Ratkaisun olemassaolo epälineaarisille parabolisille ongelmille variaatiolaskennan suoria menetelmiä käyttäen

Kristian Moring

Perustieteiden korkeakoulu

Diplomityö, joka on jätetty opinnäytteenä tarkastettavaksi diplomi-insinöörin tutkintoa varten Espoossa 9.10.2017.

Työn valvoja ja ohjaaja:

Prof. Juha Kinnunen

Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu

AALTO-YLIOPISTO
PERUSTIETEIDEN KORKEAKOULU

DIPLOMITYÖN
TIIVISTELMÄ

Tekijä: Kristian Moring

Työn nimi: Ratkaisun olemassaolo epälineaarisille parabolisille ongelmille variaatiolaskennan suoria menetelmiä käyttäen

Päivämäärä: 9.10.2017 Kieli: Suomi Sivumäärä: 4+47

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Professuuri: Matematiikka SCI3054

Työn valvoja ja ohjaaja: Prof. Juha Kinnunen

Työssä todistetaan ratkaisun olemassaolo ja yksikäsitteisyys paraboliselle p-Laplacen yhtälölle ajasta riippumattomilla Cauchy-Dirichlet'n reuna-arvoilla. Tulos perustuu variaatiolaskennan suoriin menetelmiin, jolloin todistus nojaa oleellisesti vain yhtälön ratkaisun variaatiomääritelmään sekä energiaestimaatteihin ja approksimaatioargumentteihin, kuten aikasilotukseen. Kyseinen todistustekniikka on sovellettavissa myös yleisemmille parabolisille systeemeille.

Avainsanat: Epälineaariset paraboliset osittaisdifferentiaaliyhtälöt, parabolinen p-Laplace, olemassaolo, parabolinen minimoija, variaatioratkaisu, variaatiolaskennan suorat menetelmät

AALTO UNIVERSITY
SCHOOL OF SCIENCE

ABSTRACT OF THE
MASTER'S THESIS

Author: Kristian Moring

Title: Existence of solutions for nonlinear parabolic problems via direct methods in the calculus of variations

Date: 9.10.2017 Language: Finnish Number of pages: 4+47

Department of Mathematics and Systems Analysis

Professorship: Mathematics SCI3054

Supervisor: Prof. Juha Kinnunen

Advisor: Prof. Juha Kinnunen

We prove existence and uniqueness of solution for parabolic p-Laplace equation with time independent Cauchy-Dirichlet boundary datum. The result is based on direct methods in the calculus on variations. In this case, the existence is achieved with variational definition of solution and by using energy estimates and approximation arguments, such as time mollification. Due to the methods used in the proof, the result can be applied to more general parabolic systems as well.

Keywords: Nonlinear parabolic PDEs, parabolic p-Laplacian, existence, parabolic minimizer, variational solution, direct methods in the calculus of variations

Sisällysluettelo

Tiivistelmä **ii**

Tiivistelmä (englanniksi) **iii**

Sisällysluettelo **iv**

1 Johdanto **1**

2 Esitietoja **3**

3 Ratkaisujen määritelmät ja yhtäpitävyys **8**

4 Variaatioratkaisun olemassaolo ja yksikäsitteisyys **27**

5 Konveksisuuden välttämättömyys ratkaisun olemassaololle **44**

Viitteet **47**

1 Johdanto

Tässä työssä tarkastellaan erästä epälineaaristen parabolisten osittaisdifferentiaaliyhtälöiden prototyyppiä, parabolista p-Laplacen yhtälöä

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = 0,$$

jossa yleisesti $1 < p < \infty$, mutta keskitymme käsittelemään tapausta $p \geq 2$. Kyseinen yhtälö on tyypillinen epälineaarinen yleistys perinteiselle lämpöyhtälölle, ja palautuu lämpöyhtälöksi, kun $p = 2$. Työn päämääränä on todistaa ratkaisun olemassaolo yhtälölle luonnollisessa funktioavaruudessa tietyntyyppisin reunaehdoin variaatiolaskennan menetelmiä käyttäen. Luonnollinen funktioavaruus on tässä tapauksessa parabolinen Sobolevin avaruus, minkä vuoksi alussa käydään läpi esitietoja ja perustuloksia vektoriarvoisten funktioiden integraalille ja Lebesguen avaruuksille. Tällaisissa funktioavaruuksissa kuvaukset on määritelty hieman eri tavalla kuin funktiot, joita halutaan tarkastella. Tällöin toivotut mitallisuusehdot eivät ole lähtökohtaisesti täysin selviä, minkä vuoksi näiden tulkintojen välistä yhteyttä käydään läpi toisessa kappaleessa.

Osittaisdifferentiaaliyhtälöitä voi esittää monessa eri muodossa ja niiden ratkaisuja voi määritellä eri tavoin. Klassinen ratkaisu toteuttaa yhtälön pisteittäin, ja siltä vaaditaan verrattain paljon sileyttä. Nämä vaatimukset ovat monessa tilanteessa liian vahvoja ylipäätään ratkaisun olemassaolon kannalta, ja siten tyypillinen tapa on tulkita yhtälö heikommassa muodossa. Tällaiselle tulkinnalle on olemassa erilaisia määritelmiä, joista tässä työssä esitetään kolme; heikon ratkaisun, parabolisen minimoijan ja variaatioratkaisun määritelmät. Oleellisesti nämä määritelmät ovat yhtäpitäviä tarkastelemamme yhtälön tapauksessa, mikä osoitetaan kolmannessa kappaleessa. Lähtökohtaisesti osittaisdifferentiaaliyhtälön ratkaisun tulkitaan toteuttavan yhtälö lokaalisti määrittelyjoukossaan, mutta ongelmaan liitetään usein myös reunaehtoja. Olemassaolo todistetaan tässä työssä tilanteessa, jossa ratkaisulta vaaditaan niin sanotut Cauchy-Dirichlet'n reunaehdot, mikä tarkoittaa, että ratkaisu saa tietyt arvot ongelman alkuhetkellä ja pystyreunalla. Pystyreunalla tarkoitetaan alueen spatiaalista reunaa kaikilla tarkasteltavilla ajanhetkillä. Reuna-arvot oletetaan ajasta riippumattomiksi, ja tarkastellaan aika-avaruussylinteriä, jossa aikaväli on puoliääretön. Siten kyseistä ongelmaa voi tarkastella ajassa mielivaltaisen pitkälle. Ratkaisulta pyritään määritelmissä olettamaan ajan suhteen vain vähän säännöllisyyttä, vähemmän kuin määritelmien testifunktioilta. Tällöin ratkaisua ei voida suoraan käyttää testifunktiona, minkä vuoksi työssä esitellään todistuksissa tarvittava tietyntyyppinen aikasilotus.

Työn päätuloksena esitetään variaatiolaskentaan perustuva todistus yhtälön variaatioratkaisun olemassaololle ja yksikäsitteisyydelle. Vaikka tarkastelemamme yhtälön kaltaisille yhtälötyypeille edellä mainitut ratkaisujen määritelmät ovat yhtäpitäviä, variaatioratkaisu voidaan määritellä huomattavasti yleisemmillekin parabolisille systeemeille. Kyseisen todistustekniikan etuna onkin, ettei se aseta suuria rajoitteita ongelman rakenteelle. Todistuksen ideana on määritellä positiivisesta parametrista riippuva joukko konvekseja variaatiofunktionaaleja, joille voidaan osoittaa yksikäsitteisen minimoijan olemassaolo variaatiolaskennan suoria menetelmiä käyttäen kaikilla tarkasteltavilla parametrin arvoilla. Variaatiofunktionaalien joukko määritellään siten, että vietäessä parametrin arvo tiettyä jonoa pitkin rajalle nollaan vastaavien funktionaalien minimoijat suppenevat sopivassa mielessä tarkasteltavaan, variaatiomääritelmän mukaiseen ratkaisuun. Tällöin rajafunktio perii minimointiominaisuuden toivotussa mielessä. Viimeisessä kappaleessa osoitetaan konveksisuuden olevan välttämätön ehto ratkaisun olemassaololle.

Olemassaolotodistuksen runko pohjautuu Bögeleinin, Duzaarin ja Marcellinin artikkeliin [3]. Parabolisen minimoijan määritelmän esitteli Wieser artikkelissaan [12], ja variaatioratkaisun tyyppinen määritelmä esiteltiin ensimmäisen kerran tiettävästi lähteessä [8]. Variaatiolaskennan menetelmien käyttö aikariippuvien ongelmien ratkaisemiseksi pohjautuu vuonna 1996 julkaistun De Giorgin artikkelin [5] konjektuuriin, jossa ongelmana tarkasteltiin epälineaarisia hyperbolisia aaltoyhtälöitä. Kyseisessä konjektuurissa ongelma määriteltiin alueessa $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$, jossa alueella ei ole pystyreunaa. Oleellisesti tälle konjektuurille todistuksen esittivät Serra ja Tilli artikkelissaan [10] vuonna 2012. Tämän työn pääasiallisen lähteen [3] todistus nojaa vahvasti kyseiseen lähestymistapaan. Hieman samantyyppistä aikadiskretointia hyödyntävää tekniikkaa on käytetty lähteissä [1] ja [2].

Kappaleessa 2 läpikäyty Bochner-integrointiteoria pohjautuu lähinnä teoksiin [7] ja [11]. Jälkimmäistä käytetään lähteenä myös seuraavassa kappaleessa 3. Tässä työssä käytetyn aikasilotuksen esitteli Naumann lähteessä [9], ja tähän liittyviä tuloksia löytyy esimerkiksi lähteestä [4]. Reuna-arvojen huomiointi ratkaisujen määritelmissä pohjautuu teoksen [13] lähestymistapaan. Variaatiolaskennan suoriin menetelmiin käytetään viitettä [6]. Konveksisuuden välttämättömyysehto on osoitettu alun perin artikkelissa [12], mutta tämän työn todistus pohjautuu Christoph Schevenin julkaisemattomaan käsikirjoitukseen.

2 Esitietoja

Tässä työssä tarkastellaan parabolista p-Laplacen yhtälöä

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = 0, \qquad 2 \leq p < \infty, \tag{2.1}$$

määrittelyjoukossa $\Omega \times (0, \infty)$. Joukon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ oletetaan olevan avoin ja rajoitettu. Jatkossa käytetään merkintää $\Omega_\infty := \Omega \times (0, \infty)$. Kun $0 < T < \infty$, joukolle $\Omega \times (0, T)$ käytetään vastaavasti merkintää Ω_T. Olemme pääosin kiinnostuneita yhtälön globaalista versiosta, jossa ratkaisulta vaaditaan Cauchy-Dirichlet'n reuna-arvot alueen parabolisella reunalla. Tällöin määritellään

$$u = u_o \quad \text{reunalla } \partial_{\mathcal{P}}\Omega_\infty$$

sopivassa mielessä, jossa parabolinen reuna määritellään $\partial_{\mathcal{P}}\Omega_\infty := (\overline{\Omega} \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times (0, \infty))$. Unionissa ensimmäinen joukko viittaa ongelman alkuhetkeen ja toinen pystyreunaan. Tarkastelemme tilannetta, jossa u_o on ajasta riippumaton, jolloin ratkaisu u saa pystyreunalla samat reuna-arvot kuin alkuhetkellä koko aikavälillä.

Määritellään seuraavaksi niin sanottu parabolinen Sobolevin avaruus, josta ratkaisua yhtälön (2.1) tyyppiseen ongelmaan lähtökohtaisesti etsitään. Kyseinen avaruus liittyy läheisesti Bochner-integrointiteoriaan, jossa tarkastellaan kuvauksia tyyppiä $u : S \to X$, jossa S on jokin σ-äärellinen mitta-avaruus, ja X on Banach-avaruus. Tapauksessamme oletetaan, että etsimämme ratkaisu u on melkein jokaisella ajanhetkellä $t \in (0, T)$ Sobolev-funktio, eli joukko $S = (0, T)$ varustetaan Lebesguen mitalla ja $X = W^{1,p}(\Omega)$ tavanomaisella Sobolevin normilla. Käydään seuraavaksi läpi lyhyesti Bochner-integraalin määrittely.

Vahvasti mitallinen funktio $f : S \to X$ määritellään siten, että kyseistä funktiota f voidaan approksimoida pisteittäin melkein kaikkialla yksinkertaisilla funktioilla. Yksinkertainen funktio määritellään tässä tapauksessa funktioksi $s : S \to X$, joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$s(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{B_k}(t),$$

jossa $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in X$ ja $B_k \in \mathcal{M}$ ovat erillisiä joukkoja, joille $\mu(B_k) < \infty$, kaikilla k. Funktio χ_{B_k} on joukon B_k karakteristinen funktio. Näin määritellyille yksinkertaisille funktioille integraali voidaan määritellä luonnolliseen tapaan

$$\int_S s \, d\mu := \sum_{k=1}^{n} a_k \, \mu(B_k).$$

Yksinkertaisille funktioille pätee selvästi integraalin lineaarisuus ja kolmioepäyhtälön nojalla myös

$$\left\| \int_S s \, d\mu \right\| \leq \int_S \|s\| \, d\mu.$$

Funktiota $f : S \to X$ kutsutaan Bochner-integroituvaksi, mikäli on olemassa jono (s_n) yksinkertaisia funktioita, jotka suppenevat funktioon f melkein kaikkialla (f vahvasti mitallinen) ja lisäksi

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_S \|f - s_n\| \, d\mu = 0.$$

Tällöin voidaan määritellä

$$\int\limits_S f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_S s_n \, d\mu,$$

sillä jono integraaleja $(\int_S s_n \, d\mu)$ on Cauchy, ja raja-arvo on riippumaton approksimoivasta yksinkertaisten funktioiden jonosta (s_n). Jono $(\int_S s_n \, d\mu)$ on Cauchy, sillä

$$\begin{aligned}
\left\| \int\limits_S s_n \, d\mu - \int\limits_S s_m \, d\mu \right\| &\leq \int\limits_S \|s_n - s_m\| \, d\mu \\
&\leq \int\limits_S \|s_n - f\| \, d\mu + \int\limits_S \|s_m - f\| \, d\mu \\
&\longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

kun $n, m \to \infty$. Olkoon lisäksi (t_n) toinen yksinkertaisten funktioiden jono, joka suppenee jonon (s_n) tavoin melkein kaikkialla funktioon f ja $\int_S \|t_n - f\| \, d\mu \to 0$, kun $n \to \infty$. Tarkastellaan jonoa (z_n) määriteltynä siten, että

$$z_n := \begin{cases} s_n, & \text{jos } n \text{ on parillinen,} \\ t_n, & \text{jos } n \text{ on pariton.} \end{cases}$$

Tällöin jono $(\int_S z_n \, d\mu)$ on Cauchy vastaavalla argumentilla kuin yllä. Koska jonot $(\int_S s_n \, d\mu)$ ja $(\int_S t_n \, d\mu)$ ovat jonon $(\int_S z_n \, d\mu)$ osajonoja, ja osajonot suppenevat samaan raja-arvoon, pätee

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_S z_n \, d\mu = \int\limits_S f \, d\mu,$$

ja vastaavasti integraalien $\int_S t_n \, d\mu$ raja-arvolle, jolloin kyseinen raja-arvo on approksimoivasta yksinkertaisten funktioiden jonosta riippumaton.

Bochnerin lauseen perusteella vahvasti mitallinen funktio $f : S \to X$ on Bochner-integroituva, jos ja vain jos $\|f\|$ on Lebesgue-integroituva. Lisäksi tällöin pätee tavanomainen epäyhtälö

$$\left\| \int\limits_S f \, d\mu \right\| \leq \int\limits_S \|f\| \, d\mu.$$

Täten L^p-avaruus Bochner-integraalin mielessä voidaan määritellä seuraavasti

$$L^p(S, X) := \left\{ f : S \to X \;\middle|\; f \text{ vahvasti mitallinen } \& \int\limits_S \|f\|^p \, d\mu < \infty \right\}.$$

Kyseiselle L^p-avaruudelle määritellään luonnollinen normi

$$\|f\|_{L^p(S,X)} := \left(\int\limits_S \|f\|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Nyt (tarkastelemalla funktioiden, jotka saavat samat arvot melkein kaikkialla, ekvivalenssiluokkia) kyseinen $L^p(S,X)$-avaruus varustettuna edellä määritellyllä normilla on Banach-avaruus skalaarisen L^p-avaruuden tapaan.

Bochner-integraalille ja vektoriarvoisten funktioiden L^p-avaruuksille pätevät useat samantyyppiset tulokset kuin Lebesgue-integraalille ja tavanomasille L^p-avaruuksille, kuten dominoidun konvergenssin lause ja Fatoun lemman vastine.

Lemma 2.1. *Yksinkertaisten funktioiden joukko on tiheä avaruudessa $L^p(S,X)$. Lisäksi, jos $f \in L^p(S,X)$, niin on olemassa yksinkertaisten funktioiden jono (t_n), jolle pätee $t_n \to f$ sekä melkein kaikkialla että $L^p(S,X)$-mielessä, kun $n \to \infty$.*

Todistus. Olkoon $f \in L^p(S,X)$. Tällöin funktion f vahvasta mitallisuudesta johtuen on olemassa jono (s_n) yksinkertaisia funktioita, jotka suppenevat melkein kaikkialla funktioon f. Määritellään jono (t_n) siten, että

$$t_n(x) = \begin{cases} s_n(x), & \text{jos } \|s_n(x)\| \leq 2\|f(x)\|, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tällöin myös $t_n \to f$ melkein kaikkialla, sillä $t_n(x) = 0$ kaikilla n, jos $f(x) = 0$. Toisaalta, mikäli $\|f(x)\| > 0$, saadaan $\|s_n(x)\| - \|f(x)\| \leq \|s_n(x) - f(x)\| < \|f(x)\|$, missä jälkimmäinen epäyhtälö pätee tarpeeksi isoilla indeksin n arvoilla. Tällöin siis $t_n(x) = s_n(x)$, kun n on tarpeeksi suuri. Lisäksi $\|t_n(x) - f(x)\|^p \leq 4^p \|f(x)\|^p$ melkein kaikkialla. Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseen perusteella

$$\int\limits_S \|t_n - f\|^p \, d\mu \longrightarrow 0,$$

kun $n \to \infty$, jolloin siis määritelmän mukaan $t_n \to f$, $L^p(S,X)$-mielessä.

□

Kuten aiemmin mainittiin, parabolinen Sobolevin avaruus määritellään siis kuvauksina joukolta $(0,T)$ Lebesguen mitalla ja Borel sigma-algebralla varustettuna Sobolev-funktioavaruudelle $W^{1,p}(\Omega)$, jossa Sobolev-funktioiden reuna-arvot voidaan lisäksi spesifioida. Kyseiselle paraboliselle Sobolevin avaruudelle käytetään merkintää $L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$. On kuitenkin huomionarvoista, että usein halutaan tarkastella tarkalleen ottaen funktiota $(x,t) \mapsto u(t)\,(x)$ funktion u sijaan. Kuitenkaan yleisesti jälkimmäinen funktio ei ole mitallinen mille tahansa kuvaukselle $u \in L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$ tulomitan suhteen, jolloin esimerkiksi Fubinin lauseen oletukset eivät päde. Kuitenkin integroinnin järjestystä ajan ja paikan suhteen halutaan usein vaihtaa, jota varten todistetaan seuraava tulos. Sen nojalla toivottu tulomitallinen edustaja on olemassa mille tahansa parabolisen Sobolevin avaruuden kuvaukselle.

Lemma 2.2. *Kuvauksella* $u \in L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$ *on olemassa tulomitallinen edustaja* $\tilde{u} : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$, *jolle pätee, että melkein kaikilla* $t \in (0,T)$,

$$\begin{aligned} u(t) &= \tilde{u}(\cdot,t) \quad L^p(\Omega)\text{-mielessä, ja} \\ Du(t) &= D\tilde{u}(\cdot,t) \quad [L^p(\Omega)]^n\text{-mielessä.} \end{aligned}$$

Todistus. Olkoon $u \in L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$. Nyt on olemassa Lemman 2.1 perusteella jono (u_n) yksinkertaisia funktioita, joille pätee $u_n \to u$ melkein kaikkialla, ja $L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$-mielessä. Koska funktiot u_n ovat yksinkertaisia, ne ovat myös tulomitallisia. Kirjoitetaan selkeyden vuoksi $u_n(x,t) := u_n(t)\,(x)$. Nyt saadaan

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega |u_n - u_m|^p \,dx\,dt + \int_0^T \int_\Omega |Du_n - Du_m|^p \,dx\,dt \\ &\leq 2^{p-1} \Bigg(\int_0^T \int_\Omega |u_n - u|^p \,dx\,dt + \int_0^T \int_\Omega |u_m - u|^p \,dx\,dt \\ &+ \int_0^T \int_\Omega |Du_n - Du|^p \,dx\,dt + \int_0^T \int_\Omega |Du_m - Du|^p \,dx\,dt \Bigg) \\ &= 2^{p-1} \Big(\|u_n - u\|^p_{L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))} + \|u_m - u\|^p_{L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))} \Big) \\ &\longrightarrow 0, \end{aligned}$$

kun $n,m \to \infty$ yllä olevan perusteella. Täten siis (u_n) ja (Du_n) ovat Cauchy-jonoja myös avaruuksissa $L^p(\Omega_T)$ ja $[L^p(\Omega_T)]^n$. Tällöin on olemassa edelleen osajonot (u_n) ja (Du_m) ja alkiot $\tilde{u}$ ja $\tilde{u}_D$ vastaavissa avaruuksissa siten, että kun $n \to \infty$,

$$\begin{aligned} u_n &\to \tilde{u} \quad \text{m.k. } (x,t) \in \Omega_T \text{ ja } L^p(\Omega_T)\text{-mielessä, ja} \\ Du_m &\to \tilde{u}_D \quad \text{m.k. } (x,t) \in \Omega_T \text{ ja } [L^p(\Omega_T)]^n\text{-mielessä.} \end{aligned}$$

Kyseisten osajonojen voidaan olettaa sisältävän keskenään samat alkiot u_n, sillä jonot voidaan valita iteratiivisesti käyttämällä hyväksi tietoa, että suppenevan jonon osajono suppenee samaan raja-arvoon. Nyt saadaan

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega |\tilde{u} - u|^p \,dx\,dt &\leq 2^{p-1} \left(\int_0^T \int_\Omega |\tilde{u} - u_n|^p \,dx\,dt + \int_0^T \int_\Omega |u - u_n|^p \,dx\,dt \right) \\ &\longrightarrow 0, \end{aligned}$$

kun $n \to \infty$ tarkastelemalla edellä poimittua osajonoa. Täten siis $u = \tilde{u}$, $L^p(0,T;L^p(\Omega))$-mielessä, eli $u(t) = \tilde{u}(\cdot,t)$ melkein kaikilla $t \in (0,T)$, $L^p(\Omega)$-mielessä. Täysin vastaavalla argumentilla saadaan, että myös $Du(t) = \tilde{u}_D(\cdot,t)$ melkein kaikilla $t \in (0,T)$ $[L^p(\Omega)]^n$-mielessä. Todistuksen loppuunsaattamiseksi osoitetaan vielä, että $\tilde{u}_D(\cdot,t) = D\tilde{u}(\cdot,t)$ $[L^p(\Omega)]^n$-mielessä melkein kaikille $t \in (0,T)$. Heikon derivaatan määritelmän perusteella kaikilla $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_T)$ pätee

$$\int_0^T \int_\Omega \partial_i u_m \varphi \,dx\,dt = -\int_0^T \int_\Omega u_m \partial_i \varphi \,dx\,dt$$

kaikilla $m \in \mathbb{N}$ ja $i \in \{1, \ldots, n\}$. Yllä olevien suppenemisten perusteella tässä voidaan ottaa raja-arvo $m \to \infty$, jolloin

$$\int_0^T \int_\Omega \partial_i u_m \varphi \, dx \, dt \to \int_0^T \int_\Omega \tilde{u}_{D,i} \, \varphi \, dx \, dt, \quad \text{ja}$$
$$-\int_0^T \int_\Omega u_m \partial_i \varphi \, dx \, dt \to -\int_0^T \int_\Omega \tilde{u} \, \partial_i \varphi \, dx \, dt.$$

Tällöin heikot derivaatat $\partial_i \tilde{u}$ ovat olemassa, ja lisäksi pätee

$$\int_0^T \int_\Omega (\partial_i \tilde{u} - \tilde{u}_{D,i}) \varphi \, dx \, dt = 0,$$

kaikilla $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_T)$, millä tahansa $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tästä seuraa, että $\partial_i \tilde{u} = \tilde{u}_{D,i}$ melkein kaikilla $(x,t) \in \Omega_T$ variaatiolaskennan peruslauseen nojalla. Tällöin kyseiset funktiot voidaan samastaa $L^p(\Omega_T)$-mielessä, jolloin millä tahansa i,

$$\int_0^T \int_\Omega |\tilde{u}_{D,i}(x,t) - \partial_i \tilde{u}(x,t)|^p \, dx \, dt = 0.$$

Käyttämällä Fubinin lausetta, saadaan

$$\int_\Omega |\tilde{u}_{D,i}(x,t) - \partial_i \tilde{u}(x,t)|^p \, dx = 0$$

melkein kaikilla $t \in (0,T)$. Täten saadaan yllä olevan tuloksen perusteella $Du(t) = D\tilde{u}(\cdot, t)$ melkein kaikilla $t \in (0,T)$ $[L^p(\Omega)]^n$-mielessä. Siispä väite pätee. $\square$

Edellisen lemman perusteella voidaan siis tarkastella kuvauksia $u \in L^p(0,T; W^{1,p}(\Omega))$ oleellisesti tulomitallisina funktiona tulkinnalla $u(x,t) := u(t)\,(x)$, jolloin mm. Fubinin lauseen käyttö on perusteltua. Jatkossa käytetään yleensä tätä tulkintaa funktioille joukossa $L^p(0,T; W^{1,p}(\Omega))$.

3 Ratkaisujen määritelmät ja yhtäpitävyys

Tässä työssä todistetaan ratkaisun olemassaolo joukossa

$$\{u \in L^p(0,T;W^{1,p}_{u_o}(\Omega)) \cap C^0([0,T];L^2(\Omega))\ \forall T>0 \mid u(\cdot,0)=u_o\}. \tag{3.1}$$

Alkuhetken ja pystyreunan reuna-arvoilta vaaditaan

$$u_o \in W^{1,p}(\Omega).$$

Koska oletetaan, että $p \geq 2$, Jensenin epäyhtälön nojalla pätee suoraan, että $u_o \in L^2(\Omega)$, jolloin tätä ehtoa ei tarvitse erikseen vaatia. Funktio $u \in L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$ saa kyseiset reuna-arvot parabolisella reunalla $\partial_{\mathcal{P}}\Omega_T$, mikäli

$$\begin{cases} u - \bar{u}_o \in L^p(0,T;W^{1,p}_0(\Omega)), & \text{ja} \\ \|u(\cdot,t)-u_o\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0, & \text{kun } t \downarrow 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Tässä funktion u_o aikariippumaton ekstensio määritellään $\bar{u}_o(\cdot,t) := u_o$ kaikilla $t \in [0,T]$. Jälkimmäinen ehto seuraa myös suoraan vaatimalla ratkaisulta $u(\cdot,0)=u_o$, mikäli $u \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$.

Seuraavaksi esitetään kolme erilaista määritelmää yhtälön (2.1) ratkaisulle.

Määritelmä 3.1 (Heikko ratkaisu)**.** Mitallista funktiota $u : \Omega_\infty \to [-\infty,\infty]$, jolle pätee myös $u \in L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$ kaikilla $T>0$, kutsutaan yhtälön (2.1) *heikoksi ratkaisuksi*, jos

$$\int_0^T \int_\Omega \Big(-u\,\partial_t\varphi + |Du|^{p-2}Du\cdot D\varphi \Big)\,dx\,dt = 0$$

millä tahansa $T>0$, kaikilla testifunktioilla $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_T)$.

Määritelmä 3.2 (Parabolinen minimoija)**.** Mitallista funktiota $u : \Omega_\infty \to [-\infty,\infty]$ kutsutaan *paraboliseksi minimoijaksi*, mikäli $u \in L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$ kaikilla $T>0$, ja ehto

$$\int_0^T \int_\Omega \Big(u\,\partial_t\varphi\,dx\,dt + \frac{1}{p}|Du|^p \Big)\,dx\,dt \leq \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{p}|Du+D\varphi|^p\,dx\,dt$$

pätee millä tahansa $T>0$, kaikilla testifunktioilla $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_T)$.

Määritelmä 3.3 (Variaatioratkaisu)**.** Mitallista funktiota $u : \Omega_\infty \to [-\infty,\infty]$, jolle lisäksi pätee $u \in L^p(0,T;W^{1,p}_{u_o}(\Omega)) \cap C^0([0,T];L^2(\Omega))$ millä tahansa $T>0$, kutsutaan *variaatioratkaisuksi* yhtälöä (2.1) vastaavalle Cauchy-Dirichlet-ongelmalle alku- ja reuna-arvoilla $u_o \in W^{1,p}(\Omega)$, jos

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{p}|Du|^p\,dx\,dt \leq{}& \int_0^T \int_\Omega \Big(\partial_t v(v-u) + \frac{1}{p}|Dv|^p \Big)\,dx\,dt \\ &+ \frac{1}{2}\|v(\cdot,0)-u_o\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|(v-u)(\cdot,T)\|^2_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

millä tahansa $T > 0$, kaikilla $v \in L^p(0,T; W^{1,p}_{u_o}(\Omega)) \cap C^0([0,T]; L^2(\Omega))$, joille $\partial_t v \in L^2(\Omega_T)$.

Huomautus 3.4. Heikon ratkaisun ja parabolisen minimoijan määritelmät ovat lokaaleja, kun taas variaatioratkaisun määritelmään on otettu reuna-arvot suoraan mukaan. Mikäli halutaan tarkastella heikkoa ratkaisua ja parabolista minimoijaa reuna-arvoilla, tulee tällöin määritellä missä mielessä ratkaisulta vaaditaan halutut reuna-arvot.

Huomautus 3.5. Variaatiomääritelmässä ratkaisulta (ja testifunktioilta) oletetaan reuna-arvot u_o pystyreunalla funktioavaruuden $L^p(0,T; W^{1,p}_{u_o}(\Omega))$ määritelmän perusteella, mutta alkuarvoiksi funktiota u_o ei suoraan vaadita. Kyseisestä variaatioepäyhtälöstä kuitenkin seuraa, että variaatioratkaisu $u(\cdot,t)$ saa alkuarvot u_o $L^2(\Omega)$-mielessä. Tämä nähdään käyttämällä funktiota u_o testifunktiona, jolloin epäyhtälöstä saadaan

$$0 \le \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{p} |Du|^p \, dx \, dt \le T \int_\Omega \frac{1}{p} |Du_o|^p \, dx - \frac{1}{2} \|u_o - u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\Omega)^2},$$

sillä u_o ei riipu ajasta. Tällöin

$$\begin{aligned} \|u_o - u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\Omega)} &\le \frac{2T}{p} \int_\Omega |Du_o|^p \, dx \\ &\longrightarrow 0, \end{aligned}$$

kun $T \downarrow 0$. Siten reunaehtojen (3.2) toista kohtaa ei tarvitse variaatioratkaisun määritelmässä erikseen vaatia.

Seuraavaksi näytetään edellä mainittujen ratkaisujen yhtäpitävyys olettaen, että ratkaisujen funktioavaruudet on valittu sopivalla tavalla. Notaation helpottamiseksi merkitään jatkossa tulomittaa $dx\,dt =: d\nu$ integroitaessa sekä spatiaalisten että aikamuuttujan yli.

Lemma 3.6. *Funktio u on Määritelmän 3.1 mukainen heikko ratkaisu jos ja vain jos se on Määritelmän 3.2 mukainen parabolinen minimoija.*

Todistus. " $\Rightarrow$ ": Olkoon $T > 0$, u parabolisen p-Laplacen yhtälön heikko ratkaisu ja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_T)$. Tällöin

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} |Du|^p \, d\nu &= \int_{\Omega_T} |Du|^{p-2} Du \cdot Du \, d\nu \\ &= \int_{\Omega_T} |Du|^{p-2} Du \cdot (Du + D\varphi) \, d\nu - \int_{\Omega_T} u \, \partial_t \varphi \, d\nu, \end{aligned}$$

joista jälkimmäisessä yhtälössä on käytetty heikon ratkaisun määritelmää. Tästä saadaan edelleen

$$\int_{\Omega_T} u\,\partial_t\varphi\,d\nu + \int_{\Omega_T} |Du|^p\,d\nu \le \int_{\Omega_T} |Du|^{p-2}|Du\cdot(Du+D\varphi)|\,d\nu$$
$$\le \int_{\Omega_T} |Du|^{p-1}|Du+D\varphi|\,d\nu$$
$$\le \frac{p-1}{p}\int_{\Omega_T} |Du|^p\,d\nu + \frac{1}{p}\int_{\Omega_T} |Du+D\varphi|^p\,d\nu,$$

jossa toisella rivillä on käytetty Cauchy-Schwarzin ja kolmannella Youngin epäyhtälöä. Näin saadusta epäyhtälöstä seuraa suoraan, että u on parabolinen minimoija.

" $\Leftarrow$ ": Oletetaan nyt että u on parabolinen minimoija ja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_T)$. Tällöin myös $\varepsilon\varphi \in C_0^\infty(\Omega_T)$ ja supp $\varepsilon\varphi =$ supp φ kaikilla $\varepsilon \in (0,1)$. Käyttämällä funktiota $\varepsilon\varphi$ testifunktiona parabolisen minimoijan määritelmässä, saadaan

$$\varepsilon p \int_{\Omega_T} u\,\partial_t\varphi\,d\nu + \int_{\Omega_T} |Du|^p\,d\nu \le \int_{\Omega_T} |Du+\varepsilon D\varphi|^p\,d\nu$$

Tästä termejä järjestelemällä seuraa edelleen

$$\int_{\Omega_T} -u\,\partial_t\varphi\,d\nu + \frac{1}{p}\int_{\Omega_T} \frac{1}{\varepsilon}(|Du+\varepsilon D\varphi|^p - |Du|^p)\,d\nu \ge 0. \tag{3.3}$$

Kun $\varepsilon \downarrow 0$, Gâteaux derivaatan määritelmän ja ketjusäännön mukaan

$$\frac{1}{\varepsilon}(|Du+\varepsilon D\varphi|^p - |Du|^p) \to p|Du|^{p-2}Du\cdot D\varphi$$

pisteittäin, sillä $L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$ on Banachin avaruutena lokaalisti konveksi. Ottamalla raja-arvo $\varepsilon \downarrow 0$ epäyhtälössä (3.3), saadaan Lebesguen dominoidun konvergenssin nojalla " $\ge$ " heikon ratkaisun määritelmässä. Suunta " $\le$ " seuraa samaan tapaan testaamalla funktiolla $-\varepsilon\varphi$ ja ottamalla raja-arvo $\varepsilon \downarrow 0$. Tällöin yhtäsuuruus pätee ja u on heikko ratkaisu.

Lebesguen dominoidun konvergenssin argumenttiin vaadittava integroituva majorantti saadaan esimerkiksi seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\varepsilon}(|Du+\varepsilon D\varphi|^p-|Du|^p)\right| &= \frac{1}{\varepsilon}\left|\int_0^\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}(|Du+tD\varphi|^p)\,dt\right| \\
&= \frac{p}{\varepsilon}\left|\int_0^\varepsilon |Du+tD\varphi|^{p-2}(Du+tD\varphi)\cdot D\varphi\,dt\right| \\
&\leq \frac{p}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon |Du+tD\varphi|^{p-1}|D\varphi|\,dt \\
&\leq p(|Du|+|D\varphi|)^{p-1}|D\varphi| \\
&\leq (p-1)(|Du|+|D\varphi|)^p+|D\varphi|^p \\
&\leq 2^{p-1}(p-1)(|Du|^p+|D\varphi|^p)+|D\varphi|^p \in L^1(\Omega_T),
\end{aligned}
$$

missä 3. rivillä on käytetty Cauchy-Schwartzin epäyhtälöä ja 4. rivillä tietoa, että $0<t<\varepsilon<1$. Lopulta 5. rivillä on käytetty Youngin epäyhtälöä. Testattaessa funktiolla $-\varepsilon\varphi$ integroituvaksi majorantiksi saadaan sama funktio samoja argumentteja käyttäen.

□

Lemma 3.7. *Jos funktio u on Määritelmän 3.1 mukainen heikko ratkaisu tai Määritelmän 3.2 mukainen parabolinen minimoija, niin u:n heikko aikaderivaatta kuuluu parabolisen Sobolevin avaruuden duaaliin, eli* $\partial_t u \in (L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega)))^*$

Todistus. 1) Olkoon $T>0$, u heikko ratkaisu ja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_T)$. Määritellään lineaarinen funktionaali $L_{u_t}: C_0^\infty(\Omega_T)\to\mathbb{R}$ siten, että

$$
L_{u_t}(\varphi)=\int_{\Omega_T} u\,\partial_t\varphi\,d\nu.
$$

Heikon derivaatan määritelmän perusteella funktionaalilla L_{u_t} ja heikolla aikaderivaatalla $\partial_t u$ on yksikäsitteinen vastaavuus. Lisäksi kaikille $\varphi\in C_0^\infty(\Omega_T)$ pätee

$$
\begin{aligned}
|L_{u_t}(\varphi)| = \left|\int_{\Omega_T} u\,\partial_t\varphi\,d\nu\right| &= \left|\int_{\Omega_T}|Du|^{p-2}Du\cdot D\varphi\,d\nu\right| \\
&\leq \int_{\Omega_T}|Du|^{p-1}|D\varphi|\,d\nu \\
&\leq \left(\int_{\Omega_T}|Du|^p d\nu\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{\Omega_T}|D\varphi|^p\,d\nu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{\Omega_T}|Du|^p d\nu\right)^{\frac{1}{p'}} \|\varphi\|_{L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))},
\end{aligned}
$$

jossa toiseksi viimeisellä rivillä on käytetty Hölderin epäyhtälöä. Tällöin $L_{u_t} \in (C_0^\infty(\Omega_T))^*$. Koska $C_0^\infty(\Omega_T)$ on tiheä joukossa $L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$, on funktionaalilla L_{u_t} olemassa yksikäsitteinen jatkuva ekstensio siten, että ekstension normi on sama. Täten voidaan päätellä, että näin määritellylle heikolle aikaderivaatalle pätee $\partial_t u \in (L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega)))^*$.

2) Olkoon u parabolinen minimoija, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_T)$ ja L_{u_t} määritelty kuten edellä. Käytetään parabolisen minimoijan määritelmässä funktiota $\varepsilon\varphi$ testifunktiona, kun $\varepsilon \in (0,1)$ kuten Lemman 3.6 todistuksessa. Nyt mikäli $L_{u_t}(\varphi) \geq 0$, saadaan parabolisen minimoijan määritelmästä

$$\begin{aligned} |L_{u_t}(\varepsilon\varphi)| &= \varepsilon \int\limits_{\Omega_T} u\,\partial_t\varphi\,d\nu \\ &\leq \int\limits_{\Omega_T} \frac{1}{p}(|Du+\varepsilon D\varphi|^p - |Du|^p)\,d\nu, \end{aligned}$$

ja tästä edelleen

$$0 \leq L_{u_t}(\varphi) \leq \frac{1}{p}\int\limits_{\Omega_T} \frac{1}{\varepsilon}(|Du+\varepsilon D\varphi|^p - |Du|^p)\,d\nu$$

millä tahansa $\varepsilon \in (0,1)$. Ottamalla raja-arvo $\varepsilon \downarrow 0$ saadaan kuten Lemman 3.6 todistuksessa Lebesguen dominoidun konvergenssin avulla

$$0 \leq L_{u_t}(\varphi) \leq \int\limits_{\Omega_T} |Du|^{p-2}Du \cdot D\varphi\; d\nu.$$

Tätä voidaan arvioida edelleen kuten kohdassa 1) jolloin saadaan sama haluttu tulos, kun $L_{u_t}(\varphi) \geq 0$.

Mikäli $L_{u_t}(\varphi) < 0$, pätee

$$\begin{aligned} |L_{u_t}(\varphi)| &= -\int\limits_{\Omega_T} u\,\partial_t\varphi\,d\nu \\ &\leq \frac{1}{p}\int\limits_{\Omega_T} \frac{1}{\varepsilon}(|Du-\varepsilon D\varphi|^p - |Du|^p)\,d\nu, \end{aligned}$$

josta saadaan samaan tapaan kuten edellä

$$0 < -L_{u_t}(\varphi) \leq -\int\limits_{\Omega_T} |Du|^{p-2}Du \cdot D\varphi\,d\nu,$$

kun annetaan $\varepsilon \downarrow 0$. Täten

$$|L_{u_t}(\varphi)| \leq \left(\int\limits_{\Omega_T} |Du|^p d\nu \right)^{\frac{1}{p'}} \|\varphi\|_{L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))},$$

kaikilla $C_0^\infty(\Omega_T)$, jolloin väite pätee samoin argumentein kuin kohdassa 1).

$\square$

Seuraavaksi osoitetaan, että variaatioratkaisu on aina myös parabolinen minimoija. Variaatioratkaisun määritelmässä haluttaisiin tällöin käyttää testifunktiota $v = u + s\varphi$ jollakin $s > 0$ ja ottaa lopulta raja-arvo $s \downarrow 0$. Kyseinen funktio ei ole kuitenkaan erityisesti yleisempien ongelmien tapauksissa sallittu testifunktio. Variaatioratkaisulle ei nimittäin välttämättä päde vaadittu $\partial_t u \in L^2(\Omega_T)$. Ratkaisuna ongelmaan testattavaa funktiota usein silotetaan ajan suhteen siten, että silotettu funktio käy testifunktioksi ja lisäksi sillä on sopivia suppenemisominaisuuksia. Tässä työssä käytetään seuraavanlaista aikasilotusta.

Määritelmä 3.8 (Aikasilotus)**.** Olkoon $T > 0$, $v \in L^1(\Omega_T)$, $v_o \in L^1(\Omega)$ ja $h \in (0, T]$. Määritellään aikasilotus

$$[v]_h(\cdot, t) := e^{-\frac{t}{h}} v_o + \frac{1}{h} \int\limits_0^t e^{\frac{s-t}{h}} v(\cdot, s)\, ds,$$

kun $t \in [0, T]$.

Seuraavaksi esitetään kyseisen aikasilotuksen ominaisuuksiin liittyvä lemma, jota tarvitaan jatkossa. Jotta kyseisen lemman todistus pysyy järkevän mittaisena, esitetään aluksi tulos, jota lemman todistuksessa käytetään.

Lemma 3.9. *Olkoon X Banach-avaruus, $v_o \in X$ ja $v \in L^p(0, T; X)$ jollakin $1 \leq p \leq \infty$. Määritellään aikasilotus samalla tavoin kuin yllä,*

$$[v]_h(t) := e^{-\frac{t}{h}} v_o + \frac{1}{h} \int\limits_0^t e^{\frac{s-t}{h}} v(s)\, ds,$$

kun $h \in (0, T]$ ja $t \in [0, T]$. Tällöin $[v]_h \in L^p(0, T; X)$ ja mikäli $p < \infty$,

$$\|[v]_h\|_{L^p(0,t_o;X)} \leq \|v\|_{L^p(0,t_o;X)} + \left[\frac{h}{p}(1 - e^{-\frac{t_o p}{h}}) \right]^{\frac{1}{p}} \|v_o\|_X$$

millä tahansa $t_o \in (0, T]$. Jos $p = \infty$, saadaan

$$\|[v]_h\|_{L^\infty(0,t_o;X)} \leq \|v\|_{L^\infty(0,t_o;X)} + \|v_o\|_X$$

millä tahansa $t_o \in (0, T]$. Lisäksi $\partial_t [v]_h \in L^p(0, T; X)$ ja

$$\partial_t [v]_h = -\frac{1}{h}([v]_h - v).$$

Todistus. Olkoon $t \in (0,T)$. Tällöin saadaan

$$\|[v]_h(t)\|_X \leq e^{-\frac{t}{h}}\|v_o\|_X + \frac{1}{h}\int_0^t e^{\frac{s-t}{h}}\|v(s)\|_X\,ds =: I_1(t) + I_2(t), \tag{3.4}$$

käyttämällä kolmioepäyhtälöä ja perusepäyhtälöä Bochner-integraalille. Olkoon $t_o \in (0,T]$ ja $p < \infty$. Tällöin käyttämällä integroimalla yllä olevaa yhtälöä puolittain yli välin $(0,t_o)$ ja käyttämällä Minkowskin epäyhtälöä, saadaan

$$\left(\int_0^{t_o} \|[v]_h(t)\|_X^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_0^{t_o} I_1(t)^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^{t_o} I_2(t)^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Olkoon $p' = \frac{p}{p-1}$ Hölder-konjugaatti p:lle, kun $p > 1$. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}
I_2(t) &= \int_0^t \left(\frac{1}{h}e^{\frac{s-t}{h}}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{1}{h}e^{\frac{s-t}{h}}\right)^{\frac{1}{p}}\|v(s)\|_X\,ds \\
&\leq \left(\int_0^t \frac{1}{h}e^{\frac{s-t}{h}}\,ds\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_0^t \frac{1}{h}e^{\frac{s-t}{h}}\|v(s)\|_X^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= (1-e^{-\frac{t}{h}})^{\frac{1}{p'}}\left(\int_0^t \frac{1}{h}e^{\frac{s-t}{h}}\|v(s)\|_X^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_0^t \frac{1}{h}e^{\frac{s-t}{h}}\|v(s)\|_X^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

jossa on toisella rivillä käytetty Hölderin epäyhtälöä, kolmannella evaluoitu ensimmäinen integraaleista ja viimeisessä käytetty tietoa $0 < e^{-\frac{t}{h}} < 1$. Kyseinen estimaatti pätee triviaalisti, kun $p = 1$ (tällöin kyseistä laskua ei tarvita). Täten saadaan

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_o} I_2(t)^p\,dt &= \int_0^{t_o}\int_0^t \frac{1}{h}e^{\frac{s-t}{h}}\|v(s)\|_X^p\,ds\,dt \\
&= \int_0^{t_o}\int_s^{t_o} \frac{1}{h}e^{\frac{s-t}{h}}\,dt\|v(s)\|_X^p\,ds \\
&= \int_0^{t_o}\left(1-e^{\frac{s-t_o}{h}}\right)\|v(s)\|_X^p\,ds \leq \int_0^{t_o}\|v(s)\|_X^p\,ds,
\end{aligned}$$

jossa on käytetty Fubinin lausetta, ja tietoa että $s < t < t_o$. Vastaavasti ensimmäiselle termille saadaan

$$\int_0^{t_o} I_1(t)^p\,dt = \|v_o\|_X^p\int_0^{t_o} e^{-\frac{tp}{h}}\,dt = \frac{h}{p}(1-e^{-\frac{t_op}{h}})\|v_o\|_X^p.$$

Yhdistämällä saadut tulokset, lemman ensimmäinen epäyhtälö pätee.

Olkoon $p = \infty$. Nyt
$$I_1(t) = e^{-\frac{t}{h}}\|v_o\|_X \leq \|v_o\|_X$$
ja lisäksi

$$\begin{aligned}
I_2(t) &= \frac{1}{h}\int_0^t e^{\frac{s-t}{h}}\|v(s)\|_X\,ds \\
&\leq \operatorname*{ess\,sup}_{0\leq s\leq t}\|v(s)\|_X\,\frac{1}{h}\int_0^t e^{\frac{s-t}{h}}\,ds \\
&= \left(1-e^{-\frac{t}{h}}\right)\operatorname*{ess\,sup}_{0\leq s\leq t}\|v(s)\|_X \\
&\leq \operatorname*{ess\,sup}_{0\leq s\leq t}\|v(s)\|_X
\end{aligned}$$

millä tahansa $t \geq 0$. Käyttämällä näitä epäyhtälössä (3.4), väitteen toinen epäyhtälö pätee.

Aikaderivaatalle saadaan suoralla laskulla

$$\begin{aligned}
\partial_t[v]_h(t) &= -\frac{e^{-\frac{t}{h}}}{h}v_o - \frac{e^{-\frac{t}{h}}}{h^2}\int_0^t e^{\frac{s}{h}}v(s)\,ds + \frac{1}{h}v(t) \\
&= -\frac{1}{h}([v]_h(t) - v(t)).
\end{aligned}$$

Oletuksen mukaan $v \in L^p(0,T;X)$, ja lisäksi yllä osoitettiin että $[v]_h \in L^p(0,T;X)$, jolloin saadun yhtälön perusteella myös $\partial_t[v]_h \in L^p(0,T;X)$. □

Todistetaan seuraavaksi jatkossa tarvittava aikasilotukseen liittyvä aputulos.

Lemma 3.10. *Olkoon v ja $[v]_h$ kuten Määritelmässä 3.8. Tällöin seuraavat ominaisuudet pätevät:*

(i) *Jos $v \in L^p(\Omega_T)$ ja $v_o \in L^p(\Omega_T)$ jollakin $p \geq 1$, niin tällöin*
$$\|[v]_h\|_{L^p(\Omega_T)} \leq \|v\|_{L^p(\Omega_T)} + h^{\frac{1}{p}}\|v_o\|_{L^p(\Omega)}.$$
Lisäksi $[v]_h \to v$ $L^p(\Omega_T)$-mielessä, kun $h \downarrow 0$.

(ii) *Olkoon $v \in L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$ ja $v_o \in W^{1,p}(\Omega)$ jollakin $p \geq 1$. Tällöin*
$$\|[v]_h\|_{L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))} \leq \|v\|_{L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))} + h^{\frac{1}{p}}\|v_o\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$
Lisäksi $[v]_h \to v$ $L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$-mielessä, kun $h \downarrow 0$.

(iii) *Jos $v \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ ja $v_o \in W_0^{1,p}(\Omega)$, niin tällöin myös $[v]_h \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$.*

(iv) *Jos $v \in L^\infty([0,T];L^2(\Omega))$ ja $v_o \in L^2(\Omega_T)$, niin $[v]_h \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$, $[v]_h(\cdot,0) = v_o$ ja $[v]_h \to v$ $L^2(\Omega_T)$-mielessä, kun $h \downarrow 0$.*

(v) *Olkoon* $v \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ *ja* $v_o \in L^2(\Omega)$. *Tällöin myös* $\partial_t[v]_h \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ *ja lisäksi*

$$\partial_t[v]_h = -\frac{1}{h}([v]_h - v).$$

Todistus. **(i)**: Epäyhtälö saadaan suoraan Lemmasta 3.9 asettamalla $X = L^p(\Omega)$, ja siitä, että Lemmasta 2.2 seuraa suoraan tulomitallisen edustajan olemassaolo kyseisessä $L^p(0,T;L^p(\Omega))$ avaruudessa. Osoitetaan seuraavaksi suppeneminen $[v]_h \to v$, $L^p(\Omega_T)$-mielessä, kun $h \downarrow 0$.

L^p-avaruuksien ominaisuuksien perusteella tiedetään, että funktiota $v \in L^p(\Omega_T)$ voidaan approksimoida L^p-normin suhteen kompaktikantajaisilla, jatkuvilla funktioilla joukossa Ω_T. Kiinnitetään $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa $\tilde{v} \in C_0(\Omega_T)$ siten, että $\|v - \tilde{v}\|_{L^p(\Omega_T)} < \varepsilon$. Määritellään $[\tilde{v}]_h$ kuten Määritelmässä 3.8 alkuarvolla v_o. Tällöin

$$[v]_h - [\tilde{v}]_h = \frac{1}{h}\int_0^t e^{\frac{s-t}{h}}\Big(v(\cdot,s) - \tilde{v}(\cdot,s)\Big)\,ds,$$

eli $[v]_h - [\tilde{v}]_h = [v - \tilde{v}]_h$ alkuarvolla $v_o = 0$. Täten yllä todistetusta epäyhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned}\|[v]_h - [\tilde{v}]_h\|_{L^p(\Omega_T)} &= \|[v - \tilde{v}]_h\|_{L^p(\Omega_T)} \\ &\le \|v - \tilde{v}\|_{L^p(\Omega_T)} < \varepsilon,\end{aligned}$$

jolloin

$$\begin{aligned}\|[v]_h - v\|_{L^p(\Omega_T)} &\le \|[v]_h - [\tilde{v}]_h\|_{L^p(\Omega_T)} + \|[\tilde{v}]_h - \tilde{v}\|_{L^p(\Omega_T)} + \|\tilde{v} - v\|_{L^p(\Omega_T)} \\ &< \|[\tilde{v}]_h - \tilde{v}\|_{L^p(\Omega_T)} + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Kohdan (i) todistuksen loppuunsaattamiseksi tulee vielä näyttää, että $\|[\tilde{v}]_h - \tilde{v}\|_{L^p(\Omega_T)} \to 0$, kun $h \downarrow 0$. Käyttämällä tietoa

$$\int_0^t e^{\frac{s-t}{h}}\,ds = h(1 - e^{-\frac{t}{h}}),$$

voidaan kirjoittaa

$$\tilde{v}(\cdot,t) = e^{-\frac{t}{h}}\tilde{v}(\cdot,t) + \frac{1}{h}\int_0^t e^{\frac{s-t}{h}}\tilde{v}(\cdot,t)\,ds.$$

Sijoittamalla tämä erotukseen saadaan

$$[\tilde{v}]_h(\cdot,t) - \tilde{v}(\cdot,t) = e^{-\frac{t}{h}}\Big(v_o - \tilde{v}(\cdot,t)\Big) + \frac{1}{h}\int_0^t e^{\frac{s-t}{h}}\Big(\tilde{v}(\cdot,s) - \tilde{v}(\cdot,t)\Big)\,ds. \tag{3.5}$$

Tarkastellaan aluksi ensimmäistä termiä. Koska funktion $\tilde{v}$ kantaja on kompakti välillä $(0,T)$, on olemassa $\delta_o \in (0,T)$ siten, että $\tilde{v}(\cdot,t)=0$, kun $0 \le t \le \delta_o$. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega |e^{-\frac{t}{h}}(v_o - \tilde{v}(\cdot,t))|^p \,dx\,dt \\
&= \int_0^{\delta_o} \int_\Omega |e^{-\frac{t}{h}} v_o|^p \,dx\,dt + \int_{\delta_o}^T \int_\Omega \left| e^{-\frac{t}{h}} \Big(v_o - \tilde{v}(\cdot,t) \Big) \right|^p dx\,dt \\
&\le \frac{h}{p}(1 - e^{-\frac{\delta_o p}{h}}) \|v_o\|^p_{L^p(\Omega)} + e^{-\frac{p\delta_o}{h}} \int_{\delta_o}^T \int_\Omega |v_o - \tilde{v}(\cdot,t)|^p \,dx\,dt \\
&\le h\|v_o\|^p_{L^p(\Omega)} + e^{-\frac{p\delta_o}{h}} \Big(T^{\frac{1}{p}} \|v_o\|_{L^p(\Omega)} + \|\tilde{v}\|_{L^p(\Omega_T)} \Big)^p.
\end{aligned}$$

Tarkastellaan seuraavaksi toista termiä yhtälössä (3.5). Koska $\tilde{v} \in C_0(\Omega_T)$, tiedetään että $\tilde{v}$ on välillä $(0,T)$ tasaisesti jatkuva. Tällöin annetulle $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta(\varepsilon) \in (0, \delta_o]$ siten, että $|\tilde{v}(x,t) - \tilde{v}(x,s)| < \varepsilon$, kun $x \in \Omega$ ja $|t-s| < \delta$. Käyttämällä hyväksi tätä tietoa, saadaan

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega \left| \frac{1}{h} \int_0^t e^{\frac{s-t}{h}} \Big(\tilde{v}(\cdot,s) - \tilde{v}(\cdot,t) \Big) ds \right|^p dx\,dt \\
&= \int_{\delta_o}^T \int_\Omega \left| \frac{1}{h} \int_0^t e^{\frac{s-t}{h}} \Big(\tilde{v}(\cdot,s) - \tilde{v}(\cdot,t) \Big) ds \right|^p dx\,dt \\
&= \int_{\delta_o}^T \int_\Omega \left| \frac{1}{h} \int_0^{t-\delta} e^{\frac{s-t}{h}} \Big(\tilde{v}(\cdot,s) - \tilde{v}(\cdot,t) \Big) ds \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{h} \int_{t-\delta}^t e^{\frac{s-t}{h}} \Big(\tilde{v}(\cdot,s) - \tilde{v}(\cdot,t) \Big) ds \right|^p dx\,dt \\
&\le \int_{\delta_o}^T \int_\Omega \left| \frac{2\|\tilde{v}\|_{L^\infty(\Omega_T)}}{h} \int_0^{t-\delta} e^{\frac{s-t}{h}} \,ds + \frac{\varepsilon}{h} \int_{t-\delta}^t e^{\frac{s-t}{h}} \,ds \right|^p dx\,dt \\
&\le T|\Omega| \Big(2e^{-\frac{\delta}{h}} \|\tilde{v}\|_{L^\infty(\Omega_T)} + \varepsilon \Big)^p.
\end{aligned}$$

Nyt yhdistämällä saadut tulokset ja sijoittamalla erotukseen (3.5), saadaan

$$\begin{aligned}
\|[\tilde{v}]_h - \tilde{v}\|_{L^p(\Omega_T)} &\le \left\| e^{-\frac{t}{h}} \Big(v_o - \tilde{v}(\cdot,t) \Big) \right\|_{L^p(\Omega_T)} + \left\| \frac{1}{h} \int_0^t e^{\frac{s-t}{h}} \Big(v(\cdot,s) - \tilde{v}(\cdot,t) \Big) ds \right\|_{L^p(\Omega_T)} \\
&\le h^{\frac{1}{p}} \|v_o\|_{L^p(\Omega)} + e^{-\frac{\delta_o}{h}} \Big(T^{\frac{1}{p}} \|v_o\|_{L^p(\Omega)} + \|\tilde{v}\|_{L^p(\Omega_T)} \Big) \\
&\quad + T^{\frac{1}{p}} |\Omega|^{\frac{1}{p}} \Big(2e^{-\frac{\delta}{h}} \|\tilde{v}\|_{L^\infty(\Omega_T)} + \varepsilon \Big)^p.
\end{aligned}$$

Viemällä tässä aluksi $\varepsilon \downarrow 0$ ja tämän jälkeen $h \downarrow 0$ saadaan toivottu lopputulos $\|[\tilde{v}]_h - \tilde{v}\|_{L^p(\Omega_T)} \to 0$, kun $h \downarrow 0$. Tämä saattaa loppuun suppenemisen $\|[v]_h - v\|_{L^p(\Omega_T)} \to 0$, kun $h \downarrow 0$, todistuksen.

(ii): Olkoon $v \in L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$ ja $v_o \in W^{1,p}(\Omega)$. Tarkastellaan funktiota v sen tulomitallisena edustajana. Suoralla laskulla saadaan

$$D[v]_h(\cdot,t) = e^{-\frac{t}{h}} Dv_o(\cdot) + \frac{1}{h}\int_0^t e^{\frac{s-t}{h}} Dv(\cdot,s)\,ds,$$

jolloin $D[v]_h = [Dv]_h$. Käyttämällä kohtaa (i) saadaan estimaatti

$$\|D[v]_h\|_{L^p(\Omega_T)} \le \|Dv\|_{L^p(\Omega_T)} + h^{\frac{1}{p}}\|Dv_o\|_{L^p(\Omega)},$$

ja $D[v]_h \to Dv$, $L^p(\Omega_T)$-mielessä, kun $h \downarrow 0$. Täten saadaan siis $[v]_h \to v$, $L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$-mielessä, kun $h \downarrow 0$. Käyttämällä saatua estimaattia funktioille $[v]_h$ ja $D[v]_h$, voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}
\|[v]_h\|_{L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))} &= \left(\|[v]_h\|^p_{L^p(\Omega_T)} + \|D[v]_h\|^p_{L^p(\Omega_T)}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \left(\sum_{|\alpha|\le 1}\left(\|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega_T)} + h^{\frac{1}{p}}\|D^\alpha v_o\|_{L^p(\Omega)}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \left(\sum_{|\alpha|\le 1}\|D^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega_T)}\right)^{\frac{1}{p}} + h^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{|\alpha|\le 1}\|D^\alpha v_o\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|v\|_{L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))} + h^{\frac{1}{p}}\|v_o\|_{W^{1,p}(\Omega)},
\end{aligned}$$

jossa on toisessa epäyhtälössä käytetty Minkowskin epäyhtälöä summalle (integraali laskurimitan suhteen). Tämä todistaa kohdan (ii).

(iii): Olkoon $v \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ ja $v_o \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Kohdan (ii) perusteella pätee suoraan, että $[v]_h \in L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$. Jää jäljelle siis osoittaa, että aikasilotuksen reuna-arvot häviävät pystyreunalla. Nyt selvästi $e^{-\frac{t}{h}}v_o \in W_0^{1,p}(\Omega)$ millä tahansa $t \in [0,T]$ ja $h \in (0,T]$. Tarkastellaan seuraavaksi termiä

$$\frac{e^{-\frac{t}{h}}}{h}\int_0^t e^{\frac{s}{h}} v(s)\,ds.$$

Bochner-integrointiteorian nojalla on olemassa jono (z_n) yksinkertaisia funktioita, joille $z_n : (0,t) \to W_0^{1,p}(\Omega)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ siten, että funktiota $e^{\frac{s}{h}}v(s)$ voidaan approksimoida kyseisillä funktioilla melkein kaikkialla, ja lisäksi voidaan määritellä

$$\int_0^t e^{\frac{s}{h}} v(s)\,ds = \lim_{n\to\infty}\int_0^t z_n(s)\,ds,$$

jossa raja-arvo otetaan luonnollisesti $W^{1,p}(\Omega)$-mielessä. Koska $\int_0^t z_n\,ds \in W_0^{1,p}(\Omega)$ äärellisenä summana $W_0^{1,p}(\Omega)$-funktioita kaikilla $n \in \mathbb{N}$, ja jonon $(\int_0^t z_n\,ds)$ ollessa Cauchy kyseisessä avaruudessa tiedetään, että myös rajafunktiolle pätee

$$\int_0^t e^{\frac{s}{h}} v(s)\,ds \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

millä tahansa $t \in [0,T]$, sillä kyseinen avaruus on Banach normin $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ suhteen. Siten aikasilotuksen määritelmän perusteella pätee $[v]_h \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$.

(iv): Olkoon $v \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ ja $v_o \in L^2(\Omega)$. Tiedetään, että $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \subset L^2(\Omega_T)$ (tarkastelemalla jälleen tulomitallisia edustajia), jolloin kohdan (i) perusteella $[v]_h \to v$, $L^2(\Omega_T)$-mielessä, kun $h \downarrow 0$. Osoitetaan ensiksi, että $[v]_h \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$. Kiinnitetään $t_1, t_2 \in [0,T]$ siten, että $t_1 < t_2$. Kirjoitetaan

$$\begin{aligned}
&[v]_h(\cdot,t_2) - [v]_h(\cdot,t_1) \\
&= \left(e^{-\frac{t_2}{h}} - e^{-\frac{t_1}{h}}\right)\left(v_o + \frac{1}{h}\int_0^{t_1} e^{\frac{s}{h}} v(\cdot,s)\,ds\right) + \frac{e^{-\frac{t_2}{h}}}{h}\int_{t_1}^{t_2} e^{\frac{s}{h}} v(\cdot,s)\,ds.
\end{aligned}$$

Käyttämällä Cauchy-Schwarzin epäyhtälöä saadaan

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{\frac{s}{h}} v(\cdot,s)\,ds\right|^2 &\le \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{\frac{2s}{h}}\,ds\right)\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} v(\cdot,s)^2\,ds\right) \\
&= \frac{h}{2}\left(e^{\frac{2\tau_2}{h}} - e^{\frac{2\tau_1}{h}}\right)\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} v(\cdot,s)^2\,ds\right),
\end{aligned}$$

mille tahansa $0 \le \tau_1 < \tau_2 \le T$. Käytetään yllä olevaa Cauchy-Schwartzin epäyhtälöä väleillä $(0,t_1)$ ja (t_1,t_2), jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
&\|[v]_h(\cdot,t_2) - [v]_h(\cdot,t_1)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le \left(e^{-\frac{t_1}{h}} - e^{-\frac{t_2}{h}}\right)\left(\|v_o\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{h}\left\|\int_0^{t_1} e^{\frac{s}{h}} v(\cdot,s)\,ds\right\|_{L^2(\Omega)}\right) \\
&+ \frac{e^{-\frac{t_2}{h}}}{h}\left\|\int_{t_1}^{t_2} e^{\frac{s}{h}} v(\cdot,s)\,ds\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le e^{-\frac{t_1}{h}}\left(1 - e^{-\frac{t_2-t_1}{h}}\right)\|v_o\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\sqrt{2h}}\left(1 - e^{-\frac{t_2-t_1}{h}}\right)\left(1 - e^{-\frac{2t_1}{h}}\right)^{\frac{1}{2}}\|v\|_{L^2(\Omega_T)} \\
&+ \frac{e^{-\frac{t_2}{h}}}{\sqrt{2h}}\left(1 - e^{-\frac{2(t_2-t_1)}{h}}\right)^{\frac{1}{2}}\|v\|_{L^2(\Omega_T)} \\
&\longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

kun $t_2 - t_1 \to 0$. Täten siis $[v]_h \in C^0([0,T]; L^2(\Omega))$. Samaan tapaan saadaan

$$
\begin{aligned}
&\|[v]_h(\cdot,t) - v_o\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left(1 - e^{-\frac{t}{h}}\right)\|v_o\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\sqrt{2h}}\left(e^{\frac{2t}{h}} - 1\right)^{\frac{1}{2}}\|v\|_{L^2(\Omega\times(0,t))} \\
&\longrightarrow 0,
\end{aligned}
$$

kun $t \downarrow 0$. Koska $[v]_h \in C^0([0,T]; L^2(\Omega))$, saadaan $[v]_h(\cdot,0) = v_o$. Siispä väite pätee.

(v): Väite seuraa suoraan asettamalla $X = L^2(\Omega)$ ja $t_o = T$ Lemmassa 3.9.

□

Osoitetaan seuraavaksi, että variaatioratkaisu on myös parabolinen minimoija käyttäen apuna Lemmaa 3.10.

Lemma 3.11. *Jos u on Määritelmän 3.3 mukainen variaatioratkaisu, niin silloin se on Määritelmän 3.2 mukainen parabolinen minimoija.*

Todistus. Olkoon $T > 0$, u variaatioratkaisu ja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_T)$. Määritellään testifunktioksi $v_h = [u]_h + s\varphi$ siten, että u_o on alkuarvo v_o funktiolle $[u]_h$ Määritelmässä 3.8 ja $s \in (0,1)$. Tällöin Lemman 3.10 (iii), (iv) ja (v) kohdista seuraa, että $v_h \in L^p(0,T; W^{1,p}(\Omega)) \cap C^0([0,T]; L^2(\Omega))$ ja $\partial_t v_h \in L^2(\Omega_T)$. Oikeat reuna-arvot pystyreunalla voidaan perustella kohdan (iii) perusteella seuraavasti. Olkoon $\bar{u}_o$ funktion u_o aikariippumaton ekstensio. Selvästi $[\bar{u}_o]_h = \bar{u}_o$ ja aikasilotus operoi lineaarisesti. Täten saadaan $[u]_h - \bar{u}_o = [u - \bar{u}_o]_h \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))$ Lemman 3.10 kohdan (iii) perusteella. Tämä tarkoittaa täsmälleen sitä, että $[u]_h \in L^p(0,T; W_{u_o}^{1,p}(\Omega))$ (3.2) perusteella. Nyt variaatioratkaisun määritelmästä saadaan

$$
\int\limits_{\Omega_T} \frac{1}{p}|Du|^p \, d\nu \leq \int\limits_{\Omega_T} \left[\partial_t v_h(v_h - u) + \frac{1}{p}|Dv_h|^p\right] d\nu, \tag{3.6}
$$

sillä $v_h(\cdot,0) = u_o$ ja $-\frac{1}{2}\|(v_h - u)(\cdot,T)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 0$. Huomataan, että $Dv_h = D[u]_h + sD\varphi$, $D[u]_h = [Du]_h$ ja variaatioratkaisun määritelmän perusteella $Du \in L^p(\Omega_T)$. Täten Lemman 3.10 kohdasta (i) seuraa, että $Dv_h \to Du + sD\varphi$ $L^p(\Omega_T)$ mielessä, kun $h \downarrow 0$. Siten kolmioepäyhtälöstä seuraa suoraan, että myös

$$
\int\limits_{\Omega_T} \frac{1}{p}|Dv_h|^p \, d\nu \longrightarrow \int\limits_{\Omega_T} \frac{1}{p}|Du + sD\varphi|^p \, d\nu,
$$

kun $h \downarrow 0$.

Tarkastellaan seuraavaksi epäyhtälön (3.6) oikean puolen ensimmäistä termiä. Saadaan

$$\int\limits_{\Omega_T} \partial_t v_h (v_h - u)\, d\nu = \int\limits_{\Omega_T} \Big[\partial_t [u]_h ([u]_h - u) + s\partial_t \varphi (v_h - u) + s\partial_t [u]_h \varphi \Big]\, d\nu$$
$$= \int\limits_{\Omega_T} \Big[-\frac{1}{h} |[u]_h - u|^2 + s\partial_t \varphi (v_h - u) - s[u]_h \partial_t \varphi \Big]\, d\nu$$
$$\leq \int\limits_{\Omega_T} s\partial_t \varphi (s\varphi - u)\, d\nu,$$

jossa toisella rivillä on osittaisintegroitu viimeistä termiä käyttäen hyväksi tietoa supp $\varphi \Subset \Omega_T$, jolloin reunatermit häviävät. Ratkaisun aikasilotuksen aikaderivaatan evaluoimiseen on käytetty puolestaan Lemman 3.10 kohtaa (v). Siten käyttämällä edellistä arviota epäyhtälössä (3.6) ja ottamalla raja-arvo $h \downarrow 0$, saadaan

$$\int\limits_{\Omega_T} \frac{1}{p} |Du|^p\, d\nu \leq \int\limits_{\Omega_T} \Big[s\partial_t \varphi (s\varphi - u) + \frac{1}{p} |Du + sD\varphi|^p \Big]\, d\nu$$
$$\leq \int\limits_{\Omega_T} \Big[s\partial_t \varphi (s\varphi - u) + \frac{1-s}{p} |Du|^p + \frac{s}{p} |Du + D\varphi|^p \Big]\, d\nu,$$

jossa käytettiin tietoa $Du + sD\varphi = (1-s)Du + s(Du + D\varphi)$ ja funktion $|\cdot|^p$ konveksisuutta joukossa $\mathbb{R}^n$. Tästä saadaan edelleen

$$\int\limits_{\Omega_T} [u\, \partial_t \varphi + \frac{1}{p} |Du|^p]\, d\nu \leq s \int\limits_{\Omega_T} \varphi\, \partial_t \varphi\, d\nu + \int\limits_{\Omega_T} \frac{1}{p} |Du + D\varphi|^p\, d\nu.$$

Lopulta viemällä $s \downarrow 0$ väite toteutuu.

□

Osoitetaan vielä, että parabolinen minimoija on myös variaatioratkaisu (ottamalla reuna-arvot huomioon), jolloin saadaan osoitettua ratkaisujen yhtäpitävyys. Ennen tätä johdetaan kuitenkin heikon ratkaisun globaali versio käyttäen lähtökohtana lokaalia määritelmää, ja ottamalla asetetut reuna-arvot mukaan.

Lemma 3.12. *Määritelmän 3.1 mukaiselle heikolle ratkaisulle, jossa ratkaisua etsitään joukosta (3.1), saadaan alku- ja loppuhetkien reuna-arvot huomioon ottava muoto*

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} \Big[-u\, \partial_t \varphi + |Du|^{p-2} Du \cdot D\varphi \Big]\, dx\, dt + \Bigg[\int\limits_{\Omega} u\varphi\, dx \Bigg]_{t=0}^{t=T} = 0,$$

millä tahansa $T > 0$, kaikilla $\varphi \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap C^0([0,T]; L^2(\Omega))$, joille $\partial_t \varphi \in L^2(\Omega_T)$ kun vaaditaan, että ratkaisu u saa (3.2) mukaisesti reuna-arvot u_o.

Todistus. Kiinnitetään $T > 0$. Olkoon t_1 ja t_2 mielivaltaiset siten, että $0 < t_1 < t_2 < T$. Funktion φ funktioluokasta johtuen on olemassa jono (φ_k), joille $\varphi_k \in C^\infty(\overline{\Omega} \times (0,T))$ siten, että millä tahansa kiinnitetyllä $t \in (0,T)$, funktio $\varphi_k(\cdot,t) \in C_0^\infty(\Omega)$ kaikilla k, ja

$$\|\varphi_k - \varphi\|_{L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))} \longrightarrow 0, \quad \text{ja} \quad \|\partial_t \varphi_k - \partial_t \varphi\|_{L^2(\Omega_T)} \longrightarrow 0, \tag{3.7}$$

kun $k \to \infty$. Määritellään seuraavaksi funktio $j \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, jolle pätee ominaisuudet

$$\begin{aligned} &j(s) \geq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}, \\ &j(s) = 0, \quad \text{kun } |s| > 1, \text{ ja} \\ &\int_{\mathbb{R}} j(s)\, ds = 1. \end{aligned}$$

Esimerkiksi standardisilottaja toteuttaa nämä ominaisuudet. Kun $h > 0$, määritellään $j_h(s) := \frac{1}{h} j(\frac{s}{h})$, ja

$$\eta_h(t) := \int_{t-t_2-2h}^{t-t_1+2h} j_h(s)\, ds.$$

Tällöin pätee $\eta_h \in C_0^\infty(0,T)$, kun h on valittu tarpeeksi pieneksi. Lisäksi

$$\lim_{h \downarrow 0} \eta_h(t) = 1, \tag{3.8}$$

kun $t \in (t_1,t_2)$. Tällöin selvästi $\varphi_k(x,t)\eta_h(t) \in C_0^\infty(\Omega_T)$ millä tahansa $k \in \mathbb{N}$, sekä tarpeeksi pienellä $h > 0$, jolloin tämä funktio käy testifunktioksi heikon ratkaisun määritelmässä. Tehdään kyseinen sijoitus, jolloin saadaan Leibnizin sääntöä käyttäen

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} u \varphi_k j_h(t - t_2 - 2h)\, dx\, dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} u \varphi_k j_h(t - t_1 + 2h)\, dx\, dt \\ &- \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} u \eta_h \partial_t \varphi_k\, dx\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |Du|^{p-2} Du \cdot D(\varphi_k \eta_h)\, dx\, dt = 0. \end{aligned}$$

Funktion η_h ominaisuudesta (3.8) saadaan, että yllä olevan yhtälön kaksi viimeistä termiä suppenevat vastaaviin termeihin ilman funktiota η_h, kun $h \downarrow 0$ esimerkiksi Lebesguen dominoitua konvergenssia käyttäen. Lisäksi osoitetaan, että

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} u \varphi_k j_h(t - t_2 - 2h)\, dx\, dt \longrightarrow \int_{\Omega} u(x,t_2) \varphi_k(x,t_2)\, dx, \quad \text{ja} \\ &\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} u \varphi_k j_h(t - t_1 + 2h)\, dx\, dt \longrightarrow \int_{\Omega} u(x,t_1) \varphi(x,t_1)\, dx, \end{aligned}$$

kun $h \downarrow 0$. Ylempi suppeneminen pätee, sillä

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega u\varphi_k j_h(t-t_2-2h)\,dx\,dt - \int_\Omega u(x,t_2)\varphi_k(x,t_2)\,dx \right| \\
=&\left| \int_{t_2+h}^{t_2+3h} \int_\Omega u\varphi_k j_h(t-t_2-2h)\,dx\,dt \right. \\
&\left. - \int_{t_2+h}^{t_2+3h} \int_\Omega u(x,t_2)\varphi_k(x,t_2) j_h(t-t_2-2h)\,dx\,dt \right| \\
\le& \sup_{t\in(t_2+h,t_2+3h)} \int_\Omega |u(x,t)\varphi_k(x,t) - u(x,t_2)\varphi_k(x,t_2)|\,dx \\
&\longrightarrow 0,
\end{aligned}
$$

kun $h \downarrow 0$. Viimeisen rivin suppeneminen voidaan perustella käyttämällä tietoa $u \in C^0([0,T]; L^2(\Omega))$ ja esimerkiksi Hölderin epäyhtälöä. Toisella rivillä on käytetty hyväksi tietoa supp $j_h \subset [-h,h]$. Epäyhtälöön on käytetty Fubinin lausetta ja tietoa, että funktion j_h integraali saa arvon yksi kyseisellä välillä. Vastaavasti saadaan

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega u\varphi_k j_h(t-t_1+2h)\,dx\,dt - \int_\Omega u(x,t_1)\varphi_k(x,t_1)\,dx \right| \\
=&\left| \int_{t_1-3h}^{t_1-h} \int_\Omega u\varphi_k j_h(t-t_1+2h)\,dx\,dt \right. \\
&\left. - \int_{t_1-3h}^{t_1-h} \int_\Omega u(x,t_1)\varphi_k(x,t_1) j_h(t-t_1+2h)\,dx\,dt \right| \\
\le& \sup_{t\in(t_1-3h,t_1-h)} \int_\Omega |u(x,t)\varphi_k(x,t) - u(x,t_1)\varphi_k(x,t_1)|\,dx \\
&\longrightarrow 0,
\end{aligned}
$$

samoilla argumenteilla kuin yllä. Täten, kun $h \downarrow 0$ saadaan

$$
\int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega \Big[-u\,\partial_t\varphi_k + |Du|^{p-2}Du \cdot D\varphi_k \Big]\,dx\,dt + \left[\int_\Omega u\varphi_k\,dx \right]_{t=t_1}^{t=t_2} = 0. \tag{3.9}
$$

Käyttämällä suppenemisia (3.7) tiedetään, että ensimmäinen integraali suppenee vastaavaan termiin funktiolla φ, kun $k \to \infty$. Tarkastellaan seuraavaksi reunatermejä. Suppenemisista (3.7) saadaan erityisesti, että

$$
\int_0^T \|\varphi_k - \varphi\|_{L^p(\Omega)}^p\,dt \longrightarrow 0,
$$

kun $k \to \infty$. Tällöin on olemassa osajono (φ_{k_i}) siten, että yllä olevan suppenemisen lisäksi pätee myös

$$\|\varphi_{k_i}(\cdot,t) - \varphi(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \to 0, \quad \text{m.k. } t \in (0,T), \tag{3.10}$$

kun $k_i \to \infty$. Olkoon $\tau \in (0,T)$. Tarkastelemalla kyseistä osajonoa saadaan

$$\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega u(\cdot,\tau)\varphi_{k_i}(\cdot,\tau)\,dx - \int_\Omega u(\cdot,\tau)\varphi(\cdot,\tau)\,dx \right| \\
&\leq \int_\Omega |u(\cdot,\tau)||\varphi_{k_i}(\cdot,\tau) - \varphi(\cdot,\tau)|\,dx \\
&\leq \|u(\cdot,\tau)\|_{L^{p'}(\Omega)}\|\varphi_{k_i}(\cdot,\tau) - \varphi(\cdot,\tau)\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq |\Omega|^{\frac{2}{p}-1}\|u(\cdot,\tau)\|_{L^p(\Omega)}\|\varphi_{k_i}(\cdot,\tau) - \varphi(\cdot,\tau)\|_{L^p(\Omega)} \\
&\longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

kun $k_i \to \infty$, melkein kaikilla $\tau \in (0,T)$. Täten siis viemällä $k \to \infty$ yhtälössä (3.9) edellä mainittua osajonoa pitkin, saadaan

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \Big[-u\,\partial_t\varphi + |Du|^{p-2}Du\cdot D\varphi \Big]\,dx\,dt + \left[\int_\Omega u\varphi\,dx \right]_{t=t_1}^{t=t_2} = 0$$

kaikille testifunktioille φ määritellyssä funktioluokassa, mikäli pisteet t_1 ja t_2 kuuluvat joukkoon, jossa suppeneminen (3.10) toteutuu. Koska kyseisen joukon komplementti on nollamittainen, tiedetään, että suppeneminen toteutuu välin $(0,T)$ tiheässä osajoukossa. Siten voidaan tarkastella jonoja (t_1^i) ja (t_2^i), joista kaikilla yllä oleva yhtälö pätee, ja lisäksi $t_1^i \downarrow 0$ ja $t_2^i \uparrow T$, kun $i \to \infty$. Käyttämällä Lebesguen dominoitua konvergenssia, saadaan ensimmäisessä integraalissa vietyä $t_1^i \downarrow 0$ ja $t_2^i \uparrow T$ suoraan. Perustellaan vielä reunatermin konvergenssi seuraavasti

$$\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega u(x,t_1^i)\varphi(x,t_1^i)\,dx - \int_\Omega u_o(x)\varphi(x,0)\,dx \right| \\
&\leq \int_\Omega |u(x,t_1^i)\varphi(x,t_1^i) - u_o(x)\varphi(x,t_1^i) + u_o(x)\varphi(x,t_1^i) - u_o(x)\varphi(x,0)|\,dx \\
&\leq \int_\Omega |u(x,t_1^i) - u_o(x)||\varphi(x,t_1^i)|\,dx + \int_\Omega |u_o(x)||\varphi(x,t_1^i) - \varphi(x,0)|\,dx \\
&\leq \|u(\cdot,t_1^i) - u_o\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi(\cdot,t_1^i)\|_{L^2(\Omega)} + \|u_o\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi(\cdot,t_1^i) - \varphi(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

kun $i \to \infty$, sillä $u_o \in L^2(\Omega)$, $\varphi, u \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$ ja ominaisuuksista (3.2). Täysin vastaavalla argumentilla saadaan myös suppeneminen ylärajalla, kun $t_2^i \uparrow T$. Täten väite pätee.

□

Korollaari 3.13. *Paraboliselle minimoijalle joukossa (3.1) saadaan alku- ja loppuhetkien reuna-arvot huomioonottava muoto*

$$\int_0^T\int_\Omega \Big[u\,\partial_t\varphi + \frac{1}{p}|Du|^p\Big]\,dx\,dt \le \int_0^T\int_\Omega \frac{1}{p}|Du+D\varphi|^p\,dx\,dt + \Bigg[\int_\Omega u\varphi\,dx\Bigg]_{t=0}^{t=T},$$

millä tahansa $T>0$, kaikilla $\varphi \in L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega)) \cap C^0([0,T];L^2(\Omega))$, joille $\partial_t\varphi \in L^2(\Omega_T)$.

Todistus. Etenee täysin samalla tavalla kuin Lemman 3.6 todistus, kun käytetään Lemman 3.12 mukaista määritelmää heikolle ratkaisulle. □

Jotta eri ratkaisujen yhtäpitävyys saadaan osoitettua, todistetaan vielä seuraava tulos.

Lemma 3.14. *Korollaarin 3.13 määritelmän mukainen parabolinen minimoija annetuilla reuna-arvoilla $u_o \in W^{1,p}(\Omega)$ (3.2)-mielessä on Määritelmän 3.3 mukainen variaatioratkaisu, jos ratkaisulta u oletetaan lisäksi $\partial_t u \in L^2(\Omega_T)$ kaikilla $T>0$.*

Todistus. Kiinnitetään $T>0$. Parabolisen minimoijan määritelmästä reuna-arvoilla saadaan

$$\int_0^T\int_\Omega \Big[u\,\partial_t\varphi + \frac{1}{p}|Du|^p\Big]\,dx\,dt \le \int_0^T\int_\Omega \frac{1}{p}|Du+D\varphi|^p\,dx\,dt + \Bigg[\int_\Omega u\varphi\,dx\Bigg]_{t=0}^{t=T}$$

kaikilla $\varphi \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap C^0([0,T];L^2(\Omega))$, joille $\partial_t\varphi \in L^2(\Omega_T)$. Olkoon nyt v variaatioratkaisun testifunktion ehdot täyttävä funktio. Tällöin $\varphi = v-u$ on sallittu testifunktio yllä olevassa lausekkeessa. Tehdään sijoitus ja järjestellään termejä, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega \frac{1}{p}|Du|^p\,dx\,dt \\
&\le \int_0^T\int_\Omega u\,\partial_t(u-v)\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega \frac{1}{p}|Dv|^p\,dx\,dt + \Bigg[\int_\Omega u(v-u)\,dx\Bigg]_{t=0}^{t=T}.
\end{aligned}$$

Oikean puolen ensimmäiselle termille saadaan

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_\Omega u\,\partial_t(u-v)\,dx\,dt &= \int_0^T\int_\Omega \partial_t v(v-u)\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega (u-v)\,\partial_t(v-u)\,dx\,dt \\
&\quad + \int_0^T\int_\Omega \Big[2u\partial_t u - u\partial_t v - v\partial_t u\Big]\,dx\,dt.
\end{aligned}$$

Toiselle termille tässä saadaan

$$\int_0^T \int_\Omega (u-v)\,\partial_t(v-u)\,dx\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \partial_t |v-u|^2\,dx\,dt$$
$$= -\frac{1}{2}\int_\Omega \int_0^T \partial_t |v-u|^2\,dt\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\|v(\cdot,0)-u_o\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|(v-u)(\cdot,T)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

käyttämällä Fubinin lausetta. Lisäksi

$$\int_0^T \int_\Omega \Big[2u\partial_t u - u\partial_t v - v\partial_t u\Big]\,dx\,dt = \int_0^T \int_\Omega \partial_t(u^2-uv)\,dx\,dt$$
$$= -\int_\Omega \int_0^T \partial_t(u(v-u))\,dt\,dx = -\left[\int_\Omega u(v-u)\,dx\right]_{t=0}^{t=T},$$

jossa käytettiin jälleen Fubinin lausetta. Nyt yhdistämällä edelliset tulokset saadaan

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{1}{p}|Du|^p\,dx\,dt \le \int_0^T \int_\Omega \Big[\partial_t v(v-u) + \frac{1}{p}|Dv|^p\Big]\,dx\,dt$$
$$+\frac{1}{2}\|v(\cdot,0)-u_o\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|(v-u)(\cdot,T)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Koska v oli mielivaltainen määritellyssä funktioluokassa, u on Määritelmän 3.3 mukainen variaatioratkaisu.

□

Huomautus 3.15. Lemman 3.7 perusteella $\partial_t u$ kuuluu parabolisen Sobolevin avaruuden duaaliin tietyllä tulkinnalla. Mikäli heikon ratkaisun ja parabolisen minimoijan määritelmät yleistetään vastaamaan tätä tulkintaa, edellisen lemman tulos pätee myös ilman lisäoletusta $\partial_t u \in L^2(\Omega_T)$ kaikilla $T > 0$.

4 Variaatioratkaisun olemassaolo ja yksikäsitteisyys

Tämän kappaleen päämääränä on todistaa seuraava tulos.

Lause 4.1. *Olkoon $u_o \in W^{1,p}(\Omega)$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen Määritelmän 3.3 mukainen variaatioratkaisu u, jolle pätee*

$$\partial_t u \in L^2(\Omega_\infty) \quad ja \quad u \in C^{0,\frac{1}{2}}([0,T]; L^2(\Omega)) \quad \forall T > 0.$$

Lisäksi aikaderivaatalle saadaan

$$\int\limits_{\Omega_\infty} |\partial_t u|^2 \, d\nu \leq \frac{1}{p} \int\limits_{\Omega} |Du_o|^p \, dx,$$

ja millä tahansa $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$ energiaestimaatti

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int\limits_{\Omega\times(t_1,t_2)} |Du|^p \, d\nu \leq 2e \int\limits_{\Omega} |Du_o|^p \, dx$$

pätee.

Yllä oleva lause todistetaan käyttäen niin kutsuttuun painotettuun energiadissipaatiofunktionaaliin (engl. weighted energy dissipation, WED) pohjautuvaa periaatetta.

Määritellään parametrista $\varepsilon \in (0, 1]$ riippuva WED-funktionaali $\mathcal{F}_\varepsilon : \mathcal{K}_\varepsilon \to [0, \infty]$ siten, että

$$\mathcal{F}_\varepsilon(v) = \int\limits_{\Omega_\infty} e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \left[\frac{1}{2}|\partial_t v|^2 + \frac{1}{\varepsilon p}|Dv|^p\right] d\nu,$$

kun $v \in \mathcal{K}_\varepsilon$. Tässä $\mathcal{K}_\varepsilon$ tulee olla jokin sopiva funktioavaruus, jossa funktionaali $\mathcal{F}_\varepsilon$ saavuttaa miniminsä.

Määritellään

$$\mathcal{K}_\varepsilon := \{v \in W^{1,1}(\Omega_T) \ \forall T > 0 \mid \|v\|_{\mathcal{K}_\varepsilon} < \infty\},$$

missä

$$\begin{aligned}\|v\|_{\mathcal{K}_\varepsilon} &:= \left[\int\limits_{\Omega_\infty} e^{-\frac{t}{\varepsilon}} |\partial_t v|^2 \, d\nu\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int\limits_{\Omega_\infty} e^{-\frac{t}{\varepsilon}} [|v|^p + |Dv|^p] \, d\nu\right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \|\partial_t v\|_{L^2(\Omega_\infty,\mu_\varepsilon)} + \left(\|v\|^p_{L^p(\Omega_\infty,\mu_\varepsilon)} + \|Dv\|^p_{L^2(\Omega_\infty,\mu_\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Tässä merkintä $L^p(\Omega_\infty, \mu_\varepsilon)$ tarkoittaa painotettua L^p-avaruutta, jossa avaruus on varustettu Lebesguen mitan sijaan mitalla $d\mu_\varepsilon := e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \, d\nu$. Normeille pätee selvästi

$\|v\|_{L^p(\Omega_\infty,\mu_\varepsilon)} \leq \|v\|_{L^p(\Omega_\infty)}$. Funktionaali $\|\cdot\|_{\mathcal{K}_\varepsilon}$ joukossa $\mathcal{K}_\varepsilon$ toteuttaa selvästi normin ehdot, ja lausekkeelle saadaan

$$\begin{aligned}\|v\|_{\mathcal{K}_\varepsilon} &\leq \|\partial_t v\|_{L^2(\Omega_\infty,\mu_\varepsilon)} + \|v\|_{L^p(\Omega_\infty,\mu_\varepsilon)} + \|Dv\|_{L^p(\Omega_\infty,\mu_\varepsilon)}\\ \|v\|_{\mathcal{K}_\varepsilon} &\geq \|\partial_t v\|_{L^2(\Omega_\infty,\mu_\varepsilon)} + 2^{\frac{1-p}{p}}(\|v\|_{L^p(\Omega_\infty,\mu_\varepsilon)} + \|Dv\|_{L^p(\Omega_\infty,\mu_\varepsilon)})\end{aligned}$$

käyttämällä epäyhtälöitä $(a+b)^{\frac{1}{p}} \leq a^{\frac{1}{p}} + b^{\frac{1}{p}}$, ja $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p+b^p)$, kun $a, b \geq 0$ ja $p \geq 1$. Lisäksi avaruuden $\mathcal{K}_\varepsilon$ määritelmästä seuraa suoraan, että jos $v \in \mathcal{K}_\varepsilon$, niin v ja Dv kuuluvat avaruuteen $L^p(\Omega_T)$ ja $\partial_t v \in L^2(\Omega_T)$, kaikilla $T > 0$. Seuraavaksi osoitetaan, että edellä määritelty $\mathcal{K}_\varepsilon$ on normiavaruutena täydellinen.

Lemma 4.2. *$(\mathcal{K}_\varepsilon, \|\cdot\|_{\mathcal{K}_\varepsilon})$ on Banach-avaruus.*

Todistus. Olkoon $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Cauchy-jono avaruudessa $\mathcal{K}_\varepsilon$. Lisäksi suoralla arvioinnilla saadaan

$$\|v\|_{\mathcal{K}_\varepsilon} \geq 2^{\frac{1-p}{p}} \left(\|v\|_{L^p(\Omega_\infty,\mu_\varepsilon)} + \|Dv\|_{L^p(\Omega_\infty,\mu_\varepsilon)} + \|\partial_t v\|_{L^2(\Omega_\infty,\mu_\varepsilon)}\right).$$

Tämän perusteella $(v_i)_i$ ja $(Dv_i)_i$ ovat Cauchy-jonoja avaruuksissa $L^p(\Omega_\infty, \mu_\varepsilon)$ ja $[L^p(\Omega_\infty, \mu_\varepsilon)]^n$, ja vastaavasti $(\partial_t v_i)_i$ on Cauchy avaruudessa $L^2(\Omega_\infty, \mu_\varepsilon)$. Täten Lebesgue-avaruuksien täydellisyyden nojalla on olemassa alkiot $\tilde{v} \in L^p(\Omega_\infty, \mu_\varepsilon)$, $\tilde{v}_D \in [L^p(\Omega_\infty, \mu_\varepsilon)]^n$ ja $\tilde{v}' \in L^2(\Omega_\infty, \mu_\varepsilon)$ siten, että

$$\begin{aligned} v_i &\to \tilde{v} \quad L^p(\Omega_\infty, \mu_\varepsilon)\text{-mielessä},\\ Dv_i &\to \tilde{v}_D \quad [L^p(\Omega_\infty, \mu_\varepsilon)]^n\text{-mielessä ja}\\ \partial_t u &\to \tilde{u}' \quad L^2(\Omega_\infty, \mu_\varepsilon)\text{-mielessä,}\end{aligned}$$

kun $i \to \infty$. Huomataan, että

$$\|v\|_{L^p(\Omega\times(t_1,t_2),\mu_\varepsilon)} \geq e^{-\frac{t_2}{\varepsilon p}}\|v\|_{L^p(\Omega\times(t_1,t_2))} \tag{4.1}$$

millä tahansa $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$. Tästä erityisesti seuraa, että äärellisen aikavälin tapauksessa suppenemisesta painotetun L^p-normin suhteen seuraa suppeneminen tavallisen L^p-normin suhteen. Heikon derivaatan määritelmän nojalla jokaisella $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\infty} \partial_{x_j} v_i \varphi \, d\nu &= -\int_{\Omega_\infty} v_i \partial_{x_j} \varphi \, d\nu \quad \text{ja}\\ \int_{\Omega_\infty} \partial_t v_i \varphi \, d\nu &= -\int_{\Omega_\infty} v_i \partial_t \varphi \, d\nu\end{aligned}$$

kaikilla $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\infty)$. Koska funktioiden φ kantajat ovat kompakteja, voidaan näissä yhtälöissä ottaa raja-arvot $i \to \infty$, jolloin yllä olevien suppenemisten, epäyhtälöön (4.1) liittyvän huomion ja esimerkiksi Hölderin epäyhtälön perusteella pätee

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\infty} \partial_{x_j} v_i \varphi \, d\nu &\to \int_{\Omega_\infty} \tilde{v}_{D,j} \varphi \, d\nu \quad \text{ja}\\ \int_{\Omega_\infty} v_i \partial_{x_j} \varphi \, d\nu &\to \int_{\Omega_\infty} \tilde{v} \partial_{x_j} \varphi \, d\nu,\end{aligned}$$

kun $i \to \infty$ kaikilla $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\infty)$. Vastaavat raja-arvot saadaan myös aikaderivaatan tapauksessa. Tällöin heikon derivaatan määritelmän nojalla voidaan asettaa $D\tilde{v} = \tilde{v}_D$ ja $\partial_t \tilde{v} = \tilde{u}'$. Täten, koska selvästi

$$\|v\|_{\mathcal{K}_\varepsilon} \le \|v\|_{L^p(\Omega_\infty,\mu_\varepsilon)} + \|Dv\|_{L^p(\Omega_\infty,\mu_\varepsilon)} + \|\partial_t v\|_{L^2(\Omega_\infty,\mu_\varepsilon)},$$

seuraa, että $\tilde{v} \in \mathcal{K}_\varepsilon$. Siispä väite pätee.

$\square$

Määritellään edelleen normiavaruuden $\mathcal{K}_\varepsilon$ aliavaruus $\mathcal{N}_\varepsilon$ seuraavasti

$$\mathcal{N}_\varepsilon := \{v \in \mathcal{K}_\varepsilon \ : \ v = 0 \ \text{ reunalla } \partial_{\mathcal{P}}\Omega_\infty\},$$

missä reuna-arvot ajatellaan niin kutsutussa jälki-mielessä. Koska $\mathcal{N}_\varepsilon$ on avaruuden $\mathcal{K}_\varepsilon$ suljettu aliavaruus, on myös $(\mathcal{N}_\varepsilon, \|\cdot\|_{\mathcal{K}_\varepsilon})$ Banach-avaruus. Merkitään Cauchy-Dirichlet'n datan u_o reuna-arvot joukossa $\mathcal{K}_\varepsilon$ saavia funktioita joukkona $u_o + \mathcal{N}_\varepsilon$. Tämä on avaruuden $\mathcal{N}_\varepsilon$ tapaan edelleen Banach-avaruus.

Esitetään seuraavaksi aputulos, jota tarvitaan jatkossa todistuksissa.

Lemma 4.3. *Olkoon $v \in L^p(0,T;W^{1,p}_{u_o}(\Omega))$ kaikilla $T > 0$, ja $u_o \in W^{1,p}(\Omega)$. Tällöin pätee*

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega |Dv|^p\,dx\,dt \ge \frac{1}{c}\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \Big(|v|^p + |Dv|^p\Big)\,dx\,dt - c|t_2 - t_1|\|u_o\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \textit{ja}$$
$$\int_{t_1}^{\infty}\int_\Omega e^{-\frac{t}{\varepsilon}}|Dv|^p\,dx\,dt \ge \frac{1}{c}\int_{t_1}^{\infty}\int_\Omega e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\Big(|v|^p + |Dv|^p\Big)\,dx\,dt - c\varepsilon e^{-\frac{t_1}{\varepsilon}}\|u_o\|^p_{W^{1,p}(\Omega)},$$

millä tahansa $0 \le t_1 < t_2 < \infty$, missä $c = c(p,\operatorname{diam}(\Omega)) \ge 1$ ja $\|u_o\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} := \|u_o\|^p_{L^p(\Omega)} + \|Du_o\|^p_{L^p(\Omega)}$.

Todistus. Kiinnitetään $0 \le t_1 < t_2 < \infty$. Koska $v \in L^p(0,T;W^{1,p}_{u_o}(\Omega))$ kaikilla $T > 0$, tiedetään että $v(\cdot,t) \in W^{1,p}_{u_o}(\Omega)$ melkein kaikilla $t \in (0,\infty)$. Olkoon $\bar{u}_o(\cdot,t) = u_o$ kaikilla $t \ge 0$. Tällöin Poincarén ja Minkowskin epäyhtälöistä seuraa

$$\begin{aligned}\|(v - \bar{u}_o)(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} &\le c\|Dv(\cdot,t) - Du_o\|_{L^p(\Omega)} \\ &\le c\Big(\|Dv(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} + \|Du_o\|_{L^p(\Omega)}\Big),\end{aligned}$$

ja

$$\|(v - \bar{u}_o)(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \ge \|v(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} - \|u_o\|_{L^p(\Omega)}$$

melkein kaikilla $t \in (0,\infty)$, ja missä $c = c(p,\operatorname{diam}(\Omega))$ on Poincarén epäyhtälössä esiintyvä vakio. Näitä epäyhtälöitä käyttämällä saadaan

$$\|Dv(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)} \ge \frac{1}{c}\|v(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)} - c\|u_o\|^p_{W^{1,p}(\Omega)},$$

melkein kaikilla $t \in (0,\infty)$, missä $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ on määritelty kuten oletuksessa, ja valittu $c \ge 1$. Vakio c ei ole enää sama vakio kuin edellisissä epäyhtälöissä. Kirjoittamalla

$\|Dv(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)} = \frac{1}{2}(\|Dv(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)} + \|Dv(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)})$ ja käyttämällä toiseen termiin yllä olevaa epäyhtälöä, saadaan

$$\|Dv(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)} \geq \frac{1}{c}\Big(\|v(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)} + \|Dv(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)}\Big) - c\|u_o\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}, \tag{4.2}$$

melkein kaikilla $t \in (0,\infty)$. Nyt integroimalla viimeisintä epäyhtälöä ajan suhteen välillä (t_1,t_2) saadaan

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega |Dv|^p\,dx\,dt \geq \frac{1}{c}\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \Big(|v|^p + |Dv|^p\Big)\,dx\,dt - c|t_2-t_1|\|u_o\|^p_{W^{1,p}(\Omega)},$$

mistä lemman ensimmäinen väite seuraa. Vastaavasti kertomalla epäyhtälöä (4.2) funktiolla $e^{-\frac{t}{\varepsilon}}$ ja integroimalla yli välin (t_1,t_2), saadaan

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega e^{-\frac{t}{\varepsilon}}|Dv|^p\,dx\,dt \geq \frac{1}{c}\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\Big(|v|^p + |Dv|^p\Big)\,dx\,dt - c\Big(e^{-\frac{t_1}{\varepsilon}} - e^{-\frac{t_2}{\varepsilon}}\Big)\|u_o\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Viemällä $t_2 \uparrow \infty$ ja käyttämällä esimerkiksi Lebesguen monotonista konvergenssia, toinen väite seuraa. □

Lemma 4.4. *Kaikilla $\varepsilon \in (0,1]$, variaatiofunktionaalilla $\mathcal{F}_\varepsilon$ on olemassa yksikäsitteinen minimoija $u_\varepsilon \in u_o + \mathcal{N}_\varepsilon$.*

Todistus. Selvästi $\inf\{\mathcal{F}_\varepsilon(v) \mid v \in u_o + \mathcal{N}_\varepsilon\} \geq 0 > -\infty$. Lisäksi $\inf\{\mathcal{F}_\varepsilon(v) \mid v \in u_o + \mathcal{N}_\varepsilon\} < \infty$, sillä alkudatan aikariippumattomalle ekstensiolle pätee $\bar{u}_o \in u_o + \mathcal{N}_\varepsilon$ ja $\mathcal{F}_\varepsilon(\bar{u}_o) < \infty$. Olkoon (v_n) joukossa $u_o + \mathcal{N}_\varepsilon$ minimoiva jono funktionaalille $\mathcal{F}_\varepsilon$. Osoitetaan seuraavaksi, että minimoiva jono on rajoitettu normin $\|\cdot\|_{\mathcal{K}_\varepsilon}$ suhteen.

Käyttämällä Lemman 4.3 toista epäyhtälöä, kun $t_1 = 0$, saadaan

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_\varepsilon(v) &= \int_0^\infty\int_\Omega e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\left[\frac{1}{2}|\partial_t v|^2 + \frac{1}{\varepsilon p}|Dv|^p\right]dx\,dt \\
&= \frac{1}{2}\|\partial_t v\|^2_{L^2(\Omega_\infty,\mu_\varepsilon)} + \frac{1}{\varepsilon p}\|Dv\|^p_{L^p(\Omega_\infty,\mu_\varepsilon)} \\
&\geq \min\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{c\varepsilon}\right\}\Big(\|\partial_t v\|^2_{L^2(\Omega_\infty,\mu_\varepsilon)} + \|v\|^p_{L^p(\Omega_\infty,\mu_\varepsilon)} + \|Dv\|^p_{L^p(\Omega_\infty,\mu_\varepsilon)}\Big) - c\|u_o\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Tästä saadaan, että jono $(\partial_t v_n)$ on rajoitettu avaruudessa $L^2(\Omega_\infty,\mu_\varepsilon)$, ja jonot (v_n) ja (Dv_n) avaruudessa $L^p(\Omega_\infty,\mu_\varepsilon)$. Kyseisten Lebesguen avaruuksien refleksiivisyyden nojalla tiedetään, että kaikilla edellisistä jonoista on olemassa osajonot, jotka suppenevat heikosti kyseisissä avaruuksissa. Osajonot voidaan valita iteratiivisesti. Poimitaan esimerkiksi ensiksi osajono $(v_{n'})$, joka suppenee johonkin funktioon $\tilde{v} \in L^p(\Omega_\infty,\mu_\varepsilon)$ heikon $L^p(\Omega_\infty,\mu_\varepsilon)$-topologian suhteen. Edelleen jono $(Dv_{n'})$ on rajoitettu $L^p(\Omega_\infty,\mu_\varepsilon)$-normin suhteen, joten voidaan poimia tästä osajono, joka suppenee tässä avaruudessa. Edelleen voidaan poimia edellisestä jonosta osajono, jossa aikaderivaatat suppenevat. Viimeiselle jonolle kaikki konvergenssit pätevät, ja merkitään tätä vastaavaa indeksijonoa edelleen (n'). Samaan tapaan kuin Lemmassa 4.2 tiedetään, että aikaderivaatta ja gradientti suppenevat funktion $\tilde{v}$ aikaderivaattaan ja gradienttiin. Täten suoraan normin $\|\cdot\|_{\mathcal{K}_\varepsilon}$ määritelmästä nähdään, että $\tilde{v} \in \mathcal{K}_\varepsilon$. Lisäksi, koska $v_n \in u_o + \mathcal{N}_\varepsilon$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, rajafunktio saa myös samat reuna-arvot jolloin $\tilde{v} \in u_o + \mathcal{N}_\varepsilon$. Nyt saadaan

$$\begin{aligned}
\inf_{v \in u_o + \mathcal{N}_\varepsilon} \mathcal{F}_\varepsilon(v) &= \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_\varepsilon(v_n) = \lim_{n'\to\infty} \mathcal{F}_\varepsilon(v_{n'}) = \liminf_{n'\to\infty} \mathcal{F}_\varepsilon(v_{n'}) \\
&= \liminf_{n'\to\infty} \left(\frac{1}{2} \|\partial_t v_{n'}\|^2_{L^2(\Omega_\infty,\mu_\varepsilon)} + \frac{1}{\varepsilon p} \|Dv_{n'}\|^p_{L^p(\Omega_\infty,\mu_\varepsilon)} \right) \\
&\geq \frac{1}{2} \liminf_{n'\to\infty} \|\partial_t v_{n'}\|^2_{L^2(\Omega_\infty,\mu_\varepsilon)} + \frac{1}{\varepsilon p} \liminf_{n'\to\infty} \|Dv_{n'}\|^p_{L^p(\Omega_\infty,\mu_\varepsilon)} \\
&\geq \frac{1}{2} \|\partial_t \tilde{v}\|^2_{L^2(\Omega_\infty,\mu_\varepsilon)} + \frac{1}{\varepsilon p} \|D\tilde{v}\|^p_{L^p(\Omega_\infty,\mu_\varepsilon)} \\
&= \mathcal{F}_\varepsilon(\tilde{v}),
\end{aligned}$$

missä on käytetty $\liminf$-operaation ominaisuuksia ja normin alaspäin puolijatkuvuutta heikon topologian suhteen. Täten siis minimoija funktionaalille $\mathcal{F}_\varepsilon$ on olemassa avaruudessa $u_o + \mathcal{N}_\varepsilon$. Minimoijan yksikäsitteisyys seuraa funktionaalin $\mathcal{F}_\varepsilon$ aidosta konveksisuudesta. $\square$

Tässä työssä erityisen kiinnostuksen kohteena on avaruus $V_\varepsilon = \{v \in u_o + \mathcal{N}_\varepsilon : \mathcal{F}_\varepsilon(v) < \infty\}$. Tämä johtuu siitä, että variaatiofunktionaalin $\mathcal{F}_\varepsilon$ minimoija kuuluu välttämättä kyseiseen avaruuteen. Tämä on perusteltavissa esimerkiksi seuraavasti. Määritellään alkudatan aikariippumaton ekstensio $\bar{u}_o(\cdot, t) := u_o$ kaikilla $t \in (0, \infty)$. Tälle pätee $\|\bar{u}_o\|_{\mathcal{K}_\varepsilon} < \infty$, eli $\bar{u}_o \in \mathcal{N}_\varepsilon$, sillä $u_o \in W^{1,p}(\Omega)$ määritelmän mukaan. Nyt koska u_ε on minimoija, saadaan

$$\mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \mathcal{F}_\varepsilon(\bar{u}_o) = \frac{1}{\varepsilon p} \int\limits_{\Omega_\infty} e^{-\frac{t}{\varepsilon}} |D\bar{u}_o|^p \, d\nu \leq \frac{1}{p} \int\limits_{\Omega} |Du_o|^p \, dx < \infty. \tag{4.3}$$

Siten millä tahansa $\varepsilon \in (0, 1]$ pätee $u_\varepsilon, \bar{u}_o \in V_\varepsilon$. Lisäksi edellisestä epäyhtälöstä saadaan variaatiofunktionaalin määritelmän perusteella myös suoraan

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega_\infty} e^{-\frac{t}{\varepsilon}} |\partial_t u_\varepsilon|^2 \, d\nu \leq \frac{2}{p} \int\limits_{\Omega} |Du_o|^p \, dx \quad \text{ja} \\
&\int\limits_{\Omega_\infty} e^{-\frac{t}{\varepsilon}} |Du_\varepsilon|^p \, d\nu \leq \varepsilon \int\limits_{\Omega} |Du_o|^p \, dx.
\end{aligned}$$

Yllä olevissa estimaateissa haluttaisiin päästä vaimenevasta painosta $e^{-\frac{t}{\varepsilon}}$ eroon. Tällöin ensimmäisessä epäyhtälössä saataisiin (parametrin ε suhteen) tasainen raja aikaderivaatan L^2-normille, ja vastaavasti alemmassa gradientin, ja Poincarén epäyhtälön avulla myös itse funktion u_ε L^p-normille. Siten L^p-avaruuksien refleksiivisyyden nojalla parametrista ϵ riippuville jonoille olisi olemassa heikosti suppenevat osajonot.

Lopulta näiden jonojen (heikon) raja-arvon olemassaolon ja suppenemisen kautta saadaan osoitettua, että kyseinen raja-arvo on itse asiassa Määritelmän 3.3 mukainen variaatioratkaisu ja täten todistaa Lauseen 4.1.

Jotta päästään painosta $e^{-\frac{t}{\varepsilon}}$ eroon, tarkastellaan aluksi aikaderivaattaa koskevaa termiä. Määritellään aluksi seuraavat apufunktiot

$$\mathcal{L}_\varepsilon(t) := \int_\Omega \frac{1}{2}|\partial_t u_\varepsilon(\cdot,t)|^2\,dx,$$
$$\mathcal{H}_\varepsilon(t) := \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\partial_t u_\varepsilon(\cdot,t)|^2 + \frac{1}{\varepsilon p}|Du_\varepsilon(\cdot,t)|^p\right] dx,$$
$$\mathcal{I}_\varepsilon(t) := \int_t^\infty e^{-\frac{s}{\varepsilon}}\mathcal{H}_\varepsilon(s)\,ds,$$

kun $t \in (0,\infty)$. Selvästi kaikki edellä määritellyt funktiot ovat ei-negatiivisia. Koska $u_\varepsilon \in V_\varepsilon$, $\mathcal{L}_\varepsilon(t)$ ja $\mathcal{H}_\varepsilon(t)$ ovat lokaalisti integroituvia välillä $(0,\infty)$. Lisäksi $\mathcal{I}_\varepsilon$ on vähenevä ja $\mathcal{I}_\varepsilon(0) = \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon)$. Myös $\mathcal{I}_\varepsilon(t) \to 0$ kun $t \uparrow \infty$ ja lisäksi $\mathcal{I}_\varepsilon(t)$ on jatkuva välillä $[0,\infty)$, joista molemmat voidaan perustella esimerkiksi Lebesguen dominoidun konvergenssin avulla.

Todistetaan seuraavaksi aputulos, jonka avulla minimoijalle, sen gradientille ja aikaderivaatalle saadaan halutut parametrista ε riippumattomat rajat.

Lemma 4.5. *Olkoon $u_\varepsilon \in u_o + \mathcal{N}_\varepsilon$ variaatiofunktionaalin $\mathcal{F}_\varepsilon$ minimoija. Tällöin melkein kaikilla $t \in (0,\infty)$ pätee*

$$\frac{d}{dt}\Big(e^{\frac{t}{\varepsilon}}\mathcal{I}_\varepsilon(t)\Big) = -2\mathcal{L}_\varepsilon(t).$$

Todistus. Selkeyden vuoksi merkitään tässä variaatiofunktionaalin $\mathcal{F}_\varepsilon$ minimoijaa pelkällä u. Olkoon $\zeta \in C_0^\infty((0,\infty))$ ja $\delta \in \mathbb{R}$. Määritellään

$$\varphi_\delta(s) := s + \delta\zeta(s),$$

kun $s \in (0,\infty)$. Selvästi $\varphi_\delta \in C^\infty((0,\infty))$. Nyt φ_δ on bijektio väliltä $(0,\infty)$ itselleen, kun valitaan esimerkiksi $|\delta| < \|\zeta'\|_\infty^{-1}$. Jatkossa $|\delta|$ oletetaan aina riittävän pieneksi, jotta halutut ominaisuudet pätevät. Olkoon ψ_δ funktion φ_δ käänteisfunktio. Nyt käänteisfunktiolauseen nojalla erityisesti myös ψ'_δ on jatkuvasti derivoituva kyseisellä välillä. Lasketaan

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\varepsilon(u_\delta) &= \int\limits_{\Omega_\infty} e^{-\frac{s}{\varepsilon}} \left[\frac{1}{2}|\partial_s u_\delta|^2 + \frac{1}{\varepsilon p}|Du_\delta|^p\right] dx\, ds \\ &= \int\limits_{\Omega_\infty} e^{-\frac{s}{\varepsilon}} \left[\frac{1}{2}|\partial_t u(x,\varphi_\delta(s))|^2 \varphi_\delta'(s)^2 + \frac{1}{\varepsilon p}|Du(x,\varphi_\delta(s))|^p\right] dx\, ds \\ &= \int\limits_{\Omega_\infty} e^{-\frac{\psi_\delta(t)}{\varepsilon}} \left[\frac{1}{2}|\partial_t u(x,t)|^2 \varphi_\delta'(\psi_\delta(t))^2 + \frac{1}{\varepsilon p}|Du(x,t)|^p\right] \psi_\delta'(t)\, dx\, dt \\ &= \int\limits_{\Omega_\infty} e^{-\frac{\psi_\delta(t)}{\varepsilon}} \left[\frac{1}{2\psi_\delta'(t)}|\partial_t u|^2 + \frac{\psi_\delta'(t)}{\varepsilon p}|Du|^p\right] dx\, dt.\end{aligned}$$

Laskussa kolmannella rivillä on tehty sijoitus $s = \psi_\delta(t)$. Neljännellä rivillä on käytetty tietoa, että

$$t = \varphi_\delta(\psi_\delta(t)) = \psi_\delta(t) + \delta\zeta(\psi_\delta(t)), \tag{4.4}$$

josta derivoimalla ajan suhteen saadaan $\varphi_\delta'(\psi_\delta(t))\psi_\delta'(t) = 1$. Siten $\varphi_\delta'(\psi_\delta(t))^2\psi_\delta'(t) = (\psi_\delta'(t))^{-1}$. Edelleen valitsemalla $|\delta|$ tarpeeksi pieneksi, saadaan φ_δ' ja ψ_δ' rajoitettua nollan yläpuolella ylhäältä ja alhaalta, ja käyttämällä edellistä yhtälöä lisäksi

$$e^{-\frac{\psi_\delta(t)}{\varepsilon}} = e^{\frac{-t+\delta\zeta(\psi_\delta(t))}{\varepsilon}} \le e^{\frac{\delta\|\zeta\|_\infty}{\varepsilon}} e^{-\frac{t}{\varepsilon}}.$$

Siten tiedetään, että $\mathcal{F}_\varepsilon(u_\delta) < \infty$, jolloin $u_\delta \in V_\varepsilon$. Koska $u_\delta|_{\delta=0} = u$, funktiolla $\delta \mapsto \mathcal{F}_\varepsilon(u_\delta)$ on minimi kohdassa $\delta = 0$. Kyseinen funktio on lisäksi derivoituva, jolloin tiedetään, että sen derivaatan on hävittävä nollassa. Tätä varten tarvitaan funktion ψ_δ ja sen eri derivaattojen lausekkeita kohdassa $\delta = 0$. Suoraan määritelmästä saadaan $\psi_\delta(t)|_{\delta=0} = t$. Käyttämällä tätä ja yhtälöä (4.4), saadaan lisäksi $\psi_\delta'(t)|_{\delta=0} = 1$, $\frac{d}{d\delta}\psi_\delta(t)|_{\delta=0} = -\zeta(t)$ ja $\frac{d}{d\delta}\psi_\delta'(t)|_{\delta=0} = -\zeta'(t)$. Käyttämällä näitä saadaan

$$\begin{aligned}0 = \frac{d}{d\delta}\mathcal{F}_\varepsilon(u_\delta)\Big|_{\delta=0} &= \int\limits_{\Omega_\infty} \frac{e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\zeta(t)}{\varepsilon} \left[\frac{1}{2}|\partial_t u|^2 + \frac{1}{\varepsilon p}|Du|^p\right] d\nu \\ &\quad + \int\limits_{\Omega_\infty} e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \left[\frac{\zeta'(t)}{2}|\partial_t u|^2 - \frac{\zeta'(t)}{\varepsilon p}|Du|^p\right] d\nu.\end{aligned}$$

Nyt käyttämällä tietoa $\mathcal{I}_\varepsilon{}'(t) = -e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\mathcal{H}_\varepsilon(t)$ melkein kaikilla $t \in (0,\infty)$, kirjoitetaan yllä oleva lauseke funktioiden $\mathcal{I}_\varepsilon$ ja $\mathcal{I}_\varepsilon{}'$ avulla. Saadaan

$$\begin{aligned}0 &= \int\limits_0^\infty \left[-\zeta(t)\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{I}_\varepsilon{}'(t) + \zeta'(t)\mathcal{I}_\varepsilon{}'(t) + 2e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\zeta'(t)\mathcal{L}_\varepsilon(t)\right] dt \\ &= \int\limits_0^\infty \zeta'(t)\left[\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{I}_\varepsilon(t) + \mathcal{I}_\varepsilon{}'(t) + 2e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\mathcal{L}_\varepsilon(t)\right] dt,\end{aligned}$$

jossa toisella rivillä on osittaisintegroitu ensimmäistä termiä, jolloin reunatermit häviävät, sillä supp $\zeta \Subset (0,\infty)$. Näin saatu yhtälö pätee siis kaikille $\zeta \in C_0^\infty((0,\infty))$, koska alussa kiinnitetty ζ oli mielivaltainen. Nyt koska $\mathcal{I}_\varepsilon$, $\mathcal{I}_\varepsilon{}'$ ja $\mathcal{L}_\varepsilon$ ovat integroituvia kyseisellä välillä, variaatiolaskennan peruslauseen seurauksena saadaan, että jollakin vakiolla $C \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{I}_\varepsilon(t) + \mathcal{I}_\varepsilon{}'(t) + 2e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\mathcal{L}_\varepsilon(t) = C \tag{4.5}$$

melkein kaikilla $t \in (0,\infty)$. Tiedetään, että $\mathcal{I}_\varepsilon(t) \to 0$ kun $t \uparrow \infty$, ja lisäksi $\mathcal{I}_\varepsilon{}'(t) + 2e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\mathcal{L}_\varepsilon(t) \in L^1((0,\infty))$, sillä $\mathcal{I}_\varepsilon{}'(t) = -e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\mathcal{H}_\varepsilon(t)$. Tästä seuraa, että $C = 0$. Perustellaan väite vastaoletuksella, jolloin oletetaan, että $C \neq 0$. Nyt termin $\mathcal{I}_\varepsilon(t)$ suppenemisesta seuraa, että jollakin $M > 0$ pätee

$$0 \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{I}_\varepsilon(t) < \frac{|C|}{2}, \quad \text{kun } t > M.$$

Tällöin käyttämällä yhtälöä (4.5) saadaan

$$C - \frac{|C|}{2} < \mathcal{I}_\varepsilon{}'(t) + 2e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\mathcal{L}_\varepsilon(t) \leq C$$

melkein kaikilla $t \in (M,\infty)$. Mikäli $C > 0$, saadaan

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty |\mathcal{I}_\varepsilon{}'(t) + 2e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\mathcal{L}_\varepsilon(t)|\,dt &\geq \int_M^\infty |\mathcal{I}_\varepsilon{}'(t) + 2e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\mathcal{L}_\varepsilon(t)|\,dt \\ &\geq \frac{C}{2}|(M,\infty)| \\ &= \infty,\end{aligned}$$

mikä on ristiriidassa kyseisen termin integroituvuuden kanssa. Samaan tapaan vakion C ollessa negatiivinen saadaan integrandia arvioitua alhaalta vakiolla $-C$, mikä johtaa samaan ristiriitaan. Tästä seuraa $C = 0$. Nyt kun kerrotaan yhtälöä (4.5) puolittain termillä $e^{\frac{t}{\varepsilon}}$, saadaan haluttu yhtälö

$$\frac{d}{dt}\Big(e^{\frac{t}{\varepsilon}}\mathcal{I}_\varepsilon(t)\Big) = -2\mathcal{L}_\varepsilon(t) \quad \text{melkein kaikilla } t \in (0,\infty).$$

□

Lemmasta (4.5) saadaan erityisesti, että funktio $t \mapsto e^{\frac{t}{\varepsilon}}\mathcal{I}_\varepsilon(t)$ on vähenevä. Käyttäen tätä tietoa ja estimaattia (4.3) saadaan

$$e^{\frac{t}{\varepsilon}}\mathcal{I}_\varepsilon(t) \leq \mathcal{I}_\varepsilon(0) = \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \frac{1}{p}\int_\Omega |Du_o|^p\,dx. \tag{4.6}$$

Nyt saadaan osoitettua haluttu L^2-raja minimoijan aikaderivaatalle.

Lemma 4.6. *Funktionaalin $\mathcal{F}_\varepsilon$ minimoijalle $u_\varepsilon \in u_o + \mathcal{N}_\varepsilon$ pätee*

$$\int\limits_{\Omega_\infty} |\partial_t u_\varepsilon|^2\,d\nu \leq \frac{1}{p}\int\limits_\Omega |Du_o|^p\,dx.$$

Todistus. Olkoon $t_1, t_2 \in (0, \infty)$ siten, että $t_1 < t_2$. Nyt käyttämällä Lemmaa 4.5 ja estimaattia (4.6) saadaan

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |\partial_t u_\varepsilon|^2 \, dx \, dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(e^{\frac{t}{\varepsilon}} \mathcal{I}_\varepsilon(t)) \, dt \\ &= e^{\frac{t_1}{\varepsilon}} \mathcal{I}_\varepsilon(t_1) - e^{\frac{t_2}{\varepsilon}} \mathcal{I}_\varepsilon(t_2) \\ &\leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} |Du_o|^p \, dx\end{aligned}$$

huomioiden lisäksi, että $e^{\frac{t}{\varepsilon}} \mathcal{I}_\varepsilon(t) \geq 0$ kaikilla $t \in (0, \infty)$. Nyt voidaan viedä $t_1 \downarrow 0$ ja $t_2 \uparrow \infty$, jolloin väite pätee.

$\square$

Jotta vastaavasti minimoija u_ε ja sen gradientti Du_ε saadaan rajoitettua tasaisesti L^p-normissa, esitetään seuraava aputulos.

Lemma 4.7. *Olkoon $u_\varepsilon \in u_o + \mathcal{N}_\varepsilon$ funktionaalin $\mathcal{F}_\varepsilon$ minimoija. Tällöin mille tahansa $0 \leq t_1 < t_2$, joille $t_2 - t_1 \geq \varepsilon$, saadaan*

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |Du_\varepsilon|^p \, dx \, dt \leq 2e \int_{\Omega} |Du_o|^p \, dx.$$

Todistus. Olkoon $0 < \delta \leq \varepsilon$ ja $t \in (0, \infty)$. Tällöin mikäli $t < s < t + \delta \leq t + \epsilon$, saadaan $1 \leq e^{\frac{t+\varepsilon-s}{\varepsilon}} \leq e$. Käyttämällä tätä tietoa voidaan arvioida

$$\begin{aligned}\int_{t}^{t+\delta} \int_{\Omega} |Du_\varepsilon|^p \, dx \, ds &\leq e^{\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}} \int_{t}^{t+\delta} \int_{\Omega} e^{-\frac{s}{\varepsilon}} |Du_\varepsilon|^p \, dx \, dt \\ &\leq e e^{\frac{t}{\varepsilon}} \int_{t}^{\infty} \int_{\Omega} e^{-\frac{s}{\varepsilon}} |Du_\varepsilon|^p \, dx \, dt \\ &\leq \varepsilon e p e^{\frac{t}{\varepsilon}} \mathcal{I}_\varepsilon(t) \\ &\leq \varepsilon e \int_{\Omega} |Du_o|^p \, dx,\end{aligned}$$

jossa on viimeisellä rivillä käytetty estimaattia (4.6). Valitaan seuraavaksi $0 \leq t_1 < t_2$ siten, että $t_2 - t_1 \geq \varepsilon$ kuten oletuksessa. Olkoon lisäksi $K \in \mathbb{N}$, jolle pätee $(K-1)\varepsilon < t_2 - t_1 \leq K\varepsilon$. Näistä epäyhtälöistä saadaan $K\varepsilon \leq t_2 - t_1 + \varepsilon \leq 2(t_2 - t_1)$ Nyt yllä olevan estimaatin perusteella saadaan

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}|Du_\varepsilon|^p\,dx\,dt &= \sum_{i=0}^{K-2}\int_{t_1+i\varepsilon}^{t_1+(i+1)\varepsilon}\int_{\Omega}|Du_\varepsilon|^p\,dx\,dt + \int_{t_1+(K-1)\varepsilon}^{t_2}\int_{\Omega}|Du_\varepsilon|^p\,dx\,dt\\ &\le K\varepsilon e\int_{\Omega}|Du_o|^p\,dx\\ &\le 2(t_2-t_1)e\int_{\Omega}|Du_o|^p\,dx,\end{aligned}$$

mistä väite seuraa.

□

Lemmasta 4.7 saadaan

$$\int_0^T\int_{\Omega}|Du_\varepsilon|^p\,dx\,dt \le 2eT\int_{\Omega}|Du_o|^p\,dx \qquad \forall T>0. \tag{4.7}$$

Lemmasta 4.3 ja yhtälöstä (4.7) seuraa, että

$$\int_{\Omega_T}(|u_\varepsilon|^p+|Du_\varepsilon|^p)d\nu \le cT\|u_o\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{4.8}$$

Siten myös kaikilla kiinnitetyillä $T>0$, funktionaalin $\mathcal{F}_\varepsilon$ minimoijan ja sen gradientin L^p-normit ovat tasaisesti rajoitettuja riippumatta parametrista $\varepsilon\in(0,1]$. Olkoon $(\varepsilon_i)_i$ jokin jono, jolle pätee $0<\varepsilon_i\le 1$ kaikilla i ja $\varepsilon_i\downarrow 0$, kun $i\to\infty$. Tarkastellaan tällöin jonoja $(u_{\varepsilon_i})_i$, $(Du_{\varepsilon_i})_i$ ja $(\partial_t u_{\varepsilon_i})_i$. Koska L^p-avaruudet ovat refleksiivisiä Banach-avaruuksia tapauksessamme $1<p<\infty$, saadaan Lemman 4.6, rajan (4.8) ja Banach-Alaoglun lauseen perusteella, että on olemassa osajono ε_{i_j} ja ja alkiot $u\in L^p(\Omega_T)$, $u_D\in[L^p(\Omega_T)]^n$ ja $u_t\in L^2(\Omega_\infty)$ siten, että

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon_{i_j}} &\rightharpoonup u \quad L^p(\Omega_T)\text{-mielessä}\\ Du_{\varepsilon_{i_j}} &\rightharpoonup u_D \quad [L^p(\Omega_T)]^n\text{-mielessä}\\ \partial_t u_{\varepsilon_{i_j}} &\rightharpoonup u_t \quad L^2(\Omega_\infty)\text{-mielessä}\end{aligned}$$

heikosti, kun $i_j\to\infty$. Heikon konvergenssin ja heikon derivaatan määritelmistä seuraa suoraan, että voidaan asettaa $Du=u_D$ ja $\partial_t u=u_t$. Kyseinen osajono (ε_{i_j}), jolle kaikki yllä olevat konvergenssit pätevät, voidaan poimia esimerkiksi seuraavasti. Annetun argumentin perusteella jonolla (ε_i) on olemassa osajono, jolle ensimmäinen, minimoijien heikko konvergenssi pätee. Nyt kyseistä osajonoa vastaavat gradientit ovat edelleen tasaisesti rajoitettuja L^p-normin suhteen, joten tällä osajonolla on edelleen olemassa osajono, jolle gradientit suppenevat heikosti. Vastaavalla argumentilla tästä saadaan edelleen poimittua osajono, jossa heikot aikaderivaatat suppenevat.

Viimeiselle osajonolle kaikki konvergenssit pätevät, joten valitaan ε_{i_j} täksi jonoksi. Jatkossa alaindeksit jätetään mukavuussyistä merkitsemättä, joten aina kun kirjoitetaan $\varepsilon \downarrow 0$, tarkoitetaan nimenomaan raja-arvoa sellaista jonoa pitkin, jolle yllä olevat konvergenssit pätevät.

Koska normi on Banach-avaruudessa heikosti alaspäin puolijatkuva, saadaan Lemman 4.7 perusteella

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |Du|^p \, dx \, dt \leq \frac{1}{t_2 - t_1} \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} |Du_\varepsilon|^p \, dx \, dt \leq 2e \int_\Omega |Du_o|^p \, dx, \tag{4.9}$$

kun $t_2 > t_1 \geq 0$, eli Lauseen 4.1 energiaestimaatti pätee. Samalla argumentilla ja Lemman 4.6 avulla saadaan myös aikaderivaatalle

$$\int_{\Omega_\infty} |\partial_t u|^2 \, d\nu \leq \frac{1}{p} \int_\Omega |Du_o|^p \, dx.$$

Käyttämällä tätä ja Jensenin epäyhtälöä saadaan lisäksi

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t_2) - u(\cdot, t_1)\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \left| \int_{t_1}^{t_2} \partial_t u(x,t) \, dt \right|^2 dx \\ &\leq |t_2 - t_1| \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega |\partial_t u|^2 \, dx \, dt \\ &\leq \frac{|t_2 - t_1|}{p} \int_\Omega |Du_o|^p \, dx, \end{aligned} \tag{4.10}$$

melkein kaikilla $t_1, t_2 \in (0, \infty)$. Siten joukko, jossa (4.10) pätee, on tiheä joukossa $(0, \infty)$. Olkoon $t \in (0, \infty)$ sellainen piste, jossa (4.10) ei päde ja (t_i) jono, jolle $t_i \to t$, kun $i \to \infty$ siten, että yllä oleva epäyhtälö pätee pisteissä t_i kaikilla i. Nyt kyseisen epäyhtälön perusteella jono $(u(\cdot, t_i))$ on Cauchy avaruudessa $L^2(\Omega)$, ja näin saatu rajafunktio on riippumaton approksimoivasta jonosta (t_i). Määritellään $u(\cdot, t)$ tällaisissa pisteissä kyseiseksi rajafunktioksi, jolloin Lauseen 4.1 väite $u \in C^{0,\frac{1}{2}}([0,T]; L^2(\Omega))$ pätee. Vastaavat väitteet pätevät luonnollisesti myös kaikille jonon termeille u_ε.

Seuraavaksi tulisi osoittaa, että minimoijien heikko raja-arvo u on Määritelmän 3.3 mukainen yksikäsitteinen variaatioratkaisu. Määritellään parametreista $\epsilon, \delta \in (0,1)$ riippuva vertailufunktio, jolla minimoijaa u_ε varioidaan funktionaalissa $\mathcal{F}_\varepsilon$. Olkoon $\theta \in (0, \frac{T}{2})$. Määritellään katkaisufunktio ajan suhteen

$$\zeta_\theta(t) := \begin{cases} \frac{1}{\theta} t & \text{jos } t \in [0, \theta) \\ 1 & \text{jos } t \in [\theta, T - \theta] \\ \frac{1}{\theta}(T - t) & \text{jos } t \in (T - \theta, T]. \end{cases}$$

Olkoon $\varphi \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap C^0([0,T];L^2(\Omega))$ siten, että $\partial_t\varphi \in L^2(\Omega_T)$. Määritellään näiden avulla edelleen parametreista δ, ε ja θ riippuva vertailufunktio

$$\tilde{\varphi}_{\varepsilon,\delta}(\cdot,t) := \delta e^{\frac{t}{\varepsilon}}\zeta_\theta(t)\varphi(\cdot,t)\chi_{[0,T]}(t).$$

Nyt selvästi $u_\varepsilon + \tilde{\varphi}_{\varepsilon,\delta} \in u_o + \mathcal{N}_\varepsilon$, mikäli $\varphi \in L^2(\Omega_T)$. Tämä pätee erityisesti, kun $p \geq 2$. Nyt koska u_ε minimoi funktionaalin $\mathcal{F}_\varepsilon$ ja $\tilde{\varphi}_{\varepsilon,\delta}$ käy variaatioksi, saadaan

$$\mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon + \tilde{\varphi}_{\varepsilon,\delta})$$

Tästä saadaan

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_0^T \int_\Omega e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \bigg[&\frac{1}{2}(|\partial_t u_\varepsilon + \delta\partial_t(e^{\frac{t}{\varepsilon}}\zeta_\theta\varphi)|^2 - |\partial_t u_\varepsilon|^2) \\ &+ \frac{1}{p\varepsilon}(|Du_\varepsilon + \delta e^{\frac{t}{\varepsilon}}\zeta_\theta D\varphi|^p - |Du_\varepsilon|^p)\bigg]\,dx\,dt. \end{aligned}$$

Kirjoittamalla integrandin ensimmäinen termi pistetulon määritelmän avulla, $|\partial_t u_\varepsilon|^2$ termit kumoutuvat. Lisäksi, kun valitaan $\delta \leq e^{-\frac{T}{\varepsilon}}$, voidaan integrandin jälkimmäisiä termejä arvioida ylöspäin funktion $|\cdot|^p$ konveksisuuden nojalla. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_0^T \int_\Omega e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \bigg[&\delta\partial_t u_\varepsilon \partial_t(e^{\frac{t}{\varepsilon}}\zeta_\theta\varphi) + \frac{1}{2}\delta^2|\partial_t(e^{\frac{t}{\varepsilon}}\zeta_\theta\varphi)|^2 \\ &+ \frac{\delta e^{\frac{t}{\varepsilon}}\zeta_\theta}{p\varepsilon}(|Du_\varepsilon + D\varphi|^p - |Du_\varepsilon|^p)\bigg]\,dx\,dt. \end{aligned}$$

Kerrotaan seuraavaksi epäyhtälöä tekijällä $\frac{\varepsilon}{\delta}$ ja annetaan $\delta \downarrow 0$. Tällöin yllä olevassa lausekkeessa integrandin toiseen termiin liittyvä lauseke häviää, ja avaamalla termejä saadaan

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_0^T \int_\Omega \bigg[&\zeta_\theta\varphi\partial_t u_\varepsilon + \varepsilon\zeta_\theta'\varphi\partial_t u_\varepsilon + \varepsilon\zeta_\theta\partial_t\varphi\partial_t u_\varepsilon \\ &+ \frac{\zeta_\theta}{p}(|Du_\varepsilon + D\varphi|^p - |Du_\varepsilon|^p)\bigg]\,dx\,dt. \end{aligned}$$

Nyt oletusten perusteella voidaan valita $\varphi = v - u_\varepsilon$ jollakin $v \in L^p(0,T;W_{u_o}^{1,p}(\Omega)) \cap C^0([0,T];L^2(\Omega))$, jolle lisäksi $\partial_t v \in L^p(\Omega_T)$. Täten v käy testifunktioksi variaatioratkaisun määritelmässä. Lisäämällä edellisen epäyhtälön molemmille puolille variaatioratkaisun lausekkeessa oleva vasemmanpuolen termi ja järjestelemällä termejä saadaan

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{p}|Du_\varepsilon|^p\,dx\,dt &\leq \int_0^T \int_\Omega (1-\zeta_\theta)\frac{1}{p}|Du_\varepsilon|^p\,dx\,dt + \int_0^T \int_\Omega \zeta_\theta \frac{1}{p}|Dv|^p\,dx\,dt \\ + \int_0^T \int_\Omega \zeta_\theta\partial_t u_\varepsilon(v-u_\varepsilon)\,dx\,dt &+ \varepsilon \int_0^T \int_\Omega (\zeta_\theta'\partial_t u_\varepsilon(v-u_\varepsilon) + \zeta_\theta\partial_t u_\varepsilon\partial_t(v-u_\varepsilon))\,dx\,dt \\ &=: I_1^\varepsilon + I_2 + I_3^\varepsilon + I_4^\varepsilon. \end{aligned}$$

Seuraavaksi estimoidaan edellisen epäyhtälön termejä ylöspäin, minkä jälkeen osoitetaan, että käyttämällä $\liminf$ -operaation ominaisuuksia ja viemällä $\varepsilon \downarrow 0$ (luonnollisesti aiemmin mainittua, sopivaa jonoa pitkin), ja tämän jälkeen $\theta \downarrow 0$, yllä oleva lauseke johtaa variaatioratkaisun määritelmään aiemmin olemassa olevaksi todetulle u. Erityisesti osoitetaan, että

$$I_4^\varepsilon \to 0, \quad \text{kun } \varepsilon \downarrow 0,$$

ja että

$$I_1^\varepsilon \leq \tilde{I}_1 \to 0, \quad \text{ja} \quad I_2 \to \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{p}|Dv|^p \, dx \, dt, \quad \text{kun } \theta \downarrow 0.$$

Lopulta jäljelle jäävät reunatermit saadaan integraalista I_3^ε.

Tarkastellaan aluksi termiä I_1^ε. Saadaan

$$I_1^\varepsilon \leq \frac{1}{p} \int_0^\theta \int_\Omega |Du_\varepsilon|^p \, dx \, dt + \frac{1}{p} \int_{T-\theta}^T \int_\Omega |Du_\varepsilon|^p \, dx \, dt,$$

missä on käytetty tietoa, että $\zeta_\theta = 1$ välillä $[\theta, T - \theta]$ ja $0 \leq \zeta_\theta \leq 1$ kaikkialla. Molemmille näistä termeistä saadaan täsmälleen samat ylärajat, joten tarkastellaan esimerkiksi ensimmäistä. Olkoon $\theta \geq \varepsilon$. Tällöin Lemman 4.7 perusteella saadaan

$$\int_0^\theta \int_\Omega |Du_\varepsilon|^p \, dx \, dt \leq 2e\theta \int_\Omega |Du_o|^p \, dx,$$

ja samoin saadaan toiselle termille. Saadaan siis yläraja

$$I_1^\varepsilon \leq \frac{4e\theta}{p} \int_\Omega |Du_o|^p \, dx =: \tilde{I}_1,$$

kun $\theta \geq \varepsilon$. Viimeinen ehto asettaa lähinnä vain rajoitteen raja-arvojen ottamisen järjestykselle.

Tarkastellaan seuraavaksi termiä I_3^ε. Saadaan

$$\begin{aligned}
I_3^\varepsilon &= \int_0^T \int_\Omega \zeta_\theta \partial_t u_\varepsilon (v - u_\varepsilon) \, dx \, dt \\
&= \int_0^T \int_\Omega \zeta_\theta \partial_t v (v - u_\varepsilon) \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \zeta_\theta (v - u_\varepsilon) \partial_t (u_\varepsilon - v) \, dx \, dt \\
&= \int_0^T \int_\Omega \zeta_\theta \partial_t v (v - u_\varepsilon) \, dx \, dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \zeta_\theta \partial_t |v - u_\varepsilon|^2 \, dx \, dt.
\end{aligned}$$

Ensimmäiselle termille saadaan

$$I^{\varepsilon}_{3,1} := \int_0^T \int_\Omega \zeta_\theta \partial_t v (v - u_\varepsilon)\, dx\, dt \to \int_0^T \int_\Omega \zeta_\theta \partial_t v (v-u)\, dx\, dt =: I_{3,1},$$

kun $\varepsilon \downarrow 0$ käyttäen u_ε heikkoa suppenemista $L^p(\Omega_T)$-mielessä, ja tietoa, että $\partial_t v \in L^2(\Omega_T) \subset L^{p'}(\Omega_T)$ tapauksessamme $p \geq 2$ Jensenin epäyhtälön nojalla. Käyttämällä tietoa, että $\zeta_\theta(0) = \zeta_\theta(T) = 0$, voidaan toiseen termiin käyttää Fubinin lausetta ja osittaisintegroida ajan suhteen. Tällöin

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \zeta_\theta \partial_t |v - u_\varepsilon|^2\, dx\, dt &= \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \zeta_\theta' |v - u_\varepsilon|^2\, dx\, dt \\ &= \frac{1}{2\theta}\int_0^\theta \int_\Omega |v-u_\varepsilon|^2\, dx\, dt - \frac{1}{2\theta}\int_{T-\theta}^T \int_\Omega |v-u_\varepsilon|^2\, dx\, dt \\ &=: I^{\varepsilon}_{3,2} + I^{\varepsilon}_{3,3}. \end{aligned}$$

Vietäessä $\varepsilon \downarrow 0$, jälkimmäiselle termille saadaan suoraan normin alaspäin puolijatkuvuuden nojalla

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} I^{\varepsilon}_{3,3} &= \limsup_{\varepsilon\downarrow 0} -\frac{1}{2\theta}\int_{T-\theta}^T \int_\Omega |v-u_\varepsilon|^2\, dx\, dt \\ &= -\liminf_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\theta}\int_{T-\theta}^T \int_\Omega |v-u_\varepsilon|^2\, dx\, dt \\ &\leq -\frac{1}{2\theta}\int_{T-\theta}^T \int_\Omega |v-u|^2\, dx\, dt \\ &=: \tilde{I}_{3,3}, \end{aligned}$$

sillä nyt $p \geq 2$, jolloin Jensenin epäyhtälön perusteella $L^2(\Omega_T) \subset L^{p'}(\Omega_T)$. Ensimmäiselle termille tätä ei voida käyttää suoraan, joten estimoidaan tälle yläraja seuraavasti. Käyttämällä Minkowskin epäyhtälöä, sekä epäyhtälöä (4.10), saadaan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\theta}\int_0^\theta \int_\Omega |v-u_\varepsilon|^2\, dx\, dt &\leq \frac{1}{2\theta}\left[\Big(\int_0^\theta \int_\Omega |v-u_o|^2\, dx\, dt\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\int_0^\theta \int_\Omega |u_\varepsilon - u_o|^2\, dx\, dt\Big)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \\ &\leq \frac{1}{2\theta}\left[\Big(\int_0^\theta \int_\Omega |v-u_o|^2\, dx\, dt\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\int_0^\theta \frac{t}{p}\int_\Omega |Du_o|^p\, dx\, dt\Big)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \\ &= \left[\Big(\frac{1}{2\theta}\int_0^\theta \int_\Omega |v-u_o|^2\, dx\, dt\Big)^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{\theta}}{2}\Big(\frac{1}{p}\int_\Omega |Du_o|^p\, dx\Big)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \\ &=: \tilde{I}_{3,2}. \end{aligned}$$

Viimeinen termi $I_4^\varepsilon \to 0$ kun $\varepsilon \downarrow 0$, sillä $\partial_t u_\varepsilon, u_\varepsilon, \partial_t v$ ja v kuuluvat avaruuteen $L^2(\Omega_T)$, ja lisäksi kaksi ensimmäistä suppenevat tämän avaruuden heikon topologian mielessä. Tällöin siis kaikki I_4^ε tekijän integraalitermit ovat rajoitettuja, jolloin toivottu konvergenssi pätee.

On siis estimoitu

$$I_1^\varepsilon + I_2 + I_3^\varepsilon + I_4^\varepsilon \le \tilde{I}_1 + I_2 + I_{3,1}^\varepsilon + \tilde{I}_{3,2} + I_{3,3}^\varepsilon + I_4^\varepsilon,$$

jossa epäyhtälön oikealla puolella kolmessa termissä on ε-riippuvuus. Tästä saadaan

$$\begin{aligned}
&\liminf_{\varepsilon\downarrow 0}\left(I_1^\varepsilon + I_2 + I_3^\varepsilon + I_4^\varepsilon\right)\\
&\le \limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\tilde{I}_1 + I_2 + I_{3,1}^\varepsilon + \tilde{I}_{3,2} + I_{3,3}^\varepsilon + I_4^\varepsilon\right)\\
&\le \tilde{I}_1 + I_2 + \tilde{I}_{3,2} + \limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\left(I_{3,1}^\varepsilon + I_{3,3}^\varepsilon + I_4^\varepsilon\right)\\
&\le \tilde{I}_1 + I_2 + \tilde{I}_{3,2} + \limsup_{\varepsilon\downarrow 0} I_{3,1}^\varepsilon + \limsup_{\varepsilon\downarrow 0} I_{3,3}^\varepsilon\\
&\le \tilde{I}_1 + I_2 + \tilde{I}_{3,1} + \tilde{I}_{3,2} + \tilde{I}_{3,3}.
\end{aligned}$$

Käyttämällä normin alaspäin puolijatkuvuutta heikossa topologiassa, gradienttien Du_ε heikkoa konvergenssia ja yllä olevia tuloksia saadaan

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega \frac{1}{p}|Du|^p \, dx \, dt\\
&\le \liminf_{\varepsilon\downarrow 0} \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{p}|Du_\varepsilon|^p \, dx \, dt\\
&\le \frac{2e\theta}{p}\int_\Omega |Du_o|^p \, dx + \int_0^T \int_\Omega \zeta_\theta \frac{1}{p}|Dv|^p \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \zeta_\theta \partial_t v(v-u) \, dx \, dt\\
&- \frac{1}{2\theta}\int_{T-\theta}^T \int_\Omega |v-u|^2 \, dx \, dt + \left[\left(\frac{1}{2\theta}\int_0^\theta \int_\Omega |v-u_o|^2 \, dx \, dt\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{\theta}}{2}\left(\frac{1}{p}\int_\Omega |Du_o|^p \, dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2,
\end{aligned}$$

joka oletusten mukaan pätee millä tahansa $\theta \in (0, \frac{T}{2})$. Viimeisenä otetaan raja-arvo $\theta \downarrow 0$ ja osoitetaan, että yllä olevasta epäyhtälöstä saadaan tällöin variaatioratkaisun määritelmän mukainen epäyhtälö.

Ensimmäinen termi suppenee selvästi nollaan, sillä oletuksen mukaan $u_o \in W^{1,p}(\Omega)$. Lisäksi funktion ζ_θ määritelmän perusteella $\zeta_\theta \uparrow \chi_{(0,T)}$ kaikilla $t \in [0,T]$, kun $\theta \downarrow 0$, joten esimerkiksi Lebesguen dominoidun konvergenssin avulla kahdelle seuraavalle termille pätee

$$\int_0^T \int_\Omega \zeta_\theta \frac{1}{p}|Dv|^p \, dx \, dt \to \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{p}|Dv|^p \, dx \, dt, \quad \text{ja}$$

$$\int_0^T \int_\Omega \zeta_\theta \partial_t v(v-u) \, dx \, dt \to \int_0^T \int_\Omega \partial_t v(v-u) \, dx \, dt,$$

kun $\theta \downarrow 0$. Seuraavat kaksi integraalia voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\theta} \int_{T-\theta}^T \int_\Omega |v-u|^2 \, dx \, dt &= -\frac{1}{2} \fint_{T-\theta}^T \|(v-u)(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \, dt \\ &\to -\frac{1}{2}\|(v-u)(\cdot,T)\|^2_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

kun $\theta \downarrow 0$ Lebesguen differentiointilauseen perusteella, sillä $u, v \in C^0([0,T]; L^2(\Omega))$. Vastaavasti

$$\frac{1}{2\theta} \int_0^\theta \int_\Omega |v-u_o|^2 \, dx \, dt \to \frac{1}{2}\|v(\cdot,0)-u_o\|^2_{L^2(\Omega)},$$

kun $\theta \downarrow 0$. Epäyhtälön viimeinen termi suppenee nollaan samalla perusteella kuin ensimmäinenkin. Täten siis saadaan lopulta

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{p}|Du|^p \, dx \, dt \le& \int_0^T \int_\Omega [\partial_t v(v-u) + \frac{1}{p}|Dv|^p] \, dx \, dt \\ &+\frac{1}{2}\|v(\cdot,0)-u_o\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|(v-u)(\cdot,T)\|^2_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

missä funktio $v \in L^p(0,T; W^{1,p}_{u_o}(\Omega)) \cap C^0([0,T]; L^2(\Omega))$ siten, että $\partial_t v \in L^2(\Omega_T)$, on mielivaltainen. Koska $T > 0$ oli myös mielivaltainen, u toteuttaa variaatioratkaisun määritelmän, mikä todistaa olemassaolon Lauseessa 4.1. Todistuksen loppuunsaattamiseksi osoitetaan vielä ratkaisun yksikäsitteisyys.

Olkoon $u_1, u_2 \in L^p(0,T; W^{1,p}_{u_o}(\Omega)) \cap C^0([0,T]; L^2(\Omega))$ Määritelmän 3.3 mukaiset erilliset variaatioratkaisut, eli $u_1 \neq u_2$. Tällöin, laskemalla yhteen molempia ratkaisuja vastaavat variaatioepäyhtälöt saadaan erityisesti

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p}\int_0^T \int_\Omega \Big[|Du_1|^p + |Du_2|^p\Big] \, dx \, dt \\ &\le \int_0^T \int_\Omega \Big[\partial_t v(2v-u_1-u_2) + \frac{2}{p}|Dv|^p\Big] \, dx \, dt + \|v(\cdot,0)-u_o\|^2_{L^2(\Omega)} - \|(v-u)(\cdot,T)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\le 2\int_0^T \int_\Omega \Big[\partial_t v(v-w) + \frac{1}{p}|Dv|^p\Big] \, dx \, dt + \|v(\cdot,0)-u_o\|^2_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

millä tahansa $v \in L^p(0,T;W^{1,p}_{u_o}(\Omega))$, jolle $\partial_t v \in L^2(\Omega_T)$. Lisäksi viimeisellä rivillä on merkitty $\frac{u_1+u_2}{2} =: w$. Valitaan nyt testifunktioksi $v = [w]_h$, missä $[w]_h$ on Määritelmän 3.8 mukainen aikasilotus funktiolle w alkuarvoksi valittuna u_o. Nyt Lemman 3.10 kohtien (iii), (iv) ja (v) perusteella pätee, että $[w]_h$ on sallittu testifunktio. Lisäksi $\partial_t [w]_h = -\frac{1}{h}([w]_h - w)$, jolloin sijoitettuna yllä olevaan epäyhtälöön saadaan

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{p}\int_0^T\int_\Omega \Big[|Du_1|^p + |Du_2|^p\Big]\,dx\,dt &\le 2\int_0^T\int_\Omega \Big[-\frac{1}{h}|[w]_h - w|^2 + \frac{1}{p}|D[w]_h|^p\Big]\,dx\,dt \\
&\le \frac{2}{p}\int_0^T\int_\Omega |D[w]_h|^p\,dx\,dt.
\end{aligned}
$$

Edelleen Lemman 3.10 kohdan (ii) perusteella saadaan, että

$$
\int_0^T\int_\Omega |D[w]_h|^p\,dx\,dt \to \int_0^T\int_\Omega |Dw|^p\,dx\,dt, \quad \text{kun } h \downarrow 0.
$$

Siten tästä ja edellisestä epäyhtälöstä seuraa, että

$$
\begin{aligned}
\int_0^T\int_\Omega \Big[|Du_1|^p + |Du_2|^p\Big]\,dx\,dt &\le 2\int_0^T\int_\Omega |Dw|^p\,dx\,dt \\
&= 2\int_0^T\int_\Omega \Big|\frac{1}{2}(Du_1 + Du_2)\Big|^p\,dx\,dt \\
&< \int_0^T\int_\Omega \Big[|Du_1|^p + |Du_2|^p\Big]\,dx\,dt,
\end{aligned}
$$

joista viimeisellä rivillä on käytetty funktion $|\cdot|^p$ aitoa konveksisuutta. Saatiin siis, että mikäli ratkaisuille pätee $u_1 \neq u_2$, seuraa ristiriita. Täten ratkaisun on oltava yksikäsitteinen.

5 Konveksisuuden välttämättömyys ratkaisun olemassaololle

Edellisissä kappaleissa on tarkasteltu parabolista p-Laplacen yhtälöä ja siihen liittyvien ratkaisujen olemassaoloa. Kyseinen todistus olemassaololle toimii kuitenkin myös isommalle luokalle parabolisia ongelmia, joissa yhtälön divergenssiosaa karakterisoi funktio $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Parabolisen p-Laplacen yhtälön tapauksessa kyseinen funktio on muotoa $f(x, u, \xi) = f(\xi) = \frac{1}{p}|\xi|^p$. Artikkelissa [3] variaatioratkaisun olemassaolo on todistettu ongelmille, joissa f on Caratheodory funktio (toteuttaa tietyt mitallisuus ja jatkuvuusehdot) ja toteuttaa lisäksi ehdot

$$\begin{cases} (u,\xi) \mapsto f(x,u,\xi) \text{ on konveksi melkein kaikilla } x \in \Omega, \\ f(x,u,\xi) \geq c|\xi|^p - g(x)(1+|u|), \quad \forall (x,u,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \end{cases}$$

jollakin $c > 0, p > 1$ ja $g \in L^{p'}(\Omega)$, jolle $g \geq 0$. Kyseisiä ehtoja kutsutaan konveksisuus- ja koersiivisuusehdoiksi. Merkitään nyt funktionaalia $\mathcal{F} : W^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$, joka voidaan määritellä funktion f avulla siten, että

$$\mathcal{F}(v) := \int_\Omega f(x, v, Dv)\, dx.$$

Seuraavaksi osoitetaan, että konveksisuus on välttämätön ehto Määritelmän 3.3 mukaisen variaatioratkaisun olemassaololle tietyin oletuksin koskien funktionaalia $\mathcal{F}$. Oletetaan taas jatkossa, että $p \geq 2$.

Lemma 5.1. *Olkoon $\mathcal{F} : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ alaspäin puolijatkuva funktionaali vahvan $L^2(\Omega)$-topologian suhteen, kun reuna-arvot $u_o \in W^{1,p}(\Omega)$ on kiinnitetty. Oletetaan, että kaikilla tällaisilla Cauchy-Dirichlet'n reuna-arvoilla u_o on olemassa Määritelmän 3.3 mukainen variaatioratkaisu, jossa p-Laplacen divergenssiosaa karakterisoivat termit on korvattu funktionaalilla $\mathcal{F}$. Tällöin funktionaali $\mathcal{F}$ rajoitettuna annettuihin reuna-arvoihin liittyvään funktioluokkaan $W^{1,p}_{u_o}(\Omega)$ on konveksi.*

Todistus. Kiinnitetään $u_o \in W^{1,p}(\Omega)$, ja olkoon $v_1, v_2 \in W^{1,p}_{u_o}(\Omega)$. Määritellään Cauchy-Dirichlet'n reuna-arvoiksi $v_\lambda = (1-\lambda)v_1 + \lambda v_2$ jollakin $\lambda \in [0, 1]$. Nyt v_1 ja v_2 saavat pystyreunalla halutut reuna-arvot u_o, ja nämä (tarkemmin näiden aikariippumattomat ekstensiot) käyvät testifunktioksi variaatioratkaisun määritelmässä. Kun huomioidaan, että näiden aikaderivaatat häviävät, saadaan

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathcal{F}(u(t))\, dt &\leq \int_0^T \mathcal{F}(v_1)\, dt - \frac{1}{2}\|v_1 - u(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|v_1 - v_\lambda\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= T\mathcal{F}(v_1) + \frac{1}{2}\|v_\lambda\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \langle v_1, u(T) - v_\lambda \rangle_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

ja

$$\int_0^T \mathcal{F}(u(t))\,dt \leq \int_0^T \mathcal{F}(v_2)\,dt - \frac{1}{2}\|v_2 - u(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|v_2 - v_\lambda\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq T\mathcal{F}(v_2) + \frac{1}{2}\|v_\lambda\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \langle v_2, u(T) - v_\lambda\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Kertomalla ylempää epäyhtälöä tekijällä $\frac{1-\lambda}{T}$, alempaa tekijällä $\frac{\lambda}{T}$ ja laskemalla yhteen saadaan

$$\begin{aligned}
⨍_0^T \mathcal{F}(u(t))\,dt \leq &(1-\lambda)\mathcal{F}(v_1) + \lambda\mathcal{F}(v_2) + \frac{1}{2T}\|v_\lambda\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&- \frac{1}{2T}\|u(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{T}\langle v_\lambda, u(T) - v_\lambda\rangle_{L^2(\Omega)} \\
=&(1-\lambda)\mathcal{F}(v_1) + \lambda\mathcal{F}(v_2) - \frac{1}{2T}\|v_\lambda - u(T)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
\leq&(1-\lambda)\mathcal{F}(v_1) + \lambda\mathcal{F}(v_2).
\end{aligned}$$

Käytetään seuraavaksi funktiota v_λ testifunktiona variaatioratkaisun määritelmässä. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}
\|v_\lambda - u(T)\|_{L^2(\Omega)} &\leq 2T\mathcal{F}(v_\lambda) - 2\int_0^T \mathcal{F}(u(t))\,dt \\
&\longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

kun $T \downarrow 0$, sillä $\mathcal{F}(v_\lambda) < \infty$ ja $u \in C^0([0,T]; L^2(\Omega))$. Siten $u(t) \to v_\lambda$, $L^2(\Omega)$-mielessä, kun $t \downarrow 0$. Täten funktionaalin $\mathcal{F}$ alaspäin puolijatkuvuuden nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(v_\lambda) &\leq \liminf_{t\downarrow 0} \mathcal{F}(u(t)) \\
&= \lim_{t\downarrow 0}\left(\inf_{s\leq t} \mathcal{F}(u(s))\right) \\
&= \liminf_{t\downarrow 0}\left(\inf_{s\leq t} \mathcal{F}(u(s))\right) \\
&\leq \liminf_{t\downarrow 0} ⨍_0^t \mathcal{F}(u(s))\,ds.
\end{aligned}$$

Käyttämällä tätä ja aiempaa epäyhtälöä yllä saadaan

$$\mathcal{F}(v_\lambda) \leq (1-\lambda)\mathcal{F}(v_1) + \lambda\mathcal{F}(v_2).$$

Tämä todistaa funktionaalin $\mathcal{F}$ olevan konveksi määrittelyjoukossaan.

$\square$

Edellisen lemman todistuksessa käytettiin oletusta funktionaalin $\mathcal{F}$ alaspäin puolijatkuvuudesta vahvan $L^2(\Omega)$-topologian suhteen. Näytetään seuraavaksi, että kyseinen oletus on järkevä, mikäli funktionaalilta $\mathcal{F}$ oletetaan p-kasvuehto ja koersiivisuus $W^{1,p}(\Omega)$-avaruudessa. Tämä pätee erityisesti p-Laplacen yhtälön tapauksessa, jolloin funktionaalille $\mathcal{F}$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathcal{F}(v) = \frac{1}{p}\int_\Omega |Dv|^p \, dx.$$

Oletetaan, että $v_i \to v$ $L^2(\Omega)$-mielessä, jossa reuna-arvot $u_o \in W^{1,p}(\Omega)$ on kiinnitetty. Mikäli

$$\liminf_{i\to\infty} \mathcal{F}(v_i) = \infty \geq \mathcal{F}(v),$$

alaspäin puolijatkuvuus toteutuu selvästi. Siirrytään tarkastelemaan tilannetta, kun $\liminf \mathcal{F}(v_i) < \infty$. Oleellisesti Poincarén epäyhtälöstä saadaan epäyhtälön (4.2) mukaisesti

$$\mathcal{F}(v_i) \geq \frac{1}{c}\Big(\|v_i\|^p_{L^p(\Omega)} + \|Dv_i\|^p_{L^p(\Omega)}\Big) - c\|u_o\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}$$

millä tahansa $i \in \mathbb{N}$. Tästä seuraa, että jono v_i on rajoitettu avaruudessa $W^{1,p}(\Omega)$. On siis olemassa heikosti suppenevat osajonot (v_i) ja (Dv_i) avaruudessa $L^p(\Omega)$. Merkitään heikkoa rajaa funktioilla $\tilde{v}$ ja $D\tilde{v}$. Koska joukko Ω on oletettu rajoitetuksi ja $p \geq 2$, tiedetään, että $L^2(\Omega) \subset L^{p'}(\Omega)$, jolloin heikosta $L^p(\Omega)$-konvergenssista seuraa $L^2(\Omega)$-konvergenssi. Luonnollisesti vahvasta $L^2(\Omega)$-konvergenssista seuraa vastaava heikko konvergessi. Siten funktiot v ja $\tilde{v}$ voidaan samastaa. Täten tiedetään, että

$$\begin{aligned} v_i &\rightharpoonup v && \text{heikossa } L^p(\Omega)\text{-mielessä, ja} \\ Dv_i &\rightharpoonup Dv && \text{heikossa } L^p(\Omega)\text{-mielessä.} \end{aligned}$$

Nyt käyttämällä alempaa yllä olevista suppenemisista ja normin heikkoa alaspäin puolijatkuvuutta, saadaan

$$\begin{aligned} \liminf_{i\to\infty} \mathcal{F}(v_i) &= \frac{1}{p}\liminf_{i\to\infty}\int_\Omega |Dv_i|^p \, dx \\ &\geq \frac{1}{p}\int_\Omega |Dv|^p \, dx \\ &= \mathcal{F}(v). \end{aligned}$$

Täten siis tapauksessamme funktionaali $\mathcal{F}$ on alaspäin puolijatkuva heikon $L^2(\Omega)$-topologian suhteen.

Viitteet

[1] Akagi, G., Stefanelli, U., *A variational principle for doubly nonlinear evolution.* Appl. Math. Lett. 23(9): 1120–1124., 2010.

[2] Akagi, G., Stefanelli, U., *Weighted energy-dissipation functionals for doubly nonlinear evolution.* J. Funct. Anal. 260(9): 2541–2578, 2011.

[3] Bögelein, V., Duzaar, F., Marcellini, P., *Existence of evolutionary variational solutions via the calculus of variations.* J. Differential Equations, 256(12): 3912–3942, 2014.

[4] Bögelein, V., Duzaar, F., Marcellini, P., *Parabolic systems with p, q-growth: a variational approach.* Arch. Rational Mech. Anal., 210(1): 219–267, 2013.

[5] De Giorgi, E., *Conjectures concerning some evolution problems.* A Celebration of John F. Nash, Jr., Duke Math. J., 81(2): 255–268, 1996.

[6] Giusti, E., *Direct Methods in the Calculus of Variations.* World Scientific, 2003.

[7] Kuttler, K., *Modern Analysis.* CRC Press LLC, 1998.

[8] Lichnewsky, A., Temam, R., *Pseudosolutions of the time-dependent minimal surface problem.* J. Differential Equations, 30(3): 340–364, 1978.

[9] Naumann, J., *Einführung in die Theorie parabolischer Variationsungleichungen.* Teubner-Texte zur Mathematik - Band 64, 1984.

[10] Serra, E., Tilli, P., *Nonlinear wave equations as limits of convex minimization problems: proof of a conjecture by De Giorgi.* Ann. of Math. (2), 175(3): 1551–1574, 2012.

[11] Showalter, R.E., *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, 1997.

[12] Wieser, W., *Parabolic Q-minima and minimal solutions to variational flow.* Manuscripta Math., 59(1): 63–107, 1987.

[13] Wu, Z., Zhao, J., Yin, J., Li, H. *Nonlinear Diffusion Equations.* World Scientific, 2001.