mittig eine  $3 \text{ mm}$  tiefe und  $40 \text{ mm}$  breite Nut eingefräst. Vor und hinter der Vollnut bleibt jeweils ein Steg mit dem Abmessungen  $5 \times 50 \times 3 \text{ mm}$  stehen. Die zur Simulation gehörenden, experimentellen Daten wurden mit einem von KENNAMETAL stammenden Walzstirn-Aufsteckfräser vom Typ 40A04RS90ED14D mit Wendeschneidplatten vom Typ EDPT140404PDERHD/KCPK30 durchgeführt [23]. Beim verwendeten Werkstoff handelt es sich um C45EN, einen Normal geglühten Vergütungsstahl nach ISO 1.1191 (Zugehörige Werkstoffparameter sind in Anhang B zu finden). Tabelle 5.2 beinhaltet weitere prozessrelevante Parameter. Für die gekoppelte Simulation des Prozesses wurde zum Austausch von Daten zwischen den Modellen ein Zeitschritt  $t = 0.1 \text{ s}$  gewählt. Insgesamt wurden 120 Sekunden simuliert.

Prozessparameter		Gitterparameter	
Werkstoff:	C45EN	max. Gitterweite:	8.124 mm
Thermoelemente:	Typ K (NiCr-Ni)	min. Gitterweite:	2.031 mm
Maschine:	HELLER MCi16	Elemente zu Beginn:	3 000
Messverstärker:	SAK12-461-100-10	Elemente am Ende:	157 414
Vorschub $f_z$ :	0.05 mm/z	Verfeinerungen:	7 Level
Schnittgeschw. $v_c$ :	175 m/min	Wärmeübergangskoeffizient:	15 W/m <sup>2</sup> K

Tabelle 5.2: Prozessrelevante Parameter zum einfachen Fräsprozess.

Ziel dieses einfachen, auf Experimenten basierenden, Prozesses ist die Überprüfung der Kopplung sowie eine Identifizierung von Effekten, wie z. B. die Wärmeverteilung in der Kontaktzone unter Berücksichtigung variierender Schnittgeschwindigkeiten und Vorschüben pro Zahn. In den nun folgenden Ergebnissen wurde jeweils nur eine Wendeschneidplatte in den Aufsteckfräskopf eingesetzt. Am Beispiel eines Experiments, ist zu zeigen, inwiefern die Temperaturverteilung im Werkstück, an ausgewählten Messpositionen, über den laufenden Prozess simuliert werden kann.

Die Urform des Werkstücks wurde in  $10 \times 10 \times 5$  Würfeln mit Abmessungen von  $5 \times 5 \times 4$  mm zerlegt, die wiederum in jeweils 6 Tetraeder unterteilt wurden. Hieraus ergibt sich eine Gesamtzahl von 3 000 Elementen und 726 Knotenpunkte. Die maximale Gitterweite liegt zu Beginn der Simulation bei 8.124 mm. Während der laufenden Simulation sind am bewegenden Gebietsrand 7 adaptive Verfeinerungen über die rein geometrische adaptive Strategie zugelassen, was zu einer minimalen Gitterweite von 2.031 mm führt. Mittels zusätzlicher adaptiver Verfeinerungen im Innern und am Rand des Werkstücks über Fehlerschätzer durch die Wärmeleitung (Gleichung (4.10), Kapitel 4.3.1) sind höhere Verfeinerungslevel möglich. Am diskreten Gebietsrand sind auch Vergrößerungen erlaubt, jedoch darf die maximale Verfeinerungslevel nicht unterschritten werden.

Das Werkstück wurde für die Experimente in der Fertigungsmaschine fixiert, dies erfolgte auch in der Simulation durch Dirichletbedingungen in der Deformationsgleichung. Hierfür wurden die Vorder- und Rückseite des Werkstücks bis zu einer Höhe von 10 mm in  $y$ -Richtung fixiert. Die Seite, die der Prozessrichtung gegenüber liegt, wurde ebenfalls bis zu einer Höhe von 10 mm in  $x$ -Richtung festgehalten und der Boden in  $z$ -Richtung. All diese Einspannungsflächen wurden für die Wärmeleitung mit Neumann-Null-Bedingung versehen, weil die Flächen in den Experimenten isoliert wurden.

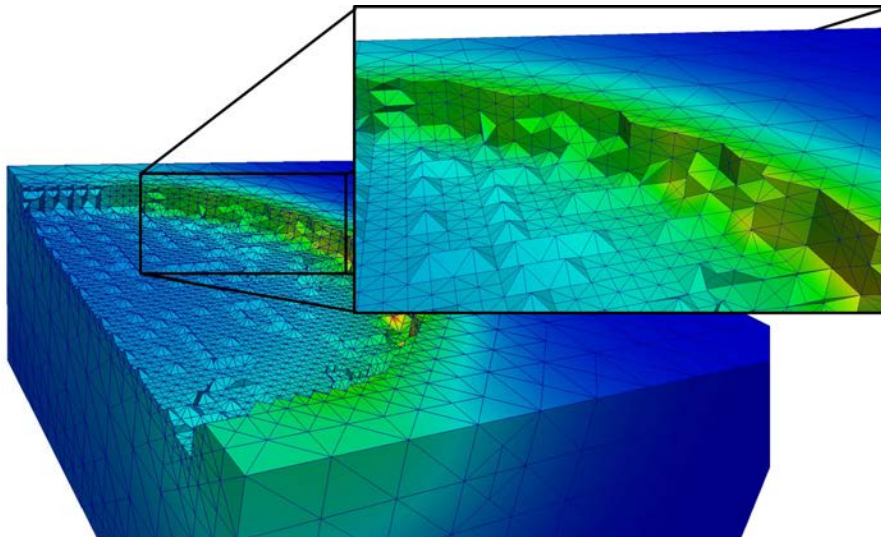


Abbildung 5.24: Werkstückgebiet mit Vergrößerung der Randapproximation.

Abbildung 5.24 zeigt einen vergrößerten Ausschnitt aus dem einfachen Fräsprozess nach ca. 12 Sekunden. In der Vergrößerung sind Anpassungen an den Gebietsrand mit Elementen dargestellt, die 6-7 mal verfeinert wurden.

In Abbildung 5.25 ist die Temperaturverteilung auf der Oberfläche des Werkstücks zu unterschiedlichen Zeitpunkten gegeben. Die Simulation wurden im voll gekoppelten System durchgeführt. Die Temperatur innerhalb des Werkstück nimmt über die Zeit kontinuierlich zu. Zum Ende der Simulation (Abbildung 5.25(f)) ist eine Sättigung der Temperatur zu erahnen, welche Homogenisierungstemperatur genannt wird. Diese stellt

sich immer nach einem Prozess ein und beschreibt die Temperatur zu der das Werkstück gleichmäßig erwärmt ist, während sich das Werkstück gleichzeitig weiter abkühlt. In den Abbildungen 5.25 (a)-(c) wird außerdem die asymmetrische Verteilung der Wärmequelle sichtbar (Vergleiche hierzu auch Abbildung 5.23), die durch eine einzige Wendeschneidplatte und der Kombination aus Gleich- und Gegenlaufräsen erzeugt wird. Kurz vor Austritt des Werkzeugs aus dem Werkstück und auch während des Austritts ist an den weniger werdenden Material (Abbildung 5.25 (d)-(e)) ein Aufstauen der Wärmeenergie sichtbar. Durch weniger vorhandenes Material, kann die eingebrachte Wärme in diesen Bereichen nicht so schnell abfließen.

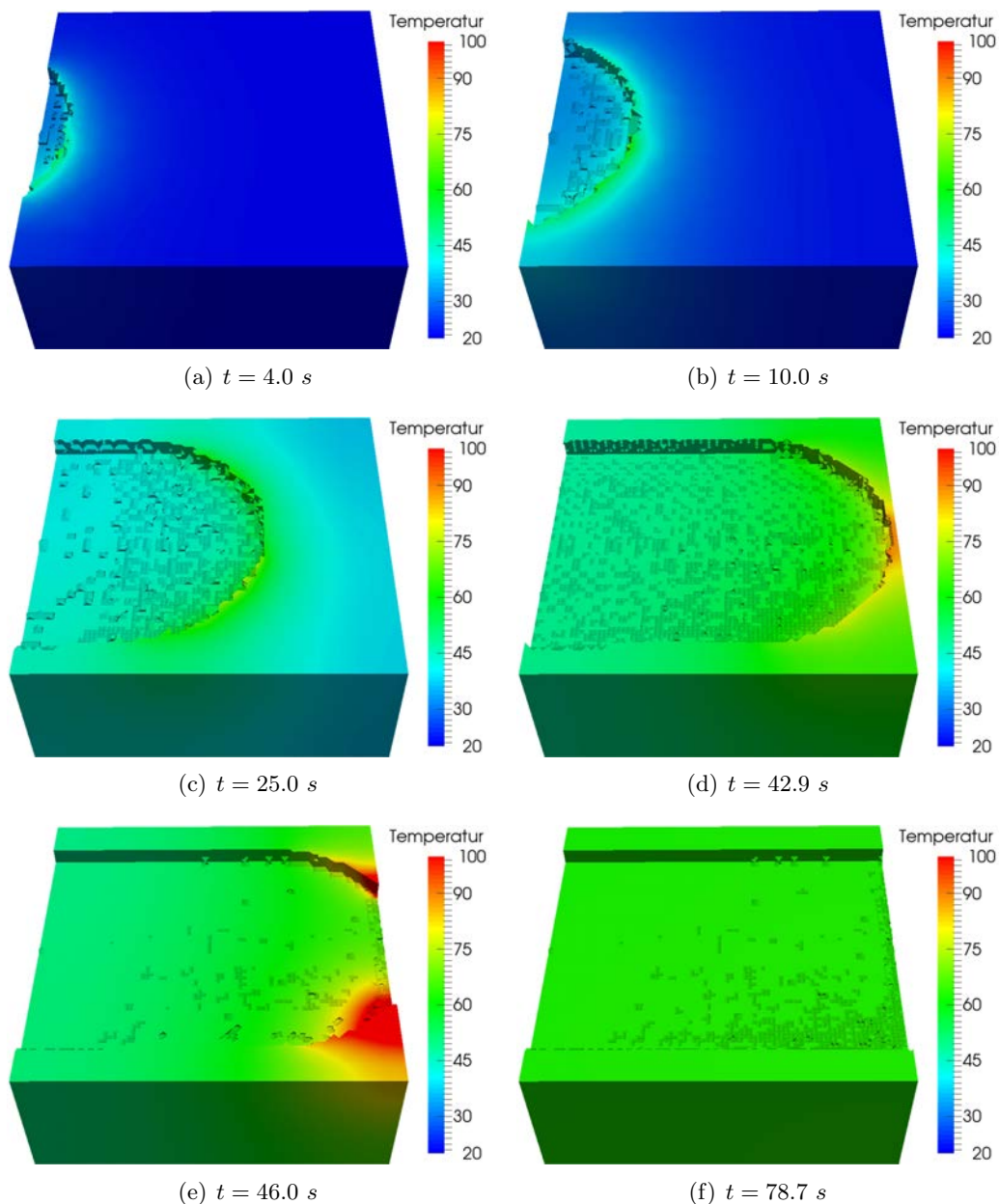


Abbildung 5.25: Darstellung der Temperaturverteilung im Werkstück während des Frärens einer Vollnut zu unterschiedlichen Zeitpunkten.

Neben der Temperaturverteilung im Werkstück ist in der Abbildung 5.26 die temperaturinduzierte Verschiebung des Werkstücks während des laufenden Prozesses dargestellt. Eine mechanische Ausdehnung wurde hier noch nicht berücksichtigt, weil die Übergabe von Prozesskräften in der Kopplung nicht realisiert wurde. Um die thermische Ausdehnung des Werkstücks von bis zu  $26 \mu\text{m}$  sichtbar zu machen, wurde die Deformation über den *Warp-by-Vector*-Filter mit dem Faktor 100 verstärkt. Den Abbildungen ist

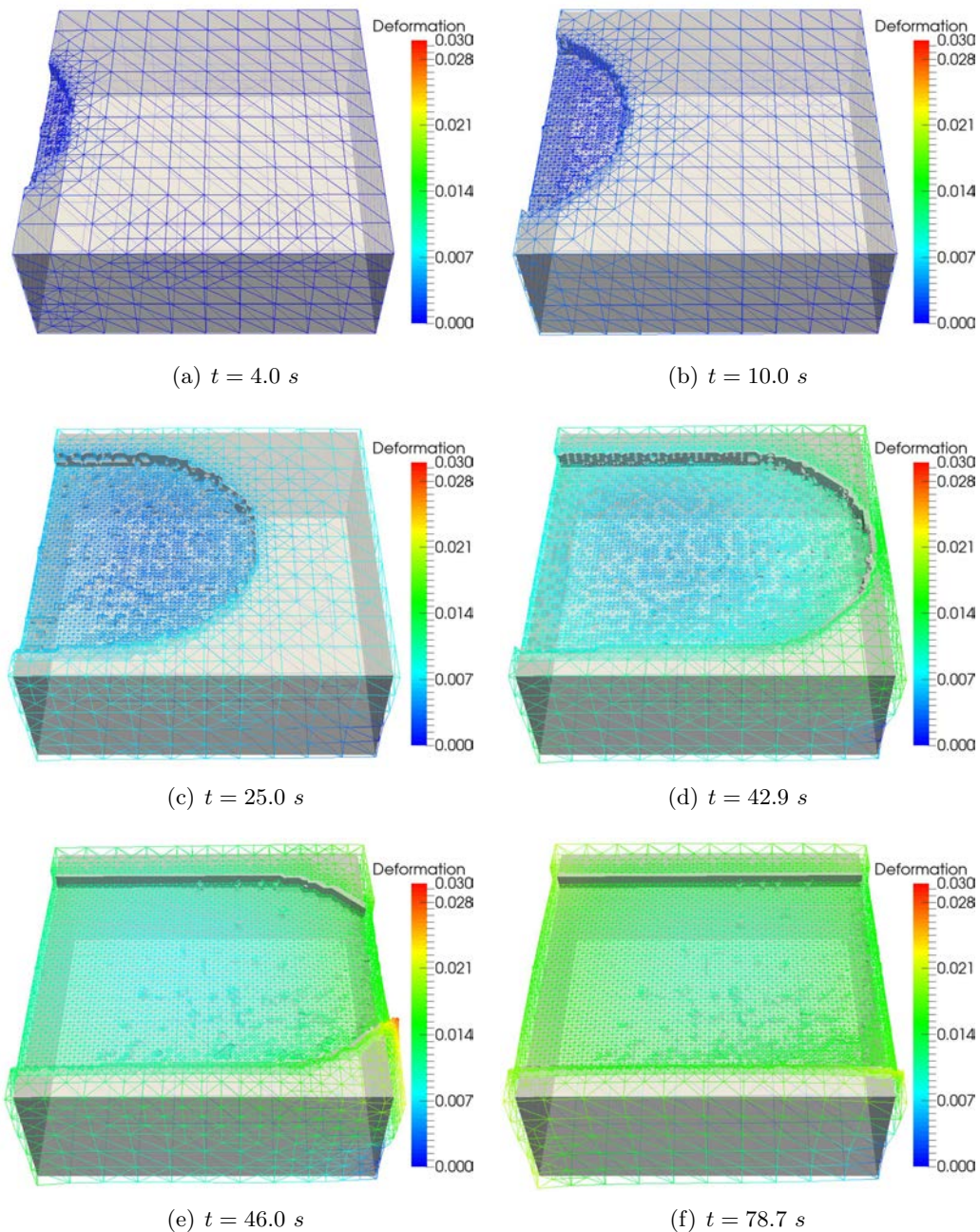


Abbildung 5.26: Darstellung der Deformation im Werkstück während des Fräsens einer Vollnut zu unterschiedlichen Zeitpunkten, 100-fach verstärkt.

weiter zu entnehmen, dass die Ausdehnung parallel zur Erwärmung des Werkstücks zunimmt, was zu erwarten ist (Siehe Gleichung 3.26, Kapitel 3.4). Die größte Deformation

tritt beim Austritt des Werkzeugs aus dem Werkstück auf. Nach Ende des Prozesses und auch der Simulation ergibt sich eine Ausdehnung von ca.  $17 \mu\text{m}$ , die schließlich weiter abnimmt, bis sich das Werkstück abgekühlt hat.

Auf Basis von Experimenten wurde eine Identifizierung des thermischen und mechanischen Verzugs vorgenommen. Über einen Soll-Ist-Vergleich ist eine maximale Abweichung von  $7 \mu\text{m}$  zur Sollgestalt ermittelt worden [23]. Solch kleine Abweichungen sind mit diesem Modell jedoch nicht darstellbar, weil das FE-Gitter zu stark verfeinert werden müsste und dadurch die Simulationszeit erheblich verlängern würde. Stattdessen sind die Abweichungen von der Sollgestalt in der Materialabtragssimulation zu berechnen und visualisieren [47].

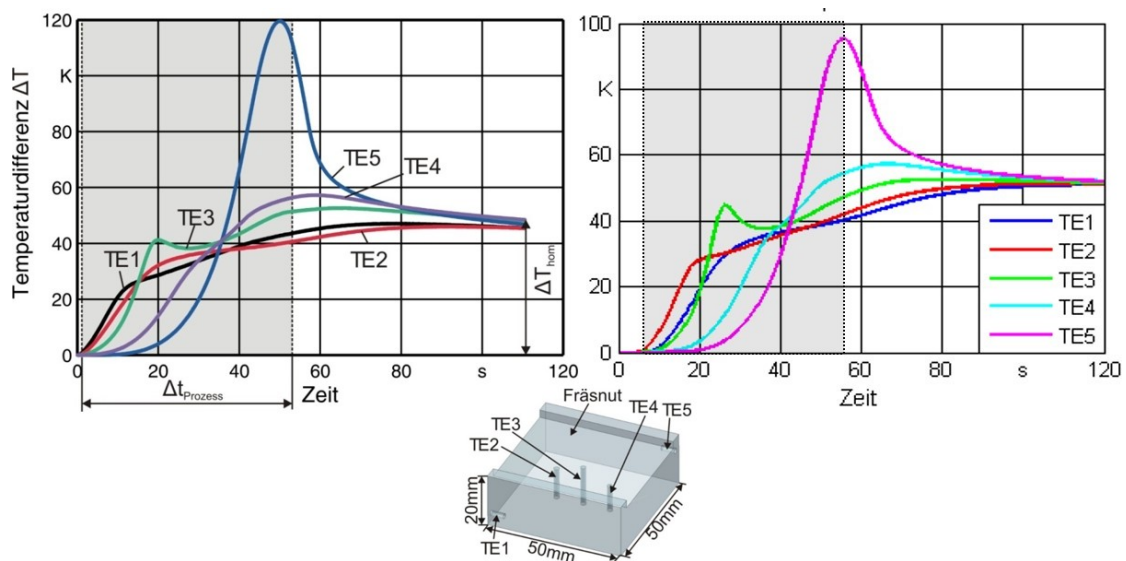


Abbildung 5.27: Vergleich der Temperaturverteilung im Werkstück von Experiment (links) und Simulation (rechts) beim Fräsen der Vollnut an ausgewählten Messpositionen.

Ein Vergleich der Temperaturverteilung im Werkstück erfolgt an Messpunkten, die über das Bauteil verteilt sind (Abbildung 5.27 (Mitte)). Die genauen Positionen sind der Tabelle 5.3 zu entnehmen. Zum Ablesen der Positionsdaten ist das Werkstück nach dem Koordinatenursprung im ersten positiven Quadranten ausgerichtet. Bei Gegenüberstellung der Temperaturverläufe von Simulation und Experiment fällt auf, dass die experimentell ermittelten Temperaturverläufe im Peak bis zu 20 Kelvin höher liegen als in der zugehörigen Simulation. Dies kann viele Gründe haben. Zum einen könnten die ermittelten Wärmeströme nicht korrekt sein. Andererseits könnte der verwendete, konstante Wärmeübergangskoeffizient, der zwischen Werkstück und dem umgebenden Gas über die Robinbedingung verwendet wird, falsch sein. Für sämtliche Simulationen wurde ein Übergangskoeffizient von  $15 \text{ W}/\text{m}^2 \text{ K}$  verwendet. Eine zusätzliche experimentelle Erfassung der Temperatur des umgebenen Gases würde hier eine Parameteridentifikation erlauben, um damit einen temperaturabhängigen Übergangskoeffizienten mit Hilfe eines einfachen Optimierungsansatzes zu ermitteln.

Möglich ist auch, dass die Thermolemente nicht korrekt nach Maß angebracht wur-

den. Hierfür sind Bohrungen im Werkstück angefertigt und die Elemente mittels Leitpaste fixiert worden. Durch Ungenauigkeiten während der Anbringung, Lufteinschlüsse in der Leitpaste und auch durch Verrutschen der Thermoelemente, während der Befestigung des Werkstücks an der Fertigungsmaschine, sind Unterschiede im Vergleich auch zu erklären. In der Simulation bestehen solche Probleme nicht. Hier sind die Messpunkte an festen Koordinaten im Werkstück positioniert (Tabelle 5.3).

Koordinate	TE1	TE2	TE3	TE4	TE5
$x$	5 mm	15 mm	25 mm	35 mm	45 mm
$y$	3 mm	25 mm	25 mm	25 mm	47 mm
$z$	3 mm	12 mm	15 mm	11 mm	15 mm

Tabelle 5.3: Positionen der Thermoelemente im Werkstück bei Ausrichtung im Koordinatenursprung.

Trotz der Abweichungen sind in Abbildung 5.27 gute Übereinstimmungen in den Temperaturverläufen festzustellen, sodass ein realitätsnahes, simulationsgestütztes thermomechanisches Werkstückverhalten während des Prozesses berechnet werden kann.

Die vorangegangenen Simulationsergebnisse wurden zwar über die Kopplung mit der Abtragssimulation ermittelt, allerdings unter Einschränkungen. Die Ergebnisse basieren auf Informationen, die lediglich über ein einzelnes Dexelfeld mit Wärmestrominformationen an den Dexelendpunkten übermittelt wurden. Weitere Dexelfelder als auch Informationen über Prozesskräfte in der Kontaktzone zwischen Werkzeug und Werkstück wurden nicht berücksichtigt. Hieraus ist ein weiterer möglicher Grund ableitbar die Unterschiede im Vergleich mit Experimenten zu erklären.

Erst die Komplettierung der Kopplung durch Berücksichtigung sämtlicher Dexelfelder in allen Raumrichtungen sowie die Übermittlung von Informationen auch von Prozesskräften, erlauben erst ein vollständig zu ermittelndes thermisches und mechanisches Verhalten des Werkstücks. Zum testen der vollständigen Kopplung wurden die experimentellen Versuche nur in der Simulation wiederholt. Allerdings mit einem vollständig ausgestatteten Walzstirn-Aufsteckfräskopf mit insgesamt 4 Wendeschneidplatten. Dies hat zur Folge, dass die Prozesszeit stark verkürzt wird sowie mehr Wärme im Bauteil eindringt, aber ein Vergleich mit den Experimenten nicht mehr möglich ist.

Abbildung 5.28 (rechts) zeigt den Temperaturverlauf für 4 Schneiden, an den bekannten Messpositionen der Thermoelemente. Zum einen ist klar, dass die Prozesszeit deutlich kürzer ist als zu den obigen Ergebnissen (Abbildung 5.27), zum anderen wird durch mehr Zähne, zusätzliche Wärme ins Werkstück eingebracht (Insbesondere an Messposition TE5). Die Linke Grafik zeigt die zugehörige Ausdehnung des Werkstücks ebenfalls an den gleichen Messpositionen. Zu diesen einfachen Prozess existieren keine experimentellen Ausdehnungsmessungen, so dass die simulierte Deformation an den gleichen Positionen zu ermitteln ist, wie die Temperatur. Hier zeigen die gestrichelten Linien die rein temperaturinduzierte Ausdehnung und die durchgezogenen Linien, die



gesamte Deformation. Die Differenz entspricht der mechanischen Ausdehnung und resultiert aus der eingebrachten Prozesskraft. Deren Einfluss ist zwar insgesamt sehr klein, aber durchaus ermittelbar.

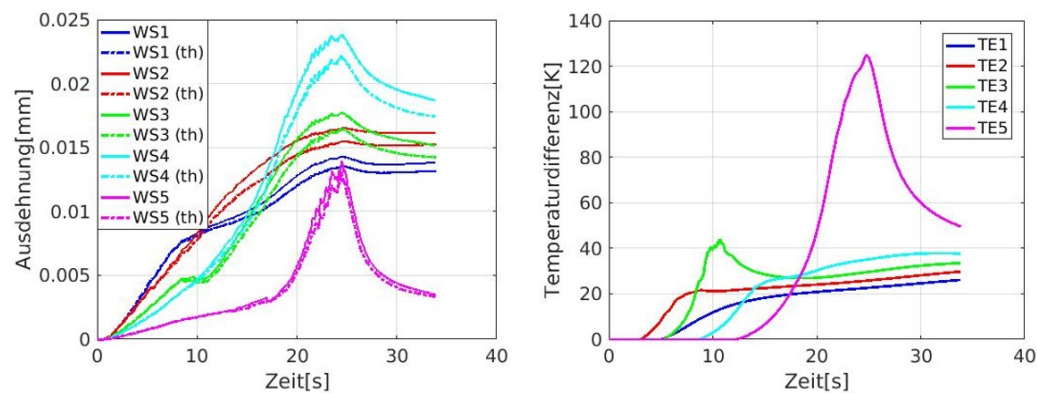


Abbildung 5.28: Vergleich rein thermischer und mit mechanischer Ausdehnung (links) und Temperaturverteilung (rechts) beim einfachen Fräsprozess mit 4 Schneiden.

Die obigen Verläufe zeigen, dass in der Analyse eine Unterscheidung zwischen thermischen und mechanischen Werkstückverhalten möglich ist. Sie zeigen auch, dass das Verhalten des Werkstücks im wesentlichen von der eingebrachten Wärme im laufenden Prozess beeinflusst wird.

### Bohren ins Volle

Ein einfacher Bohrprozess wird durch das Bohren einer Öffnung im Werkstück ohne Durchstoß beschrieben. Hierfür wird ein Werkstück aus C45EN (Materialkennwerte siehe Anhang B) der Größe  $50 \times 50 \times 50 \text{ mm}$  verwendet. Die experimentellen Bohrungen wurden mit einem Bohrer der Firma KENNAMETAL mit Durchmesser  $20 \text{ mm}$  durchgeführt. Weitere Prozessparameter sind der Tabelle 5.4 zu entnehmen.

Prozessparameter		Gitterparameter	
Maschine:	HELLER MCi16	max. Gitterweite:	8.6603 mm
Werkzeug:	KSEM200R5WN25M	Min. Gitterweite:	1.0825 mm
Schneidstoff:	KC7315	Elemente zu Beginn:	6 000
Stirngeometrie:	KSEM200HPGM	Elemente am Ende:	451 000
Beschichtung:	TiAlN (PVD)	Verfeinerungen:	12
Thermoelemente:	Typ K (NiCr-Ni)		
Messverstärker:	SAK12-461-100-10		
Schnittgeschw. $v_c$ :	50 m/min		
Vorschub $f_z$ :	0.1 mm/z		
Wärmestrom (konst.):	572.1995 W		

Tabelle 5.4: Prozessrelevante Parameter zum einfachen Bohrprozess.

Ziel dieser einfachen Untersuchung ist die Ermittlung der Wärmeverteilung im Werk-

stück anhand experimenteller Daten an ausgewählten Messpositionen. Hierfür wurden eine Reihe von Experimenten mit variierenden Schnittgeschwindigkeiten und Vorschüben pro Zahn durchgeführt. Die zugehörigen Simulationen sind ohne die Materialabtragssimulation berechnet worden. Zur Visualisierung der Geometrieänderung wurde eine Level-Set Gleichung konstruiert, die eine imaginäre Hülle des Bohrwerkzeugs beschreibt. Die Hülle besteht aus der Mantelfläche eines Kegels an der Spitze des Werkzeugs und der eines Zylinders, die den Schaft des Werkzeugs beschreibt. Der Kegelboden sowie der Zylinderboden und -deckel besitzen den gleichen Durchmesser und liegen nahtlos übereinander. Die Mantelfläche des Kegels entspricht hierbei der Kontaktzone zwischen Werkzeug und Werkstück, und erhält eine gleichverteilte konstante Wärmequelle, die als Neumannbedingung definiert ist.

Die Simulationen entsprechen jedoch keiner realitätsnahen Abbildung des Prozesses. Hier soll lediglich überprüft werden, ob die simulative Abbildung des Bohrens möglich ist. Auf der Mantelfläche des Zylinders gilt eine Neumann-Null-Bedingung, so dass keine Wärme zwischen Werkzeug und Werkstück ausgetauscht wird. Nach Beendigung des eigentlichen Prozesses werden auf beiden Mantelflächen Robinbedingungen gesetzt, so dass das Werkstück auch über diese Flächen Wärme an das umgebene Gas abgeben kann.

Die Urform des Werkstücks wurde in  $10 \times 10 \times 10$  Würfeln mit Abmessungen von  $5 \times 5 \times 5$  mm zerlegt, die wiederum in jeweils 6 Tetraeder unterteilt wurden. Hieraus ergeben sich 6 000 Elemente mit 1 331 FE-Knotenpunkten zu Beginn der Simulation. Die maximale Gitterweite liegt hier bei 8.6603 mm. In der laufenden Simulation sind am bewegenden Gebietsrand bis zu 12 adaptive Verfeinerungen möglich, die das Rechengitter an den exakten Gebietsrand annähern. Dies führt zu einer minimalen Gitterweite von 1.0825 mm. Durch zusätzliche Verfeinerungen mittels Fehlerschätzer der Wärmeleitung sind höhere Verfeinerungslevel möglich. Auch hier sind Vergrößerungen am bewegenden Gebietsrand zulässig, allerdings darf die maximale Verfeinerungslevel nicht unterschritten werden.

Das Werkstück ist auf der Fertigungsmaschine eingespannt, so dass zwei Seiten bis zu einer Höhe von 10 mm zu fixieren sind. In der Simulation erfolgte die Fixierung als Dirichletbedingung für die Deformation in  $x$ -Richtung. Der Boden ist in  $z$ -Richtung festzuhalten. Alle fixierten Randflächen erhalten für die Wärmeleitung eine Neumann-Null-Bedingung, so dass hier kein Wärmeaustausch zwischen den Spannelementen und dem Werkstück stattfindet.

Der in den folgenden Abbildungen dargestellte Prozess erfolgte mit den in Tabelle 5.4 genannten Prozessparametern und wird 100 simulierte Sekunden lang betrachtet. Die konstante Zeitschrittweite beträgt hier  $t = 0.1$  s. Der Bohrprozess selbst ist nach 9.2 Sekunden abgeschlossen. Abbildung 5.29 zeigt den Prozess zu drei unterschiedlichen Zeitpunkten. Von oben nach unten folgt  $t = 3.2, 6.5$  und  $9.2$  s. Zur Visualisierung der Temperaturverteilung und der thermischen Ausdehnung im Werkstück, wurde dieses

diagonal zerlegt. Die schwarzen feinen Linien zeigen die eigentlichen Abmessungen des Werkstücks. In den linken Grafiken ist sehr deutlich die gleichverteilte Wärmequelle auf der Mantelfläche des Kegels sichtbar. Auch die Temperaturverteilung in das Innere des Werkstücks ist zu beobachten.

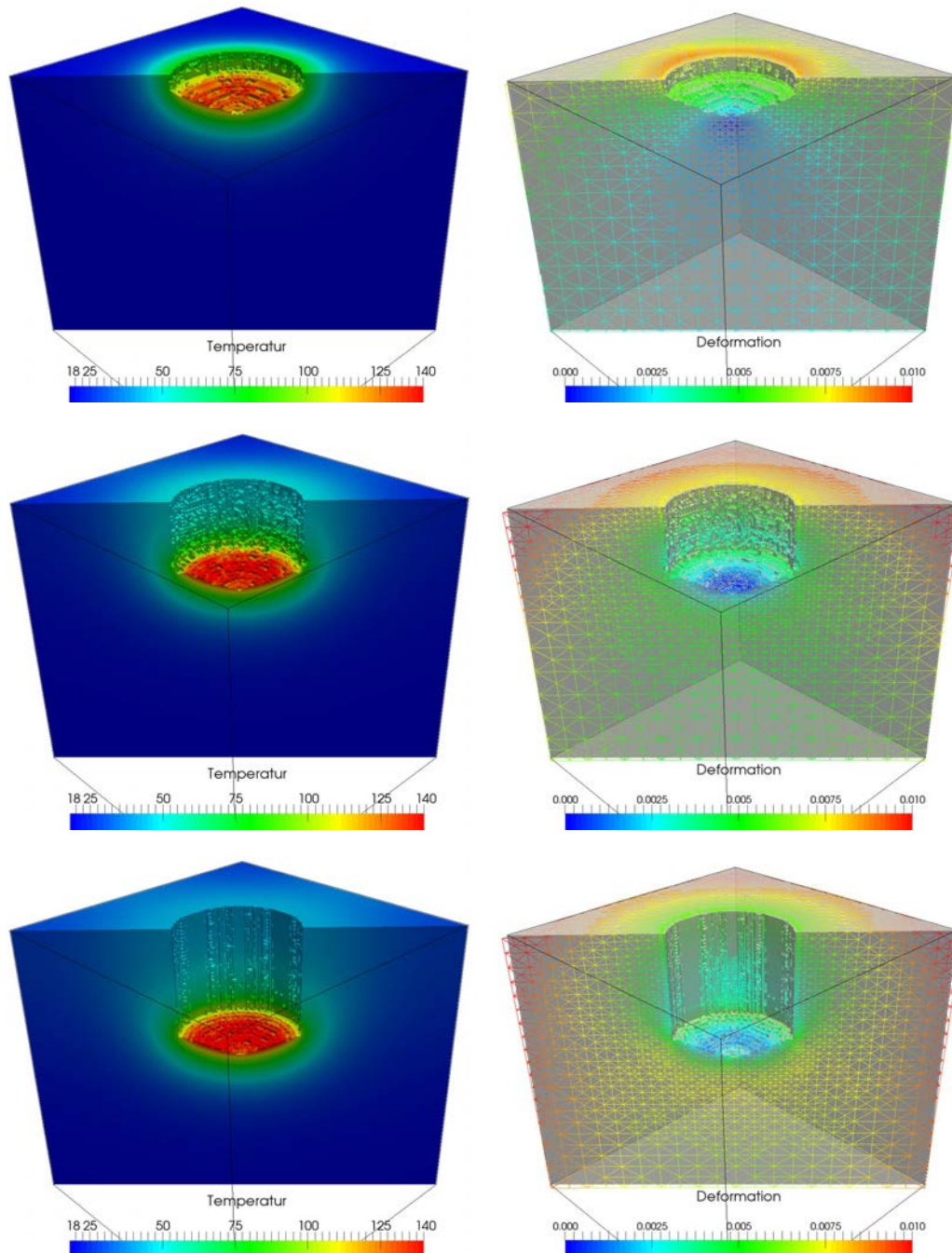


Abbildung 5.29: Darstellung des Bohrens ins Volle zu unterschiedlichen Zeitpunkten (Oben: zu  $t = 3.2$  s; Mitte: zu  $t = 6.5$  s; Unten: zu  $t = 9.2$  s) mit Temperaturverlauf (links) und Deformation 200-fach verstärkt (rechts).

In den rechten Grafiken ist die, zu den Zeitpunkten zugehörige, rein thermische Ausdehnung des Werkstücks dargestellt. Zur besseren Visualisierung wurde sie um den Faktor

200 verstärkt. Die thermische Ausdehnung breitet sich weitestgehend nach oben aus und bleibt im Bereich der Wärmequelle quasi Null. An der Bohrungswand scheint sich das Werkstück in Richtung des Bohrschaftes zu wölben, so dass der Schaft der Bohrung enger wird. Im gekoppelten System sollte hier ein zusätzlicher Materialabtrag stattfinden, der in eine Abweichung der Rundung resultiert [22, 47].

Koordinaten	TE1	TE2	TE3	TE4	TE5
$x$	13 mm	13 mm	5 mm	45 mm	37 mm
$y$	25 mm	25 mm	45 mm	5 mm	25 mm
$z$	45 mm	35 mm	5 mm	45 mm	40 mm

Tabelle 5.5: Positionen der Thermoelemente im Werkstück bei Ausrichtung im Koordinatenursprung.

Eine Vergleich der Simulationsdaten mit experimentellen Daten ist nur schwer möglich, da es sich hier um keinen gekoppelt simulierten Prozess handelt. Trotzdem kann ein Abgleich mit experimentell erfassten Daten erfolgen, um festzustellen, ob sich die Temperaturverläufe in etwa ähneln. Hierzu wurden die in Tabelle 5.5 ermittelten Messpositionen in der Simulation berücksichtigt (Siehe hierzu auch Abbildung 5.30, Mitte) und anschließend in Abbildung 5.30 dem realen Experiment gegenübergestellt. Als erstes fällt auf, dass die Temperaturverläufe in der Simulation deutlich höher sind, als im Experiment. Zudem sticht hier hervor, dass die Peaks an den Positionen TE1 bis TE3 im Laufe der Zeit hintereinander erfolgen, anstatt übereinander, wie in der experimentellen Erfassung (rechts). Hier liegt die Vermutung nahe, dass die Messpositionen nicht korrekt zugeordnet wurden.

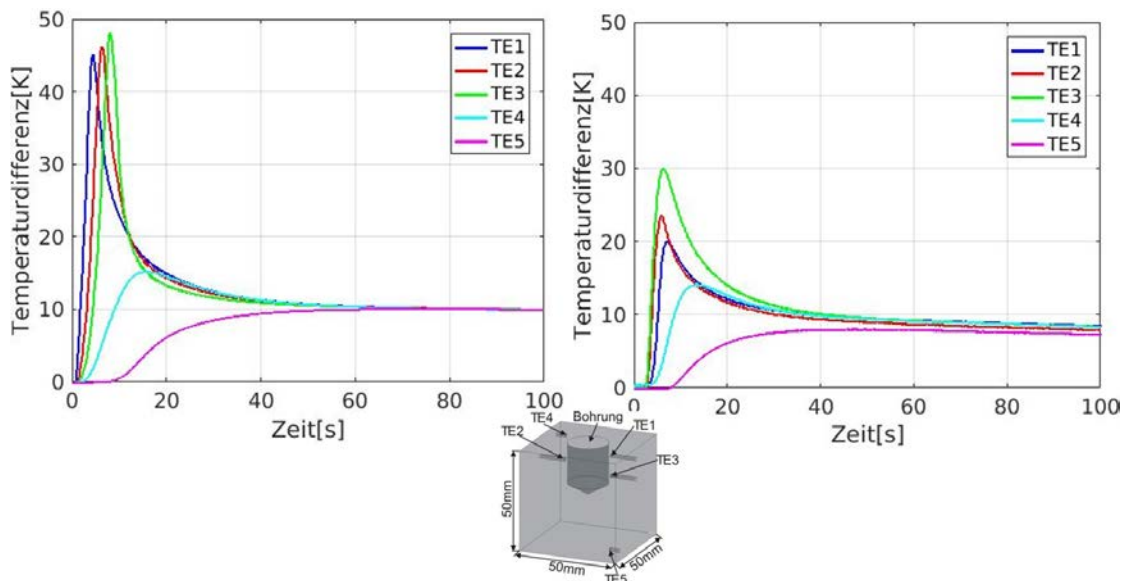


Abbildung 5.30: Vergleich der Temperaturverteilung von Simulation (links) und Experiment (rechts) beim Bohren ins Volle an ausgewählten Messpositionen.

Weiter fällt auf, dass die Temperaturverläufe in der Messung schwächer abfallen, als in der Simulation, was wohl an der niedrigeren Temperatur liegt. Nach Beendigung des Prozesses stellt sich in der Simulation relativ schnell eine Homogenisierungstemperatur ein, die bei 10 Kelvin liegt, während im Experiment selbst nach 100 Sekunden keine homogene Wärmeverteilung im Werkstück existiert, die sich jedoch bei ca. 8 Kelvin einpendelt.

Die Ergebnisse dieses einfachen Bohrprozesses zeigen, dass mit einer konstanten gleichverteilten Wärmequelle die Temperaturverläufe in der Simulation prinzipiell dargestellt werden können. Zur genaueren Überprüfung der experimentell erfassten Temperaturverläufe sollten die Simulationen im voll gekoppelten System wiederholt werden, um konkrete Aussagen zu einer realitätsnahen Abbildung des hier dargestellten Bohrprozesses treffen zu können.

### 5.3.2 Moderat-komplexe Zerspanprozesse

Die vollständige Kopplung von FE-CutS mit der Abtragssimulation erlaubt schließlich Simulationen von Zerspanprozessen mit steigender Komplexität. Die Basis zur Komplexitätssteigerung bilden die zuvor präsentierten Ergebnisse zu geometrisch einfachen Zerspanprozessen. Eine Steigerung der Komplexität ist beim Bohren durch wiederholtes Anfertigen mehrerer Bohrungen z.B. in unterschiedlicher Reihenfolge sowie das Durchstoßen des Werkstücks während der Bohrung gegeben.

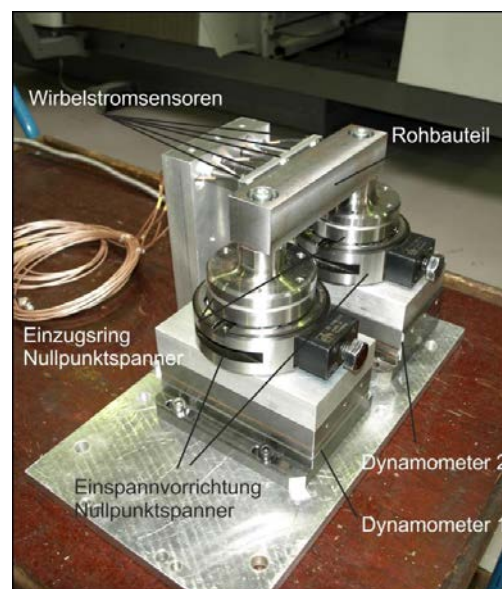


Abbildung 5.31: Versuchsaufbau zum moderaten Fräs- und Bohrprozess. Quelle: IFW, Hannover.

Beim Fräsen ist eine Steigerung der Komplexität durch Entfernen von Material in mehreren Ebenen oder Schichten, welches als Auskammern bezeichnet wird, gegeben. Statt nur eine Nut einzufräsen, wie beim obigen geometrisch einfachen Prozess, werden nun mehrere Nuten in immer tiefer gelegenen Ebenen in das Werkstück gefräst. Damit sind auch Richtungswechsel des Fräskopfes notwendig.

Die nachfolgend untersuchten Prozesse des Fräsens und Bohrens werden auf einen Versuchsstand durchgeführt, bei dem das Werkstück über zwei Dynamometer aufgespannt wird, die Auflager- und Prozesskräfte aufnehmen. Die Auflagerkraft bezeichnet hierbei eine Kraft, die von der Umwelt auf eine Lagerung (ein Auflager) auf ein Bauteil ausgeübt wird, wenn diese Lagerung eine Verschiebung des Bauteils an der Lagerstelle verhindert. Diese Kräfte werden in der folgenden Simulation jedoch nicht explizit berücksichtigt. Abbildung 5.31 zeigt den beschriebenen Versuchsaufbau. Für den folgenden Fräsprozess sind in einem kleinen Abstand auf der Rückseite des Werkstücks Wirbelstromsensoren (EC) montiert, die während des Prozesses die thermische Ausdehnung messen. Auf der Unterseite des Werkstücks sind Thermoelemente angebracht, die die Temperaturverteilung im Werkstück festhalten. Für den darauf folgenden Bohrprozess sind keine Anordnungen für Thermoelemente sowie Wirbelstromsensoren bekannt, sodass dort kein Vergleich mit experimentellen Daten erfolgt.

### Fräsen einer halben Tasche

Über ein Werkstück der Größe  $195 \times 40 \times 40 \text{ mm}$  wurden an dessen Enden, mittig zur Breite, zwei Bohrungen mit einem Durchmesser von  $16 \text{ mm}$  angebracht, um die Aufspannung, wie in Abbildung 5.31 gezeigt, zu ermöglichen. Auf der Unterseite sind wieder Bohrungen für Thermoelemente anzubringen. Diese werden, wie zuvor, nicht in der Simulation berücksichtigt. Für diesen Prozess wurden Experimente mit variierenden Schnittgeschwindigkeiten  $v_c$ , Schnittweiten  $a_e$  und Schnitttiefen  $a_p$  durchgeführt. In den folgenden Ergebnisse variiert die Vorschubgeschwindigkeit sehr stark, da Vorschubrichtungen und Ebenen gewechselt werden, so dass hierzu keine genauen Angaben möglich sind. Weitere Prozessparameter sind der Tabelle 5.6 zu entnehmen.

Prozessparameter		Gitterparameter	
Werkstoff:	C45EN	max. Gitterweite:	8.6603 mm
Maschine:	HELLER MCi16	min. Gitterweite:	1.1250 mm
Thermoelemente (TE):	Typ K (NiCr-Ni)	Elemente zu Beginn:	15 360
Messverstärker (TE):	SAK12-461-100-10	Elemente am Ende:	255 510
Sensoren (EC):	Kistler 9257B	Verfeinerungen:	9
Messverstärker (EC):	5070A		
Vorschub $f_z$ :	0.05 – 0.15 mm/z		
Schnittgeschw. $v_c$ :	275 m/min		

Tabelle 5.6: Prozessrelevante Parameter zum moderat-komplexen Fräsprozess.

Der Prozess selbst ist in zwei Abschnitte unterteilt: Schruppen und Schlichten. Beim Schruppen (im Englischen *roughing* genannt) wird möglichst viel Material abgetragen. Durch mehrmaliges Eintauchen des Werkzeugs in das Werkstück wird, über mehrere Ebenen, möglichst viel Material aus diesem entfernt.

Der Schlichtprozess (im Englischen *finishing* genannt) säubert nach dem Schruppen die Werkstückoberfläche. Hierbei gilt es möglichst wenig Material zu entfernen. Mit grin-

gen Schnittweiten, über mehrere Ebenen, erfolgt eine Säuberung des Werkstücks. Auch der Boden der Auskofferung ist zu reinigen.

Die Urform des Werkstücks wurde hier in drei Teile zerlegt: 2 Würfel ( $35 \times 40 \times 40 \text{ mm}$ ) und dem Mittelteil ( $125 \times 40 \times 40 \text{ mm}$ ). In den beiden Würfeln wurde jeweils ein Bohrloch für die Befestigung am Dynamometer berücksichtigt, so dass die Würfel in unterschiedlich große Quader, die wiederum in 6 Tetraeder zu unterteilen sind, zerlegt wurden. Auf der Unterseite jedes Würfels sind für die Deformation die Rechtecke um die Bohrungen sowie jeweils zwei Reihen von Elementen von der Bohrung bis zur Außenwand mit Dirichletbedingungen versehen worden (Abbildung 5.32 in orange), so dass das Werkstück schließlich in  $z$ -Richtung festgehalten wird. Die Randflächen innerhalb der Bohrungen sind ebenfalls zu fixieren und mit Dirichletbedingungen zu versehen, jedoch ist hier das Werkstück in  $x$ - und  $y$ -Richtung festzuhalten.

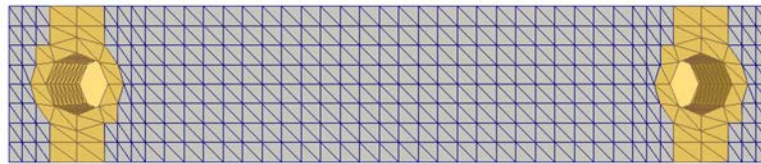


Abbildung 5.32: Unterseite des Referenzbauteils mit in orange markierten Elementen, welche eine Dirichletbedingung erhalten und mit denen das Werkstückgebiet fixiert wird.

Für die Wärmeleitungsgleichung sind all diese Flächen mit Neumann-Null-Bedingungen zu versehen, so dass kein Wärmeaustausch zwischen der Halterung und dem Werkstück stattfinden kann, was eigentlich falsch ist, da im Experiment Wärme über die Einspannung abgeführt wird. Die Bestimmung eines Wärmeübergangskoeffizienten zwischen zwei Metallen ist schwierig, weil der Werkstoff der Einspannung nicht bekannt ist.

Im Mittelteil findet schließlich der eigentliche Prozess statt. Dieser ist in  $25 \times 8 \times 8$  Würfel zerlegt worden, die wiederum in jeweils 6 Tetraeder zu zerlegen sind. Für die Deformation sind an den Randflächen abschnittsweise definierte Neumannbedingungen zu setzen und für die Wärmeleitung ebenfalls Randbedingungen bestehend aus der Neumannbedingung, falls ein Wärmestrom vorliegt oder einer Robinbedingung. Das Ergebnis ist ein aus insgesamt 15 360 Elementen sowie 3 384 Knotenpunkten bestehendes Werkstück zu Beginn der Simulation. die maximale Gitterweite liegt hier bei  $8.6603 \text{ mm}$ . Es sind bis zu 9 adaptive Verfeinerungen zur Anpassung an den bewegenden Gebietsrand möglich, so dass die minimale Gitterweite bei  $1.1250 \text{ mm}$  liegt. Durch zusätzliche Verfeinerungen über die Fehlerabschätzung der Wärmeleitungsgleichung im Inneren des Werkstückgebiets sind höhere Verfeinerungslevel möglich. Auch sind Vergrößerungen zulässig, allerdings dürfen diese am Gebietsrand die maximale Verfeinerungslevel nicht unterschreiten.

In den Abbildungen 5.33 - 5.37 sind die Temperaturverteilung sowie die Deformation, bestehend aus thermischer und mechanischer Ausdehnung, während der Simulation des Fräsens zu mehreren Zeitpunkten über Schichten und Schruppen dargestellt. Hierbei

sind der Abbildung 5.33 (von oben nach unten) zu  $t = 4, 69, 142$  und  $174$  Sekunden Momentaufnahmen der Temperaturverteilung auf der Werkstückoberfläche während des Schruppens zu sehen. Die Abbildung 5.34 (a) zeigt eine Momentaufnahme der letzte Ebene des Schruppens. Nach etwa 254 simulierten Sekunden ist der Schruppprozess beendet.

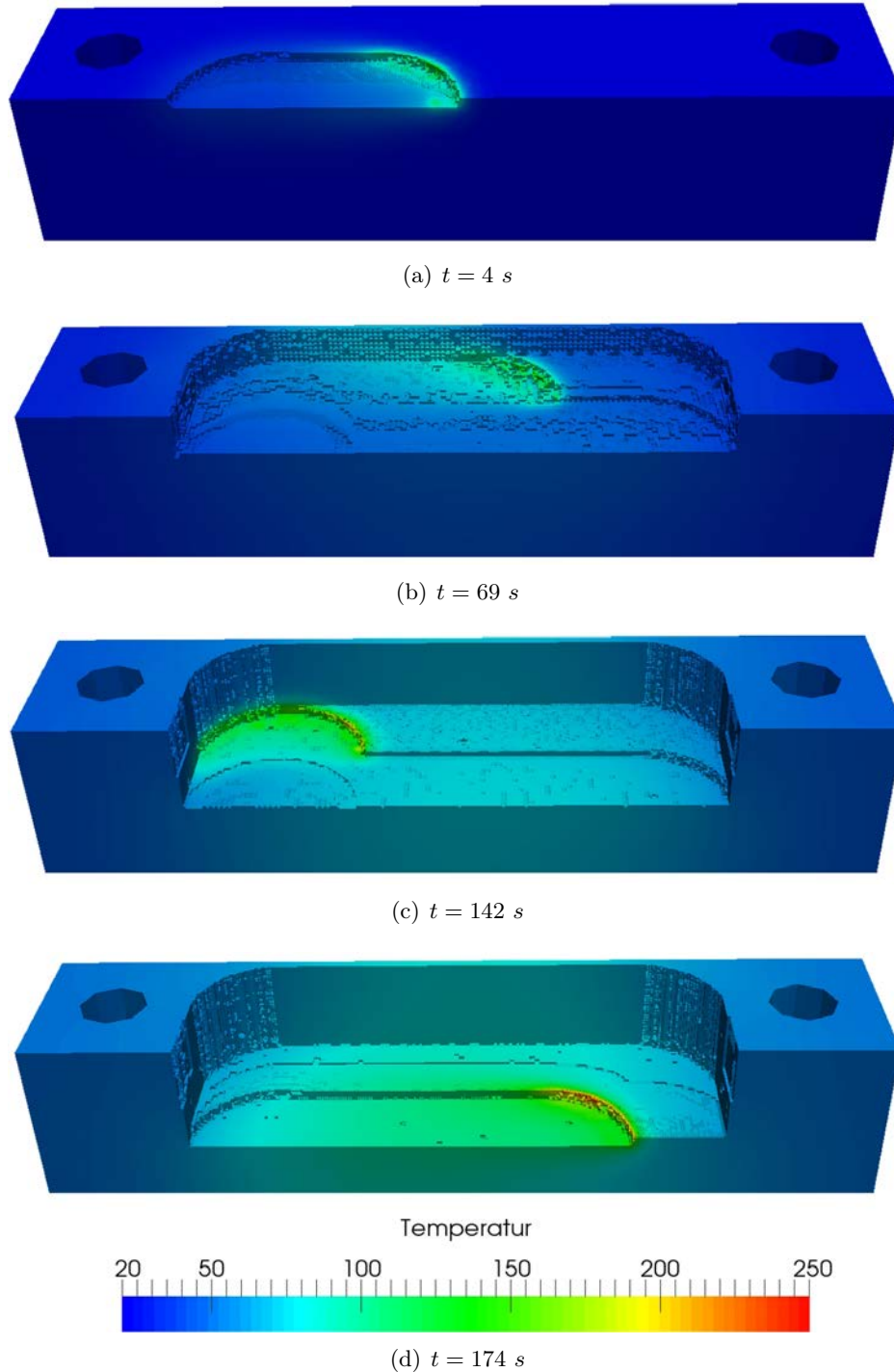


Abbildung 5.33: Temperaturverteilung im Werkstück während des Fräsens einer halben Tasche zu unterschiedlichen Zeitpunkten.



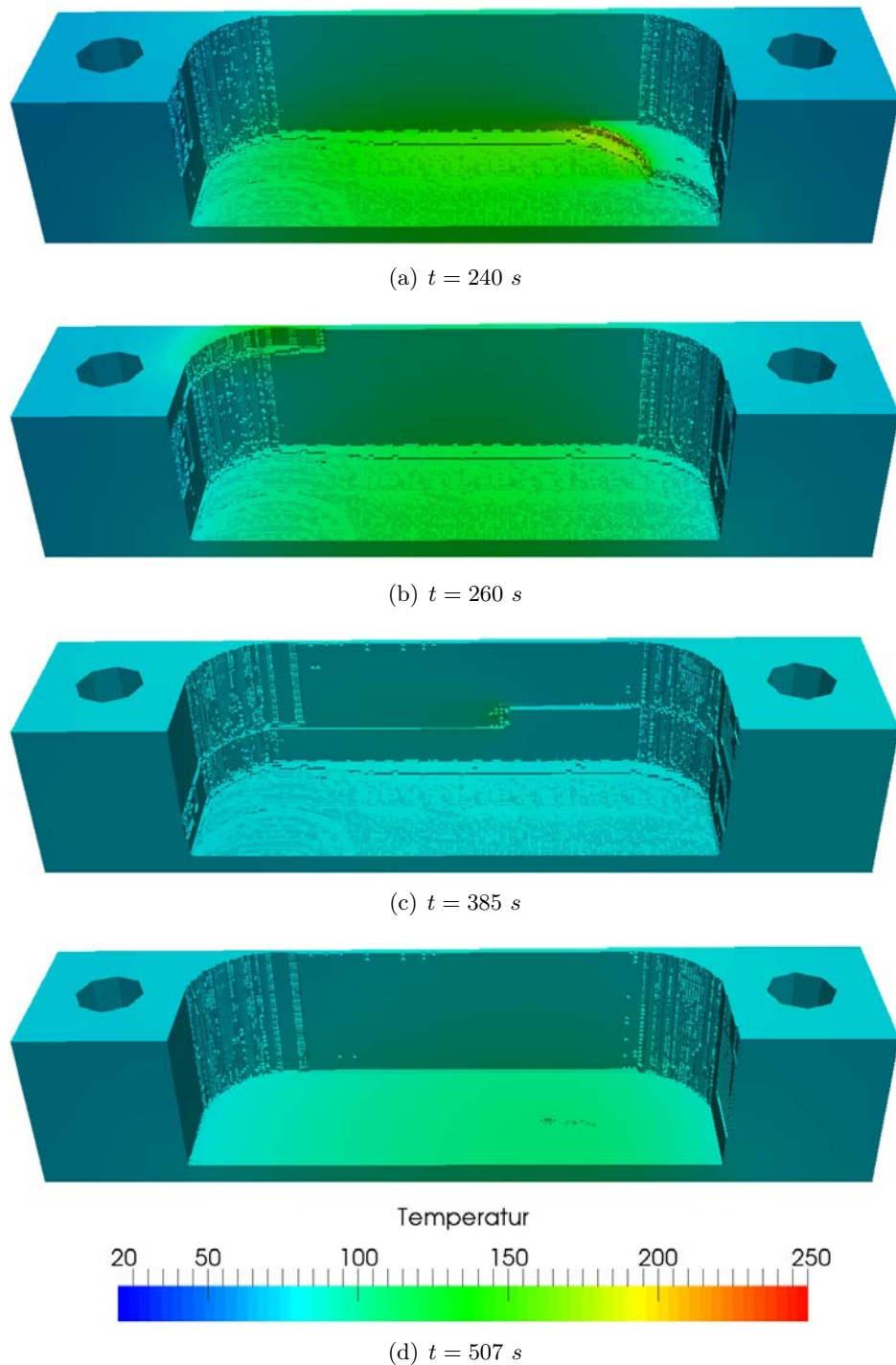


Abbildung 5.34: Temperaturverteilung im Werkstück während des Fräsens einer halben Tasche zu unterschiedlichen Zeitpunkten (Fortsetzung).

Ohne Unterbrechung der Simulation beginnt anschließend der Schlichtprozess. Abbildungen 5.34 (b)-(c) zeigen zu den Zeitpunkten  $t = 260$  und  $385$  Sekunden die Position des Werkzeugs während des Schlichtens. Hier wird auch sichtbar, dass nur wenig Material abgetragen wird und die Wärmeeinträge in der Kontaktzone deutlich geringer sind. Abbildung 5.34 (d) zeigt zum Zeitpunkt  $t = 507$  Sekunden das fertige Werkstück mit zugehöriger Temperaturverteilung nach Beendigung des Prozesses. Die Simulation ver-

wendet hier einen Zeitschritt von  $t = 0.25$  s, der gleichzeitig dem Austauschzeitschritt der Daten zwischen den Modellen entspricht. Insgesamt sind 2 028 Zeitschritte bis zu Vollendung der Simulation notwendig. Die Berechnung des thermischen und mechanischen Werkstückverhaltens in der FEM entspricht ca. 2 Werktagen.

Über alle Abbildungen hinweg ist eine sehr gut die Bewegung der Kontaktzone in der Zeit sowie der dort wirkende Wärmeeintrag durch den Zerspanprozess sichtbar. Weiterhin ist zu beobachten wie sich das Werkstück über den Prozessverlauf erwärmt. Der Steg an der Rückwand und der Boden der Auskoffnung erwärmen sich besonders stark. Der Grund hierfür ist nur wenig verbleibendes Material, so dass sich dort die eingebrachte Wärmeenergie besonders stark aufstaut. Nach dem Schrumpfen besitzt der Steg eine Dicke von  $2.5$  mm und der Boden eine Dicke von  $5$  mm. Während des Schlichtens werden am Steg und Boden jeweils  $0.5$  mm zusätzliches Material abgetragen, so dass nach dem Prozess eine Wandstärke am Steg von  $2$  mm verbleibt und am Boden von  $4.5$  mm.

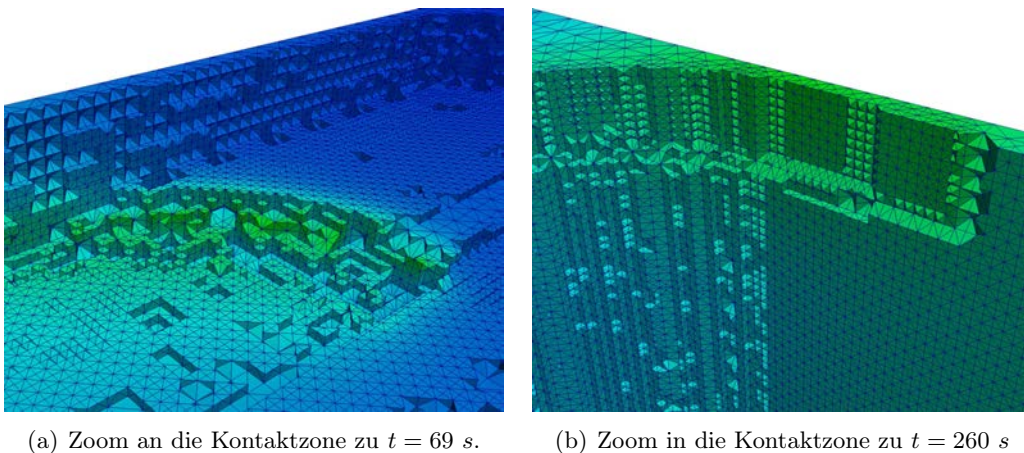


Abbildung 5.35: Zoom in die Kontaktzonen beim Schrappprozess (links) und Schlichtprozess (rechts).

Abbildung 5.35 zeigt Nahaufnahmen der Kontaktzone am sich bildenden Steg während des Schrappens (links) und des Schlichtens (rechts). Hier ist jeweils die adaptive Anpassung an den bewegenden Gebietsrand sehr anschaulich wiedergegeben. Die Makro-Triangulierung des Rechengitters ist hier so konstruiert worden, dass der Steg während des Schrappens durch eine gröbere Verfeinerung angenähert werden kann (linke Grafik) und erst beim Schlichten (rechte Grafik) eine höhere Verfeinerung für die Gebietsanpassung des Stegs erforderlich ist.

In den Abbildungen 5.36 und 5.37 ist die zugehörige Deformation durch thermische und mechanische Ausdehnung dargestellt. Zu den gleichen Zeitpunkten wie in den Abbildungen 5.33 und 5.34 sind Momentaufnahmen der Verschiebung des Werkstücks zu entnehmen. Zur besseren Visualisierung wurde die Deformation um den Faktor 100 verstärkt. Wie zu erwarten, nimmt die Deformation während des Schrappens stetig zu und erreicht zum Ende des Schrappprozesses ihre größte Ausdehnung (ca.  $50$   $\mu$ m) an Rückwand und Boden. Auch ist in den Abbildungen sichtbar, dass an den Einspannungen des

Werkstücks, die Deformation nahezu Null ist, was zeigt, dass die gesetzten Dirichletbedingungen in der Simulation berücksichtigt werden.

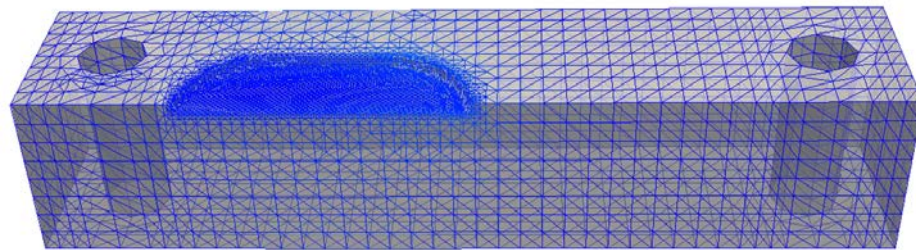
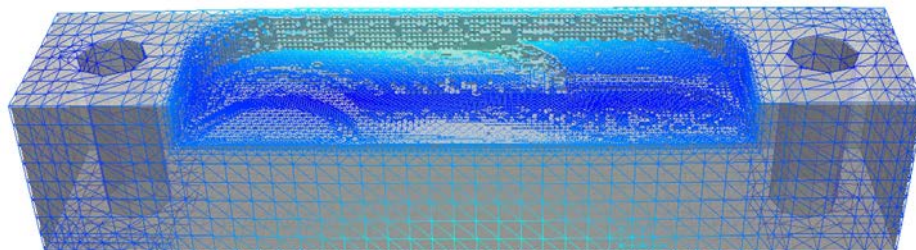
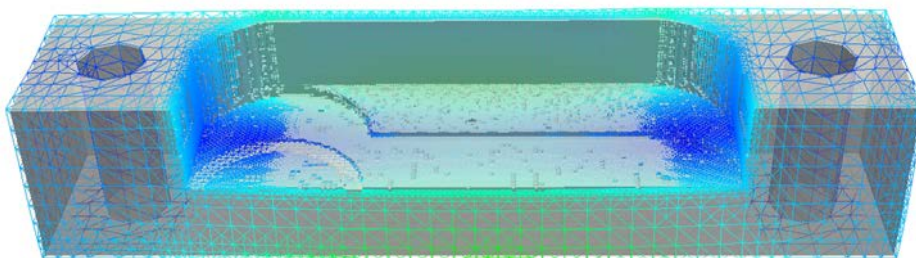
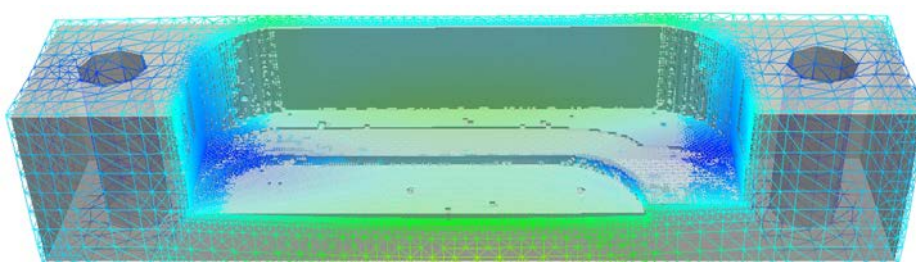
(a)  $t = 4 \text{ s}$ (b)  $t = 69 \text{ s}$ (c)  $t = 142 \text{ s}$ (d)  $t = 174 \text{ s}$ 

Abbildung 5.36: Darstellung der Deformation im Werkstück während des Fräsens einer halben Tasche zu unterschiedlichen Zeitpunkten, 100-fach verstärkt.

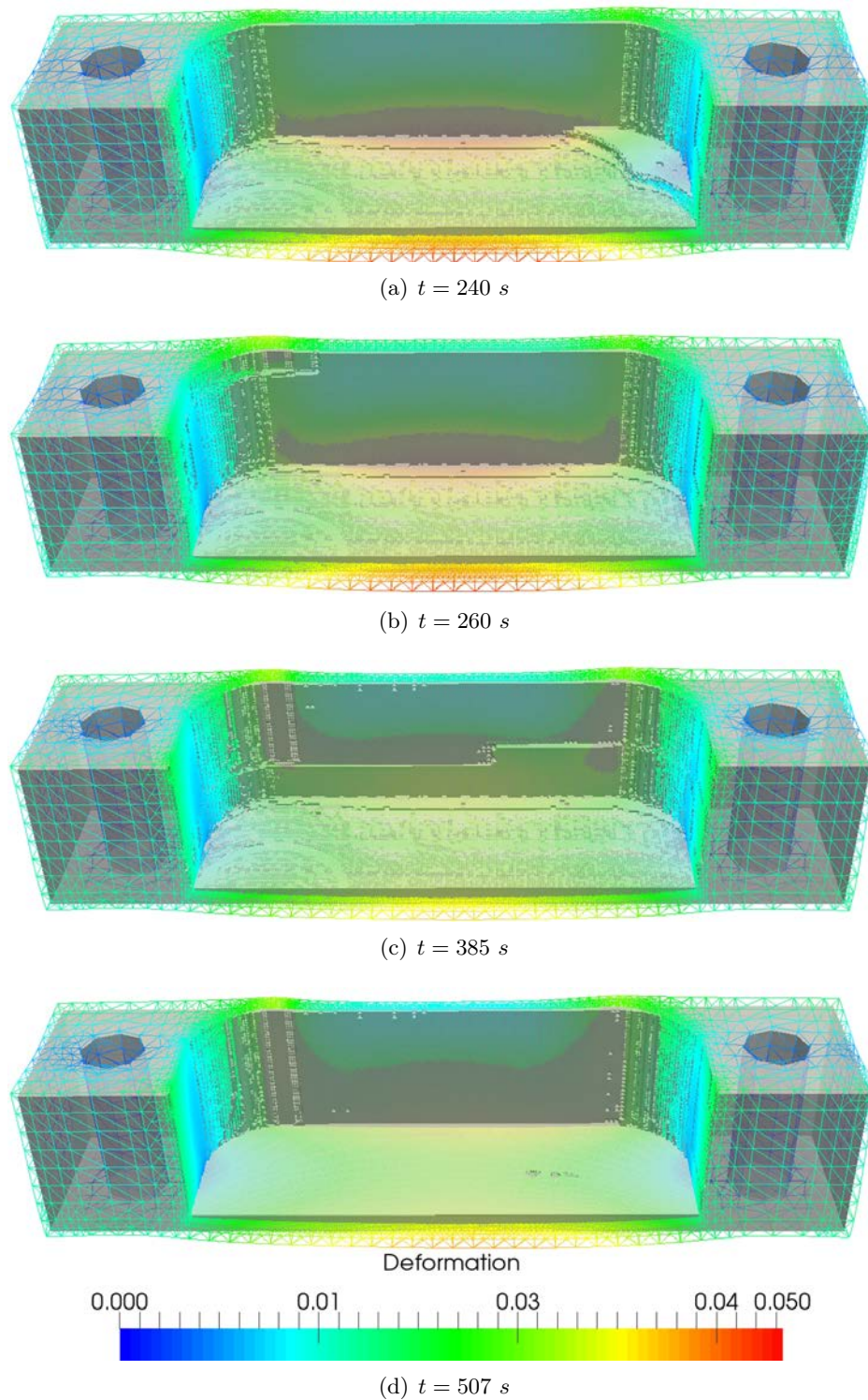


Abbildung 5.37: Darstellung der Deformation im Werkstück während des Fräsens einer halben Tasche zu unterschiedlichen Zeitpunkten, 100-fach verstärkt (Fortsetzung).

Es zeigt sich weiter eine Abnahme der Deformation während des Schlichtens. Das liegt zum einen daran, dass im Schlichtprozess weniger Energie über die Kontaktzone ins Werkstück übertragen wird und andererseits eine Abkühlung des Werkstücks erfolgt. Sowohl in der experimentellen Überprüfung [24] als auch in der Materialabtragssimulation

ist ein signifikanter Verzug zu identifizieren, der durch den vorliegenden Zerspanprozess entsteht. In FE-CutS ist dieser, wie bereits erwähnt, nicht sichtbar.

Koord.	TE1	TE2	TE3	TE4	TE5
$x$	146.5 mm	122.0 mm	97.5 mm	73.0 mm	48.5 mm
$y$	32.5 mm	20.0 mm	32.5 mm	20.0 mm	32.5 mm
$z$	4.5 mm	4.5 mm	4.5 mm	4.5 mm	4.5 mm

Koord.	EC1	EC2	EC3	EC4	EC5
$x$	146.5 mm	122.0 mm	97.5 mm	73.0 mm	48.5 mm
$y$	40.0 mm	40.0 mm	40.0 mm	40.0 mm	40.0 mm
$z$	37.5 mm	12.5 mm	37.5 mm	12.5 mm	37.5 mm

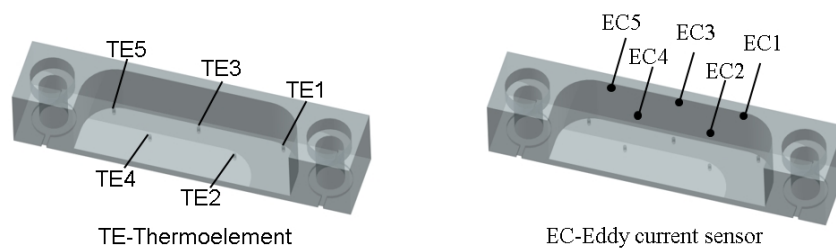


Tabelle 5.7: Positionen der Thermoelemente (TE) und der Wirbelstromsensoren (EC) im Werkstück bei Ausrichtung im Koordinatenursprung.

Ein Vergleich der simulierten Daten in FE-CutS mit experimentell ermittelten Daten an ausgewählten Messpositionen (Siehe Tabelle 5.7) zeigt gute Fortschritte bei der realitätsnahen Darstellung des thermischen und mechanischen Werkstückverhaltens durch Zerspanprozesse (Abbildung 5.38). Auf der linken Seite sind die Messungen der Temperatur an Positionen der Thermoelemente der Simulation gegenübergestellt und rechts die Messungen der Ausdehnung an der Rückwand des Werkstücks gegenüber der obigen Simulation.

Bei der Temperaturmessung zeigt sich besonders in der Simulation (links oben), dass die Temperatur im Werkstück deutlich höher ist, als in der Messung (links unten). Zuvor war dies genau anders herum. In beiden linken Grafiken ist jedoch ein ähnlicher Verlauf der Temperatur über die Prozesszeit erkennbar.

Auch die Messung der Deformation auf der Rückseite des Werkstücks zeigt zwar einen ähnlichen Verlauf der thermischen und mechanischen Ausdehnung, jedoch ist in der Simulation (rechts oben) jede Schrupp- und Schlichtebene deutlich besser sichtbar als in der Messung (rechts unten). Ein Grund hierfür liegt wohl in der Auslegung des Versuchsaufbaus, so dass zusätzliche Schwingungen bzw. Vibrationen des Spanntisches oder der Maschine während der Messung mit berücksichtigt werden und damit die experimentelle Erfassung verfälschen.

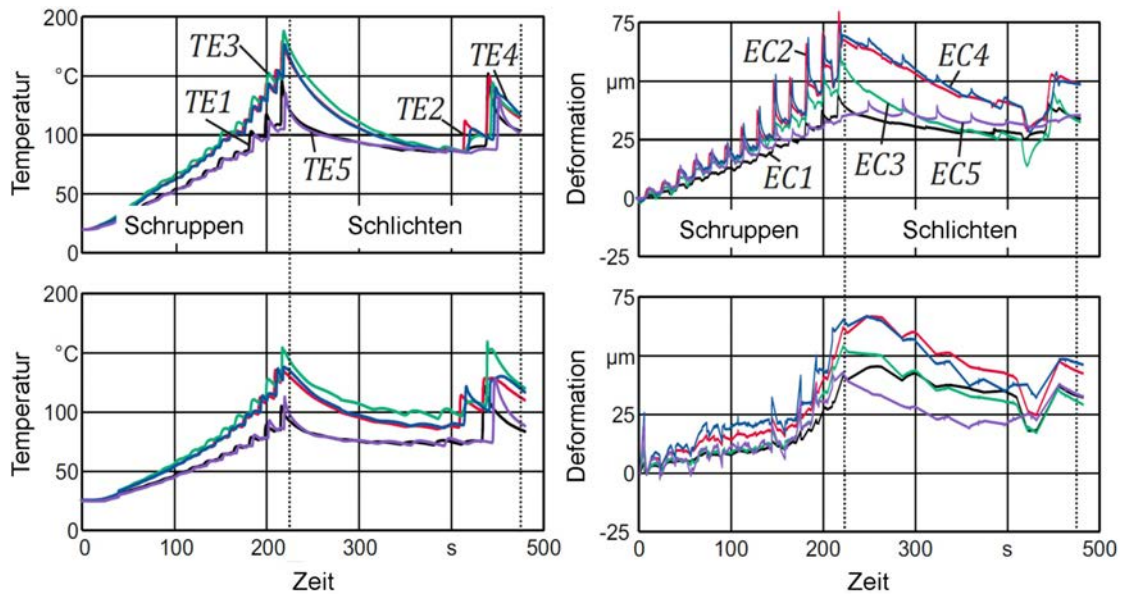


Abbildung 5.38: Vergleich von Simulation (oben) und Experiment (unten) zum moderat komplexen Fräsprozess.

Neben dem Vergleich der thermisch und mechanisch induzierten Deformation zwischen Simulation und Experiment, besteht auch hier die Möglichkeit die rein mechanische Ausdehnung des Werkstücks zu extrahieren, um somit ein Maß über den Einfluss der Prozesskraft auf die Deformation des Werkstücks zu erhalten. Abbildung 5.39 zeigt die Auswirkung der reinen Prozesskraft auf die Deformation des Werkstücks. Die Graphen

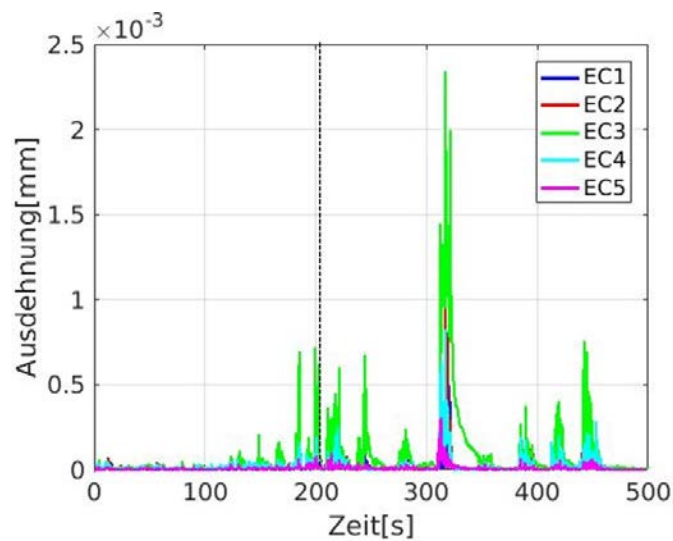


Abbildung 5.39: Einfluss der rein mechanischen Ausdehnung auf die Deformation des Werkstücks.

der Abbildung zeigen, dass an den Messpositionen anfänglich nur eine minimale Beeinflussung seitens der Prozesskraft besteht. Erst nachdem etwas mehr als die Hälfte des Materials über den Schruppprozess abgetragen wurde, erhöht sich deren Einfluss. Während des Schlichtprozesses ist die mechanische Ausdehnung schließlich sehr ausgeprägt.

Bis auf den höchsten Amplitudenausschlag (bei ca. 320s) übt die Prozesskraft jedoch nur einen geringen Einfluss (etwa  $0.5 \mu\text{m}$ ) auf die Deformation aus. Sehr gut sind die einzelnen Schichtebenen zu identifizieren. Im Gegensatz zum Fräsen der Vollnut (Abbildung 5.28) zeigt sich hier, dass mit zunehmender Prozessdauer und steigender Komplexität des Prozesses, der Einfluss reiner Prozesskraft auf das Verhalten des Werkstücks nur noch gering ist. Im Hinblick auf die Kompensation wird ersichtlich, dass die temperaturinduzierte Deformation des Werkstücks deutlich größeres Potential liefert, diese zu minimieren.

Mit den präsentierten Ergebnissen zum moderat-komplexen Fräsprozess zeigt FE-CutS, dass ein realitätsnahes thermisches und mechanisches Werkstückverhalten während des Prozesses abbildbar ist.

### Durchführung mehrerer Bohrungen in einen Prozess

Die Komplexitätssteigerung beim Bohren ist durch mehrmaliges wiederholen des einfachen Prozesses gegeben, aber auch der Durchstoß des Werkstücks weist hier eine Steigerung der Komplexität auf. Die folgende Simulation basiert auf keiner experimentellen Verifikation. Diese wurde lediglich zu Demonstrationszwecken erstellt und soll verdeutlichen, dass simulationsgestützte Vorhersagen bezüglich der thermisch und mechanisch induzierten Ausdehnung durch den Bohrprozess möglich sind.

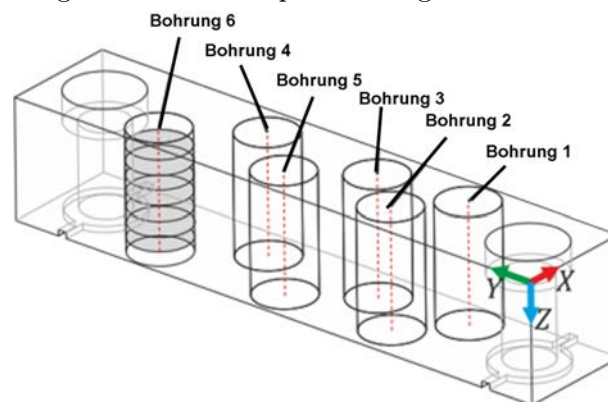


Abbildung 5.40: Skizze des Versuchsaufbaus mit mehreren Bohrungen.

In einem Werkstück mit gleicher Größe wie beim obigen Fräsprozess ( $195 \times 40 \times 40 \text{ mm}$ ), aus dem gleichen Werkstoff (C45EN) sowie auf dem selben Versuchsstand werden nun, in einer bestimmten Reihenfolge, sechs Bohrungen eingebracht, die jeweils das Werkstück von oben nach unten durchstoßen. Der verwendete Bohrkopf ist hierbei von der selben Beschaffenheit, wie beim zuvor betrachteten Prozess des Bohrens ins Volle (Siehe Tabelle 5.4). Des weiteren wird eine Schnittgeschwindigkeit von  $100 \text{ m/min}$ , ein Zahnvorschub von  $0.1 \text{ mm}$  und eine Drehzahl von  $1596$  Umdrehungen pro Minute verwendet.

In Abbildung 5.40 ist der Versuchsaufbau skizziert. Die Bohrungen erfolgen entsprechend der Nummerierung. Die Anordnung der Bohrlöcher scheint willkürlich zu sein, tatsächlich sollen hier unterschiedliche Wandstärken berücksichtigt werden. Es fällt auch

auf, dass jede Bohrung in mehrere Ebenen (Schubsequenzen) aufteilt ist (Siehe Bohrung 6, Skizze). Jede Ebene wird mit einem Schub gebohrt. Anschließend fährt der Bohrkopf aus dem Material heraus, um den Abtransport der Späne zu erleichtern und eine Überhitzung des Materials zu vermeiden. Die Konstruktion des Bohrkopfes ermöglicht zwar den Abtransport von Spänen über das eingearbeitete Gewinde, ab einer gewissen Bohrtiefe tritt jedoch der Effekt nachlaufender Wärmequellen auf, die durch die Schubsequenzen letztendlich vernachlässigbar sind. Die Daten vom Bohrwerkzeug sind der obigen Tabelle 5.4 zu entnehmen. Der Bohrer hat einen Durchmesser von  $20\text{ mm}$  und die Bohrerspitze weist einen Innenwinkel von  $140\text{ Grad}$  auf.

Die Simulation erfolgte auf der gleichen Urform des Werkstücks, wie zum obigen Fräsen einer halben Tasche. Das Werkstück ist wie oben beschrieben in drei Teile zerlegt worden, einen Mittelteil und zwei Quader. In den Quadern sind die Bohrlöcher hinterlegt, um das Werkstück auf dem Versuchsstand (Abbildung 5.31) zu befestigen. Das Mittelteil ist wie zuvor in Würfel der Größe  $5 \times 5 \times 5\text{ mm}$  unterteilt, die wiederum in 6 Tetraeder zerlegt sind. Insgesamt besteht die Urform des Werkstücks zu Beginn der Simulation aus 15 360 Elementen und 3 384 Knotenpunkten. Die maximale Gitterweite liegt hier bei  $8.6603\text{ mm}$ . Für diesen Prozess sind 7 Verfeinerungslevel am angepassten Gebietsrand zulässig. Dies entspricht einer minimalen Gitterweite von  $2.1652\text{ mm}$ . Wie aber später zu sehen sein wird, werden am Gebietsrand deutlich mehr adaptive Verfeinerungen durchgeführt. Am Ende der Simulation besteht das Werkstück aus 4 017 768 Elementen und 729 754 Knotenpunkten. Die Randbedingungen für diesen Prozess sind die gleichen wie zum vorherigen Fräsprozess. Im Bereich der Bohrungen sind für die Deformation Dirichletbedingungen gesetzt (Vergleiche Abbildung 5.32) und entsprechend für die Wärmeleitung Neumann-Null-Bedingungen. Der Rest des Werkstück ist als abschnittsweise Robinbedingung definiert mit einem Wärmeübergangskoeffizienten von  $15\text{ W/m}^2\text{ K}$  und für die Deformation abschnittsweise definierte Neumannbedingungen, die eine freie Verschiebung des Materials zulassen.

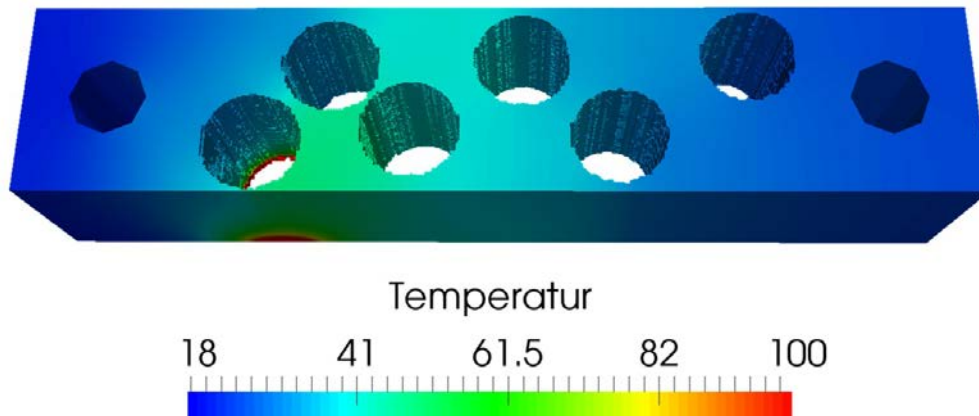


Abbildung 5.41: Temperaturverteilung nach Abschluss der Simulation zu  $t = 66.0256\text{ s}$ .

Die Temperaturverteilung auf der Werkstückoberfläche, nach Beendigung des Prozesses, ist in Abbildung 5.41 dargestellt. Gut ist zu erkennen, dass am Durchstoß der



6. Bohrung noch viel Wärme vorhanden ist. Dies hängt mit dem Ende der Simulation unmittelbar nach der letzten Bohrung zusammen. Aus der Temperaturverteilung ist ersichtlich, dass die Temperatur im Werkstück während des laufenden Prozesses ansteigt. Der gleiche Effekt ist auch bei der thermischen Ausdehnung in Abbildung 5.42 zu beobachten.

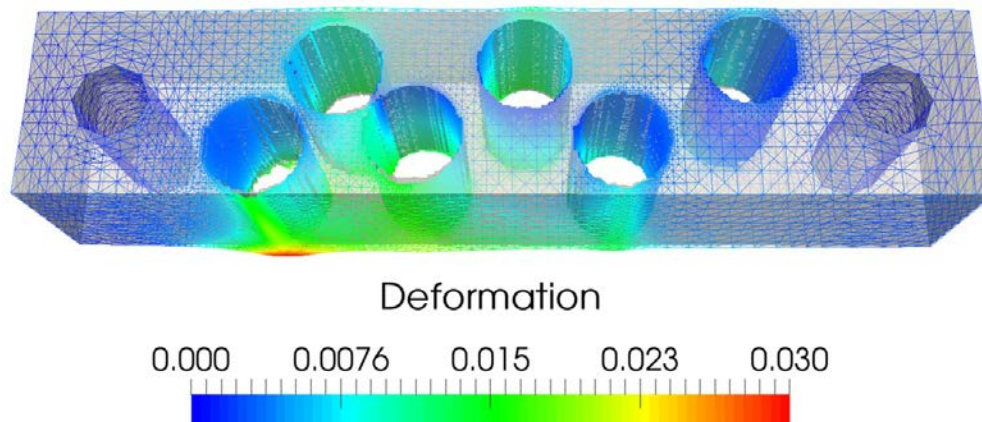


Abbildung 5.42: Thermische Ausdehnung im Werkstück nach Abschluss der Simulation zu  $t = 66.0256$  s. Verstärkt mit Faktor 100.

Wie bereits schon beim einfachen Bohrprozess, ist auch hier die thermische Ausdehnung (Abbildung 5.42) deutlich geringer als beim Fräsen. Durch das zeitnahe Ende der Simulation ist an der 6. Bohrung eine merkliche temperaturinduzierte Verschiebung sichtbar. Hier wurde die Deformation mit dem Faktor 100 verstärkt, so dass die im wesentlichen thermische Ausdehnung verdeutlicht wird.

Momentaufnahmen zu unterschiedlichen Zeitpunkten über die gesamte Prozesszeit sind, anders als beim Fräsen, beim Bohren nicht sehr aussagekräftig. Hingegen ist die Präsentation einer einzelnen Bohrsequenz durchaus interessant. Solch eine Sequenz ist der Abbildung 5.43 zu entnehmen. Hier wurde bereits mit der 5. Bohrung begonnen. Die Sequenz beginnt zur Prozesszeit  $t = 45.5712$  und endet zu  $t = 46.6992$  Sekunden. Für den Austausch von Informationen zwischen FE-CutS und Materialabtragssimulation wurde eine Taktung  $t = 0.0376$  Sekunden verwendet, was einer kompletten Umdrehung des Werkzeugs pro Austauschzeitschritt bedeutet. In den Abbildungen zeigt sich, dass die Oberfläche der Bohrerspitze deutlich feiner aufgelöst ist, als 7 Verfeinerungslevel. Tatsächlich sind hier Verfeinerungen bis zur Level 19 dargestellt, was einer minimalen Gitterweite von  $0.1353$  mm entspricht. Die hohen Verfeinerungen entstehen durch die Bestimmung von Fehlerindikatoren im Innern und auf dem Rand des Werkstücks über die Wärmeleitungsgleichung, weil in der Kontaktzone zwischen Werkzeug und Werkstück sehr hohe Temperaturgradienten auftreten.

Durch Kumulierung der Prozesswärme bis zum Austausch zwischen den Modellen, bildet sich auf der Kontaktzone eine schmetterlingsförmige Wärmequelle aus, die sich über die Bohrsequenz nur sehr leicht bewegt. Hier ist ganz klar festzustellen, dass unterschiedliche Zeitschritte verwenden. Würde FE-CutS die gleiche Zeitschrittweite nutzen

wie die Abtragungssimulation, würde eine rotierende Wärmequelle über der Kontaktzone sichtbar sein. Sehr gut ist zu sehen, dass in den letzten beiden Grafiken der Abbildung 5.43 die Prozesswärme nach Ende der Bohrsequenz zügig abnimmt.

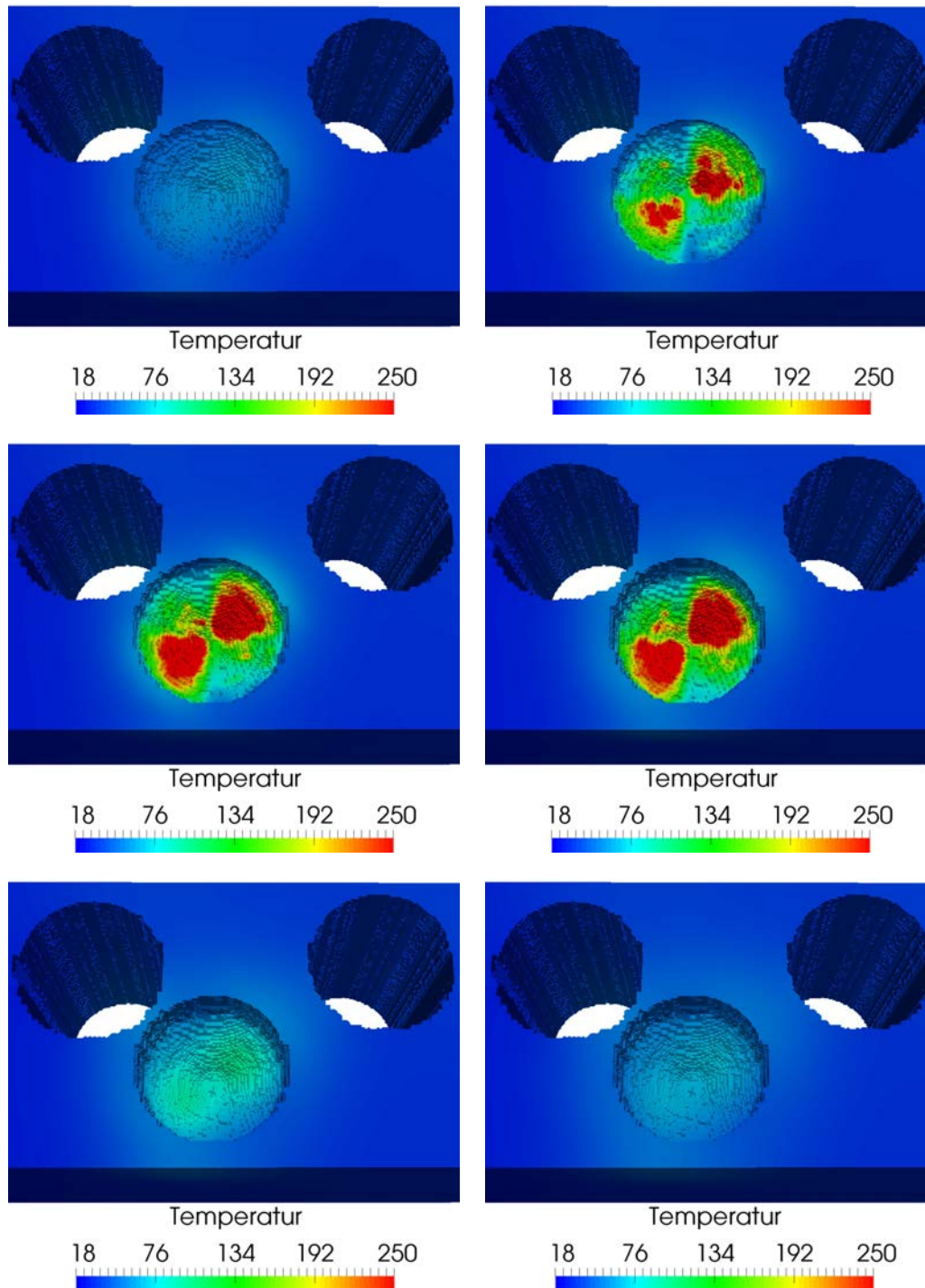


Abbildung 5.43: Darstellung der Temperaturverteilung im Werkstück während des Bohrens einer Schubsequenz in der 5. Bohrung.

Die folgende Abbildung 5.44 zeigt einen Querschnitt der Gittergeometrie in der 5. Bohrung zur Zeit  $t = 46.6992s$ , was dem gleichen Zeitpunkt in der unteren, rechten

Grafik der Abbildung 5.43 entspricht. Hier ist mit gelb eine Kontur gegeben, die der Werkstückoberfläche in der Abtragssimulation entspricht. Sehr ausgeprägt ist die Krümmung an der Bohrerspitze, obwohl die Spitze selbst nur indirekt sichtbar ist. Auch die adaptive Strategie von FE-CutS inklusive der Berechnung von Fehlerschätzern über die Wärmeleitung zeigen zwar eine gute Approximation der Werkstückoberfläche, allerdings nicht in der Bohrerspitze. Sehr gut sind die vielen abzählbaren Verfeinerungslevel.

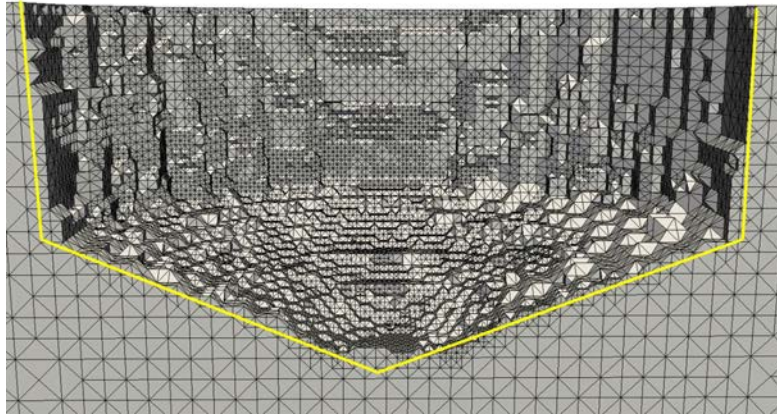


Abbildung 5.44: Querschnitt der 5. Bohrung zum Zeitpunkt  $t = 46.6992$  s mit Kontur der Werkstückoberfläche aus dem Dixelmodell (gelb).

### 5.3.3 Komplexer Fräsprozess eines Strukturbauteils

In diesem letzten Abschnitt zu den Anwendungen von Zerspanprozessen in FE-CutS wird die Zerspanung eines Strukturbauteils durch den Fräsprozess betrachtet. Das folgende, dünnwandige Bauteil wird aus einem groben Werkstück gefertigt. In den Ecken des Rohlings sind Auflagen eingearbeitet, um das Werkstück während des Prozesses mit Hilfe von Spannelementen auf der Bearbeitungsmaschine zu fixieren. Bis zum fertigen Bauteil sind einige Arbeitsschritte über Schruppen und Schlichten notwendig. Eine Konzeptskizze für die Fertigung des Bauteils zeigt Abbildung 5.45 (links).

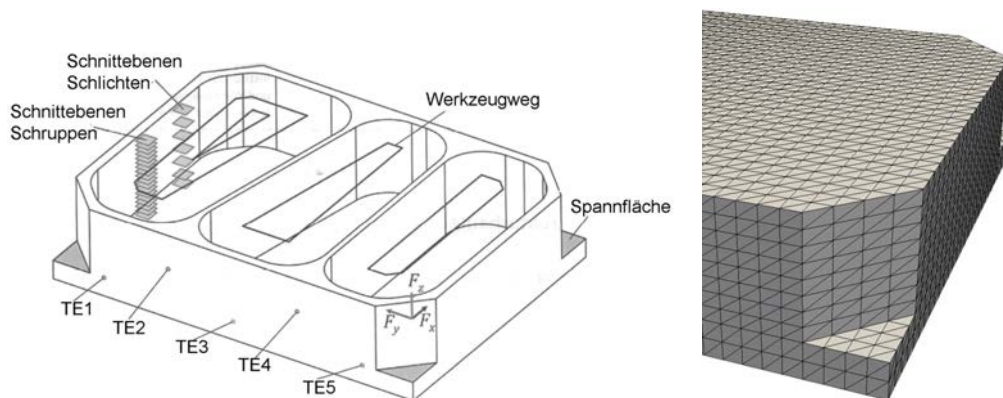


Abbildung 5.45: Skizze des Versuchsplans zum Fräsen von drei Taschen (links) und Einsparungen für die Spannelemente in der Makro-Triangulierung (rechts).

Aus dem Werkstück mit den Abmessungen  $195 \times 145 \times 42 \text{ mm}$  werden durch das Schräg-Eintauchfräsen ins Volle drei Taschen ausgekoffert. Das fertige Bauteil wird an den außenstehenden Wänden eine Stärke von  $5 \text{ mm}$  aufweisen, die beiden inneren jeweils eine Stärke von  $3 \text{ mm}$ . Die rechte, innere Wand wird schräg gestellt mit einem Innenwinkel von  $80 \text{ Grad}$ . An der vorderen Außenwand sind Thermoelemente angebracht, die die Temperaturverteilung im Bauteil über die Prozesszeit aufzeichnen. Genauere Informationen sind auch der Dissertation von Niederwestberg zu entnehmen, vom dem der Versuchsaufbau entstammt [47]. Beim Fräser handelt es sich hier wieder um einen Aufsteckfräskopf mit Wendeschneidplatten von der Firma Kennametal, wie bereits zu Beginn von Kapitel 5.3.1 beschrieben.

Der komplette Prozess ist wieder in zwei Teilprozesse unterteilt: Das Schruppen und das Schlichten. Zunächst wird wieder möglichst viel Material durch das Schruppen entfernt. Anschließend ist die bearbeitete Oberfläche durch das Schlichten zu reinigen. In jeder Schnittebene taucht der Fräskopf einmal in jede Tasche ein, um Material zu entfernen. Erst wenn eine Schnittebene komplett bearbeitet wurde, wird mit der nächsten Ebene begonnen. Dabei bearbeitet der Fräser die Taschen auf jeder Ebene abwechselnd von links nach rechts bzw. von rechts nach links.

Durch die unterschiedlichen Prozessarten und die vielen Pfadänderungen variieren die Schnitt- und Vorschubgeschwindigkeiten, so dass hierzu keine expliziten Angaben gemacht werden können. Zur Messung der Bauteiltemperatur werden wie zuvor Thermolemente vom Typ K (NiCr-Ni) mit Messverstärker (siehe der Tabelle 5.2) verwendet. Der reale Prozess dauert ca. 27 Minuten. In der Simulation wird ein Zeitschritt von 0.25 Sekunden verwendet. Eine komplette Simulation entspricht damit 6 548 Zeitschritten. Diese dauert durchschnittlich 6 Tage, wobei die Simulationszeit eines einzelnen Zeitschritts zwischen wenigen Sekunden und 3 Minuten variiert.

Für die folgende Simulation wurde das Werkstück in Würfel der Größe  $5 \times 5 \times 5 \text{ mm}$  zerlegt, die wiederum in 6 Tetraeder unterteilt wurden. An allen Vier Ecken bestehen laut Skizze diagonale Aussparungen, was eine entsprechende Orientierung der Elemente erfordert, da diese diagonal geteilt werden und somit nur noch aus 3 Tetraedern bestehen (Abbildung 5.45, rechts). Die Elemente, die innerhalb des entfernten Bereichs der Aussparungen liegen, sind in der Urform gar nicht vorhanden. Insgesamt ergeben sich zu Beginn der Simulation 66 324 Elemente und 12 880 Knotenpunkte. Für die Wärmeleitung sind folgende Randbedingungen gesetzt: Auf der Bodenfläche lebt eine Robinbedingungen mit einen Wärmeübergangskoeffizienten von  $3.4273 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ , der sich als mittlerer Übergangskoeffizient zwischen zwei Stahlsorten ergab. Die Einspannflächen (Abbildung 5.45, grau schraffiert) besitzen eine Neumann-Null-Bedingungen und die restlichen Oberflächen sind mit einer abschnittsweisen Robin- bzw. Neumannbedingung versehen, so dass ggf. ein Wärmeeintrag erfolgen kann oder ein Wärmeaustausch mit dem umgebenen Gas. Hierfür ist ein konstanter Wärmeübergangskoeffizient von  $15 \text{ W/m}^2 \text{ K}$  gesetzt.

Die Deformation ist ähnlich besetzt. Der Boden ist mit einer Dirichletbedingung versehen, die das Bauteil in  $z$ -Richtung festhält. Die Flächen, an denen das Bauteil

eingespannt ist (Die Dreiecksflächen an den Ecken des Werkstücks), sind Dirichletbedingungen gesetzt, die das Werkstück in alle Raumrichtungen festhält. Alle übrigen Flächen erhalten eine abschnittsweise definierte Neumannbedingung, um ggf. Prozesskräfte zu berücksichtigen. Nach Abschluss der Simulation besteht das Werkstück aus 1 966 097 Elementen sowie 361 137 Knotenpunkten.

Während der Simulation tritt hier ein neuer Effekt auf. Die Sichtbarkeit nachlaufender Schneiden ist nur beim Schräg-Eintauchfräsen oder einer gekippten Anstellung des Werkzeuges zu beobachten. In den folgenden Abbildungen 5.46 - 5.48 lässt sich dieser Effekt nachvollziehen. Die Abbildungen sind in drei Teile zerlegt. Abbildung 5.46 zeigt Darstellungen des Fräskopfes zu Beginn des Prozesses (Abbildung 5.46 (a)) und beim Eintauchen in die dritte Bearbeitungsebene (Abbildung 5.46 (b)-(c)).

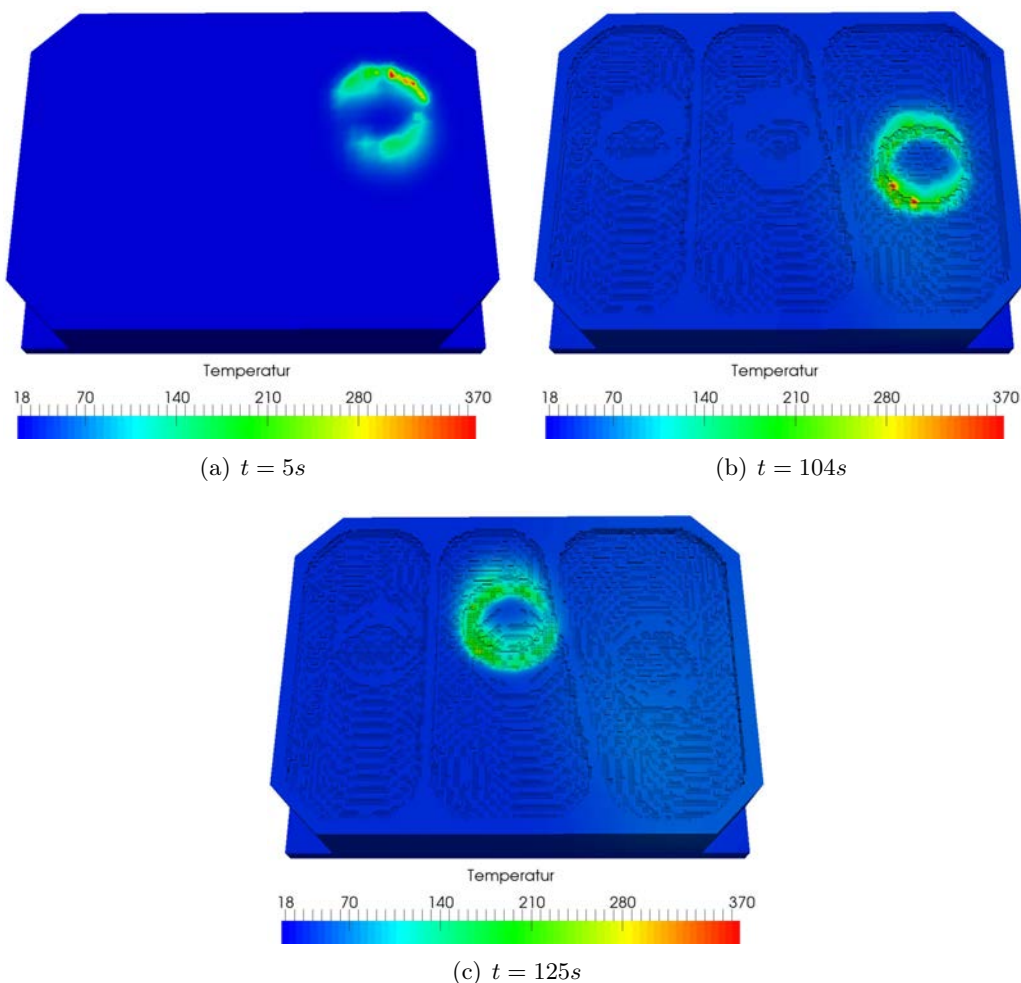


Abbildung 5.46: Darstellung der Temperaturverteilung im Werkstück während des Frärens (Schruppprozess) eines Strukturbauteils zu unterschiedlichen Zeitpunkten.

Beginnend mit Abbildung 5.46 (c) zeigt Abbildung 5.47 eine Sequenz zum Auskoffern der mittleren Tasche in der dritten Bearbeitungsebene. Zu sehen ist, wie der Fräskopf in die Ebene eintaucht und anschließend den Pfad entlang fährt, um das restliche Material

der Bearbeitungsebene innerhalb der Tasche zu entfernen. Die Darstellungen in der letzten Abbildung 5.48 zeigen zunächst noch drei weitere Visualisierungen zum Schrumpfen (Abbildung 5.48 (a)-(c)) sowie zwei Darstellungen während des Schlichtens (Abbildung 5.48 (d)-(e)) und schließlich das fertige Bauteil am Ende der Prozesssimulation (Abbildung 5.48 (f)).

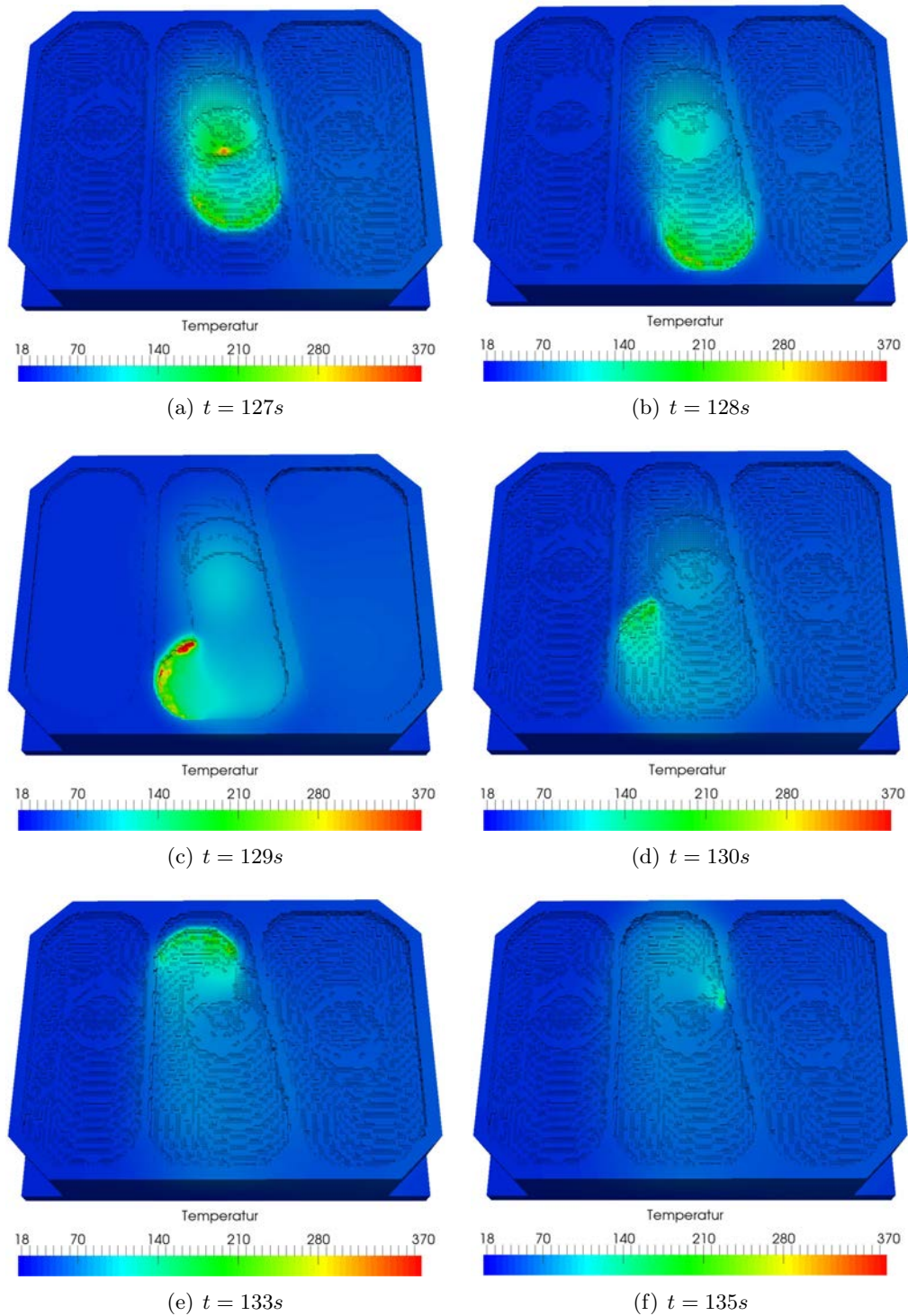


Abbildung 5.47: Frequenz des Fräsens einer Tasche für eine Schnittebene beim Schrumpfen.

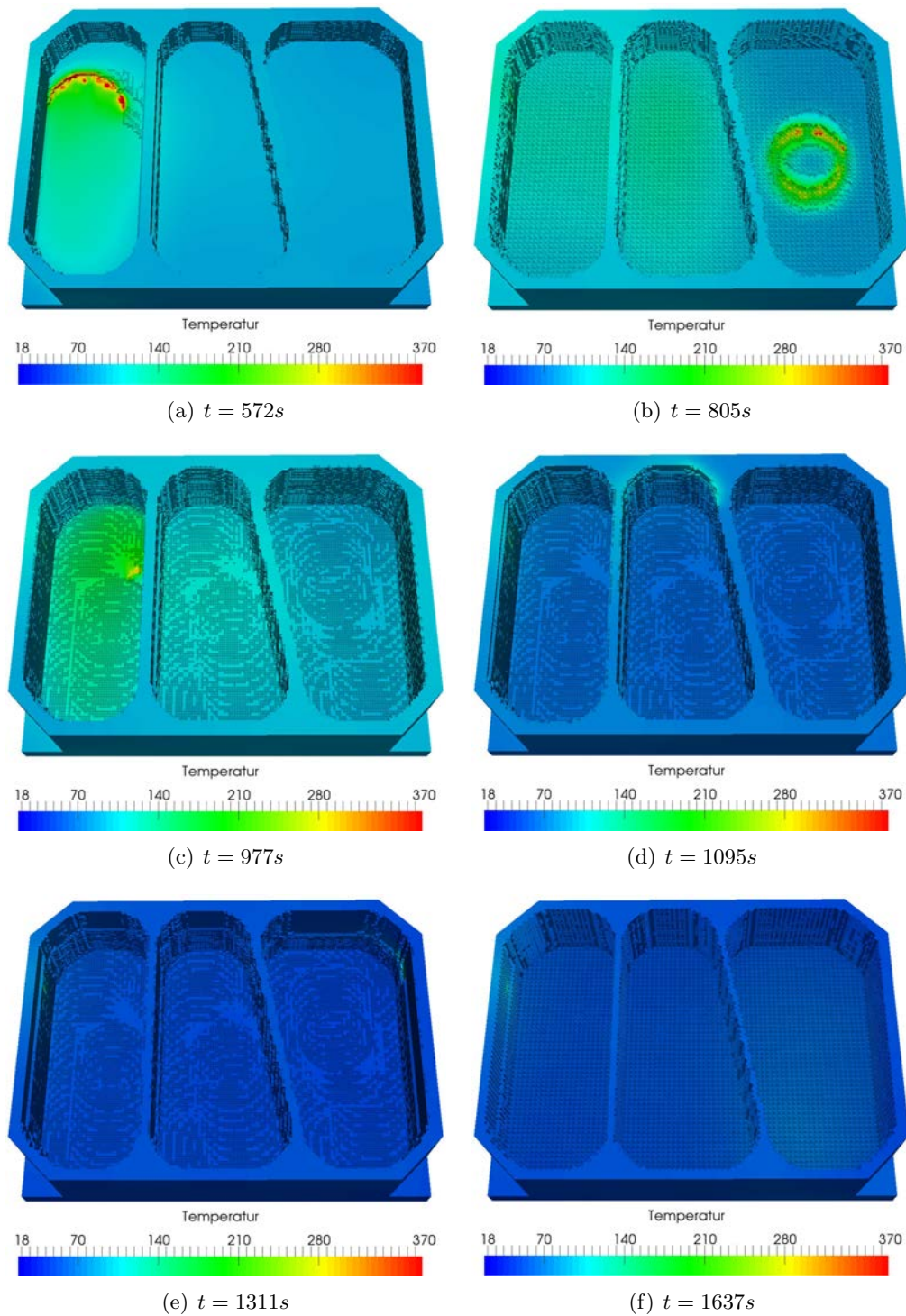


Abbildung 5.48: Darstellung der Temperaturverteilung im Werkstück während des Frärens durch Schruppen (a)-(b) und Schlichten (c)-(f) eines Strukturbauteils zu unterschiedlichen Zeitpunkten.

Über alle Darstellungen hinweg ist während des Schruppens ein steter Anstieg der Temperatur im Werkstück zu beobachten. Beim Schlichten nimmt diese wieder ab, bis sie sich bei ca. 50 Grad Celsius homogenisiert. Dass die Werkstücktemperatur schnell abnimmt, liegt an drei Faktoren. Zum einen wurde bereits viel Material aus dem Werkstück

entfernt, so dass die Werkstückoberfläche deutlich größer ist, als zu Beginn des Prozesses und dadurch mehr Wärme an das umgebene Gas abgegeben werden kann. Zum anderen wird ebenfalls, durch fehlende Isolation zur Bearbeitungsmaschine und dem Spanntisch, Wärme an diesen abgegeben und schließlich führt die geringere Spandicke während des Schlichtens und der damit verbundenen, kleineren Kontaktzone zwischen Werkzeug und Werkstück zu geringeren Wärmeeinträgen, die letztendlich nur noch einen kleinen Einfluss auf die Werkstücktemperatur haben.

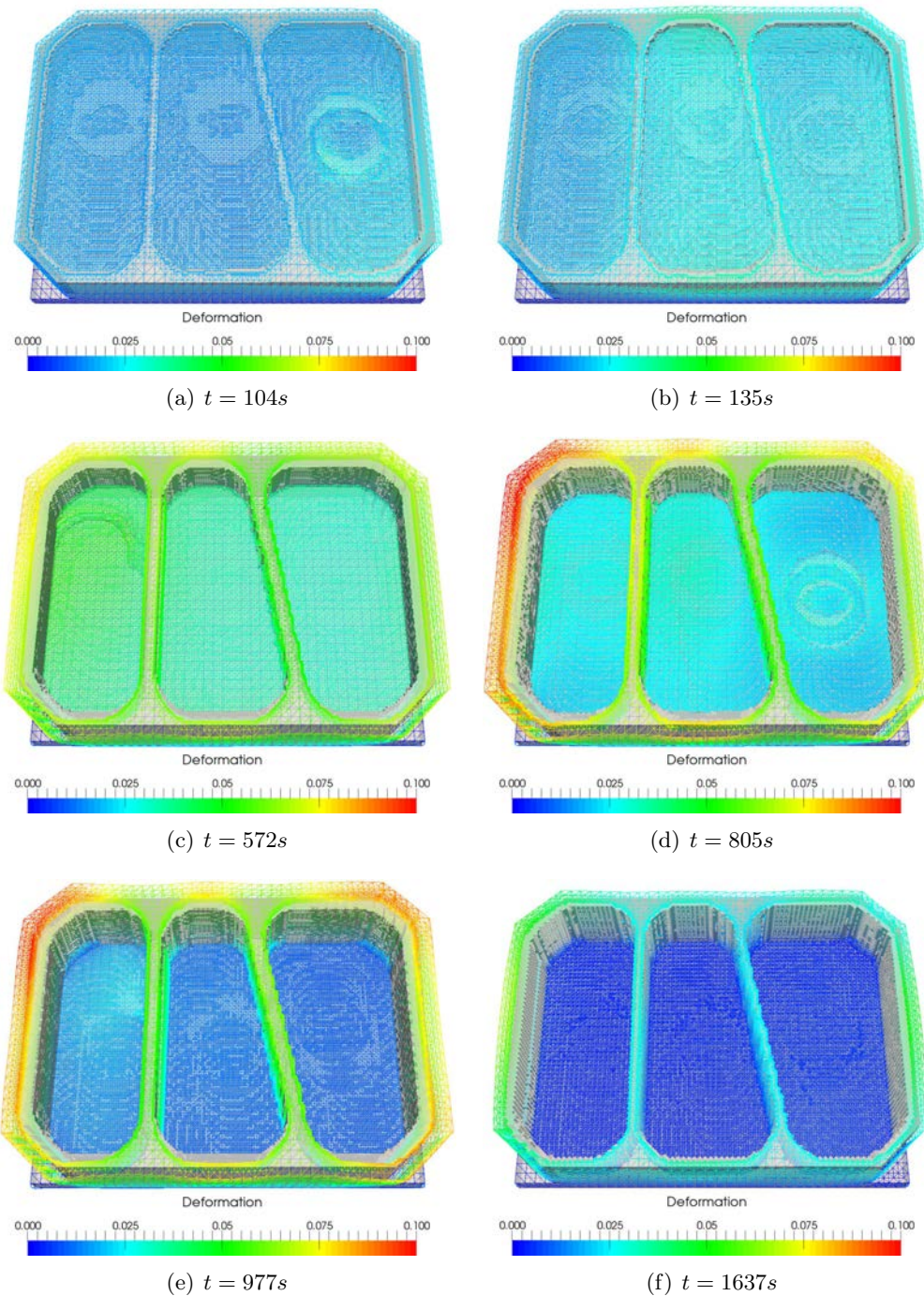


Abbildung 5.49: Darstellung der Deformation im Strukturbauteil während des FräSENS der Taschen zu unterschiedlichen Zeitpunkten mit Skalierungsfaktor 100.



Neben der Temperaturverteilung im Werkstück ist auch die thermisch und mechanisch induzierte Ausdehnung während des laufenden Prozesses darstellbar. Abbildung 5.49 zeigt diese zu unterschiedlichen Zeitpunkten während des Schruppens, Schlichtens und nach Beendigung des Prozesses. Zur besseren Visualisierung der Daten ist die Deformation um den Faktor 100 verstärkt worden. Hier ist zu beobachten, wie sich die Deformation parallel zur steigenden Temperaturverteilung verhält und zum Ende des Schruppens ihre größte Ausdehnung des Werkstücks erreicht. Mit ca.  $100 \mu m \approx 0.1 mm$  ist die resultierende Verschiebung sehr ausgeprägt. Deutlich ist zu erkennen, dass die außen liegenden Seitenteile sich am stärksten verformen.

Zum Ende des Schruppens erreicht das Werkstück seine größte Ausdehnung. Mit Beginn des Schlichtprozesses nimmt diese wieder ab. Während des Schlichtens wird, wie bereits bekannt, nur sehr wenig Material aus dem Werkstück entfernt, so dass hier impliziert durch die Deformation, der eigentliche Formfehler des Werkstücks erfolgt. Eine geeignete Optimierungs- und Kompensationsstrategie würde hier ansetzen, um bspw. durch Anpassung der NC-Bahn den resultierenden Formfehler zu minimieren. Eine Kompensation kann auch schon früher erfolgen, in dem zum Beispiel die Prozessstrategie (Bearbeitungsstrategie) verändert bzw. angepasst wird. Einen Überblick zu diesen und weiteren Optimierungs- und Kompensationsstrategien bietet das folgende Kapitel 5.4 und auch [22, 47].

Abbildung 5.50 zeigt einen näheren Einblick in die Gebietsänderung durch die adaptive Strategie von FE-CutS. In der linken Grafik ist das Eintauchen des Fräskopfes in die nächste Schnittebene zu beobachten, wobei hier sehr deutlich der Effekt nachlaufender Schneiden zu sehen ist. Dies wird sichtbar, weil durch den Eingriffswinkel auch im Nachlauf noch Material aus dem Werkstück entfernt werden muss. Sehr gut ist die Kante zu erkennen, die durch die adaptive Anpassung an die übergebene Werkstückoberfläche der Abtragungssimulation entsteht. Am unterem Bildrand beider Grafiken ist die schräge Innenwand ersichtlich, wobei hier deutlich wird, dass für diesen Prozess nur 7 Verfeinerungslevel zugelassen wurden, was einen Gitterweite von  $2.1651 mm$  entspricht. Wenige Sekunden später zeigt die rechte Grafik, dass der Fräskopf bereits vollständig in die Schnittebene eingetaucht ist und damit begonnen hat, das überschüssige Material der Ebene zu entfernen. An der Kontaktzone zwischen Werkzeug und Werkstück sind durch hohe Temperaturgradienten sowie die Fehlerschätzung der Wärmeleitungsgleichung bis zu 10 adaptive Verfeinerungen möglich, was hier einer Gitterweite von  $1.0825 mm$  entspricht.

Die Aufzeichnung der Temperaturverteilung über den Prozesses zeigt sowohl für die experimentelle als auch simulative Erfassung ähnliche Verläufe (Abbildung 5.51), obwohl die ermittelten Temperaturen in der Simulation deutlich höher sind, als im zugehörigen Experiment. Weiter ist zu beobachten, dass die experimentelle Messung der Temperatur an den Messpositionen im direkten Vergleich größere Schwankungen aufweist (Abbildung 5.51, rechts), als in der Simulation. die Vermutung liegt nahe, dass hier der Wärmeübergangskoeffizient zwischen Werkstück und Spanntisch falsch bestimmt wurde. Für eine

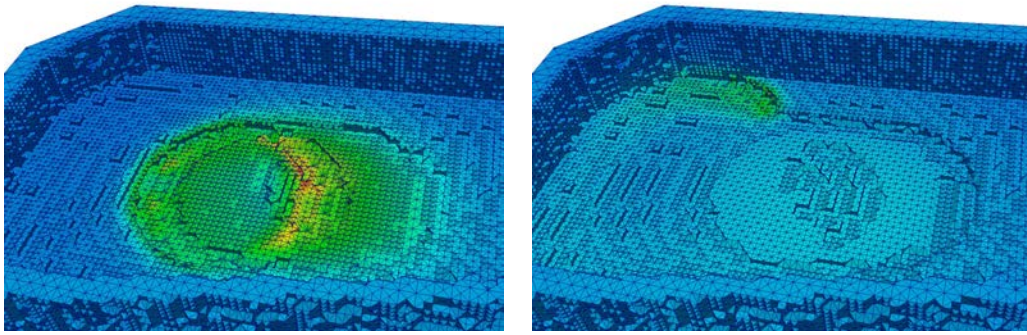


Abbildung 5.50: Vergrößerung der größten Tasche. Links: Beginn Eintauchen des Fräskopfes zu  $t = 411$  s. Rechts: Auskoffnung zu  $t = 419$  s. Temperaturskala siehe Abb. 5.48.

korrekte Bestimmung wäre eine Parameteridentifikation für temperaturabhängige Koeffizienten, sowohl für den Wärmeübergang zum umgebenden Gas als auch zum Spanntisch, sinnvoll. Leider wurden hier keine entsprechende Messungen vorgenommen, die dies ermöglichen.

Neben den, im Experiment ersichtlichen, stärkeren Schwankungen der Temperatur während des Schruppens, fallen besonders die sehr starken Schwankungen im Schlichtprozess auf. In der Simulation ist hingegen ein starker Rückgang der Temperatur im Werkstück zu beobachten und erst zum Ende der Simulation (letzte Schlichtebene) ist wieder ein intensiver Ausschlag der Temperatur sichtbar. Positiv ist zu verzeichnen, dass sowohl in Simulation als auch im Experiment die einzelnen Eingriffe des Werkzeugs pro Ebene identifiziert werden können sowie die Verläufe sich im Ansatz ähneln.

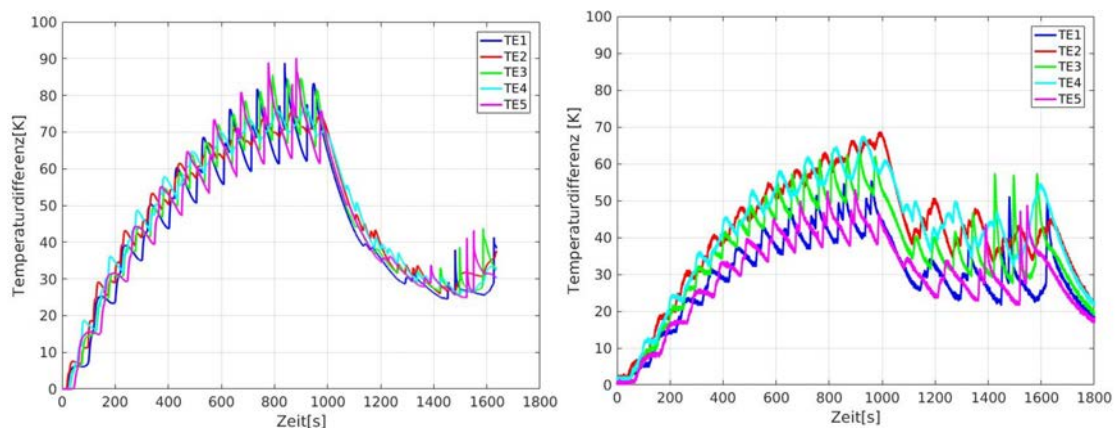


Abbildung 5.51: Vergleich von Simulation (links) und Experiment (rechts) beim Fräsen von drei Taschen an ausgewählten Messpositionen.

Eine experimentelle Erfassung der Ausdehnung des Werkstücks ist nicht vorhanden. Die Simulation ermöglicht jedoch, die Ausgabe der Deformation an den gleichen Messpunkten wie die zuvor berechneten Temperaturdaten. Die absolute Deformation ist in Abbildung 5.52 (links) dargestellt. Die Verläufe zeigen sehr gut, dass an den Messpositionen TE2 und TE4 eine deutlich stärkere Ausdehnung über die komplette Prozessdauer

zu verzeichnen ist, als an den anderen Messpunkten. Das hängt mit der Position der Messpunkte im oberen Bereich der Werkstückseite zusammen. Die genauen Koordinaten sind der folgenden Tabelle 5.8 zu entnehmen, außerdem sind die Positionen in der obigen Versuchsskizze (Abbildung 5.45) abgebildet.

Koord.	TE1	TE2	TE3	TE4	TE5
$x$	30.00 mm	63.75 mm	97.50 mm	131.25 mm	165.00 mm
$y$	3.00 mm	3.00 mm	3.00 mm	3.00 mm	3.00 mm
$z$	15.00 mm	32.00 mm	15.00 mm	32.00 mm	15.00 mm

Tabelle 5.8: Positionen der Thermoelemente (TE) im Werkstück beim Fräsen von drei Taschen bei Ausrichtung im Koordinatenursprung.

Während in Abbildung 5.49 eine maximale Ausdehnung von ca.  $100 \mu\text{m}$  zu beobachten ist, weisen die Messpunkte eine deutlich geringere Ausdehnung von maximal  $50 \mu\text{m}$  auf. Der Unterschied ist durch die Anordnung der Messpunkte an einer Seitenwand zu erklären, die steifer ist, als die Außenwand, an der die stärkste Ausdehnung zu verzeichnen ist.

In der rechten Grafik ist die, durch Prozesskraft induzierte, mechanische Ausdehnung über die Prozesszeit abgebildet. Unklar ist, dass erst nach ca. 190 Sekunden ein stärkerer Ausschlag der mechanischen Ausdehnung zu verzeichnen ist. Ein Grund hierfür, kann darin liegen, dass zunächst einiges an Material abgetragen werden muss, damit die Prozesskraft überhaupt Auswirkungen auf die Ausdehnung des Werkstücks ausübt. Bis auf den sehr großen Ausschlag nach ca. 1100 Sekunden bewegt sich die rein mechanische Ausdehnung im Bereich von  $0.5 \mu\text{m}$  und ist im Vergleich zur linken Grafik im wesentlichen vernachlässigbar. Leider ist hier keine Identifizierung der einzelnen Eingriffe im Werkstück zu erkennen, was noch im vorherigen Fräsprozess (Abbildung 5.39) möglich war.

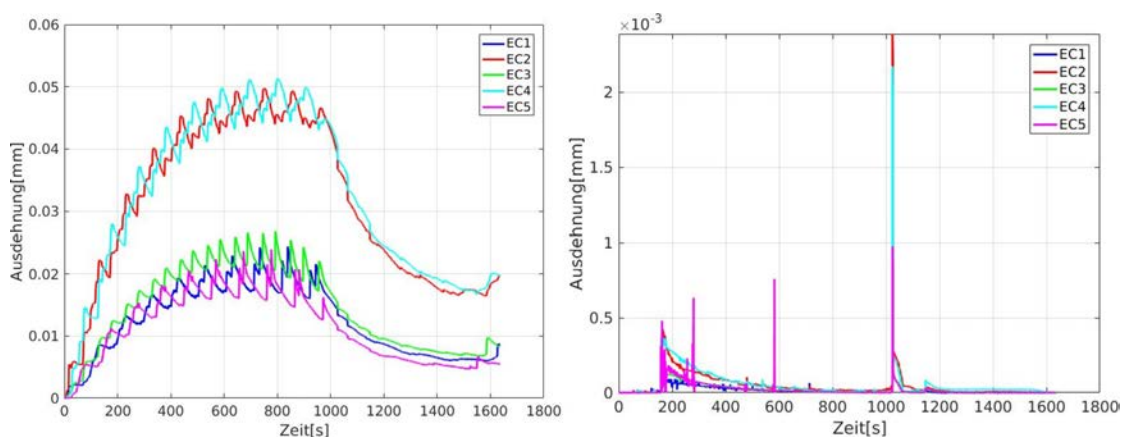


Abbildung 5.52: Deformation beim Fräsen von drei Taschen an den selben Messpositionen. Absolute Deformation (links) und extrahierte mechanische Ausdehnung (rechts).

Insgesamt zeigen die Ergebnisse zum Prozess mit der höchsten Komplexitätsstufe, dass zwar ein realitätsnahes Verhalten des Werkstücks während der spanenden Bearbei-

tung berechnet werden kann, jedoch auch noch einige Probleme aufweist. Hierunter sind insbesondere die Wärmeübergangskoeffizienten gemeint, die vermutlich über eine Parameteridentifikation wesentlich bessere Resultate für den Gesamtprozess liefern würden.

## 5.4 Anwendungen in der Optimierung und Kompensation

Der Abschluss dieses Kapitels gewährt einen Ausblick in die Optimierung und Kompensation von Zerspanprozessen zur Reduzierung von temperaturinduzierten Formabweichungen. Ein mögliches Ziel ist zum Beispiel die direkte und indirekte Anpassung des Werkzeugpfads, um die gewünschten Abmessungen des Werkstücks zu erhalten, ohne die Prozessplanung bzw. Prozessauslegung deutlich zu verlangsamen sowie hohe Kosten durch Nachbearbeitung zu reduzieren. Insbesondere die thermischen Abweichungen hängen hier von vielen Einflussfaktoren ab, zum Beispiel Schneidparameter sowie die Bearbeitungsstrategie [54, 55, 56].

Die Einflussfaktoren stellen somit potenzielle Kontrollparameter dar. Das Werkzeug selbst fungiert sowohl als eine von außen wirkende Wärmequelle als auch Kraftquelle, kontrolliert durch variierende Schneidparameter, Abbildung 5.53 (links). Durch Entfernen von Material aus dem Werkstück mittels Werkzeug wird die aktuelle Werkstückgeometrie beeinflusst (Abbildung 5.53, rechts), aus dem letztendlich Form- und Maßabweichungen resultieren.

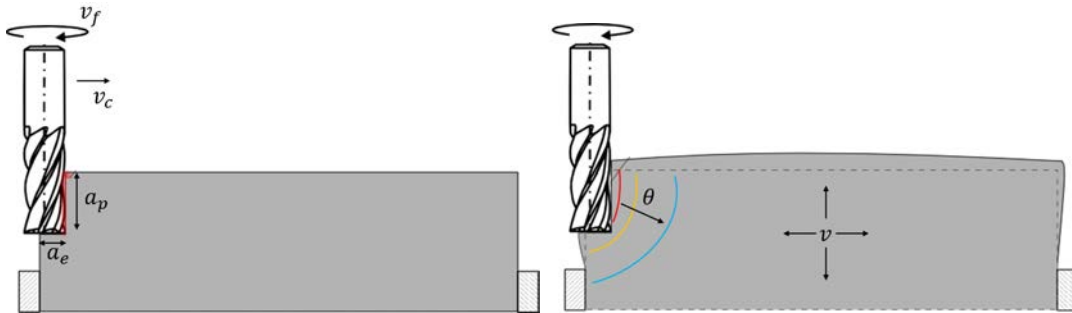


Abbildung 5.53: Links: Wichtige Prozessparameter illustriert über der idealen Geometrie des Werkstücks. Rechts: Darstellung der thermomechanischen Effekte im Werkstück. Bildgrundlage vom IFW, Hannover im Rahmen des SPP 1480.

Mathematisch lässt sich das aus FE-CutS und Materialabtragssimulation bestehende Modell (siehe Kapitel 2.2) durch einen Operator  $A$  beschreiben, welcher die Kontrolle  $u$  auf den Zustand  $y$  abbildet

$$y = A(u). \quad (5.6)$$

Der Zustand  $y$  beinhaltet hierbei im Wesentlichen die Deformation  $v$ , die Temperaturverteilung im Werkstück sowie die aus Kräften resultierende Spannung, gegeben durch die von-Mises-Vergleichsspannung. Zusätzlich können auch wirtschaftliche Faktoren wie Prozessdauer und die Länge des Werkzeugwegs berücksichtigt werden [22]. Die Kontrolle  $u$  beinhaltet alle dem Prozess zugeordneten Parameter: Schnittgeschwindigkeit  $v_c$ ,

Werkzeugdurchmesser  $D$ , Vorschub pro Zahn  $f_z$  und weitere.

Die abstrakte Formulierung eines Optimierungs- und Kompensationsproblems lautet schließlich: Gesucht wird eine optimale Kontrolle  $u^*$ , die einen optimalen Zustand  $y^*$  durch

$$\min_{u \in U_{ad}} J(u, y) \rightarrow J(u^*, y^*) \quad (5.7)$$

unter der Nebenbedingung (5.6) über ein zu minimierendes Funktional  $J$  abbildet. Die Kontrollvariable  $u$  ist hierbei durch die Menge von zulässigen Kontrollen  $U_{ad}$  beschränkt [68].

Eine Vielzahl unterschiedlicher Optimierungsansätze ermöglichen die Kompensation des temperaturinduzierten Verzugs (Formabweichung), um letztendlich hohe Kosten in der Nachbearbeitung der Werkstücke zu reduzieren. In den folgenden Abschnitten wird zunächst ein reduziertes Modellproblem vorgestellt, um den hohen Rechenaufwand durch die steigende Komplexität der Prozesse zu minimieren. Abschließen wird dieses Kapitel mit Ergebnissen zu diversen Optimierungsansätzen.

#### 5.4.1 Reduziertes Modellproblem für Optimierungsansätze

Durch steigende Komplexität immer umfangreicherer Zerspanprozesse (Vergleiche hierzu Kapitel 5.3) resultiert ein hoher Rechenaufwand, der sich insbesondere auf die Laufzeit der Simulation auswirkt. Ein erhöhter Rechenaufwand überträgt sich proportional auch auf die Optimierung, wodurch die Untersuchung komplexer Prozesse merklich erschwert wird. Eine Reduzierung des Simulationsaufwands ist unausweichlich.

Eine Reduzierung kann auf unterschiedlichste Art und Weise erfolgen. Die Unterteilung der Prozessdauer in einzelne Zeitintervalle oder die Zerlegung des Werkstücks in Teilgebiete ist möglich. Die abschließende Auswertung der Ergebnisse über die einzelnen Teilprobleme ermöglicht Aussagen zum eigentlichen Prozess und trägt zur Minimierung der temperaturinduzierten Form- und Maßabweichungen bei.

Solch ein vereinfachtes Teilproblem, auf Basis des moderat-komplexen Fräsprozesses (siehe Kapitel 5.3.2), ist ein 5 mm dicker Querschnitt, der sich mittig in Längsrichtung des Werkstücks befindet (Abbildung 5.54). Der Querschnitt bildet nach Abschluss des Prozesses ein L-Profil, welches durch mehrere Schrupp- und Schlichtebenen entsteht. Das Modellproblem bietet hierbei einige Vorteile. Zum einen verkürzt es die Simulationslaufzeit sehr stark und benötigt im Gegenzug deutlich weniger Rechenressourcen als der komplette Prozess. Insbesondere erlaubt ein solches Teilproblem das Testen diverser Optimierungsstrategien, um diese später auf den vollen Prozess anwenden zu können.

Die Optimierung ermöglicht hier z.B. die Steuerung bzw. Variation der Schnittgeschwindigkeit  $v_c$ , des Vorschubs pro Zahn  $f_z$  sowie der Schnitttiefe in axialer  $a_{e,Schruppen}$ ,  $a_{e,Schlichten}$  und radialer Richtung  $a_{p,Schruppen}$ ,  $a_{p,Schlichten}$  und indirekt der Rotationsgeschwindigkeit  $n$  wie auch der Vorschubgeschwindigkeit  $v_f$ . Weitere Kontrollparameter sind möglich.

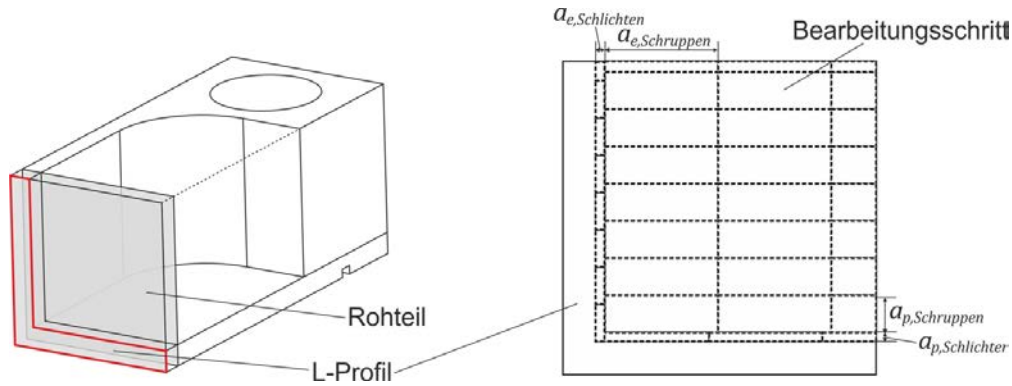


Abbildung 5.54: Reduziertes Modellproblem für Optimierung und Kompensation.

### 5.4.2 Ergebnisse zu unterschiedlichen Optimierungsansätzen

Zu jeden möglichen Optimierungsansatz gibt es eine Vielzahl von Einflussfaktoren, die sich nicht nur positiv auf das Ergebnis der Kompensation auswirken. Gerade die Wahl der Bearbeitungsstrategie als auch die Prozessdauer beeinflussen das thermische und mechanische Verhalten des zu bearbeitenden Werkstücks besonders stark.

Zwar ergeben sich durch eine kurze Prozessdauer mit einer Bearbeitung über hohe Schnittgeschwindigkeiten sowie mit großen Schnitttiefen und -breiten nur minimale Formabweichungen, jedoch wird die Bearbeitungsmaschine als auch das Werkstück hohen mechanischen Belastungen ausgesetzt. Bei einer langsamen Bearbeitung mit niedrigen Schnittgeschwindigkeiten und geringen Schnitttiefen bzw. -breiten resultieren jedoch große Formabweichungen sowie hohe thermische Belastungen im und am Werkstück. Die Belastungen gegenüber der Bearbeitungsmaschine sind hingegen niedrig.

Aus diesen beiden Extremen wird deutlich, dass eine Auslegung des Zerspanprozesses unter wirtschaftlichen Aspekten nicht unerheblich ist. Zwar liefert die kurze Prozessdauer gute Resultate im Bezug auf die temperaturinduzierten Maß- und Formabweichungen, durch hohe mechanische Belastung an der Fertigungsmaschine, dagegen erhöht sich auch deren Verschleiß und muss wesentlich früher gewartet oder ersetzt werden, was mögliche Resultate unrentabel macht. Eine wirklich optimale Lösung muss also zwischen diesen beiden, zuvor genannten, Extremen liegen.

Im folgenden werden nun zwei unterschiedliche Optimierungsansätze vorgestellt, bei denen verschiedene Kontrollparameter gleichzeitig variiert werden können. Interessant sind vor allem deren Resultate, die sich durchaus in Richtung der kürzeren Prozessdauer entwickeln. Den Abschluss bilden Verweise auf weitere interessante Resultate zur Kompensation temperaturinduzierter Form- und Maßabweichungen.

#### Greedy-Algorithmus

Der erste vorzustellende Optimierungsansatz ist aus der Klasse der Greedy-Algorithmen. Der Greedy-Algorithmus ist ein einfacher Ansatz zum auffinden von optimalen Lösungen [37]. Durch schrittweise Auswahl des nächsten optimalen Folgezustands, wird immer der

Zustand gewählt, der zum Zeitpunkt der Betrachtung das beste zu berechnende Ergebnis liefert. Vorteile bietet der Algorithmus in seiner Robustheit. Allerdings sind dessen Resultate nicht immer ein optimales Ergebnis, sondern meist nur ein lokales Optimum.

Über das reduzierte Modellproblem würde ein lokales Optimum durch Variation mehrerer Kontrollparameter erreicht werden. Stellmacher behandelt in seiner Bachelorarbeit, [63], die Anwendung der optimalen Steuerung auf das oben präsentierte, reduzierte Modellproblem. Leider sind die gewonnenen Erkenntnisse seiner Arbeit nur der Sensitivitätsanalyse zuzuordnen. Er variierte jeweils nur einen Kontrollparameter, während alle anderen konstant blieben. Eine optimale Steuerung mit Variation mehrerer Kontrollparameter blieb Stellmacher in seiner Abschlussarbeit schuldig.

Hingegen zeigen andere Ergebnisse z.B. in [22, 56, 54], dass durch den Greedy-Algorithmus eine signifikante Reduzierung des temperaturinduzierten Verzugs möglich ist. In diesen Arbeiten wurde ein Funktional

$$J(u, y) = \|\mathbf{v}(T)\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega(T)))} + \delta T, \tag{5.8}$$

mit gewichteter Prozessdauer  $T$  und Konstante  $\delta > 0$  unter der Nebenbedingung

$$\tilde{x}(t) = p(u), \quad t \in [0, T] \tag{5.9}$$

betrachtet. Der Kontrolle  $u$  sind die Parameter  $v_c$ ,  $f_z$ ,  $a_{p,Schruppen}$  und  $a_{e,Schruppen}$  zugeordnet. Das obige Funktional (5.8) erlaubt hierbei die Optimierung der Deformation unter Berücksichtigung der Prozessdauer und dem parametrisierten Werkzeugpfad  $\tilde{x}(t)$ . Ein optimales Ergebnis sowie deren Startwerte sind der Tabelle 5.9 zu entnehmen.

Startparameter	optimierte Parameter
$a_{p,Schruppen} = 8.0 \text{ mm}$	$a_{p,Schruppen}^* = 4.3 \text{ mm}$
$a_{p,Schichten} = 1.0 \text{ mm}$	$a_{p,Schichten}^* = 1.0 \text{ mm}$
$a_{e,Schruppen} = 8.0 \text{ mm}$	$a_{e,Schruppen}^* = 20.0 \text{ mm}$
$a_{e,Schichten} = 1.0 \text{ mm}$	$a_{e,Schichten}^* = 1.0 \text{ mm}$
$f_z = 0.2 \text{ mm}$	$f_z^* = 0.12 \text{ mm}$
$v_c = 200.0 \text{ m/min}$	$v_c^* = 200.0 \text{ m/min}$

Tabelle 5.9: Initialisierte und optimierte Parameter des Greedy-Algorithmus. Quelle: [22].

Weitere Optimierungsansätze sind z.B. durch Abwandlungen des obigen Funktionals (5.8) gegeben. Soll bspw. eine Optimierung der Gebietsänderung an der Kontaktzone erfolgen, so könnte das Funktional

$$J(u, y) = \int_0^T \|\Omega(t) - \Omega_{ideal}(t)\|^2 + \delta \|u\|^2 \tag{5.10}$$

gewählt werden. Dieser diskrete Kompensationsansatz erlaubt zu jeden Zeitpunkt  $t \in \mathcal{T}$  die Minimierung der Deformation über die Abmessungen des idealen Werkstückgebiets zum Zeitpunkt  $t$ . Soll neben einer Minimierung der Deformation auch die Temperatur

simultan reduziert werden, so ist folgender Ansatz möglich:

$$J(u, y) = \|\mathbf{v}(T)\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega(T)))} + \|\theta(T) - \theta_0\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega(T)))} + \|u\|. \quad (5.11)$$

Weitere Funktionale für mögliche Minimierungsansätze können der Bachelorarbeit von Stellmacher entnommen werden [63].

### Multi-kriterieller Pareto-Algorithmus

Der zweite vorzustellende Optimierungsansatz stammt aus der Vektoroptimierung und ist ein multi-kriterieller Pareto-Algorithmus. Hierunter wird das Lösen eines Optimierungsproblems mit mehreren Zielen verstanden, woraus sich der Begriff der multi-kriteriellen Optimierung abgeleitet. Ziel der Vektoroptimierung ist die Bündelung aller, im Interesse stehenden, Ziele, mittels Gewichtungsfaktoren, zu einer gemeinsamen Zielfunktion, die Pareto-Front genannt wird. In diesem Zusammenhang wird ein Optimierungsergebnis als Pareto-Optimum bezeichnet, wenn alle möglichen Resultate die Eigenschaft besitzen, dass kein Teilergebnis besser gestellt werden kann, ohne das ein anderes schlechter gestellt werden muss [30].

In der Optimierung und Kompensation des temperaturinduzierten Verzugs während der Zerspanung von Werkstoffen ist die Vektoroptimierung ein mächtiges Werkzeug die unterschiedlichen Zielsetzungen miteinander in Verbindung zu bringen. Hiermit wären aussagekräftige Resultate unter wirtschaftlichen Aspekten möglich, trotz zum Teil von einander abhängiger Kontrollparameter. In diesem Zusammenhang wurde in internationaler Zusammenarbeit mit Jonathan Motalvo-Urquizo und María G. Villarreal-Marroquín die multi-kriterielle Pareto-Optimierung auf das oben beschriebene reduzierte Modellproblem (Kapitel 5.4.1) angewendet. In [44] werden zwei Fallstudien betrachtet, in denen jeweils zwei unterschiedliche Ziele simultan über Kontrollparameter zum Optimum geführt werden. Für die Kontrolle wurden die Schnittgeschwindigkeit  $v_c \in [100, 300]$  (m/-min) sowie die axiale Schnitttiefe  $a_{p,Schruppen} \in [5, 30]$  (mm) während des Schrupperprozesses betrachtet. Zu den variierten Prozessparameter wurden weiter die Schnittweite  $a_{e,Schruppen} = 20$  mm, Zahnvorschub  $f_z = 0.2$  mm, die Anzahl Zähne  $z = 4$  und der Werkzeugdurchmesser  $D = 40$  mm konstant gesetzt.

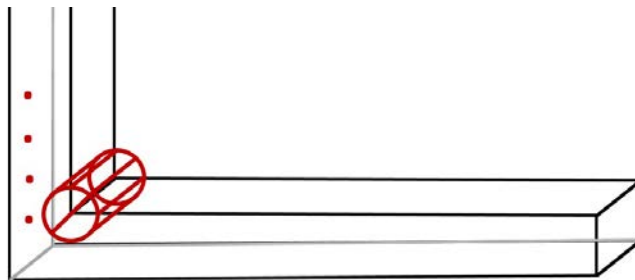


Abbildung 5.55: Skizze zur Ermittlung des repräsentativen Volumens und der Punkte auf der Rückseite des Werkstücks.

Die erste Studie betrachtet die Minimierung der resultierenden Deformation  $\mathbf{v}$  in



der euklidischen Norm unter gleichzeitiger Reduzierung der mechanischen Belastung im Werkstück, repräsentiert durch die Von-Mises-Vergleichsspannung  $\sigma_{VM}$ . Hierfür wurden an der Rückwand des L-Profiles in Höhe der einspringenden Ecke, die durch den Fräsprozess entsteht, 4 Messpunkte festgelegt, über denen eine gemittelte Deformation in der euklidischen Norm bestimmt wird. Um die einspringende Ecke des L-Profiles wurde ein repräsentatives zylinderförmiges Volumen über die Werkstücktiefe mit Radius 1 mm bestimmt, in dem die mechanische Belastung über das Volumen dieses Zylinders ermittelt wird (Skizze siehe Abbildung 5.55). Die ermittelten Ergebnisse flossen als Zielgrößen in den Pareto-Algorithmus. Zu Beginn wurde eine repräsentative Grundmenge bestimmt, um den Pareto-Algorithmus zu starten. Die zugehörigen Werte sind der folgenden Tabelle 5.10 zu entnehmen.

Sim.	$v_c$ [m/min]	$a_{p,Schruppen}$ [mm]	$\sigma_{VM}$ [MPa]	$\ u\ _2$ [mm]	P.-Zeit [min]
1	100.00	17.50	477.29	0.0709	4.97
2	129.29	8.66	562.30	0.1102	7.13
3	129.29	26.34	346.23	0.0357	2.75
4	200.00	5.00	300.25	0.1085	6.73
5	200.00	17.50	296.99	0.0334	2.48
6	200.00	30.00	249.59	0.0252	1.80
7	270.71	8.66	353.52	0.0460	3.41
8	270.71	26.34	215.12	0.0228	1.32
9	300.00	17.50	219.31	0.0243	1.66

Tabelle 5.10: Ergebnisse der repräsentativen Grundmenge von Simulationen. Quelle: [44].

Auf Basis der in Tabelle 5.10 ermittelten Ergebnisse ist schließlich die obere Pareto Front ermittelt worden (Simulation 8). Verwendet wird ein Bestimmtheitsmaß, welches im Idealfall 99% beträgt. Das bedeutet, dass etwa 99% der Veränderung einer Lösung durch die axiale Schnitttiefe während des Schruppens und durch die Schnittgeschwindigkeit zu erklären sind. Mit Hilfe eines Ersatzmodells sind über multi-lineare Regression und mit Bestimmtheitsmaßen von 0.9395 für die von-Mises-Vergleichsspannung und 0.9974 für die Norm der Verschiebung mögliche Lösungen berechnet worden, die ein Pareto-Optimum aufweisen können. Die Ergebnisse einer Auswahl vorhergesagter Pareto-Lösungen ist der Tabelle 5.11 zu entnehmen.

Auf Basis der zusätzlichen Lösungen aus obiger Tabelle 5.11 und den Ergebnissen aus Tabelle 5.10 wurde eine neue Pareto-Front gebildet, aus der sich zwei optimale Lösungen herauskristallisierten (Tabelle 5.12).

Abbildung 5.56 zeigt den Unterschied zwischen Simulation 5 und 14. Links ist die Temperaturverteilung am Ende des Prozesses dargestellt und rechts die zugehörige Deformation, verstärkt durch den Faktor 100. Die vorderen Darstellungen zeigen das Ergebnis der 5. Simulation und die hinteren, das Resultat der 14. Simulation, welche ein Pareto-Optimum darstellt. Dieses zeigt ganz klar, dass sowohl weniger Temperatur im Werkstück verbleibt, als auch die Deformation geringer ausfällt.

Sim.	$v_c$ [m/min]	$a_{p,Schruppen}$ [mm]	$\sigma_{VM}$ [MPa]	$\ u\ _2$ [mm]
10	281.00	23.50	207.35	0.0221
11	235.00	24.00	221.27	0.0236
12	264.00	24.00	212.13	0.0218
13	286.00	24.00	203.56	0.0223
14	293.00	24.50	199.60	0.0219
15	295.00	25.00	208.83	0.0219
16	298.00	26.00	201.57	0.0232
17	300.00	27.00	205.51	0.0227
18	300.00	28.00	203.35	0.0219
19	299.00	30.00	201.92	0.0236

Tabelle 5.11: Ergebnis von ausgewählten vorhergesagten Pareto-Lösungen. Quelle: [44].

Sim.	$v_c$ [m/min]	$a_{p,Schruppen}$ [mm]	$\sigma_{VM}$ [MPa]	$\ u\ _2$ [mm]
12	264.00	24.00	212.13	0.0218
14	293.00	24.50	199.60	0.0219

Tabelle 5.12: Finales Pareto-Optimum bei simultaner Minimierung der Deformation und der Von-Mises-Vergleichsspannung. Quelle: [44].

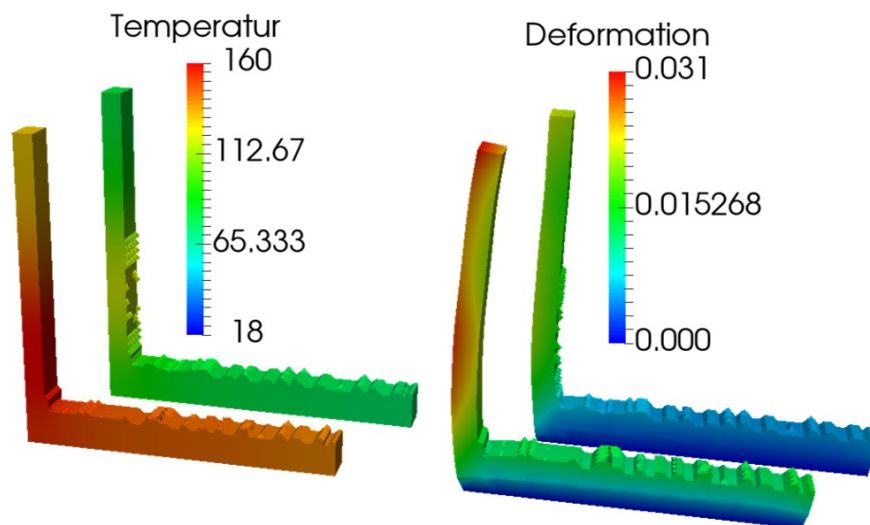


Abbildung 5.56: Darstellung der Temperaturverteilung und Deformation am Ende des Prozesses zu Simulation 5 (vorne) und 14 (hinten).

In der zweiten Fallstudie erfolgte eine Effizienzsteigerung durch die Prozesszeit mit der simultanen Minimierung der Von-Mises Vergleichsspannung. Hierfür wurde die gleiche Datenbasis verwendet, wie in dem präsentierten Fall (Tabelle 5.10). Die zugehörigen Ergebnisse sind in [44] nachzuschlagen.

### Weitere Lösungsansätze

Neben den hier vorgestellten rein mathematisch orientierten Optimierungsansätzen, sind auch andere Vorgehensweisen möglich. Niederwestberg beschreibt in seiner Dissertation, [47], dass auch durch die Änderung der Strategie eine signifikante Reduzierung des temperaturinduzierten Verzugs während der spanenden Bearbeitung möglich ist. Zudem zeigt er anhand der trockenbearbeitenden Zerspanprozesse durch Fräsen und Bohren, wie sie auch hier in Kapitel 5.3 aufgeführt sind, dass die simulative Adaption des Werkzeugweges, sowohl im Schrupp- als auch Schlichtprozess ([47], S.105, Bild 4.59), zu einer starken Reduzierung der resultierenden Form- und Maßabweichungen führt. Dabei zeigt sich beim Fräsen, dass während des Schruppens der Werkzeugweg nur geringfügig angepasst werden muss. Erst im Laufe des Schlichtens sind zum Teil sehr starke Adaptionen des Werkzeugwegs notwendig. An ihre Grenzen stößt die Vorgehensweise in Kurven bzw. Ecken, die durch Richtungswechsel entstehen. Niederwestberg zeigt hier, dass Korrekturen beim Richtungswechsel nicht möglich sind.

Beim Bohren zeigt sich hingegen (siehe [22]), dass hier eine Adaption des Werkzeugwegs keine Option ist. An dieser Stelle ist nur eine Reduzierung in den Abweichungen der Geradheit einer Bohrung möglich. Die Minimierung der Rundheit einer Bohrung ist während der Trockenbearbeitung nur mit großen Aufwand möglich. Hierfür wären zusätzliche Instrumente notwendig, um z.B. durch gezielte Luftströme das Werkstück zu kühlen. Arbeiten von Schulze und Böllig zeigen in [16], dass durch gezielte Kühlung eine Kompensation in den Abweichungen der Rundheit möglich ist.

Weitere Ergebnisse zur Optimierung und Kompensation thermischer Bearbeitungseinflüsse während der spanenden Bearbeitung sind auch dem Abschlussband des Schwerpunktprogramms 1480 zu entnehmen [16].

Die oben vorgestellten Ergebnisse zeigen, dass temperaturinduzierte Bearbeitungseinflüsse während der spanenden Bearbeitung sowohl mathematisch, als auch durch Änderung der Bearbeitungsstrategie oder durch gezielte Adaption des Werkzeugpfades kompensiert werden können. Die gewonnenen Erkenntnisse zeigen zudem, dass Kostenminimierungen in der Fertigung von metallischen Bauteilen durch Zerspanprozesse sowie die Optimierung des Bearbeitungsablaufes möglich sind.



## Kapitel 6

# Zusammenfassung und Ausblick

Thermisch und mechanisch bedingte Einflüsse bei herzustellenden Bauteilen mit metallischer Grundmatrix sind durch die fortschreitende Automatisierung in nahezu allen spanenden Fertigungsprozessen nur schwer kontrollierbar. Insbesondere bei der Trockenbearbeitung von leichten und zugleich robusten Strukturbauteilen hat das komplexe thermomechanische Belastungskollektiv entscheidenden Einfluss auf das Verhalten des Bauteils im späteren Gebrauch. Entstehende temperaturinduzierte Form- und Maßabweichungen der resultierenden Bauteile sind nur durch kostenintensive Nachbearbeitung oder erneute Herstellung zu mindern. Verfahren die bereits in der Fertigungsplanung mögliche Bearbeitungseinflüsse identifizieren und kompensieren sind in der Praxis kaum vorhanden. Aktuelle Forschungsvorhaben knüpfen hier an, um resultierende Gestaltabweichungen bereits in der Fertigungsplanung zu identifizieren und durch Kompensation zu minimieren.

Ziel dieser Arbeit war es daher einen entscheidenden Beitrag zur Berechnung des thermomechanischen Werkstückverhaltens zu leisten, um eine gekoppelte interdisziplinäre Simulation zur Vorhersage und Kompensation temperaturinduzierter Formfehler entscheidend zu erweitern und die oben genannte Identifizierung möglicher Bearbeitungseinflüsse bereits in der Fertigungsplanung zu realisieren.

Ausgehend von einer thematischen Einordnung in die Anwendung der spanenden Bearbeitung (Kapitel 2), erfolgte die Modellierung des thermischen und mechanischen Belastungskollektivs durch ein mathematisches Modell (Kapitel 3). Die Grundlage dieses Modells bildet die Zerlegung eines festen Untersuchungsraums in zwei zeitabhängige Teilgebiete, wobei eines die sich zeitlich ändernde Werkstückgestalt beschreibt. Auf dieser wurden anschließend die instationäre, nicht-lineare Wärmeleitungsgleichung sowie das linear-elastische Verformungsverhalten über die quasi-stationäre Deformationsgleichung formuliert. Mit dem Aufstellen der schwachen Form in Sobolev-Räumen über nicht-zylindrische Raum-Zeit Gebiete, folgte die Kopplung der Modellgleichungen zum mathematischen Modell. Die Berechnung der thermischen und mechanischen Belastungen während der spanenden Bearbeitung auf einen zeitabhängigen Werkstückgebiet mit sich ändernden Randbedingungen wurde hierdurch ermöglicht. Die Diskretisierung und

Implementierung der Modellgleichungen in die Finite Elemente Toolbox ALBERTA runden die Modellierung ab (Kapitel 4.2).

Die Abbildung der, sich zeitlich ändernden, Werkstückgestalt in die FEM wurde durch die Kopplung mit einer Materialabtragssimulation, basierend auf DEXEL, realisiert (Kapitel 4.4). Angepasste adaptive Strategien (Kapitel 4.3.3) ermöglichen schließlich eine hohe Abbildungsgenauigkeit durch Anpassung des Rechengitters an die Abmessungen der Werkstückgeometrie. Ein Betriebssystem übergreifendes universelles Austauschformat reguliert den Austausch von Informationen an jedem DEXEL-Endpunkt. Neben der Geometrieänderung werden für die Berechnung des thermomechanischen Belastungskollektivs Prozesskräfte und Wärmeströme am Rand des Werkstücks berücksichtigt (Kapitel 4.4.4). Eine realitätsnahe Abbildung der thermischen und mechanischen Belastung während der spanenden Bearbeitung wurde hierdurch durchführbar.

Die Validierung von FE-CutS erfolgte im Rahmen dieser Arbeit durch Analyse, der hier entwickelten, angepassten adaptiven Strategie anhand einfacher geometrischer Referenzmodelle. Die Untersuchungen zeigen, dass der simple Ansatz gute Approximationseigenschaften besitzt, die eine hohe Abbildungsgenauigkeit der sich zeitlich ändernden Werkstückgeometrie erlauben (Kapitel 5.2). Anschließende Simulationen unterschiedlicher, in Komplexität steigender, Anwendungsbeispiele durch Bohr- und Fräsprozesse veranschaulichen die Identifizierung der thermischen als auch der mechanischen Ausdehnung des Werkstücks (Kapitel 5.3).

Das, in dieser Arbeit, entwickelte Modell FE-CutS leistet damit einen entscheidenden Beitrag zur Vorhersage des thermomechanischen Belastungskollektivs. Über die gekoppelte, interdisziplinäre Simulation ist schließlich die Vorhersage und Kompensation temperaturinduzierter Form- und Maßabweichungen an der resultierenden Werkstückgestalt möglich (Kapitel 5.4).

Die präsentierten Ergebnisse zeigen auf, dass weiterhin Forschungsbedarf besteht. Im Hinblick auf die Modellierung ist eine Berücksichtigung weiterer Materialverhaltenstypen, wie klassische Plastizität, Phasenumwandlungen und Umwandlungsplastizität anzustreben, um das thermomechanische Werkstückverhalten zu verbessern. Vergleiche der Anwendungssimulationen mit experimentell erfassten Daten offenbaren, dass wesentliche Unterschiede bestehen. Hier ermöglicht die Parameteridentifikation, angewendet auf die zugrunde liegenden Werkstoffparameter, entscheidende Verbesserungen. Die umgesetzte rein geometrische Anpassung über maximale Verfeinerungslevel bietet Gelegenheit geeignete a posteriori Fehlerschätzungen zu entwickeln. Arbeiten von Barret und Elliott [11, 12, 1] weisen in die entscheidende Richtung.

Ferner belegen die Anwendungssimulationen, dass FE-CutS einen einzelnen Zeitschritt sehr effizient löst. Doch mit zunehmender Komplexität der Werkstückgeometrie sowie längerer Prozesslaufzeiten und daraus folgend höherer Ressourcenbedarf, wird die Simulationszeit unnötig in die Länge gezogen. Möglichkeiten zur Steigerung der Effizienz zeigt z.B. Zumvorde in seiner Bachelorarbeit [77], durch parallele Berechnung mittels Gebietszerlegung. Die Arbeit gibt Hinweise, die Berechnungszeit komplexer Zerspanprozesse

zu reduzieren.

Zukünftig wäre eine Erweiterung von FE-CutS auf weitere Verfahren mit geometrisch bestimmter Schneide möglich, um die Flexibilität der Kopplung zur Materialabtragssimulation aufzuzeigen. Durch zusätzliche Erhöhung der Abbildungsgenauigkeit, ist sicher auch eine Übertragung des Modells auf Zerspanprozesse mit unbestimmter Schneide vorstellbar. Die präsentierten Ansätze zur Optimierung und Kompensation des temperaturinduzierten Verzugs (Kapitel 5.4) vermitteln nur einen ersten Eindruck, was mit dem gekoppelten interdisziplinären Simulationsmodell noch möglich ist.





# Anhang A

## Bezeichnungen

### *Bezeichnungen zur Gebietszerlegung*

$\Omega$	Offene, beschränkte Menge im $\mathbb{R}^d$
$\Omega(t)$	Zeitabhängiges Teilgebiet von $\Omega$ , definiert als Werkstück
$\Omega_h(t)$	Diskretes, zeitabhängiges Rechengebiet (Werkstück)
$\Omega_m(t)$	Zeitabhängiges Teilgebiet von $\Omega$ , definiert als entferntes Material
$\bar{\Omega}, \bar{\Omega}(t), \bar{\Omega}_m(t)$	Abschluss der Mengen
$\partial\Omega(t)$	$= \Gamma(t) \cup \Gamma_w(t)$ . Werkstückoberfläche
$\Gamma(t)$	Gebietsrand eingeschränkt auf $\partial\Omega$
$\Gamma_m(t)$	Gebietsrand zwischen $\Omega(t)$ und $\Omega_m(t)$
$Q$	$= \bigcup_{t \in \mathcal{T}} \{t\} \times \Omega_w(t)$ . Nicht-zylindrisches Raum-Zeit Gebiet
$\Sigma$	$= \bigcup_{t \in \mathcal{T}} \{t\} \times \partial\Omega_w(t)$ . Parametrisierte Teilmenge von $\partial Q$
$\Gamma_D(t)$	Teil des Randes, auf dem Dirichlet-Bedingungen vorgegeben sind
$\Gamma_N(t)$	Teil des Randes, auf dem Neumann-Bedingungen vorgegeben sind
$\Gamma_R(t)$	Teil des Randes, auf dem Robin-Bedingungen vorgegeben sind
$t, t_n$	Zeitvariablen
$\mathcal{T}$	$= (0, T)$ . Zeitintervall

### *Bezeichnungen zu nicht-zylindrischen Sobolev-Räume*

$L_{p,q}(Q)$	Raum der über $\Omega(t)$ p- und q-fach-integrierbaren Funktionen
$W_{q,p}^{0,l}(Q)$	Sobolev-Raum der schwachen Ableitungen mit Ordnung $\leq l$
$\ \cdot\ _{L_p}$	Sobolev-Norm der Ordnung $p$
$L_p(\mathcal{T}; L_q(\Gamma(t)))$	Spurraum auf dem Rand
$H'$	Dualraum von $H$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	duale Paarung
$(\cdot, \cdot)$	Skalarprodukt

$|\alpha| = \sum \alpha_i$ . Ordnung des Multiindex  $\alpha$

*Bezeichnungen zu PDEs und finiten Elementen*

$\mathbf{x}$	$= (x_1, x_2, x_3)^T$ vektorielle Ortsvariable
$x, y, z$	Richtungskordinaten
$\dot{\theta}, \ddot{\theta}$	Ableitungen in der Zeit
$\partial_i$	partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_i}$
$\partial^\alpha$	partielle Ableitung der Ordnung $\alpha$
$a(\cdot, \cdot)$	Bilinearform in der Variationsaufgabe
$\mathbf{n}$	äußere Normale
$\nabla f$	$(\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_d)$
$\operatorname{div} f$	$\sum_{i=1}^d \partial f / \partial x_i$
$X_h$	Finite Elemente Raum der Wärmeleitungsgleichung
$X_h^d$	Finite Elemente Raum der Deformationsgleichung
$\varphi_h, \psi_h$	Basisfunktionen von $X_h$ bzw. $X_h^d$
$\mathcal{S}_h(t)$	Adaptive Triangulierung (Zerlegung) von $\overline{\Omega}_h$
$\mathcal{S}_{w,h}(t)$	Triangulierung des Werkstückgebiets
$\mathcal{S}_{m,h}(t)$	Triangulierung des entfernten Materials
$S$	$d$ -Simplex von $\mathcal{S}_h$
$a_n(\mathbf{x})$	Eckpunkte in $S$ , $n = 0, \dots, d$
$\rho_S$	Umkreisradius von $S$
$h$	$= \operatorname{diam}(S)$ Gitterweite
$\mathbb{P}_k(\Omega)$	Menge der Polynome vom Grad $\leq k$
$I_h$	Interpolationsoperator
$A$	Steifigkeitsmatrix
$M$	Massematrix
$\delta_{ij}$	Kronecker-Symbol
$\ \cdot\ _{m,h}$	gitterabhängige Norm
$\eta, \eta_\tau, \eta_h, \eta_c$	Fehlerindikatoren
$Tol$	Toleranz

*Bezeichnungen zur Thermomechanik*

$\theta, \theta_n, \Theta_n$	Temperatur (kontinuierlich und diskret)
$\mathbf{u}, \mathbf{u}_n, \mathbf{U}_n$	Verschiebungsvektor (kontinuierlich und diskret)
$\epsilon$	Verzerrungstensor
$\sigma$	Spannungstensor

$q_N$	Wärmequelle am Gebietsrand
$\mathbf{F}_N$	Kraftvektor am Gebietsrand
$\mathbf{F}_D$	Einspannung am Gebietsrand
$\kappa$	Wärmeleitfähigkeitskoeffizient
$\rho$	Dichte
$c_e$	spezifische Wärmekapazität
$\delta$	Wärmeübergangskoeffizient
$\alpha$	Wärmeausdehnungskoeffizient
$\mu, \lambda$	Lamé-Koeffizienten
$E$	Elastizitätsmodul
$\nu$	Querkontraktionszahl
$K$	Bulk-Modul
$G$	Schubmodul

*Bezeichnungen zur Kopplung*

$\phi, \Phi, \Phi_l$	Level-Set Formulierung
$d(\mathbf{x})$	Distanzfunktion
$G$	$\subset \mathbb{R}^d$ Werkstückgebiet im Dixelmodell
$G_{x_l}$	$\subset \mathbb{R}^{d-1}$ Ebene in $G$ , $l = 1, 2, 3$
$G_{x_l, h}$	Dexelfeld
$\Delta x, \Delta y$	äquidistanter Abstand zwischen Dixel
$d_{l,k}(i\Delta x, j\Delta y)$	Dixel
$z_{k,1}, z_{k,2}$	Dixelanfangs- und Endpunkt
$D_l$	$= (d_{l,i,j,k})$ Pointermatrix des Dexelfelds
$n_{i,j}$	Anzahl von Dixelpaaren in Position $(i, j)$
$N, M$	Anzahl der Dixel in $x$ - und $y$ -Richtung
$L_{x_l, k}$	bilinearer Interpolationsoperator
$\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{f}}$	korrigierter Wärmestrom und Prozesskraftvektor

*Bezeichnungen zu Zerspanprozessen*

$v_c$	Schnittgeschwindigkeit
$f_z$	Vorschub pro Zahn
$v_f$	Vorschubgeschwindigkeit
$a_e$	Schnittweite
$a_p$	Schnitttiefe

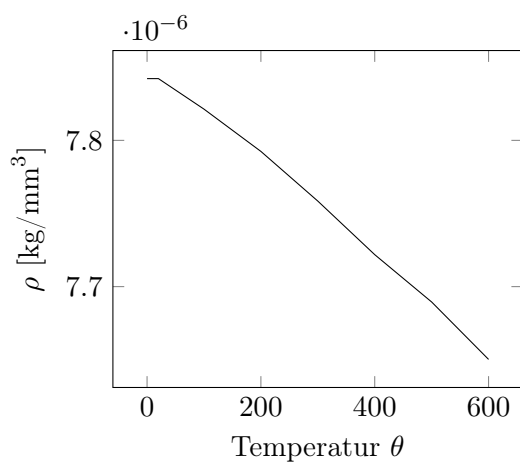


## Anhang B

# Werkstoffparameter

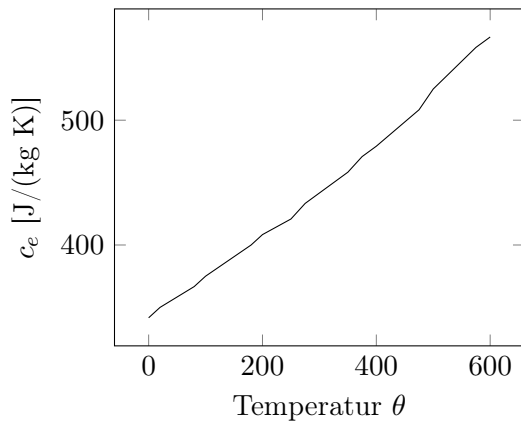
In diesem Anhang sind die temperaturabhängigen thermischen und mechanischen Materialkennwerte des Werkstoffes C45EN zu finden, die als Basis der, in dieser Arbeit betrachteten, Simulationen dienen. Die folgenden Datensätze (Siehe Tabellen), wurden im Rahmen des Schwerpunktprogramms 1480 des Arbeitskreises Werkstoffe von Herrn Prof. Dr.-Ing. Thorsten Halle gemessen und zur Verfügung gestellt. Die Daten für Dichte und Querkontraktionszahl stammen hingegen von [62]. Die grafischen Darstellungen zeigen die linear interpolierten Datensätze der zugehörigen Tabellen.

Dichte,  $\left[ \frac{\text{kg}}{\text{mm}^3} \right]$



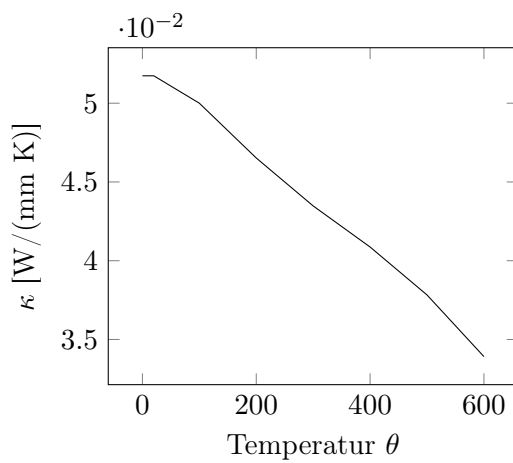
$\theta$	$\rho$
0.0	7.8422e-6
20.0	7.8422e-6
100.0	7.82135e-6
200.0	7.79244e-6
300.0	7.75848e-6
400.0	7.72186e-6
500.0	7.6895e-6
600.0	7.65026e-6

spezifische Wärmekapazität,  $\left[\frac{\text{J}}{\text{kg K}}\right]$



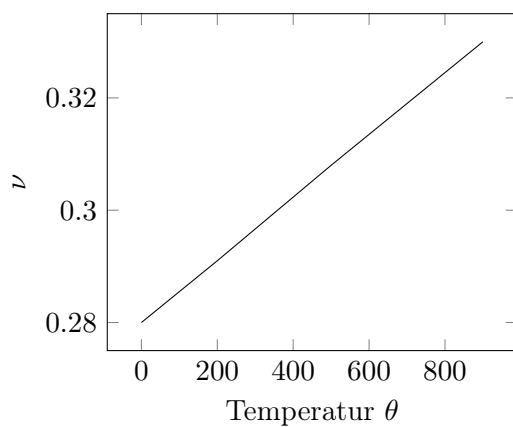
$\theta$	$c_e$	$\theta$	$c_e$
0.0	341.67	325.0	450.0
20.0	350.00	350.0	458.33
80.0	366.67	375.0	470.83
100.0	375.0	400.0	479.167
180.0	400.00	475.0	508.33
200.0	408.33	500.0	525.0
250.0	420.833	575.0	558.33
275.0	433.33	600.0	566.67
300.0	441.67		

Wärmeleitfähigkeit,  $\left[\frac{\text{W}}{\text{mm K}}\right]$



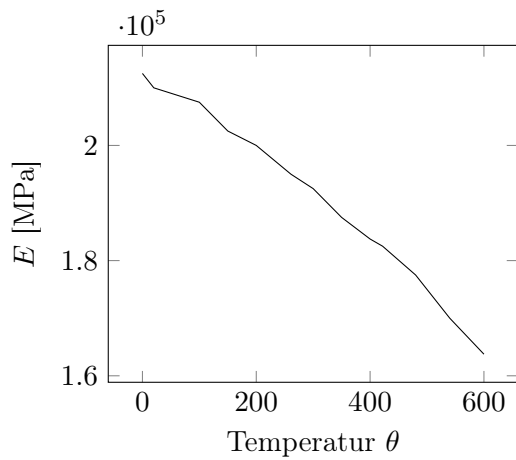
$\theta$	$\kappa$
0.0	0.0517391
20.0	0.0517391
100.0	0.05
200.0	0.0465217
300.0	0.04347826
400.0	0.0408696
500.0	0.0378261
600.0	0.033913

Querkontraktionszahl

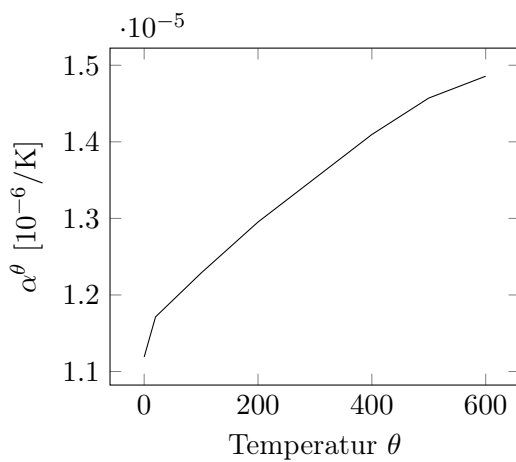


$\theta$	$\nu$
0.0	0.28
200.0	0.291
500.0	0.308
700.0	0.319
900.0	0.33

Elastizitätsmodul, [MPa]



$\theta$	$E$	$\theta$	$E$
0.0	21.25e4	350.0	18.75e4
20.0	21.0e4	400.0	18.375e4
100.0	20.75e4	422.0	18.25e4
150.0	20.25e4	480.0	17.75e4
200.0	20.0e4	500.0	17.5e4
261.0	19.5e4	540.0	17.0e4
300.0	19.25e4	600.0	16.375e4

Ausdehnungskoeffizient,  $\left[\frac{10^{-6}}{\text{K}}\right]$ 

$\theta$	$\alpha^\theta$
0.0	11.19e-6
20.0	11.714e-6
100.0	12.2857e-6
200.0	12.9524e-6
300.0	13.5238e-6
400.0	14.09524e-6
500.0	14.5714e-6
600.0	14.8571e-6





# Anhang C

## Literaturverzeichnis

- [1] A. Alphonse, C.M. Elliott, and B. Stinner. An abstract framework for parabolic PDEs on evolving spaces. *Portugaliae Mathematica*, 72(1):1–46, 2015.
- [2] H.W. Alt. *Lineare Funktionalanalysis: Eine anwendungsorientierte Einführung*. Springer-Verlag, 2012.
- [3] H. Altenbach. *Kontinuumsmechanik: Einführung in die materialunabhängigen und materialabhängigen Gleichungen*. Springer-Verlag, 2012.
- [4] Y. Altintas. *Manufacturing automation: metal cutting mechanics, machine tool vibrations, and CNC design*. Cambridge University Press, 2012.
- [5] L.S. Avila, S. Barre, R. Blue, B. Geveci, A. Henderson, W.A. Hoffman, B. King, C.C. Law, K.M. Martin, and W.J. Schroeder. *The VTK User's Guide*. Kitware Clifton Park, 2010.
- [6] U. Ayachit. *The ParaView Guide*. *Kitware Inc*, 2015.
- [7] H.D. Baehr and K. Stephan. *Wärme- und Stoffübertragung*. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [8] E. Bänsch. Adaptive finite element techniques for the Navier-Stokes equations and other transient problems. *Adaptive Finite and Boundary Elements. Computational Mechanics Publications and Elsevier*, pages 47–76, 1993.
- [9] E. Bänsch, J. Paul, and A. Schmidt. An ALE finite element method for a coupled Stefan problem and Navier–Stokes equations with free capillary surface. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 71(10):1282–1296, 2013.
- [10] E. Bänsch and A. Schmidt. Simulation of dendritic crystal growth with thermal convection. *Interfaces and Free Boundaries*, 2(1):95–115, 2000.
- [11] J.W. Barrett and C.M. Elliott. A finite-element method for solving elliptic equations with Neumann data on a curved boundary using unfitted meshes. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 4(3):309–325, 1984.

- [12] J.W. Barrett and C.M. Elliott. Finite-element approximation of elliptic equations with a Neumann or Robin condition on a curved boundary. *IMA journal of numerical analysis*, 8(3):321–342, 1988.
- [13] M. O. Benouamer and D. Michelucci. Bridging the gap between CSG and Brep via a triple ray representation. In *Proceedings of the fourth ACM symposium on Solid modeling and applications*, pages 68–79. ACM, 1997.
- [14] J. Betten. *Kontinuumsmechanik*. Springer, 2001.
- [15] J. Bey. Tetrahedral grid refinement. *Computing*, 55(4):355–378, 1995.
- [16] B. Biermann and F. Hollmann. *Modelling, Simulation and Compensation of thermal effects for complex machining processes - The priority programme 1480 "CutSim"*. to appear in Springer-Verlag (LNPE), 2017.
- [17] M. Braack. Finite Elemente. *Lecture Notes, Universität Kiel*, 2012.
- [18] D. Braess. *Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. Springer-Verlag, 2013.
- [19] F. Cortéz and A. Rodríguez-Bernal. PDEs in moving time dependent domains. In *Without Bounds: A Scientific Canvas of Nonlinearity and Complex Dynamics*, pages 559–577. Springer, 2013.
- [20] R. Courant. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bull. Amer. Math. Soc*, 49(1):1–23, 1943.
- [21] B. Denkena, P. Maaß, D. Niederwestberg, and J. Vehmeyer. Identification of the specific cutting force for geometrically defined cutting edges and varying cutting conditions. *Int. J. of Maschine Tools and Manufacture*, 2014.
- [22] B. Denkena, P. Maaß, A. Schmidt, D. Niederwestberg, J. Vehmeyer, C. Niebuhr, and P. Gralla. Thermomechanical Deformation of Complex Workpieces in Milling and Drilling Processes. In *Modelling, Simulation and Compensation of Thermal Effects of Complex Machining Processes*. to appear in Springer-Verlag (LNPE), 2017.
- [23] B. Denkena, A. Schmidt, J. Henjes, D. Niederwestberg, and C. Niebuhr. Modeling a thermomechanical NC-simulation. *Procedia CIRP*, 8:69–74, 2013.
- [24] B. Denkena, A. Schmidt, P. Maaß, D. Niederwestberg, C. Niebuhr, and J. Vehmeyer. Prediction of temperature induced shape deviations in dry milling. *Procedia CIRP*, 31:340–345, 2015.
- [25] B. Denkena and H.K. Tönshoff. *Spanen: Grundlagen*. Springer-Verlag, 2011.
- [26] P. Deuffhard and M. Weiser. *Adaptive Lösung partieller Differentialgleichungen*. de Gruyter-Verlag, 2011.

- 
- [27] M.T. Dröge. *Cartesian grid methods for turbulent flow simulation in complex geometries*. Dissertation, University of Groningen, 2007.
- [28] V. Ducrot and P. Frey. Contrôle de l'approximation géométrique d'une interface par une métrique anisotrope. *Comptes Rendus Mathématique*, 345(9):537–542, 2007.
- [29] C. Eck, H. Garcke, and P. Knabner. *Mathematische Modellierung*. Springer-Verlag, 2008.
- [30] M. Ehrgott. *Multicriteria Optimization*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [31] K. Eriksson and C. Johnson. Adaptive finite element methods for parabolic problems i: A linear model problem. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 28(1):43–77, 1991.
- [32] K. Feng. Difference schemes based on variational principle. *J. Appl. Comput. Math*, 2:238–262, 1965.
- [33] K.J. Fidkowski. *A simplex cut-cell adaptive method for high-order discretizations of the compressible Navier-Stokes equations*. Dissertation, Massachusetts Institute of Technology, 2007.
- [34] P. Frey and P.-L. George. *Mesh Generation*. John Wiley & Sons, 2013.
- [35] F. Klocke and W. König. *Fertigungsverfahren 1: Drehen, Fräsen, Bohren*. Springer-Verlag, 2008.
- [36] I. Kossaczky. A recursive approach to local mesh refinement in two and three dimensions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 55(3):275–288, 1994.
- [37] E.L. Lawler. *Combinatorial optimization: networks and matroids*. Courier Corporation, 2001.
- [38] P. Lee and Y. Altıntaş. Prediction of ball-end milling forces from orthogonal cutting data. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 36(9):1059–1072, 1996.
- [39] F. Liehr, T. Preusser, M. Rumpf, S. Sauter, and L.O. Schwen. Composite finite elements for 3d image based computing. *Computing and visualization in science*, 12(4):171–188, 2009.
- [40] J. Límaco, L.A. Medeiros, and E. Zuazua. Existence, uniqueness and controllability for parabolic equations in non-cylindrical domains. *Mat. Contemp*, 23:49–70, 2002.
- [41] S.A. Meier. *Two-scale models for reactive transport and evolving microstructure*. Dissertation, Universität Bremen, 2008.

- [42] S.A. Meier and M. Böhm. A note on the construction of function spaces for distributed-microstructure models with spatially varying cell geometry. *Int. J. Numer. Anal. Model.*, 5(5):109–125, 2008.
- [43] W.F. Mitchell. A comparison of adaptive refinement techniques for elliptic problems. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 15(4):326–347, 1989.
- [44] J. Montalvo-Urquizo, C. Niebuhr, and M.G. Villarreal-Marquín. Simulation-based multiobjective optimization for milling processes. *Berichte aus der Technomathematik*, 17-02, 2017.
- [45] A. Narimanyan. *Stefan-Signorini Moving Boundary Problem Arisen from Thermal Plasma Cutting: Mathematical Modelling, Analysis and Numerical Solution*. Dissertation, Universität Bremen, 2006.
- [46] C. Niebuhr, D. Niederwestberg, and A. Schmidt. Finite element simulation of macroscopic machining processes: Implementation of time-dependent domain and boundary conditions. *Berichte aus der Technomathematik*, 14-01, 2014.
- [47] D. Niederwestberg. *Prognose und Kompensation der temperaturbedingten Werkstückverlagerungen beim Trockenfräsen*. Dissertation, Universität Hannover, 2016.
- [48] W. Noack. XML 1.1-Grundlagen. *HERDT-Verlag, RRZN/Universität Hannover*, 2008.
- [49] S. Osher and R. Fedkiw. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*, volume 153. Applied Mathematical Sciences, Springer, 2003.
- [50] S. Osher and J.A. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of computational physics*, 79(1):12–49, 1988.
- [51] J.W. Purvis and J.E. Burkharter. Prediction of critical mach number for store configurations. *AIAA Journal*, 17(11):1170–1177, 1979.
- [52] S. Rehling. *Technologische Erweiterung der simulation von NC-Fertigungsprozessen*. PZH Produktionstechnisches Zentrum, 2009.
- [53] A. Schmidt. Computation of three dimensional dendrites with finite elements. *Journal of Computational Physics*, 125(2):293–312, 1996.
- [54] A. Schmidt, E. Bänsch, M. Jahn, A. Luttmann, C. Niebuhr, and J. Vehmeyer. Optimization of Engineering Processes Including Heating in Time-Dependent Domains. In *IFIP Conference on System Modeling and Optimization*, pages 452–461. Springer, 2015.
- [55] A. Schmidt and C. Niebuhr. (ideas about) Adaptive FEM for Problems with time-dependent Domains. volume 42, pages 56–58. Oberwolfach Report, 2016.

- [56] A. Schmidt, C. Niebuhr, D. Niederwestberg, and J. Vehmeyer. Modelling, simulation and optimization of thermal distortions from milling processes. In *19th European Conference on Mathematics for Industry*. Springer, 2016.
- [57] A. Schmidt and K.G. Siebert. *Design of Adaptive Finite Element Software: The Finite Element Toolbox ALBERTA*. Springer Heidelberg, 2005.
- [58] V. Schulze, E. Uhlmann, R. Mahnken, A. Menzel, D. Biermann, A. Zabel, P. Bollig, I. Ivanov, C. Cheng, R. Holtermann, et al. Evaluation of different approaches for modeling phase transformations in machining simulation. *Production Engineering*, 9(4):437–449, 2015.
- [59] J.A. Sethian. *Level set methods and fast marching methods: evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science*, volume 3. Cambridge University Press, 1999.
- [60] R.E. Showalter and N.J. Walkington. Micro-structure models of diffusion in fissured media. *Journal of mathematical analysis and applications*, 155(1):1–20, 1991.
- [61] H. Si. Tetgen, a delaunay-based quality tetrahedral mesh generator. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 41(2):11, 2015.
- [62] M. Stautner. *Simulation und Optimierung der mehrachsigen Fräsbearbeitung*, volume 32. Schriftreihe des ISF, Vulkan-Verlag GmbH, 2006.
- [63] N. Stellmacher. Optimale Steuerung bei Fräsprozessen. Bachelorarbeit, Universität Bremen, 2016.
- [64] B. Suhr. *Simulation of Steel Quenching with Interaction of Classical Plasticity and TRIP: Numerical Methods and Model Comparison*. Dissertation, Universität Bremen, 2010.
- [65] T. Tang. Moving mesh methods for computational fluid dynamics. *Contemporary mathematics*, 383:141–174, 2005.
- [66] T.E. Thiel. Finite-Elemente-Simulation idealisierter Zerspanungsprozesse mit bewegten Randbedingungen. Diplomarbeit, Universität of Bremen, 2014.
- [67] K. Tracht, B. Denkena, M. Clausen, and J.H. Yu. Dixel-based milling simulation. In *Proceedings of the 8th International ESAFORM Conference on Material Forming*, pages 765–768, 2005.
- [68] F. Tröltzsch. Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen. *Vieweg-Verlag*, 2005.
- [69] M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin, and L.J. Topp. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *J.Aeron.Sci.*, 23:805–823, 1956.

- 
- [70] E. Uhlmann, R. Mahnken, I.M. Ivanov, and C. Cheng. Fem modeling of hard turning with consideration of viscoplastic asymmetry and phase transformation. *Journal of Machine Engineering*, 13(1):80–92, 2013.
- [71] R. Verfürth. *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*. John Wiley & Sons Inc, 1996.
- [72] G. Vieregge. Die Energieverteilung und die Temperatur bei der Zerspanung. *Werkstatt und Betrieb*, 86(11):691–703, 1953.
- [73] J.-J.J. Wang and C.M. Zheng. Identification of shearing and ploughing cutting constants from average forces in ball-end milling. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 42(6):695–705, 2002.
- [74] B. Wedan and J.C. South, Jr. A method for solving the transonic full-potential equation for general configurations. In *6th Computational Fluid Dynamics Conference Danvers*, page 1889, 1983.
- [75] M. Wolff and M. Böhm. Continuous bodies with thermodynamically active singular sharp interfaces. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2015.
- [76] G. Yücesan and Y. Altıntaş. Improved modelling of cutting force coefficients in peripheral milling. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 34(4):473–487, 1994.
- [77] L. Zumvorde. Parallelisierung durch Gebietszerlegung. Bachelorarbeit, Universität Bremen, 2015.