

**EUR 2480.f**

COMMUNAUTE EUROPEENNE DE L'ENERGIE ATOMIQUE - EURATOM

LIBRARY COPY

ETUDE DES  
PERTURBATIONS CIRCONFERENCELLES ET  
AXIALES DE TEMPERATURE DANS UNE  
GAINÉ CYLINDRIQUE D'ELEMENT  
COMBUSTIBLE  
(METHODES MATHÉMATIQUE ET RHEOANALOGIQUE)

par

E. ARANOVITCH, E. LABARRE et J. REYNEN

1965



Centre Commun de Recherche Nucléaire  
Etablissement d'Ispra - Italie

Département "Engineering"  
Service Technologie

## AVERTISSEMENT

Le présent document a été élaboré sous les auspices de la Commission de la Communauté Européenne de l'Energie Atomique (EURATOM).

Il est précisé que la Commission d'EURATOM, ses cocontractants ou toute personne agissant en leur nom :

- 1° — Ne garantissent pas l'exactitude ou le caractère complet des informations contenues dans ce document, ni que l'utilisation d'une information, d'un équipement, d'une méthode ou d'un procédé décrit dans le présent document ne porte pas atteinte à des droits privés.
- 2° — N'assument aucune responsabilité pour les dommages qui pourraient résulter de l'utilisation d'informations, d'équipements, de méthodes ou procédés divulgués dans le présent document.

Ce rapport est vendu au prix de 100,— francs belges, sur demande adressée à : PRESSES ACADEMIQUES EUROPEENNES — 98, Chaussée de Charleroi, Bruxelles 6.

Le paiement se fait par versement à la :

- BANQUE DE LA SOCIETE GENERALE (Agence Ma Campagne) - Bruxelles - compte N° 964.558,
- BELGIAN AMERICAN BANK AND TRUST COMPANY - New York - compte N° 22.186,
- LLOYDS BANK (Europe) Ltd. - 10, Moorgate, London E.C.2,

en mentionnant la référence : « EUR 2480.f — ETUDE DES PERTURBATIONS CIRCONFERENCELLES ET AXIALES DE TEMPERATURE DANS UNE GAINÉ CYLINDRIQUE D'ELEMENT COMBUSTIBLE »

Le présent document a été reproduit à partir de la meilleure copie disponible.

**EUR 2480.f**

COMMUNAUTE EUROPEENNE DE L'ENERGIE ATOMIQUE - EURATOM

ETUDE DES  
PERTURBATIONS CIRCONFERENCELLES ET  
AXIALES DE TEMPERATURE DANS UNE  
GAINES CYLINDRIQUE D'ELEMENT  
COMBUSTIBLE  
(METHODES MATHEMATIQUE ET RHEOANALOGIQUE)

par

E. ARANOVITCH, E. LABARRE et J. REYNEN

1965



Centre Commun de Recherche Nucléaire  
Etablissement d'Ispra - Italie

Département "Engineering"  
Service Technologie

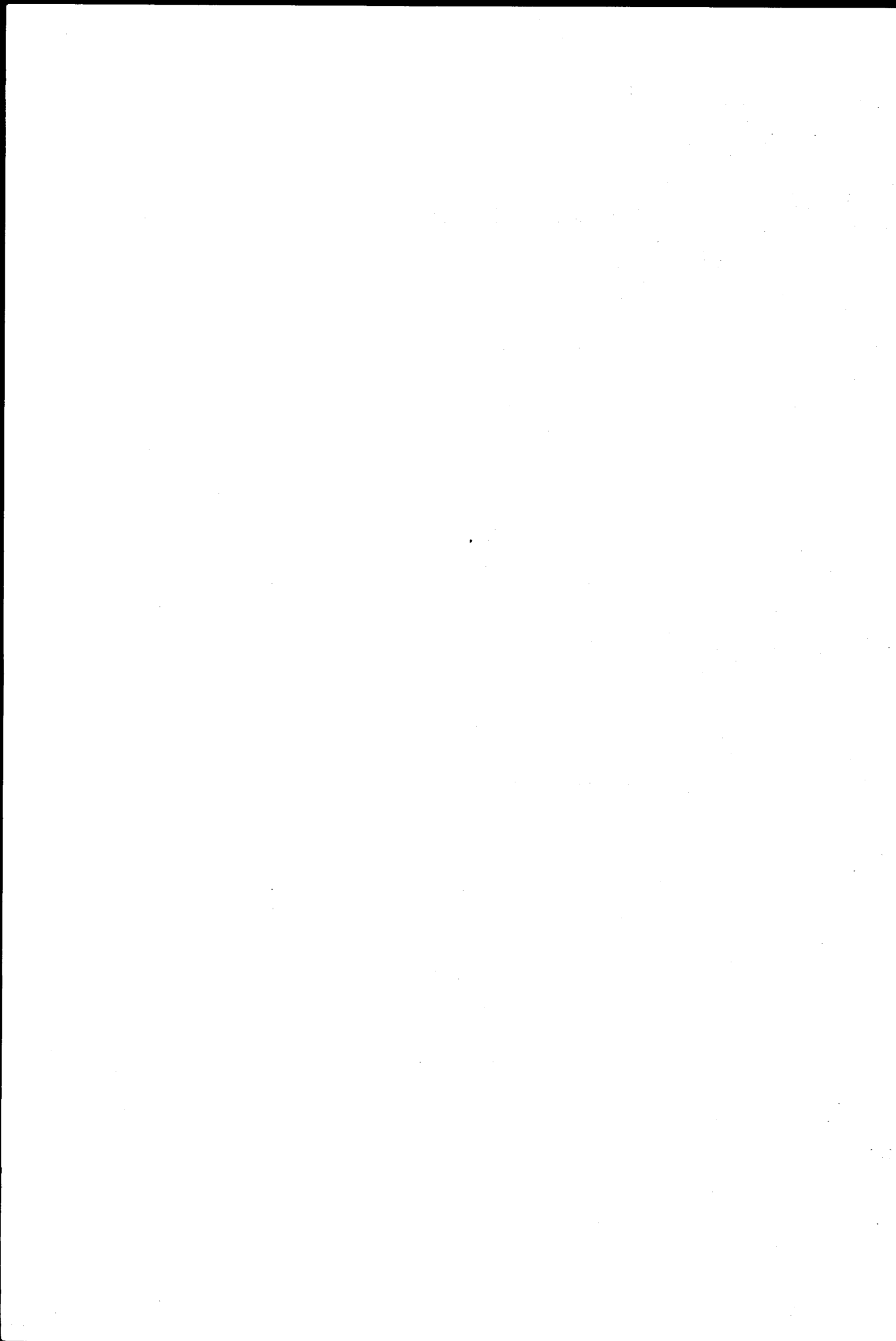


TABLE DES MATIERES

	page
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	5
CHAPITRE 2 ETUDE DES PERTURBATIONS CIRCONFERENCELLES DE TEMPERATURE (Méthode mathématique)	8
CHAPITRE 3 ETUDE DES PERTURBATIONS CIRCONFERENCELLES DE TEMPERATURE - ETUDE DES ZONES CHAUDES (Méthode rhéologique)	27
CHAPITRE 4 PERTURBATION PRODUITE PAR DEUX PASTILLES COMBUSTIBLES EXCENTREES (Méthode rhéologique)	34
CHAPITRE 5 PERTURBATIONS DE TEMPERATURE AU VOISINAGE D'UN BOUCHON (Méthode rhéologique)	47
CHAPITRE 6 CONCLUSIONS GENERALES	54
ANNEXE MATHEMATIQUE	57
NOMENCLATURE	74
BIBLIOGRAPHIE	76

LISTE DES FIGURES

	page
1 Section droite de l'élément combustible	22
2 Cas d'une perturbation polaire de la génération de chaleur	23
3 Cas d'une perturbation circonférentielle du coefficient d'échange gaine-combustible	24
4 Cas d'une perturbation circonférentielle du coefficient d'échange gaine-fluide	25
4 bis Comparaison entre les solutions exactes et les solutions linéarisées	26
5 Schéma fonctionnel de l'installation rhéoanalogique	31
6 Vue de l'installation d'analogie rhéoélectrique	32
7 Distribution des températures autour d'une zone chaude	33
8 Schéma de deux pastilles combustibles excentrées	43
9 Schéma de principe des réseaux de résistances	44
10 Perturbations circonférentielles dans le cas de deux pastilles excentrées	45
11 Distribution longitudinale des températures sur la paroi extérieure de la gaine (pastilles excentrées)	46
12 Distribution des températures au voisinage du bouchon	52
13 Vue d'un réseau de résistances	53

## CHAPITRE 1

### 1. INTRODUCTION

Lorsque la température maximale de la gaine constitue une des limitations d'une filière, il est essentiel de connaître le mieux possible la distribution fine de température en chaque point de la gaine de l'élément combustible. Par des calculs devenus courants, on obtient assez aisément les valeurs approchées des températures, à partir de la distribution macroscopique du flux neutronique et des caractéristiques moyennes du refroidissement. (On ne considère ici que le refroidissement en convection forcée).

A la distribution moyenne du flux, il faut superposer ce qu'on pourrait appeler une distribution des perturbations. On définit, d'une façon large, une perturbation par tout phénomène qui produit un écart de température locale par rapport aux valeurs moyennes. Citons, par exemple, l'influence dissymétrique d'une barre de contrôle, le relèvement ou le creusement du flux aux extrémités des éléments combustibles, le creusement de flux à l'intérieur d'un crayon ou d'une grappe.

De même, la valeur réelle du coefficient d'échange thermique local peut présenter des écarts considérables par rapport à la valeur moyenne, calculée à partir de formules héritées souvent de l'industrie des échangeurs thermiques. Non seulement on extrapole ces formules, valables pour des géométries cylindriques à des géométries aussi compliquées que la géométrie de la grappe, mais on néglige aussi l'existence des conditions d'établissement de régime ou l'effet de remous locaux au voisinage des grilles. L'ensemble de ces perturbations conduit à des variations locales de température de gaine qui sont plus au moins atténuées par la conductivité thermique. Elles induisent des contraintes thermiques qui, s'ajoutant aux autres contraintes inéluctables, peuvent amener la gaine localement dans le domaine plastique et la rendre vulnérable aux cyclages thermiques. Il peut être moins dangereux pour une gaine de travailler uniformément à une température maximale donnée, que de travailler à une température moindre avec d'importantes variations locales.

L'évaluation de l'effet des perturbations suppose non seulement la connaissance des écarts possibles autour des valeurs moyennes (par exemple variations possibles par rapport à la géométrie nominale, dues aux tolérances de montage ou de fabrication, excentration possible du

combustible dans sa gaine, effets dissymétriques de certaines déformations etc.) mais aussi la connaissance de la façon dont les différents paramètres interagissent.

L'étude de certaines de ces interactions peut être abordée d'une manière purement mathématique (par exemple l'influence de variations circonférentielles du coefficient d'échange sur la température de gaine), l'étude d'autres de ces interactions nécessite un travail expérimental (par exemple l'influence de variations locales de la géométrie sur le coefficient d'échange).

L'étude mathématique des perturbations conduit en général à des solutions sous forme de séries qui convergent d'autant plus lentement que la perturbation est plus localisée.

Lorsque les conditions aux limites deviennent trop compliquées, l'analogie rhéocélectrique, dont plusieurs exemples d'application sont donnés ici, constitue un outil commode et peu coûteux. Toutefois, l'analyse mathématique présente l'avantage de mettre plus facilement en évidence l'existence d'extrema par rapport à certains paramètres.

Le but de ce rapport est de présenter un certain nombre de méthodes mathématiques et analogiques qui ont été utilisées pour l'évaluation des perturbations. Quelques cas numériques ont été traités.

Il est présenté dans ce rapport:

- 1) - Une étude mathématique de l'influence sur la température de gaine et de zone combustible:
  - d'une perturbation circonférentielle de la génération de chaleur dans le combustible.
  - d'une perturbation circonférentielle du coefficient d'échange thermique entre la gaine et le combustible (avantage d'un bonding).
  - d'une perturbation circonférentielle du coefficient d'échange thermique entre la gaine et le fluide de refroidissement.
  - d'une perturbation circonférentielle de la température de fluide dans une section donnée.



Deux applications numériques sont traitées se rapportant à une gaine cylindrique d'inox et une gaine de SAP.

- 2) - Une étude par l'analogie rhéoélectrique de la distribution de température dans une gaine d'inox et de SAP autour d'une zone thermiquement isolée. (analogie avec un point chaud).
- 3) - Une étude par l'analogie rhéoélectrique de la distribution de température dans une gaine de SAP au voisinage d'un bouchon.
- 4) - Une étude par l'analogie rhéoélectrique de la distribution de température dans une gaine de SAP dans le cas où deux pastilles combustibles consécutives sont excentrés d'une façon opposée.

Nous exprimons nos remerciements à Monsieur GEOFFRION qui a effectué tous les essais d'analogie rhéoélectrique et à Monsieur BORELLA du CETIS qui a effectué les programmations sur machine IBM 7090.

CHAPITRE 2

2. ETUDE DES PERTURBATIONS CIRCONFÉRENTIELLES DE TEMPERATURE (METHODE MATHEMATIQUE)

2.1 HYPOTHESES ET CONDITIONS AUX LIMITES

On considère un élément combustible cylindrique constitué par une zone combustible et une gaine (fig. 1). La zone combustible est la source d'une génération de chaleur représentée par la fonction  $\Phi(r, \theta)$ . La paroi extérieure de la gaine est refroidie par un fluide en convection forcée établie.

On suppose que:

- les conductivités  $\lambda_i$  et  $\lambda_e$  du combustible et de la gaine sont indépendantes de la température
- l'évolution axiale des températures est négligeable devant les variations circonférentielles
- les régimes sont thermiquement établis.

Dans un système de coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , la température du combustible est représentée par la fonction  $S(r, \theta)$  et la température de gaine par la fonction  $T(r, \theta)$ .

On représente la liaison thermique entre la gaine et le combustible par le coefficient de passage  $h_i(\theta)$ . On suppose ainsi que cette liaison thermique est d'épaisseur géométrique négligeable sans conductivité thermique circonférentielle. Cette hypothèse, qui est justifiée dans le cas d'un remplissage gazeux entre la gaine et le combustible, peut être pessimiste dans le cas d'une liaison métallique.

Le coefficient d'échange thermique entre la gaine et le fluide de refroidissement est représenté par la fonction  $h_e(\theta)$ .

Les conditions aux limites, d'une part entre le combustible et la gaine, d'autre part entre la gaine et le fluide se traduisent par les relations suivantes:

$$-\lambda_i \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)_{r=r_i} = -\lambda_e \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=r_i} = h_i(\theta) (S - T)_{r=r_i} \quad (1)$$

$$-\lambda_e \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=r_e} = h_e(\theta) (T - T_f)_{r=r_e} \quad (2)$$

$T_f(\theta)$  est la température de fluide au voisinage de la paroi.

## 2.2 EQUATIONS GENERALES DE LA TEMPERATURE DANS LE COMBUSTIBLE ET LA GAINÉ

La fonction  $S(r, \theta)$  de la température du combustible vérifie l'équation de Poisson:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} = - \frac{\Phi(r, \theta)}{\lambda_i} \quad (3)$$

La fonction  $\Phi(r, \theta)$  représente la génération de chaleur dans le combustible. Pour tenir compte d'une perturbation dans la génération de chaleur (due, par exemple, à la présence d'une barre de contrôle) il est commode de décomposer cette fonction en un produit de deux séries, soit en série de Fourier par rapport à la variable polaire  $\theta$ , et en série de Taylor par rapport à la variable radiale  $r$

$$\Phi(r, \theta) = \frac{\lambda_i T_e}{r_i^2} \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} (a_{mn} \cos n\theta + b_{mn} \sin n\theta) \left( \frac{r}{r_i} \right)^m \quad (4)$$

On introduit le groupement  $\frac{\lambda_i T_e}{r_i^2}$  afin de rendre adimensionnels les coefficients  $a_{mn}$  et  $b_{mn}$ . Ceux-ci sont définis en annexe. (formules 5 à 11).

$T_e$  est la température moyenne de gaine sur la paroi extérieure.

La fonction  $T(r, \theta)$  de la température de gaine vérifie l'équation de Laplace:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0 \quad (5)$$

On néglige la génération interne de chaleur dans la gaine, due éventuellement au rayonnement gamma.

Les solutions générales des équations différentielles (3) et (5) s'écrivent:

pour le combustible:

$$\begin{aligned} \frac{S(r, \theta)}{T_e} = & A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \left(\frac{r}{r_i}\right)^n - \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{a_{m0}}{(m+2)^2} \left(\frac{r}{r_i}\right)^{m+2} \\ & - \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{r}{r_i}\right)^{m+2} \frac{(a_{mn} \cos n\theta + b_{mn} \sin n\theta)}{(m+2)^2 - n^2} \quad (\text{avec } m+2 \neq n) \\ & - \text{Log} \left(\frac{r}{r_i}\right) \sum_{m=0}^{m=\infty} \left(\frac{r}{r_i}\right)^{m+2} \frac{(a_{mn} \cos n\theta + b_{mn} \sin n\theta)}{2(m+2)} \quad (\text{avec } m+2=n) \end{aligned} \quad (6)$$

pour la gaine:

$$\begin{aligned} \frac{T(r, \theta)}{T_e} = & C_0 + D_0 \text{Log} \frac{r}{r_i} + \\ & + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ C_n \left(\frac{r}{r_i}\right)^n + D_n \left(\frac{r}{r_i}\right)^{-n} \right\} \cos n\theta + \left\{ E_n \left(\frac{r}{r_i}\right)^n + F_n \left(\frac{r}{r_i}\right)^{-n} \right\} \sin n\theta \end{aligned} \quad (7)$$

Les 3 ensembles de constantes d'intégration:

$(A_0, A_n, B_n)$

$(C_0, C_n, E_n)$

$(D_0, D_n, F_n)$

sont déterminés par les conditions aux limites représentées par les 3 relations des formules (1) et (2).

On considère successivement plusieurs cas de perturbations polaires.

### 2.3 CAS D'UNE PERTURBATION POLAIRE DE LA GENERATION DE CHALEUR

On suppose que la fonction de génération de chaleur dans le combustible présente une perturbation polaire. Celle-ci peut être représentée par la relation (4).

Le coefficient d'échange gaine-combustible  $h_i$ , le coefficient d'échange gaine-fluide  $h_e$  et la température de fluide  $T_f$ , sont supposés constants.

La détermination des constantes d'intégration  $(A_0, A_n, B_n)$   $(C_0, C_n, E_n)$   $(D_0, D_n, F_n)$  définit complètement les distributions de

température  $S(r, \theta)$  et  $T(r, \theta)$  dans le combustible et la gaine.  
(formules 44 et 45 en annexe).

Les solutions présentées sous une forme non dimensionnelle font apparaître l'influence des termes  $a_{mn}$  et  $b_{mn}$  et des groupements non dimensionnels suivants:

$\left(\frac{r_i}{r_e}\right)$  qui traduit l'effet de l'épaisseur de gaine

$H_i = \frac{h_i r_i}{\lambda_i}$  qui traduit l'effet du coefficient d'échange moyen entre le combustible et la gaine

$H_e = \frac{h_e r_e}{\lambda_e}$  qui traduit l'effet du coefficient d'échange moyen entre la gaine et le fluide de refroidissement

$\frac{\lambda_i}{\lambda_e}$  qui traduit l'effet de la conductivité du combustible par rapport à celle de la gaine.

#### 2.4 CAS D'UNE PERTURBATION CIRCONFÉRENTIELLE DE LA TEMPÉRATURE DE FLUIDE

Dans une section donnée, la température de fluide  $T_f(\theta)$  autour d'un élément combustible peut présenter des perturbations de température dues par exemple à des mauvais mélanges entre sous-canaux, s'il s'agit d'un élément en grappe.

On suppose que:

- la température moyenne de fluide est nulle. Décomposée en série de Fourier, la fonction  $T_f(\theta)$  s'écrit:

$$T_f(\theta) = T_e \sum_{n=1}^{n=\infty} (\delta_n \cos n\theta + \epsilon_n \sin n\theta) \quad (8)$$

- les coefficients d'échange  $h_i$  et  $h_e$  sont uniformes

- la génération de chaleur est symétrique dans le combustible.

Les solutions  $S(r, \theta)$  et  $T(r, \theta)$  sont représentées par les formules (50) et (51) en annexe.

## 2.5 CAS D'UNE PERTURBATION CIRCONFÉRENTIELLE DU COEFFICIENT D'ÉCHANGE GAINÉ-COMBUSTIBLE

Des variations circonférentielles du coefficient d'échange entre la gaine et le combustible peuvent être provoquées par une excentration du combustible dans la gaine ou par un morcellement du combustible.

Le coefficient d'échange gaine-combustible  $h_1(\theta)$  décomposé en série de Fourier s'écrit:

$$h_1(\theta) = h_1 \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (\alpha_{1n} \cos n\theta + \beta_{1n} \sin n\theta) \right\} \quad (9)$$

Le coefficient d'échange est relié aux températures de gaine et de combustible par la relation (1), dans laquelle les fonctions S et T se présentent aussi sous forme de séries.

On considère deux cas:

### 2.5.1 Linéarisation des solutions

Les perturbations du coefficient d'échange sont faibles par rapport à la valeur moyenne (inférieures à 25% par exemple), c'est-à-dire les termes  $\alpha_{1n}$  et  $\beta_{1n}$  sont petits devant  $h_1$ . Les perturbations des températures de gaine et de combustible seront faibles par rapport à leur valeur moyenne et on négligera les produits de perturbations qui apparaissent dans l'expression  $h_1(\theta) (S - T)$ . Les températures de combustible et de gaine sont représentées par les formules (46) et (47) en annexe mathématique.

### 2.5.2 Solution exacte

Lorsque les perturbations autour des valeurs moyennes sont importantes et ne permettent pas la linéarisation précédente, une méthode mathématique donnant une solution réitérative sous forme de série, avec une précision prédéterminée, a été développée et programmée sur machine IBM 7090. (voir en annexe mathématique paragraphe 7).

## 2.6 CAS D'UNE PERTURBATION CIRCONFÉRENTIELLE DU COEFFICIENT D'ÉCHANGE GAINÉ-FLUIDE

Lorsque la géométrie n'est pas complètement symétrique, il peut en résulter des perturbations circonférentielles du coefficient d'échange gainé-fluide, d'autant plus accentuées que le diamètre hydraulique moyen est petit devant le diamètre de la gainé.

Décomposé en série de Fourier, le coefficient d'échange gainé-fluide s'écrit:

$$h_e(\theta) = h_e \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (\alpha_{en} \cos n\theta + \beta_{en} \sin n\theta) \right\}$$

Ce coefficient d'échange est relié aux températures de gainé et de fluide par la relation (2) dans laquelle la fonction  $T(r, \theta)$  se présente aussi sous forme de série.

Comme dans le paragraphe précédent, on a envisagé:

- une solution linéarisée donnée par les formules (48) et (49) en annexe mathématique
- une solution réitérative (voir paragraphe 7 en annexe)

## 2.7 CONCLUSIONS

On a établi les formules qui permettent de calculer les perturbations de température dans la gainé et le combustible dues à des perturbations polaires:

- de la génération de chaleur dans le combustible
- de la température de fluide autour de la gainé
- du coefficient d'échange gainé-combustible
- du coefficient d'échange gainé-fluide.

En ce qui concerne les cas du coefficient d'échange gainé-combustible et gainé-fluide, on dispose d'une solution approchée linéarisée et d'une solution non linéarisée dont on peut se préfixer la précision. En ne retenant que les solutions linéarisées,

on peut évaluer séparément les effets de chacun de ces quatre paramètres et ensuite les additionner.

Dans la pratique, on est surtout intéressé par la valeur du point de température maximale et par l'amplitude des variations locales de température qui induisent des déformations et des contraintes thermiques.

En appelant  $\delta T_e$  la variation circonférentielle maximale de la température sur la paroi extérieure de la gaine et  $T_e$  la température moyenne de paroi extérieure de gaine, le rapport  $\frac{\delta T_e}{T_e}$  dépend des paramètres non dimensionnels suivants:

$\left(\frac{r_e}{r_i}\right)$  qui traduit l'influence de l'épaisseur de gaine

$H_i$  qui traduit l'influence du coefficient d'échange gaine-combustible

$H_e$  qui traduit l'influence du coefficient d'échange gaine-fluide

$\frac{\lambda_i}{\lambda_e}$  qui traduit l'influence de la conductivité du combustible par rapport à celle de la gaine.

Ces paramètres n'agissent pas toujours d'une façon monotone. Ainsi par exemple dans le cas d'une perturbation dans la génération polaire de chaleur, l'augmentation de la conductivité de la gaine ne se traduit pas toujours par une diminution de l'écart circonférentiel de température dans la gaine car deux phénomènes thermiques sont en jeu. D'un côté, on facilite la conduction circonférentielle dans la gaine, d'un autre côté, on diminue la résistance thermique globale entre le combustible et le fluide de refroidissement, alors que cette résistance thermique à l'effet bénéfique d'égaliser les températures dans le combustible. Ceci est illustré par l'application numérique du paragraphe (2.8.1).

Le rapport  $\frac{\delta T_e}{T_e}$  dépend aussi de la forme des fonctions de variations polaires des perturbations et de leurs amplitudes. Par exemple, une variation en  $\cos\theta$  du coefficient d'échange gaine-fluide n'induit pas le même écart circonférentiel de température dans la gaine qu'une variation en  $\cos 6\theta$  de même amplitude, à cause de la conductivité circonférentielle.



Un code a été mis au point pour la machine IBM 7090 qui a permis de comparer les résultats des solutions non linéarisées avec les résultats des solutions linéarisées. Dans le paragraphe qui suit, on considère un certain nombre d'exemples numériques se rapportant à des gaines de SAP et d'inox. Les ordres de grandeurs choisis pour les différents paramètres pourraient se rapporter à un type d'élément combustible ORGEL.

## 2.8 APPLICATIONS NUMERIQUES

Afin de dégager quelques remarques qualitatives sur la façon dont agissent les perturbations citées, on a effectué un certain nombre d'applications numériques se rapportant à une gaine de SAP (sintered aluminium powder) et d'inox.

Sauf indications contraires, les valeurs des paramètres sont les suivantes:

### Gaine SAP

- |                           |            |
|---------------------------|------------|
| a) diamètre extérieur     | 25 mm      |
| b) épaisseur              | 1,3 mm     |
| c) conductivité thermique | 1,8 w/cm°C |

### Gaine inox

- |                           |             |
|---------------------------|-------------|
| d) diamètre extérieur     | 25 mm       |
| e) épaisseur              | 0,4 mm      |
| f) conductivité thermique | 0,16 w/cm°C |

### Combustible UC

- |   |                           |
|---|---------------------------|
| g) conductivité thermique   | 0,25 w/cm°C               |
| h) flux superficiel moyen sur la paroi extérieure de gaine                    | 100 w/cm <sup>2</sup>     |
| i) coefficient d'échange moyen entre la gaine et le combustible               | 0,33 w/cm <sup>2</sup> °C |
| j) coefficient d'échange moyen entre la gaine et le fluide de refroidissement | 1 w/cm <sup>2</sup> °C    |

On considère des variations polaires en  $\cos n\theta$  (en général on a pris  $n=1$  et  $n=6$ ) des phénomènes perturbateurs. A partir des différentes formules établies en annexe, on calcule l'amplitude  $\delta T_e$  de l'écart circonférentiel de température sur la paroi extérieure de gaine.

### 2.8.1 Cas d'une perturbation polaire de la génération de chaleur

On suppose que la génération de chaleur dans le combustible présente une variation polaire en  $\cos\theta$  avec une amplitude relative de 25%. On constate sur les graphiques de la fig. 2, que l'amplitude relative des écarts de température sur gaine oscille en général entre 5% et 10% pour les différents cas étudiés.

Sur les diagrammes (a) et (b) on a étudié l'influence de la conductivité du combustible et de la gaine sur l'écart circon-férentiel de température qui apparaît dans la gaine. On constate que l'influence de la conductivité de gaine est faible, tandis que l'influence de la conductivité du combustible est plus sensible. L'écart circon-férentiel de température dans la gaine double lorsqu'on passe de l'uranium oxyde à l'uranium métal.

Sur le diagramme (c) on a étudié l'influence de la valeur moyenne du coefficient d'échange gaine-combustible. L'écart circon-férentiel de température de gaine est d'autant plus faible que le coefficient d'échange gaine-combustible  $h_i$  est plus faible, pour des valeurs de  $h_i$  comprises entre 0 et  $1 \text{ w/cm}^2\text{°C}$ . Pour des valeurs de  $h_i$  supérieures à  $1 \text{ w/cm}^2\text{°C}$ , son influence devient négligeable.

### 2.8.2 Cas d'une perturbation circon-férentielle du coefficient d'échange gaine-combustible

On considère deux cas de perturbations circon-férentielles du coefficient d'échange gaine-fluide en  $\cos n\theta$ , avec  $n=1$  et  $n=6$ , qui correspondent à une amplitude relative de variation circon-férentielle de 25% par rapport à la valeur moyenne. On calcule l'amplitude  $\delta T_e$  de l'écart circon-férentiel de température sur la paroi extérieure de gaine en étudiant l'influence de différents paramètres. (voir fig. 3).

### 2.8.2.1 Influence de la valeur moyenne du coefficient d'échange gaine-fluide (Solution linéarisée)

Les valeurs des paramètres indiquées au paragraphe 2.8 sont conservées excepté pour le paramètre (j), qui devient un paramètre de variation.

Les résultats sont représentés par les courbes de la fig. 3a. Dans le cas du SAP, on note que l'écart circonférentiel de température  $\delta T_e$  est plus important avec une variation en  $\cos\theta$  qu'avec une variation en  $\cos^2\theta$ , à cause de la bonne conduction thermique du matériau.

Dans le cas de l'inox, on remarque que le résultat est inversé. Ce résultat, assez surprenant à première vue, provient de ce que deux phénomènes thermiques agissent en sens opposés. D'un côté, lorsque n passe de 1 à 6, l'influence de la conduction thermique de la gaine est plus agissante et tend vers une atténuation de l'écart circonférentiel de température, d'un autre côté, les variations de flux thermique qui sont créées à la périphérie du combustible, sont plus prononcées lorsque n croît. Toutefois, au dessus d'une certaine valeur critique de n qui dépend du matériau de gaine, de son épaisseur ainsi que des valeurs moyennes de  $h_j$  et  $h_g$ , le phénomène d'atténuation finit par l'emporter. Ceci est illustré par les courbes de la fig. 3c.

Pour la gaine en SAP, le phénomène d'atténuation l'emporte pour  $n=1$ , pour la gaine en inox, la valeur critique de n est de l'ordre de 6, (compte tenu des valeurs numériques des autres paramètres).

### 2.8.2.2 Influence de la valeur moyenne du coefficient d'échange gaine-combustible. (Solution linéarisée)

Les valeurs des paramètres indiquées au paragraphe 2.8, sont conservées excepté pour le paramètre (i) qui devient un paramètre de variation.

Les résultats sont représentés par les courbes de la fig. 3b.

Ces courbes ont même allure que sur la fig. 3a. Elles permettent d'apprécier l'intérêt éventuel d'une liaison métallique entre la gaine et le combustible.

En supposant, par exemple, que la valeur moyenne de  $h_i$ , en l'absence de liaison métallique, est de  $0,5 \text{ w/cm}^2\text{°C}$ , et qu'elle devient égale à  $2 \text{ w/cm}^2\text{°C}$  en présence d'une liaison métallique, on remarque que les écarts circonférentiels de température deviennent environ trois fois plus faibles avec la liaison métallique.

### 2.8.3 Cas d'une perturbation circonférentielle du coefficient d'échange gaine-fluide (Solution linéarisée)

On considère deux cas de variations circonférentielles du coefficient d'échange gaine-fluide en  $\cos\theta$  et en  $\cos 6\theta$ , qui correspondent à une amplitude relative de variation circonférentielle de 25% par rapport à la valeur moyenne. Comme précédemment, on calcule l'amplitude  $\delta T_e$  de l'écart circonférentiel de température sur la paroi extérieure de gaine en étudiant l'influence de différents paramètres. (voir fig. 4).

#### 2.8.3.1. Influence de la valeur moyenne du coefficient d'échange gaine-fluide

Les valeurs des paramètres indiquées au paragraphe 2.8 sont conservées excepté pour le paramètre (j) qui devient un paramètre de variation.

Les résultats sont portés sur la fig. 4a. On note, en ce qui concerne le SAP, que l'écart circonférentiel de température de gaine  $\delta T_e$  est bien plus faible dans le cas d'une variation du coefficient d'échange gaine-fluide en  $\cos 6\theta$  qu'en cas  $\cos\theta$  à cause de la conduction circonférentielle dans la gaine de SAP. Par contre en ce qui concerne l'inox, les différences sont faibles entre le cas (n=1) et le cas (n=6). Pour (n=1) une comparaison, entre l'inox et le SAP, montre des différences faibles, ce qui permet de dégager la conclusion qualitative suivante: compte tenu des valeurs des différents paramètres choisis, dans le cas de variation en  $\cos\theta$  du coefficient

d'échange gaine-fluide, la conduction circonférentielle est pratiquement inopérante, on trouve des écarts circonférentiels de température à peu près identiques dans une gaine de SAP de 1,3 mm d'épaisseur et dans une gaine d'inox de 0,4 mm d'épaisseur. A une variation relative du coefficient d'échange gaine-fluide de 25%, correspond une variation relative de la température de gaine de 20% environ par rapport à la température de fluide pour une valeur de  $h_e = 1 \text{ w/cm}^2\text{°C}$ . Par contre, dans le cas d'une variation en  $\cos 6\theta$ , la variation relative de température de gaine tombe à 4%. Lorsque la valeur moyenne  $h_e$  tend vers zéro, les écarts circonférentiels de température tendent vers des valeurs finies, ce qui signifie que le rapport  $\frac{\delta T_e}{T_e}$  tend vers zéro. En proportion, la conduction circonférentielle est d'autant plus efficace que la valeur moyenne du coefficient d'échange gaine-fluide est faible.

#### 2.8.3.2 Influence de la valeur $h_i$ du coefficient d'échange gaine-combustible

On fait varier la valeur  $h_i$  du coefficient d'échange gaine-combustible. Toutes les valeurs énumérées au paragraphe 2.8, sont maintenues excepté pour le paramètre (i) qui devient un paramètre de variation.

Les résultats sont portés sur la fig. 4b. On note que l'influence de ce coefficient d'échange est faible sur les écarts circonférentiels de température dans la gaine. Lorsqu'il est supérieur à  $1 \text{ w/cm}^2\text{°C}$ , son effet est pratiquement négligeable aussi bien dans le cas de l'inox que dans le cas du SAP avec des lois de variation du coefficient d'échange gaine-fluide en  $\cos\theta$  et en  $\cos 6\theta$ .

Ainsi il apparaît qu'une liaison en métal fondu entre la gaine et le combustible, qui augmente considérablement la valeur  $h_i$ , ne diminue pas les écarts de température dans la gaine provoqués par une variation circonférentielle du coefficient d'échange gaine-fluide. Toutefois, on a supposé que la liaison thermique entre la gaine et le combustible était représentée par un coefficient d'échange et non pas par un milieu conducteur. Cette hypothèse, qui est justifiée

dans le cas d'une liaison de quelques dixièmes de mm d'épaisseur, cesserait d'être valable si la liaison avait plusieurs mm d'épaisseur.

#### 2.8.3.3 Influence de l'épaisseur de gaine

Toutes les valeurs du paragraphe 2.8 restent valables, excepté pour (b) et (e) qui deviennent des paramètres de variation. Les résultats sont portés sur la fig. 4c. Pour le SAP, on remarque que l'augmentation de l'épaisseur de gaine atténue considérablement les écarts de température dans le cas d'une variation en  $\cos 6\theta$  ( $n=6$ ) du coefficient d'échange gaine-fluide.

Pour l'inox, l'influence de l'épaisseur est pratiquement négligeable; on constate même dans le cas d'une variation en  $\cos\theta$ , le résultat assez surprenant que l'écart circonferentiel de température de gaine, croît très légèrement avec l'épaisseur. Deux phénomènes thermiques agissent en sens opposés. D'un côté, en augmentant l'épaisseur de gaine, on favorise la conduction circonferentielle, c'est-à-dire l'atténuation des écarts circonferentiels de température; d'un autre côté, on augmente la résistance thermique entre la paroi externe de gaine et le coeur de l'élément, ce qui défavorise l'atténuation des écarts circonferentiels de température.

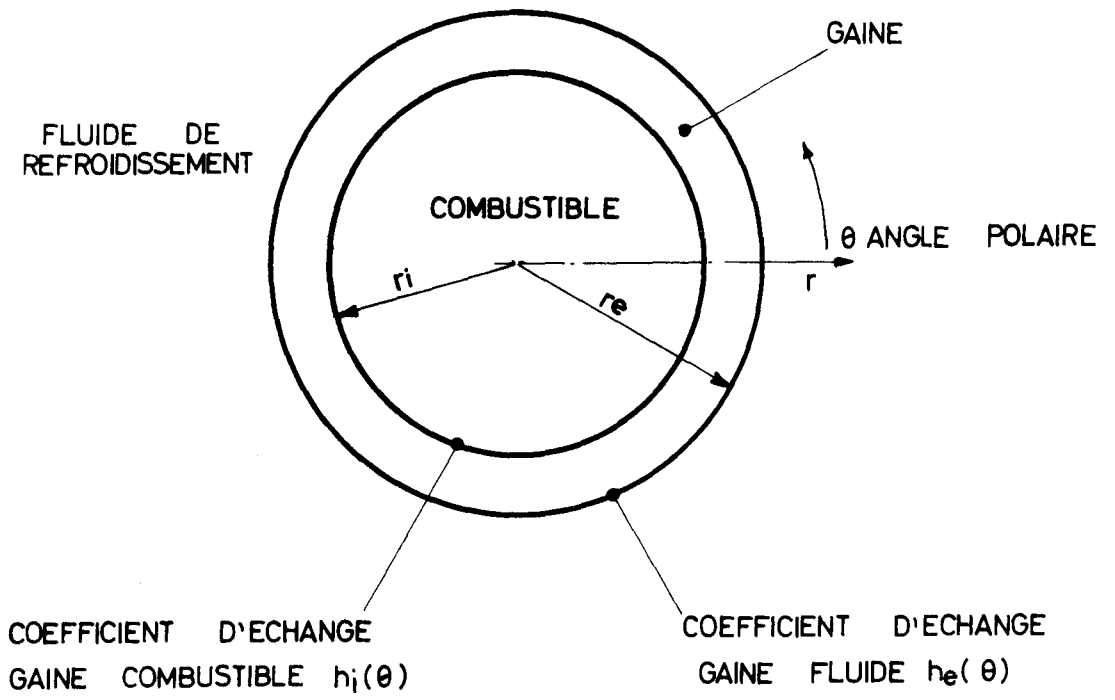
#### 2.8.4 Comparaison entre les solutions exactes et les solutions linéarisées

Les solutions linéarisées sont justifiées lorsque les variations relatives des coefficients d'échange gaine-combustible et gaine-fluide demeurent faibles. Lorsque ces variations deviennent importantes, l'écart entre les solutions exactes et les solutions linéaires cesse d'être négligeable. Ceci est illustré par les courbes de la fig. 4 bis, sur laquelle on remarque que, pour l'exemple numérique choisi, les solutions linéaires présentent une précision acceptable pour des valeurs des amplitudes relatives  $\frac{\delta h_e}{h_e}$  et  $\frac{\delta h_i}{h_i}$  inférieures à 25%.

On a considéré pour cet exemple, des perturbations des coefficients d'échange  $h_i(\theta)$  et  $h_e(\theta)$  de la forme:

$$h_i(\theta) = h_i \left( 1 + \frac{\delta h_i}{2h_i} \cos\theta \right) \text{ pour la fig. 4 bis a}$$

$$h_e(\theta) = h_e \left( 1 + \frac{\delta h_e}{2h_e} \cos\theta \right) \text{ pour la fig. 4 bis b}$$

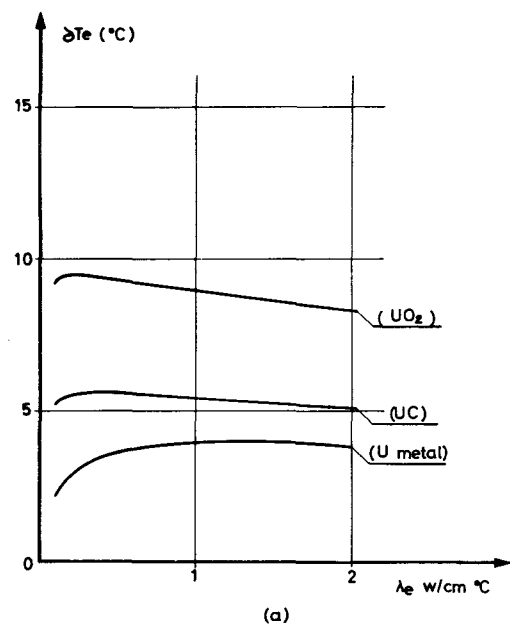


SECTION DROITE

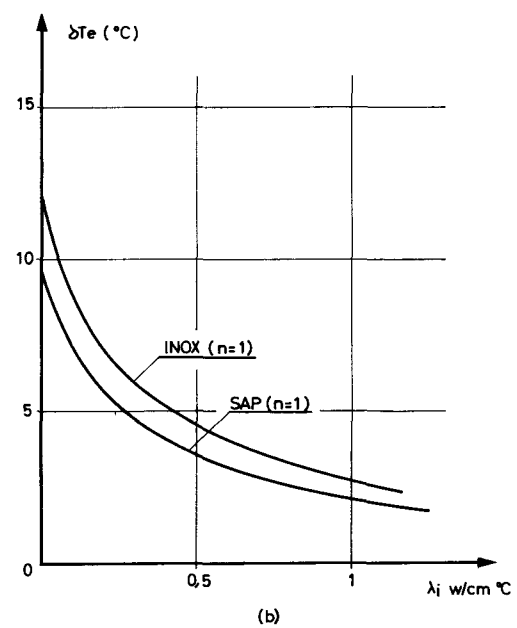
FIG. 1



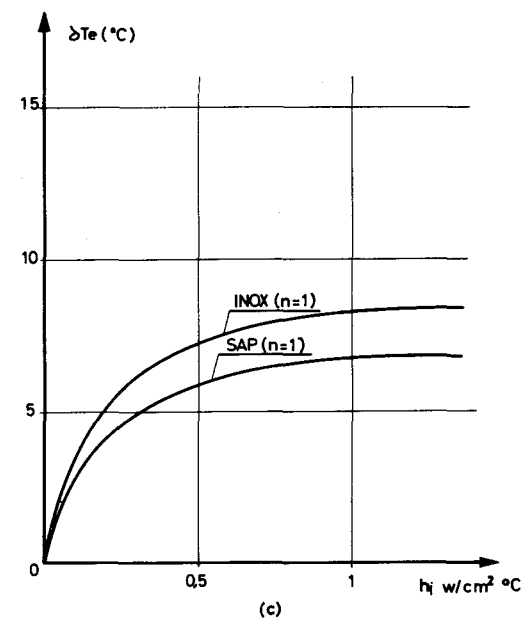
CAS D'UNE PERTURBATION POLAIRE DE  
LA GENERATION DE CHALEUR



INFLUENCE DE LA CONDUCTIVITÉ DE GAINÉ



INFLUENCE DE LA CONDUCTIVITÉ DU COMBUSTIBLE



INFLUENCE DE LA VALEUR MOYENNE DU  
COEFFICIENT D'ECHANGE GAINÉ-COMBUSTIBLE

FIG. 2

CAS D'UNE PERTURBATION CIRCONFÉRENTIELLE DU COEFFICIENT  
D'ÉCHANGE GAINÉ - COMBUSTIBLE

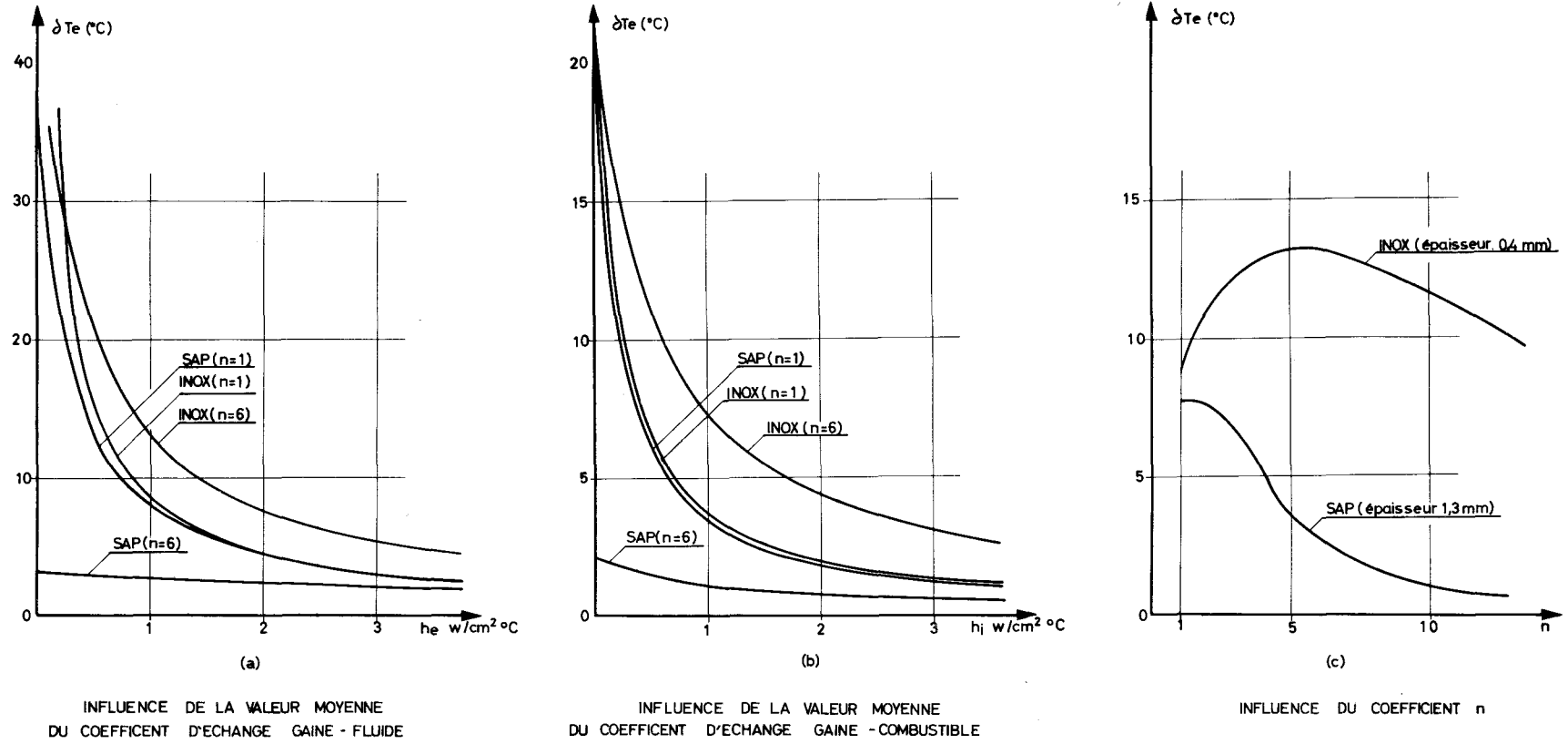
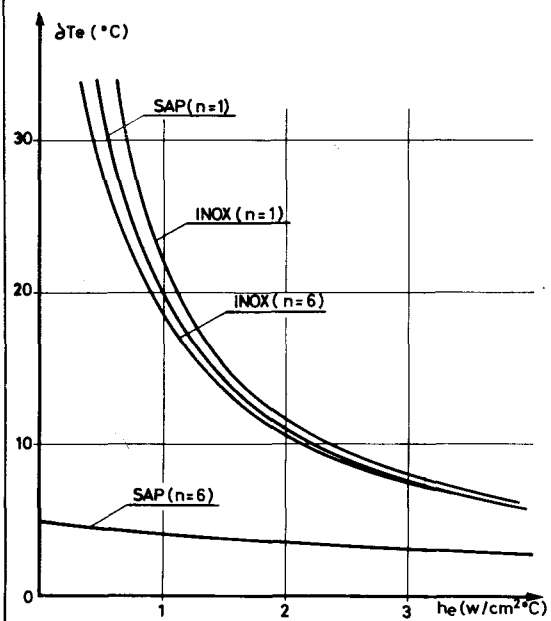
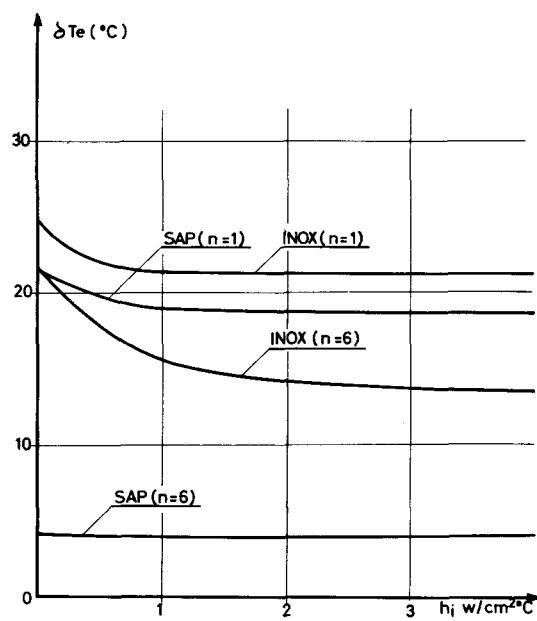


FIG. 3

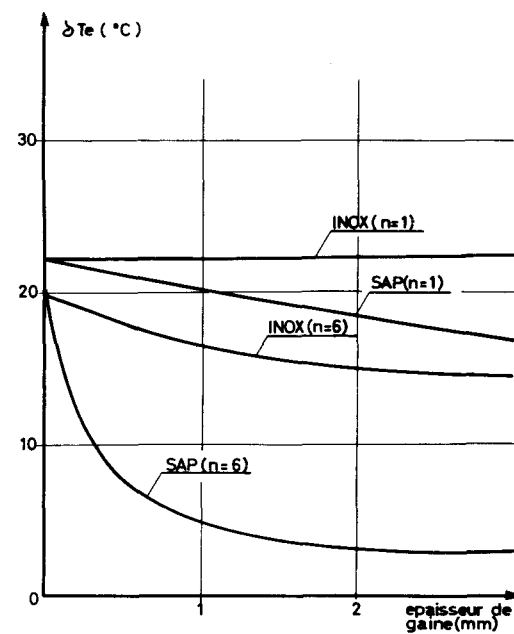
CAS D'UNE PERTURBATION CIRCONFÉRENTIELLE DU COEFFICIENT  
D'ÉCHANGE GAINÉ-FLUIDE



INFLUENCE DE LA VALEUR MOYENNE DU  
COEFFICIENT D'ÉCHANGE GAINÉ-FLUIDE



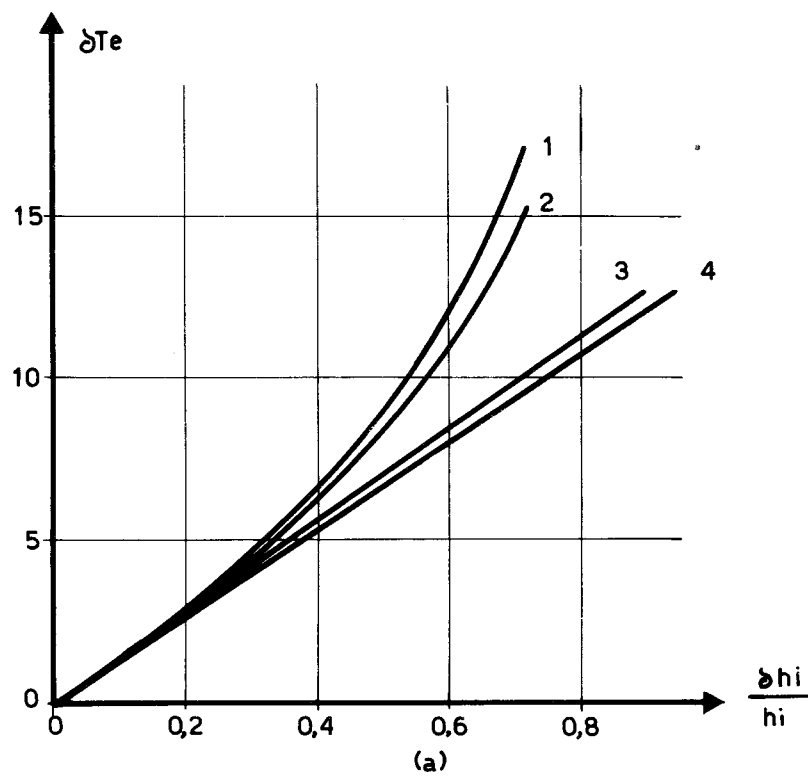
INFLUENCE DE LA VALEUR MOYENNE DU  
COEFFICIENT D'ÉCHANGE GAINÉ-COMBUSTIBLE



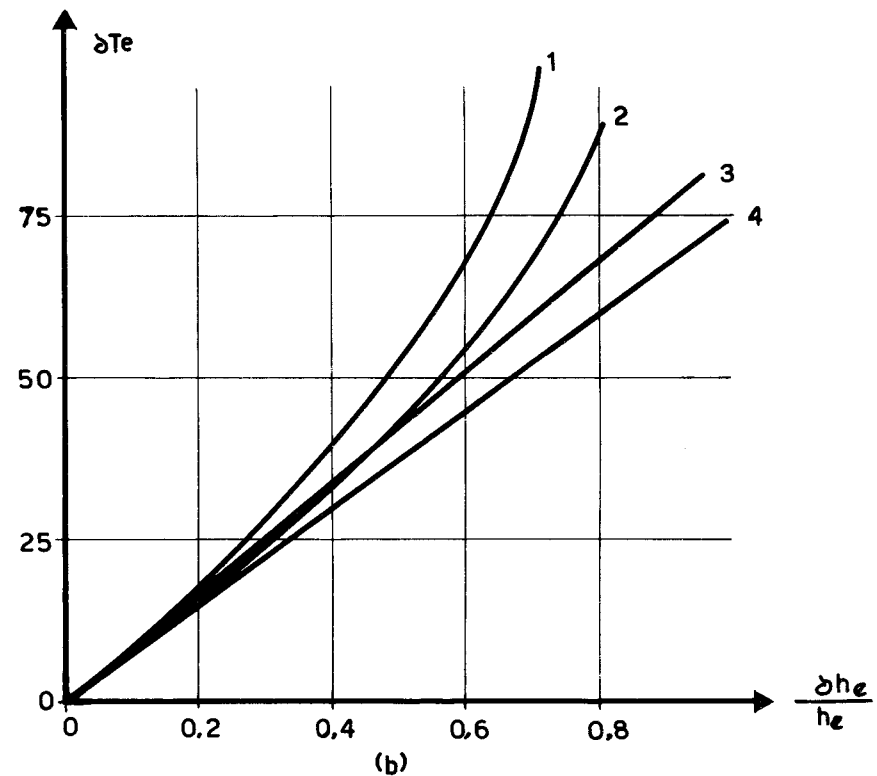
INFLUENCE DE L'ÉPAISSEUR DE GAINÉ

FIG. 4

COMPARAISON ENTRE LES SOLUTIONS EXACTES  
ET LES SOLUTIONS LINEARISEES



1 SOLUTION EXACTE (INOX)  
2 .. .. (SAP)



3 SOLUTION LINEARISEE (INOX)  
4 .. .. (SAP)

FIG. 4bis

### CHAPITRE 3

#### 3. ETUDE DES PERTURBATIONS CIRCONFÉRENTIELLES DE TEMPÉRATURE (MÉTHODE RHEOANALOGIQUE) : ETUDE DES ZONES CHAUDES

Il a été exposé dans le chapitre précédent, une méthode mathématique qui permet d'évaluer l'influence de diverses perturbations sur les températures de gaine et de combustible.

Les solutions se présentent sous forme de séries.

Lorsque les perturbations sont très localisées, ou ne peuvent pas être représentées par des fonctions simples, ces séries convergent lentement et nécessitent, en l'absence de calculatrices, des calculs parfois longs. Dans ces cas, il est intéressant d'utiliser des méthodes d'analogie rhéoelectrique. On présente dans ce chapitre, une méthode basée sur l'utilisation d'un papier conducteur et concernant le problème de la répartition des températures dans une gaine, autour d'une zone chaude. Dans les chapitres suivants, on présentera la méthode des réseaux de résistances.

##### 3.1 Principe de la méthode du papier conducteur

La méthode d'analogie rhéoelectrique utilisant le papier conducteur ou la cuve rhéographique, est fondée sur la similitude existant entre les équations qui régissent la conduction électrique et les équations définissant certains phénomènes physiques et notamment la conduction de la chaleur.

En régime permanent, en un point M (x, y, z), où

$\vec{i}$  représente le vecteur courant électrique

$\vec{v}$  le vecteur champ électrique

et  $\sigma$  la conductivité électrique du milieu.

$$\vec{i} = - \sigma \overrightarrow{\text{grad } v}$$

En l'absence de sources intérieures au conducteur, le flux est conservatif, ce qui conduit à

$$\text{div} (\sigma \overrightarrow{\text{grad } v}) = 0 \quad (1)$$

On obtient une représentation analogique d'un phénomène physique, dont le potentiel  $\varphi$  obéit à  $\text{div} (\sigma \overrightarrow{\text{grad } \varphi}) = 0$ , en identifiant ce

potentiel au potentiel électrique d'un modèle conducteur de forme analogue au domaine de définition de  $\varphi$ .

Notamment, la distribution des températures  $T$  en régime permanent et en l'absence d'émission ou d'absorption de chaleur à l'intérieur d'un corps de conductivité thermique  $\lambda$ , est régie par

$$\operatorname{div} (\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad} T}) = 0$$

La possibilité de transcription analogique est cependant liée à la connaissance des conditions aux limites et à leur imposition sur le modèle. Les conditions aux limites, qui peuvent être facilement abordées, sont de trois types:

- a) Condition de Dirichlet : La fonction  $\varphi(x, y, z)$  est connue sur la frontière. Thermiquement, cette condition correspond à la connaissance de la distribution des températures sur la frontière.
- b) Condition de Neumann : La dérivée normale  $\frac{d\varphi}{dn}$  est connue sur la frontière. Thermiquement, cette condition correspond à la connaissance de la distribution du flux de chaleur sur la frontière.
- c) Condition de Fourier : Il existe sur la frontière une relation linéaire entre la fonction  $\varphi$  et sa dérivée normale  $\frac{d\varphi}{dn}$ . Cette condition correspond à la connaissance de la distribution des coefficients d'échange sur la frontière.

### 3.2 Réalisation expérimentale

Lorsque le problème est bidimensionnel, et que la conductivité  $\lambda$  du milieu est constante, comme dans le cas étudié, l'équation (2) devient une équation de Laplace:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d^2 T}{dy^2} = \Delta T = 0 \quad (3)$$

Le modèle conducteur est alors réalisé en papier conducteur "Teledeltos". (Lorsque le problème est tridimensionnel, la technique utilisée est celle des cuves rhéographiques). Les figures (5) et (6) représentent le schéma fonctionnel et une vue de l'installation, comportant principalement:

- un générateur amplificateur pouvant fournir sans distorsion une puissance de 50 watts avec une période de 1000 Hertz,
- un symétriseur utilisé pour obtenir à la fois des potentiels négatifs et positifs,
- un pont de mesure 1000  $\Omega$ ,
- des dispositifs pour l'affichage des conditions aux limites: potentiomètres, résistances, diviseur de tension,
- un oscilloscope monté en figure de Lissajous.

### 3.3 Etude de la distribution de température dans une gaine cylindrique autour d'une zone chaude

On convient d'appeler zone chaude une zone thermiquement isolée sur une certaine largeur du contour extérieur de la gaine. L'étude a porté sur une gaine lisse de 25,5 mm de diamètre intérieur. Deux cas ont été considérés:

- celui d'une gaine en inox de 0,4 mm d'épaisseur
- et celui d'une gaine en SAP de 1 mm

On a supposé que le flux est constant sur le contour intérieur de la gaine, ce qui revient à négliger la conduction circonférentielle dans le combustible. On suppose également que la résistance thermique gaine-combustible est constante, l'élément combustible est alors parfaitement centré.

Les valeurs adoptées pour les caractéristiques thermiques, sont les suivantes:

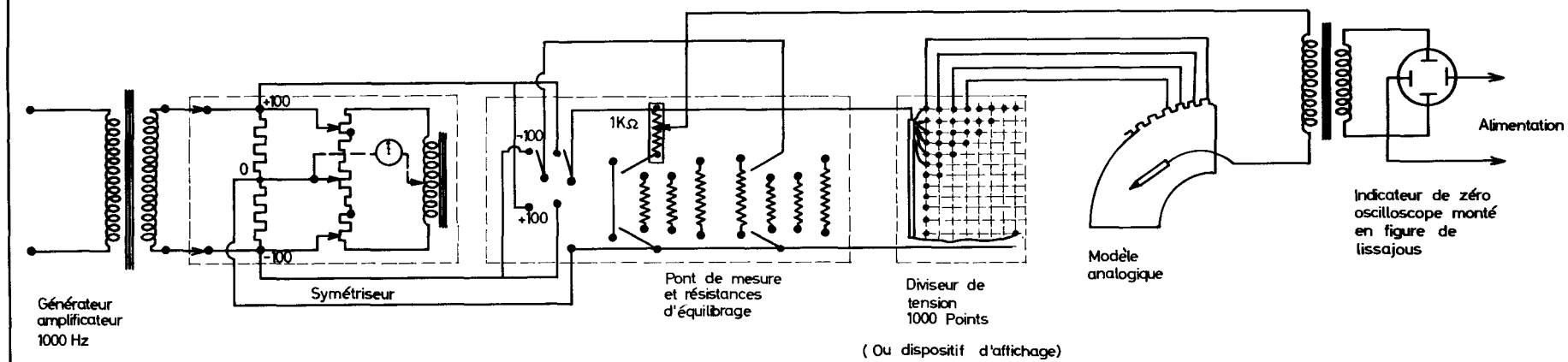
- Conductivité de l'inox	0,159 watt/cm°C
- Conductivité du SAP	1,74 watt/cm°C
- Résistance thermique gaine-combustible	2°C/watt/cm <sup>2</sup>
- Coefficient d'échange gaine-liquide organique	1 watt/cm <sup>2</sup> °C
- Flux de chaleur	100 watts/cm <sup>2</sup>

La distribution des températures a été relevée pour différentes largeurs de la zone chaude.

### 3.4 Résultats

Les résultats sont portés sur la fig. 7. Sur la fig. 7a on a représenté la variation circonférentielle de température  $\Delta T_e(\theta)$  sur la paroi extérieure de la gaine pour une zone de 2 mm de largeur, thermiquement isolée. On constate que pour la gaine en SAP, elle est de 20°C et atteint 150°C pour la gaine d'inox. On note en outre que les courbes de température sont plus étalées dans le cas du SAP que dans celui de l'inox. Les courbes de la fig. 7b représentent l'élévation maximale de température  $\Delta T_e(o)$  en fonction de la largeur isolée. On remarque que même pour des largeurs très faibles de la zone isolée, les élévations locales de température sont considérables dans l'inox.





SCHEMA FONCTIONNEL DE L'INSTALLATION

FIG. 5

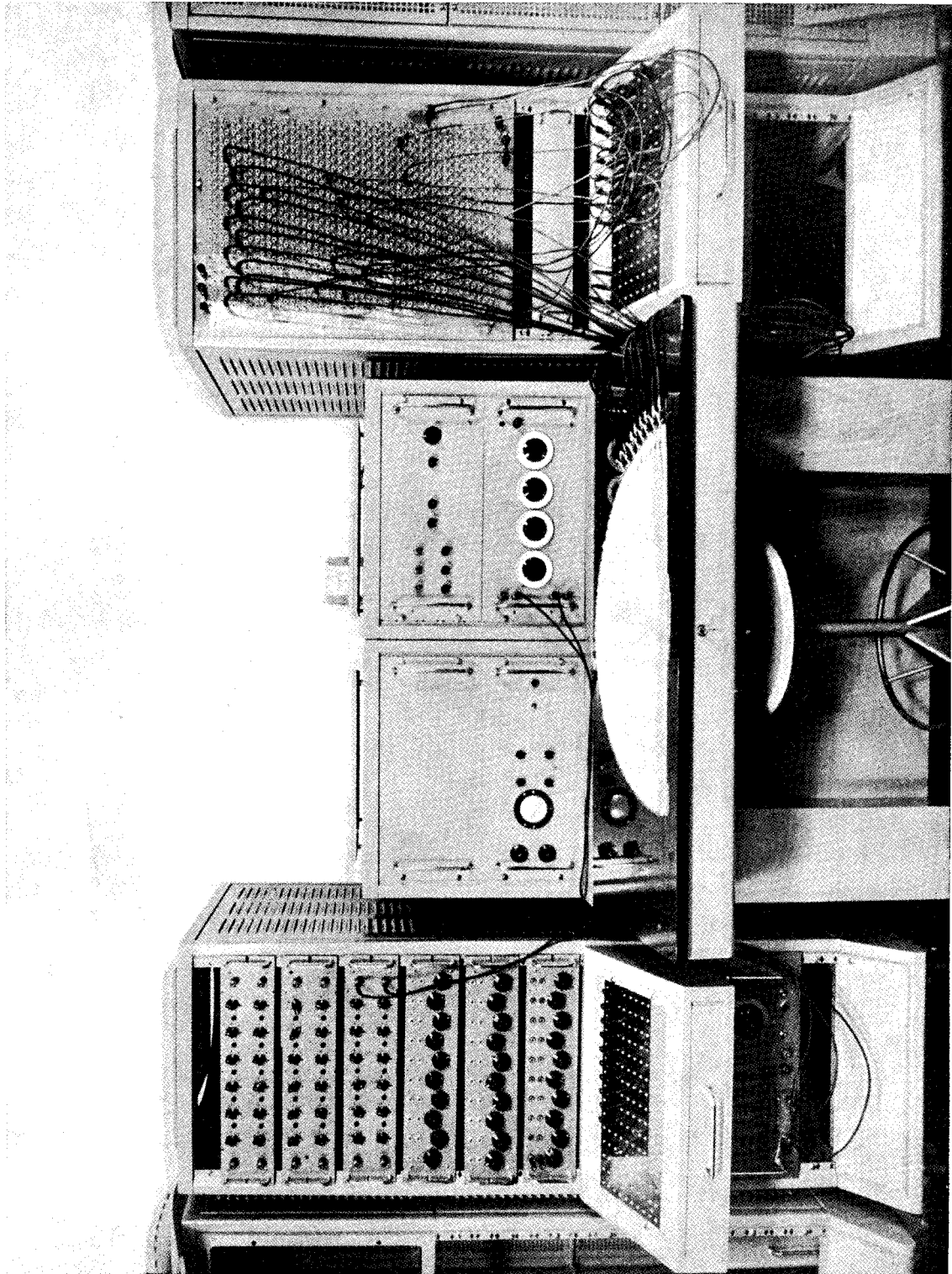


fig. 6 — Vue de l'installation d'analogie rhéoelectrique.

VARIATION CIRCONFÉRENTIELLE DE TEMPERATURE (zone chaude = 2mm)

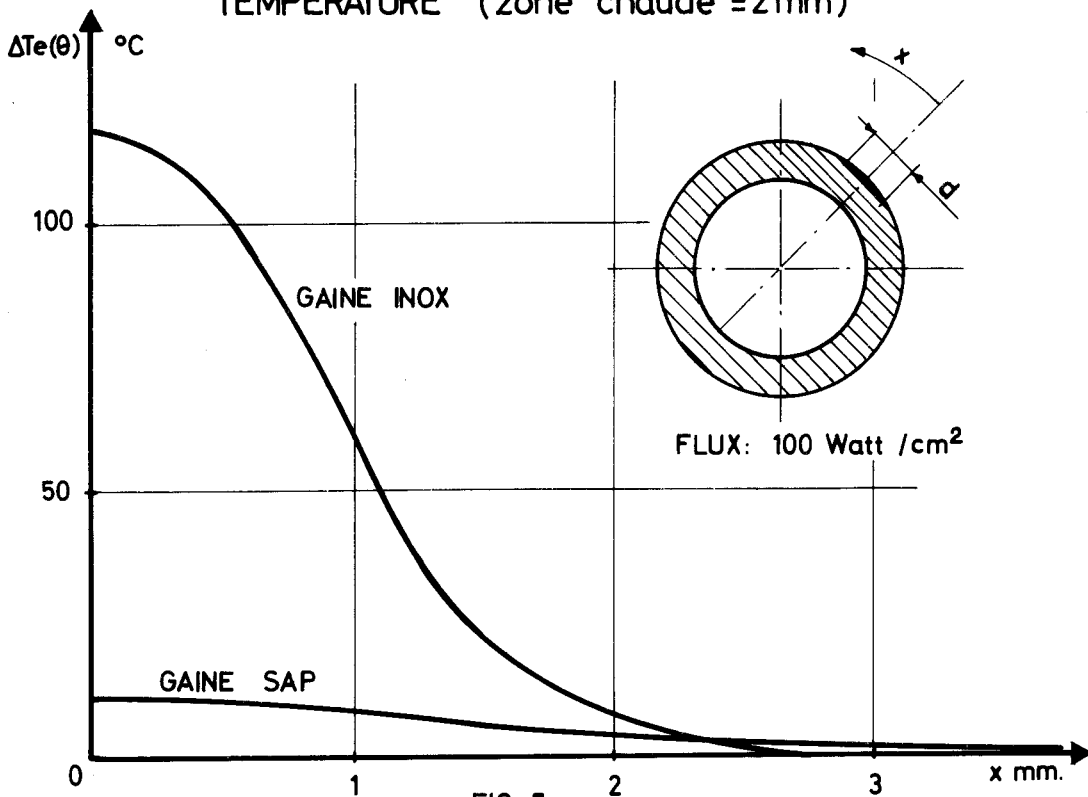


FIG. 7a

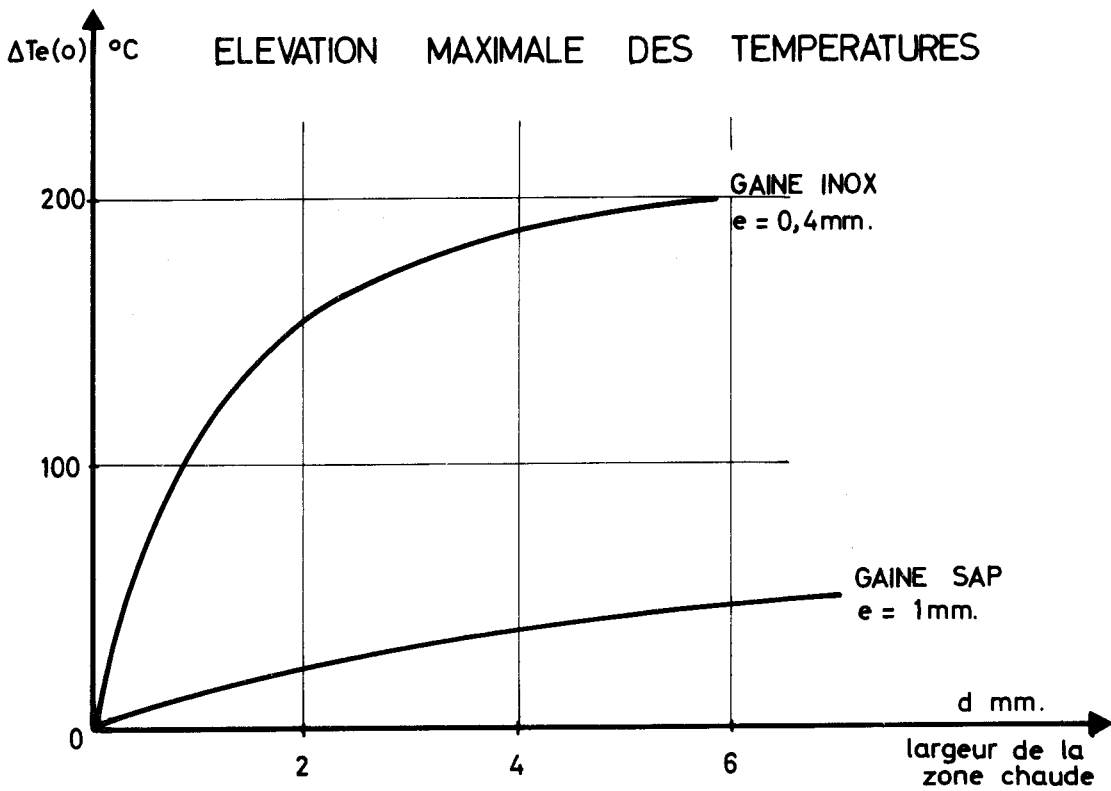


FIG. 7 b

#### CHAPITRE 4

#### 4. PERTURBATION PRODUITE PAR DEUX PASTILLES COMBUSTIBLES EXCENTREES

Cette étude a pour but de déterminer les perturbations longitudinales et circonférentielles de température qui apparaissent dans une gaine entourant deux pastilles de combustible excentrées l'une par rapport à l'autre et liées thermiquement à la gaine, soit par du plomb, soit par une couche gazeuse (voir schéma de principe fig. 8).

La perturbation est maximale au niveau du plan de séparation de deux pastilles.

Dans le chapitre précédent, on a présenté une méthode utilisant le papier conducteur. Cette méthode ne peut pas être employée pour des problèmes de révolution avec évolution axiale des températures et émission de puissance à l'intérieur du combustible.

##### 4.1 Méthode expérimentale

L'étude est réalisée ici au moyen d'une méthode analogique utilisant un réseau de résistances. Cette méthode permet en effet de tenir compte facilement:

- de la présence de plusieurs matériaux dont les conductivités thermiques sont très différentes,
- et du fait que les équations aux dérivées partielles qui régissent les températures sont différentes, suivant qu'il s'agit du combustible où il existe une émission de puissance, ou des autres matériaux.

La fig. (8) montre qu'un tel problème comporte un plan de symétrie qui est le plan de séparation de deux pastilles, mais ne possède aucun axe de symétrie qui permettrait de simplifier la transcription analogique. L'étude exacte d'un problème tridimensionnel est fort longue, aussi pour éviter cette difficulté, a-t-on étudié un certain nombre de sections en reliant les résultats entre eux.

L'étude a donc été divisée en deux parties:

- a) - étude d'une section droite  $S_1$  à une distance de la séparation telle que son influence ne se fasse plus sentir (flux axial nul)

b) - étude d'une section longitudinale  $\Pi$ , en traitant le problème comme s'il s'agissait d'une géométrie de révolution, ce qui entraîne l'hypothèse d'un flux circonférentiel nul.

Si une certaine quantité de flux s'écoulait circonférentiellement, elle serait plus faible dans une section droite au niveau de la séparation que dans la section  $S_1$ .

Si les températures relevées dans la section  $\Pi$ , au loin de la séparation, correspondent à celles trouvées dans la première partie de l'étude, de cette égalité il est possible de déduire que le flux circonférentiel est nul dans la section  $S_1$  et à fortiori dans les autres sections.

#### 4.1.1 Etude de la section $S_1$

Les températures obéissent à la loi de Poisson

$$\operatorname{div} (\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad} T}) = - P \quad (1)$$

qui en coordonnées polaires s'écrit:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = - rP \quad (2)$$

#### Caractéristiques du réseau

La théorie du réseau est fondée sur la transcription des équations aux dérivées partielles en équations aux différences finies.

Cette écriture sous forme de différences finies, est seulement possible si la fonction  $T(r, \theta)$  est continue, bornée ainsi que ses dérivées d'ordre  $n$ .

En utilisant les notations de la fig. 9.1a, la relation (2) s'écrit:

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_1 + \theta_2}{2\alpha} r_{o,1} \lambda_{o,1} [T_1 - T_o] + \frac{\alpha + \alpha'}{2\theta_1} \frac{1}{r_{o,2}} \lambda_{o,2} [T_2 - T_o] + \\ & + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2\alpha'} r_{o,3} \lambda_{o,3} [T_3 - T_o] + \frac{\alpha + \alpha'}{2\theta_2} \frac{1}{r_{o,4}} \lambda_{o,4} [T_4 - T_o] = \\ & = - P \frac{(\alpha + \alpha')(\theta_1 + \theta_2)}{4} r_o \end{aligned} \quad (3)$$

$r_{o,k}$  et  $\lambda_{o,k}$  représentent les valeurs du rayon et de la conductivité thermique au milieu des brins  $ok$ .

En comparant cette équation avec la loi de Kirchhoff écrite au noeud O (fig. 9.1b)

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_o}{R_1} + \frac{\varphi_2 - \varphi_o}{R_2} + \frac{\varphi_3 - \varphi_o}{R_3} + \frac{\varphi_4 - \varphi_o}{R_4} = - I_o \quad (4)$$

il est possible de déduire une analogie entre  $\varphi$  et T en adoptant pour les résistances  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  et  $R_4$  ainsi que pour l'intensité à injecter  $I_o$ , les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{2\alpha}{\theta_1 + \theta_2} \frac{1}{r_{o,1}} \frac{1}{\lambda_{o,1}} Rr \\ R_2 &= \frac{2\theta_1}{\alpha + \alpha'} r_{o,2} \frac{1}{\lambda_{o,2}} Rr \\ R_3 &= \frac{2\alpha'}{\theta_1 + \theta_2} \frac{1}{r_{o,3}} \frac{1}{\lambda_{o,3}} Rr \\ R_4 &= \frac{2\theta_2}{\alpha + \alpha'} r_{o,4} \frac{1}{\lambda_{o,4}} Rr \\ I_o &= P \frac{(\alpha + \alpha')(\theta_1 + \theta_2)}{4} r_o.R \end{aligned} \quad (5)$$

avec  $I_o \neq 0$  dans la partie du réseau correspondant au combustible

$I_o = 0$  dans les autres parties.

Les conditions d'échange thermique entre la gaine et le liquide réfrigérant, font intervenir une relation linéaire entre la fonction T et sa dérivée normale.

Il s'agit d'une condition de Fourier:

$$-\lambda \frac{dT}{dn} = h [T_1 - T] \quad (6)$$

n représentant la normale intérieure au point considéré,  $\lambda$  et h étant des fonctions positives connues le long de la frontière.

Pour en tenir compte, les parties correspondantes du réseau ont été reliées par des résistances Rp inversement proportionnelles au coefficient d'échange h:

$$R_p = \frac{1}{h} \frac{4}{(\theta_1 + \theta_2) \Phi} R_r \quad (7)$$

$\Phi$  : diamètre extérieur de la gaine

L'extrémité de cette résistance Rp est portée au potentiel  $\Phi_1$  correspondant à la valeur T<sub>1</sub> connue.

#### 4.1.2 Etude de la section longitudinale

L'équation de Poisson s'écrit dans cette section:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \lambda \frac{\partial T}{\partial r}) + r \frac{\partial}{\partial z} (\lambda \frac{\partial T}{\partial z}) = -rP \quad (8)$$

##### Caractéristiques du réseau

En utilisant les notations de la fig. 9.2, la relation (8) s'écrit:

$$\begin{aligned} & \frac{\beta + \beta'}{2\alpha} r_0 \lambda_{0,1} [T_1 - T_0] + \frac{\alpha + \alpha'}{2\beta} r_{0,2} \lambda_{0,2} [T_2 - T_0] + \\ & + \frac{\beta + \beta'}{2\alpha'} r_0 \lambda_{0,3} [T_3 - T_0] + \frac{\alpha + \alpha'}{2\beta'} r_{0,4} \lambda_{0,4} [T_4 - T_0] = \\ & = -r_0 P_0 \frac{(\alpha + \alpha')(\beta + \beta')}{4} \end{aligned} \quad (9)$$

En identifiant cette équation à la loi de Kirchoff, comme il a été fait précédemment dans l'étude en coordonnées polaires, il est possible de déterminer  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$  et  $I_0$ .

Si on appelle "l" la longueur de frontière couverte par l'électrode, la résistance  $R_p$ , représentant la résistance de passage thermique, est donnée par

$$R_p = \frac{1}{h} \frac{1}{l} R_r$$

#### 4.1.3 Précision des résultats

De la lecture des potentiels est déduite la valeur des températures. La précision de la méthode dépend donc de l'erreur faite sur la valeur lue du potentiel.

La précision de la lecture  $\epsilon_1$  est de l'ordre de 0,1% mais la valeur lue est elle-même entachée d'erreurs:

- erreur due au découpage du réseau et à la précision des résistances utilisées:  $\epsilon_2 < 1,5\%$

- erreur provenant de l'injection des intensités  $\epsilon_3$ . Pour réduire cette erreur, la méthode couramment utilisée des grandes résistances a été améliorée en effectuant une réinjection. Une première injection est faite en supposant négligeable le potentiel existant au point considéré par rapport à un potentiel  $V$  arbitrairement choisi.

La résistance d'injection

$$R_0 = \frac{V-\varphi}{I_0} \text{ devient } \frac{V}{I_0}$$

Un premier montage est effectué en adaptant cette valeur de  $R_0$  et le potentiel  $\varphi$  est relevé en chaque point, ce qui permet de recalculer la résistance  $R_0$  en tenant compte de la relation exacte. L'injection de  $I_0$  est alors faite avec une erreur inférieure à 1%.

L'erreur globale faite sur la mesure d'un potentiel est donc de l'ordre de 2,5%.



## 4.2 Cas étudié

### 4.2.1 Description du crayon

Cette méthode a été appliquée à la détermination des perturbations dans le cas d'une gaine en SAP de 25 mm de diamètre extérieur, de 1 mm d'épaisseur entourant deux pastilles de carbure d'uranium de 50 mm de longueur et de 22 mm de diamètre. Les pastilles de combustible sont excentrées par rapport à l'axe de la gaine et les excentrations de deux pastilles consécutives sont opposées. La liaison thermique entre la gaine et le combustible est assurée soit par du plomb, soit par une couche d'hélium.

- S'il s'agit d'un joint en plomb, on suppose que son épaisseur varie circonférentiellement de 0,2 à 0,8 mm. Il est alors possible de tenir compte de la conduction dans le plomb. On admet que les résistances thermiques entre le plomb et la gaine d'une part, le plomb et le combustible d'autre part, sont nulles.

- mais s'il s'agit d'une liaison thermique par une couche d'hélium, cette couche est très mince et on néglige la conduction circonférentielle dans l'hélium en symbolisant la variation géométrique par une résistance thermique radiale variant suivant une loi en cosinus de la forme:

$$R(\theta) = 2 + \cos\theta \quad (\text{°C/watt/cm}^2)$$

ce qui correspond à une résistance maximale de 3°C/watt/cm<sup>2</sup> et à une résistance minimale de 1°C/watt/cm<sup>2</sup>.

### 4.2.2 Données thermiques

#### Conductivités thermiques

du SAP	1,74 watt/cm°C
du carbure d'uranium	$2,5 \cdot 10^{-1}$ watt/cm°C
du plomb	$1,55 \cdot 10^{-1}$ watt/cm°C
de l'hélium	$3,1 \cdot 10^{-3}$ watt/cm°C

<u>Puissance</u> dégagée par le combustible	182 watts/cm <sup>3</sup>
ce qui correspond à un flux de 100 watts/cm <sup>2</sup>	
<u>Coefficient d'échange thermique</u> entre la gaine et le liquide réfrigérant	1 watt/cm <sup>2</sup> °C

#### 4.3 Mesures Effectuées

##### 4.3.1 Etude de la section droite S<sub>1</sub>

Sur les réseaux correspondant à cette section, ont été relevées:

- a) la variation circonférentielle de la température sur le contour extérieur de la gaine
- b) la variation circonférentielle de la température sur le contour intérieur de la gaine
- c) la variation circonférentielle de la température sur le contour du combustible
- d) la température au centre du combustible
- e) la variation circonférentielle du flux radial.

##### 4.3.2 Etude des sections longitudinales $\Pi$

###### 4.3.2.1 Cas de la liaison thermique assurée par du plomb

Dans le cas d'une section par un plan  $\Pi_c$ , passant par les points d'écart maximal ( $\theta = 0$ ) il est possible de tenir compte de l'écart entre le combustible et la gaine. En comparant les résultats obtenus sur un tel réseau avec ceux que l'on relève sur un réseau où l'écart géométrique est symbolisé par des résistances de passage thermique, ce qui revient à négliger le flux axial, il est possible d'évaluer l'erreur qu'entraîne une telle hypothèse. Connaissant la correction à apporter, il suffit de changer les résistances de passage pour obtenir les distributions longitudinales de température dans d'autres sections ( $\theta = 30^\circ$ ,  $\theta = 60^\circ$ ).

#### 4.3.2.2 Cas de la liaison thermique par une couche d'hélium

Dans ce cas, quel que soit le plan de section, l'écart géométrique est représenté par une résistance de passage thermique, le flux axial étant négligeable.

L'étude dans ces différentes sections II a été faite en réglant la puissance dans chaque pastille de combustible afin que le flux sortant radialement corresponde à la valeur mesurée dans la section droite  $S_1$ . On vérifie que les températures, en des points situés au loin de la séparation, correspondent avec celles mesurées aux points correspondants de la section droite, afin de s'assurer de la validité d'un flux circonférentiel nul. Il est alors possible de relever les distributions longitudinales des températures intérieures et extérieures de la gaine.

#### 4.4 Résultats

Les résultats sont récapitulés sur les fig. 10 et 11, donnant dans les deux cas de liaison thermique:

- les distributions circonférentielles des températures sur les contours intérieurs et extérieurs de la gaine et la répartition circonférentielle du flux radial
- les distributions longitudinales des températures.

La validité de l'hypothèse d'un flux circonférentiel nul, a été vérifiée dans l'ensemble des cas avec une précision toujours inférieure à 1%, ce qui reste dans les limites d'erreur dues à la méthode.

Dans le cas de la liaison par du plomb, on a relevé les principaux résultats suivants:

- valeur maximale du gradient circonférentiel de température 0,2°C/mm
- écart du flux radial par rapport au flux uniforme 6%
- valeur maximale du gradient longitudinal de température:
  - obtenue en tenant compte du flux axial 1,25°C/mm
  - obtenue en négligeant le flux axial 1,4°C/mm

- écart maximal de température 11°C

Dans le cas de la liaison par une couche d'hélium pour ces mêmes valeurs, on a trouvé:

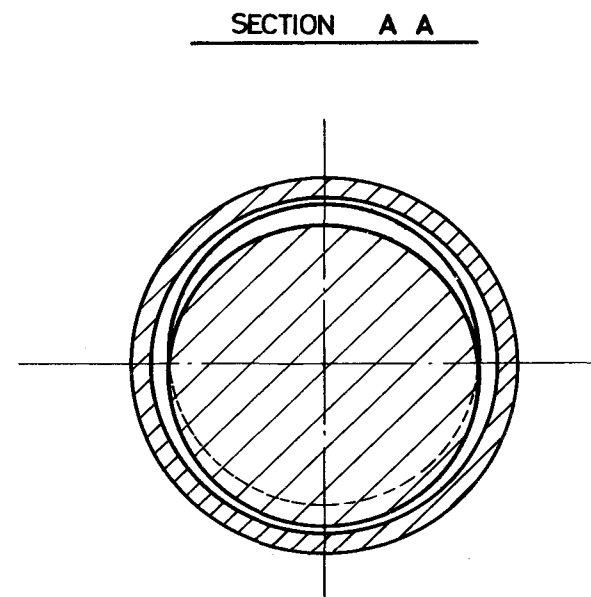
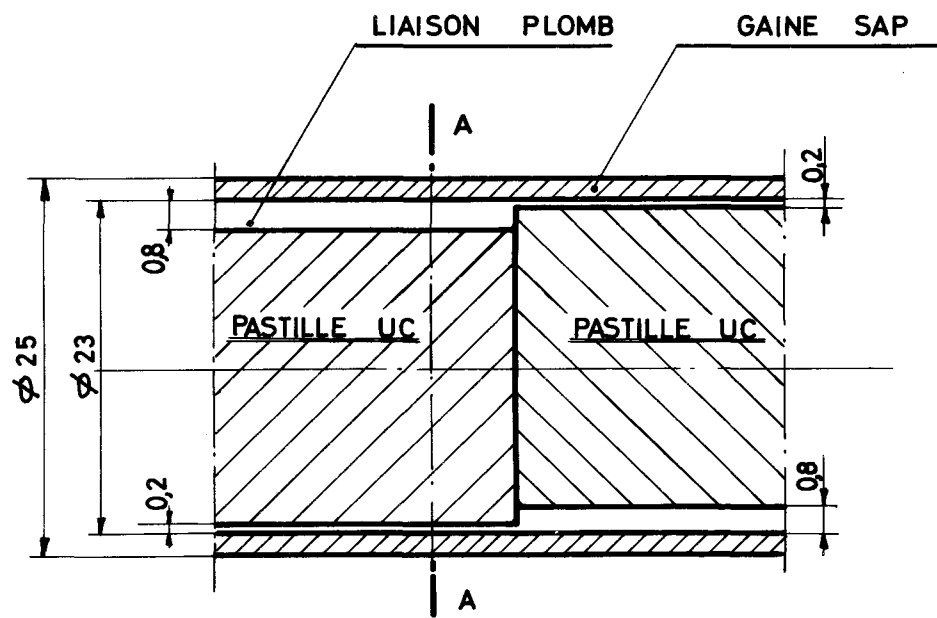
- valeur maximale du gradient circonférentiel de température 0,7°C/mm

- écart du flux radial par rapport au flux uniforme 18%

- valeur maximale du gradient longitudinal de température 6°C/mm

- écart maximal de température 29,5°C

En conclusion, on remarque que les perturbations sont négligeables dans le cas du plomb, mais importantes s'il s'agit d'un joint gazeux. Dans ce dernier cas, toutefois, il ne faut pas oublier que les hypothèses de calcul, à savoir une variation circonférentielle de la résistance thermique de 1 à 3°C/watt/cm<sup>2</sup> et les excentrations diamétralement opposées des deux pastilles, correspondent à la géométrie la plus défavorable.



SCHEMA DE DEUX PASTILLES COMBUSTIBLES EXCENTRÉES

FIG. 8

SCHEMA DE PRINCIPE DES RESEAUX DE RESISTANCES

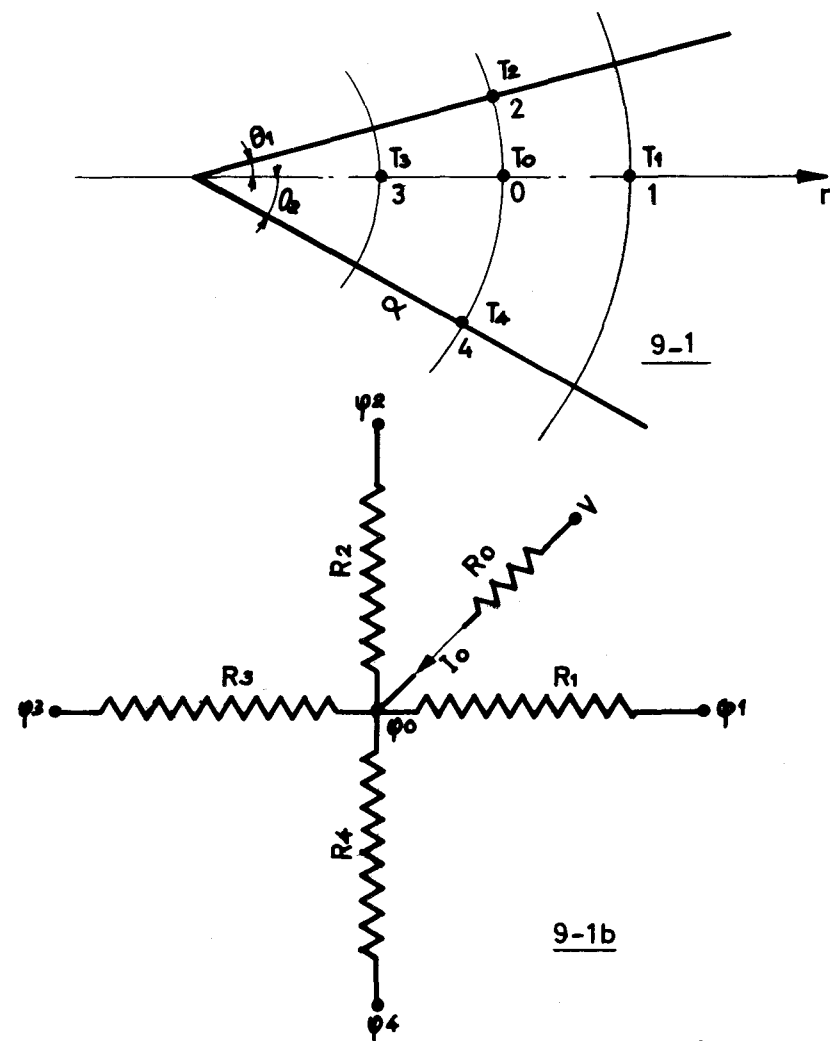
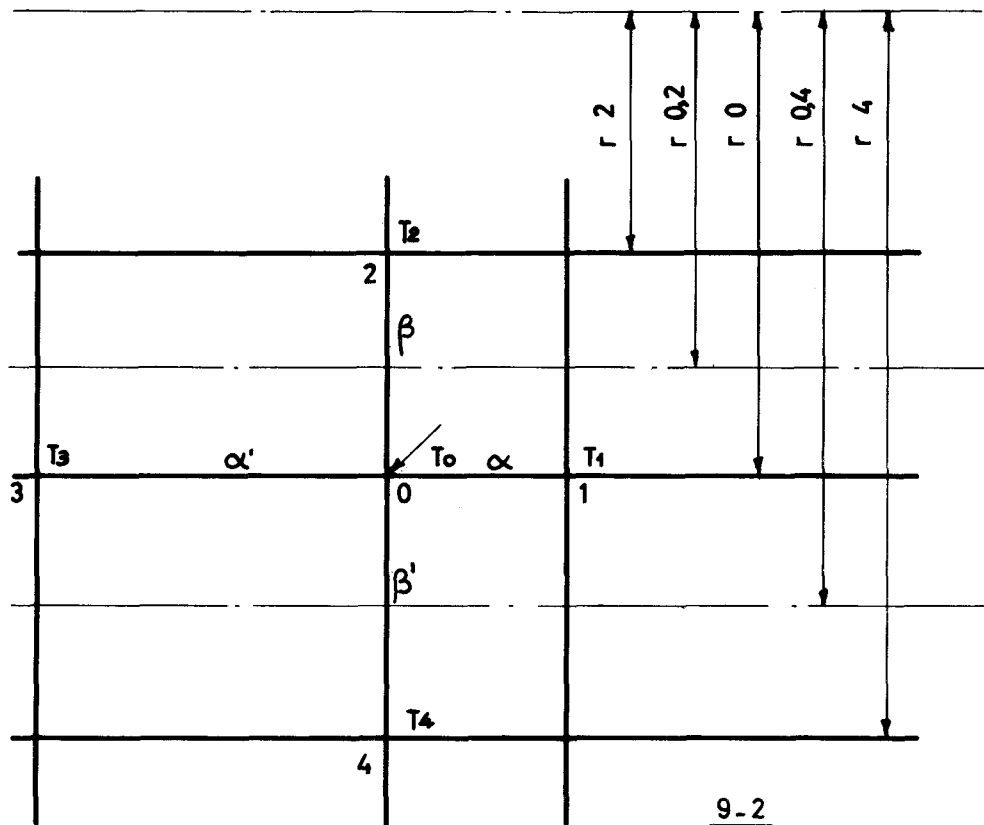
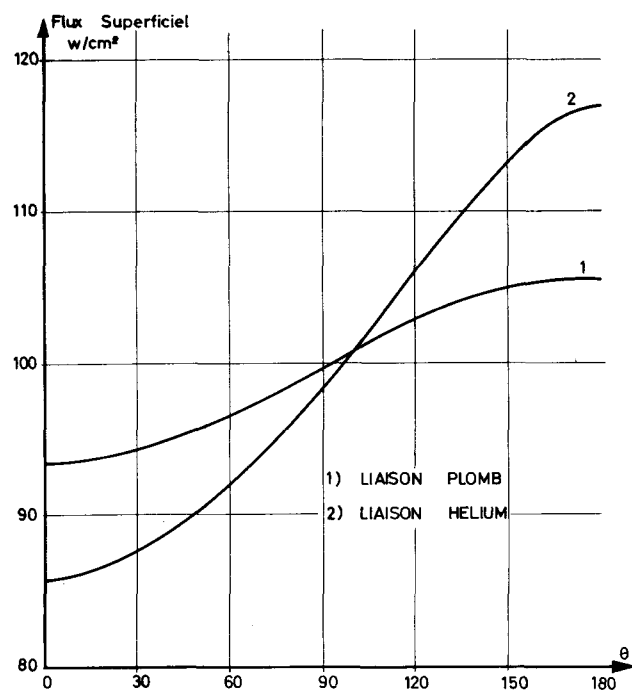


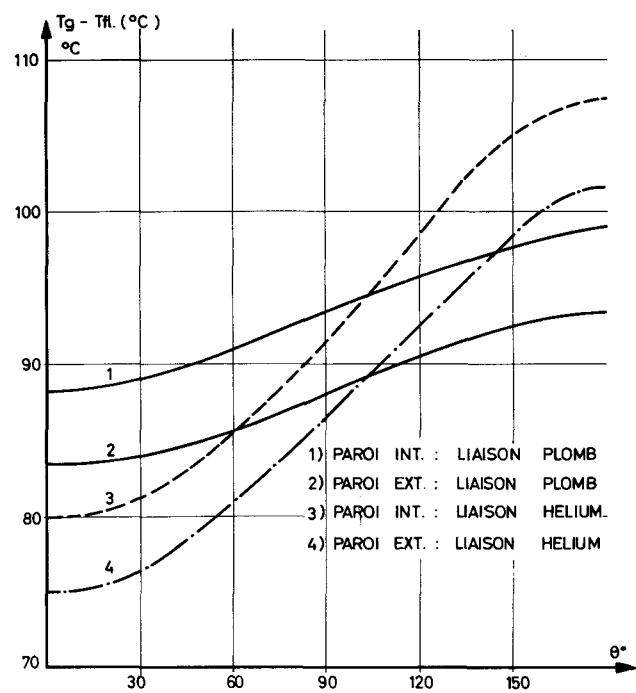
FIG. 9

PERTURBATIONS CIRCONFERENCELLES DANS LE CAS DE DEUX  
PASTILLES EXENTREES



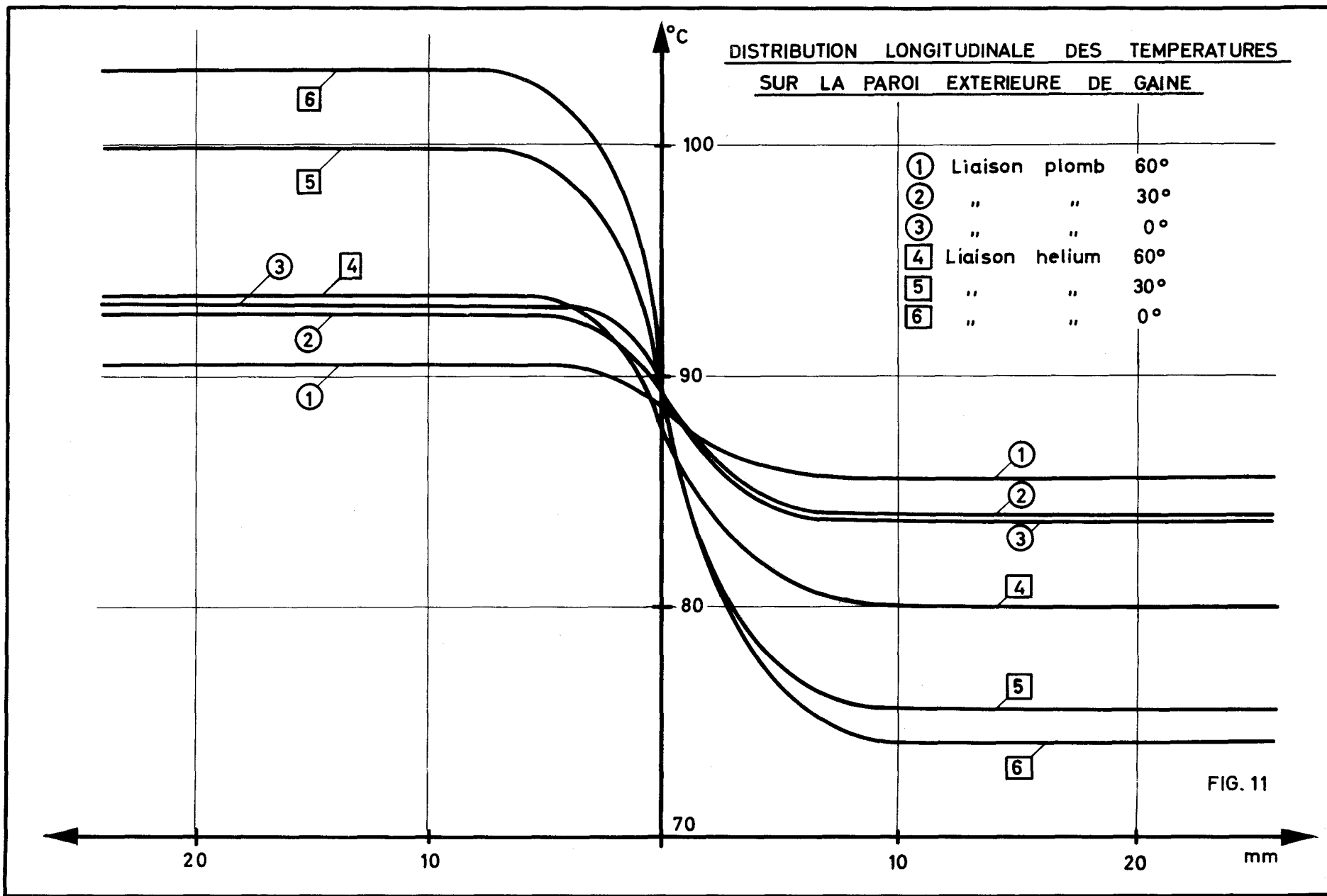
(a)

VARIATIONS CIRCONFERENCELLES DE FLUX



(b)

VARIATIONS CIRCONFERENCELLES DE TEMPERATURE DE GAINÉ





## CHAPITRE 5

### 5. PERTURBATIONS DE TEMPERATURE AU VOISINAGE D'UN BOUCHON

Les perturbations de température qui apparaissent aux extrémités d'un élément combustible, sont liées d'une part à la géométrie particulière du bouchon d'extrémité, dont la jonction avec la gaine constitue souvent le point le plus sensible de l'élément combustible, et d'autre part à la possibilité d'un relevé de flux au voisinage de ce bouchon, qui dépend de la géométrie et des matériaux de structure adoptés. Si le bouchon est mal refroidi et si son contact avec le combustible est trop bon, des températures prohibitives peuvent apparaître. Mais s'il est bien refroidi et isolé thermiquement du combustible, sa température sera voisine de celle du fluide de refroidissement et des gradients de température considérables peuvent apparaître dans la gaine au niveau de sa jonction avec le bouchon. Ce problème serait difficilement abordable par voie mathématique:

- La géométrie de l'ensemble est assez compliquée: il est en effet nécessaire pour des raisons mécaniques et technologiques de donner au bouchon une forme qui n'est pas géométriquement simple. La fig. (12a) donne un exemple de géométrie envisageable.
- Au point de vue thermique on se trouve en présence de plusieurs matériaux dont les conductivités thermiques sont différentes. D'autre part les valeurs du coefficient d'échange thermique peuvent varier. En effet, si la résistance thermique entre la gaine et le liquide réfrigérant a une valeur plus ou moins bien connue, celle existant entre différents matériaux solides varie suivant l'état de surface des matériaux et le jeu à froid.
- Enfin les équations aux dérivées partielles qui régissent la température sont différentes suivant qu'il s'agit du combustible où il existe une émission de puissance ou des autres parties.

#### 5.1 Méthode expérimentale

La méthode d'analogie rhéoelectrique utilisant un réseau de résistances, a permis de résoudre ce problème. Elle offre en outre la possibilité de changer en cours d'étude les données thermiques et, dans une certaine mesure, d'optimiser les

résultats afin de déterminer la nature et l'épaisseur d'isolant ou la forme géométrique conduisant aux moindres contraintes dans la gaine, tout en conservant une température maximale dans le bouchon inférieure à la température critique.

En supposant que la variation angulaire de la température dans la section droite est nulle, les températures vérifient l'équation différentielle suivante:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( r \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) = - rP$$

$P \neq 0$  dans l'élément combustible

$P = 0$  dans les autres parties.

Le principe de résolution de cette équation a été exposé dans le chapitre précédent. La photographie de la fig. (13) représente le réseau utilisé.

## 5.2 Cas étudié

### 5.2.1 Description de l'extrémité du crayon

L'étude des perturbations a été faite dans le cas de la géométrie de la fig. (12a). L'élément combustible est constitué en carbure d'uranium. Le bouchon et la gaine sont en SAP. En ce qui concerne la liaison entre le combustible et le bouchon, on peut envisager trois cas:

- a) un contact direct carbure d'uranium-bouchon, avec une certaine pression de contact qui est fonction du poids du combustible,
- b) une pastille intermédiaire d'alumine entre le carbure d'uranium et le bouchon,
- c) une lame de gaz stagnant - de l'hélium par exemple - entre le combustible et le bouchon.

Les cas (a) et (b) intéressent la partie inférieure de l'élément combustible, tandis que le cas (c) est réservé à la partie supérieure.

On peut transposer ces trois cas en paramétrant la valeur de la résistance thermique entre le combustible et le bouchon, ce qui revient à négliger la conduction radiale dans la résistance thermique et à supposer son épaisseur géométrique nulle.

On paramètre également les valeurs du coefficient d'échange autour du bouchon car les conditions exactes de refroidissement sont assez mal connues.

## 5.2.2 Données thermiques

### 5.2.2.1 Conductivités thermiques

carbure uranium	$2,5 \cdot 10^{-1}$ watt/cm°C
hélium	$3,1 \cdot 10^{-3}$ watt/cm°C
SAP	1,74 watt/cm°C

### 5.2.2.2 Résistances de passage thermique

Résistance thermique de passage entre le combustible et la gaine	3°C/watt/cm <sup>2</sup>
Résistance thermique de passage entre le combustible et le bouchon	variable
Résistance thermique de passage entre la gaine et le fluide	1°C/watt/cm <sup>2</sup>
Résistance thermique de passage entre le bouchon et le fluide	variable
Résistance thermique de passage entre le bouchon et la gaine	o

### 5.2.2.3 Puissance dégagée par le

combustible	204 watts/cm <sup>3</sup>
ce qui correspond à un flux de	
130 watts/cm <sup>2</sup>	

Ce flux peut présenter au niveau de la jonction entre deux éléments combustibles, un relevé. (voir Rapport EUR/C/IS 486/65 e par A. DECRESSIN et B. HAYTINK).

### 5.3 Mesures et Résultats

A partir de ces données, une étude systématique a été effectuée. D'une manière générale, on détermine:

- la distribution longitudinale des températures sur la paroi extérieure de la gaine
- la distribution longitudinale des températures sur l'axe de la gaine et sur l'axe du bouchon.

Dans quelques cas l'ensemble des isothermes dans gaine, bouchon, et combustible a été relevé.

Dans l'ensemble de l'étude, la température du fluide est prise comme température de référence 0°C.

L'ensemble de ces résultats fera l'objet d'un rapport séparé.

A titre d'exemple, on présente ici les résultats relatifs à un isolement par une lame d'hélium de 5 mm d'épaisseur, dans le cas où la résistance entre le bouchon et le fluide est infinie; (on a négligé tout échange par rayonnement). Les résultats sont portés sur la fig. (12), sur laquelle on a représenté les variations longitudinales des températures ainsi que les réseaux d'isothermes dans les différents matériaux. On constate que:

- le gradient longitudinal dans la gaine au niveau de la jonction est considérable: 66°C sur 10 mm
- la température maximale du bouchon est faible.

### 5.4 Conclusions

Les deux points délicats sont constitués par le gradient longitudinal dans la gaine au niveau de la jonction et par la température maximale sur l'axe du bouchon.

D'une manière générale, on peut conclure qu'il est assez facile de maintenir la température maximale du bouchon à un niveau acceptable. Par contre, dans la gaine au niveau de la jonction, on relève fréquemment des gradients de température longitudinaux importants, qui sont aggravés par l'existence d'un pic de flux à ce niveau. Un relevé de flux de 20% dans le cas d'une résistance thermique bouchon-combustible de 2°C/watt/cm<sup>2</sup> entraîne une

augmentation de plus de 10% du gradient. Une étude mathématique a été entreprise pour tenter d'évaluer les contraintes et les déformations qui en résultent. Mais un calcul mathématique de ce genre est très peu précis car c'est la dérivée quatrième de la fonction de température qui intervient.

DISTRIBUTION DES TEMPERATURES AU VOISINAGE D'UN BOUCHON

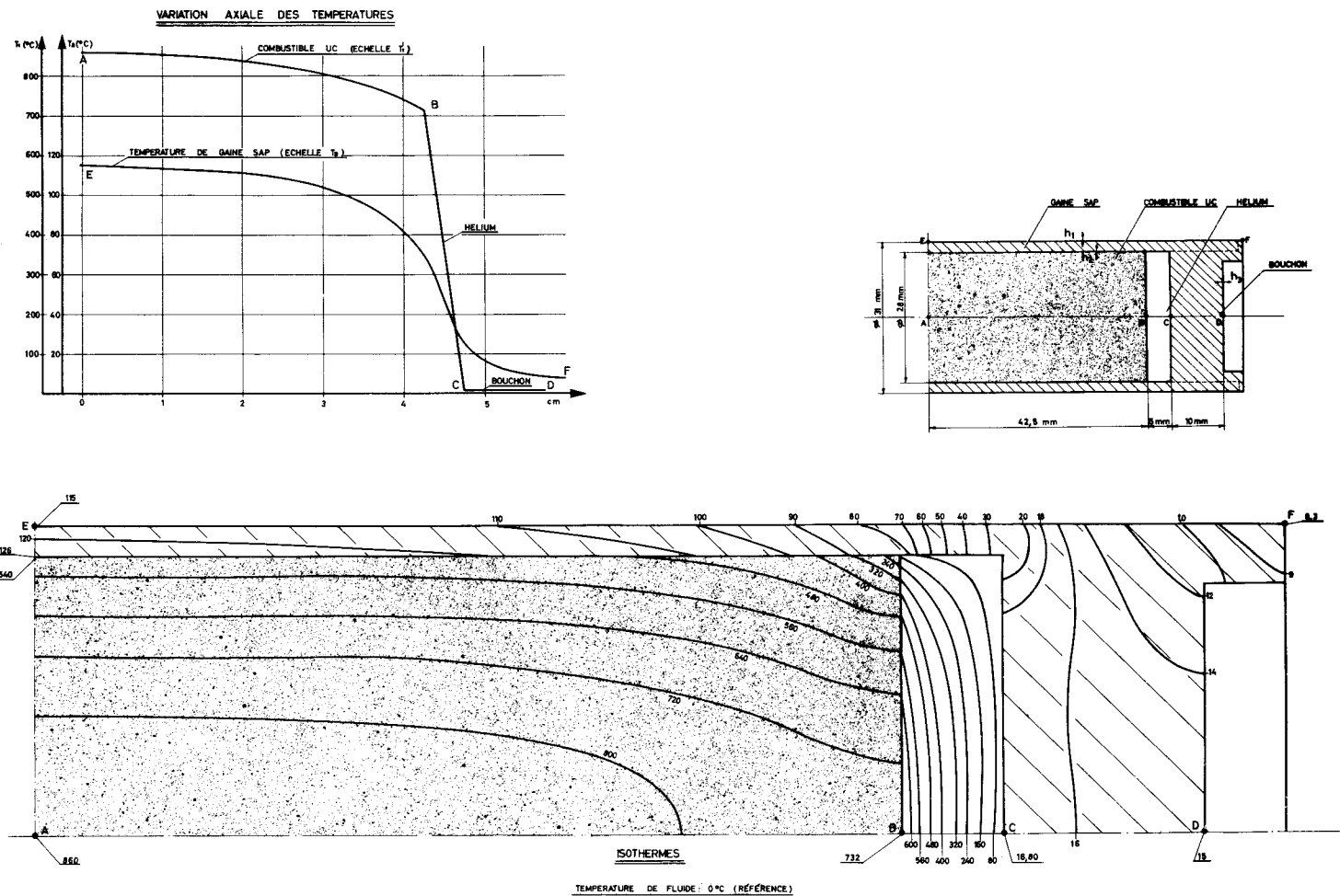


FIG. 12

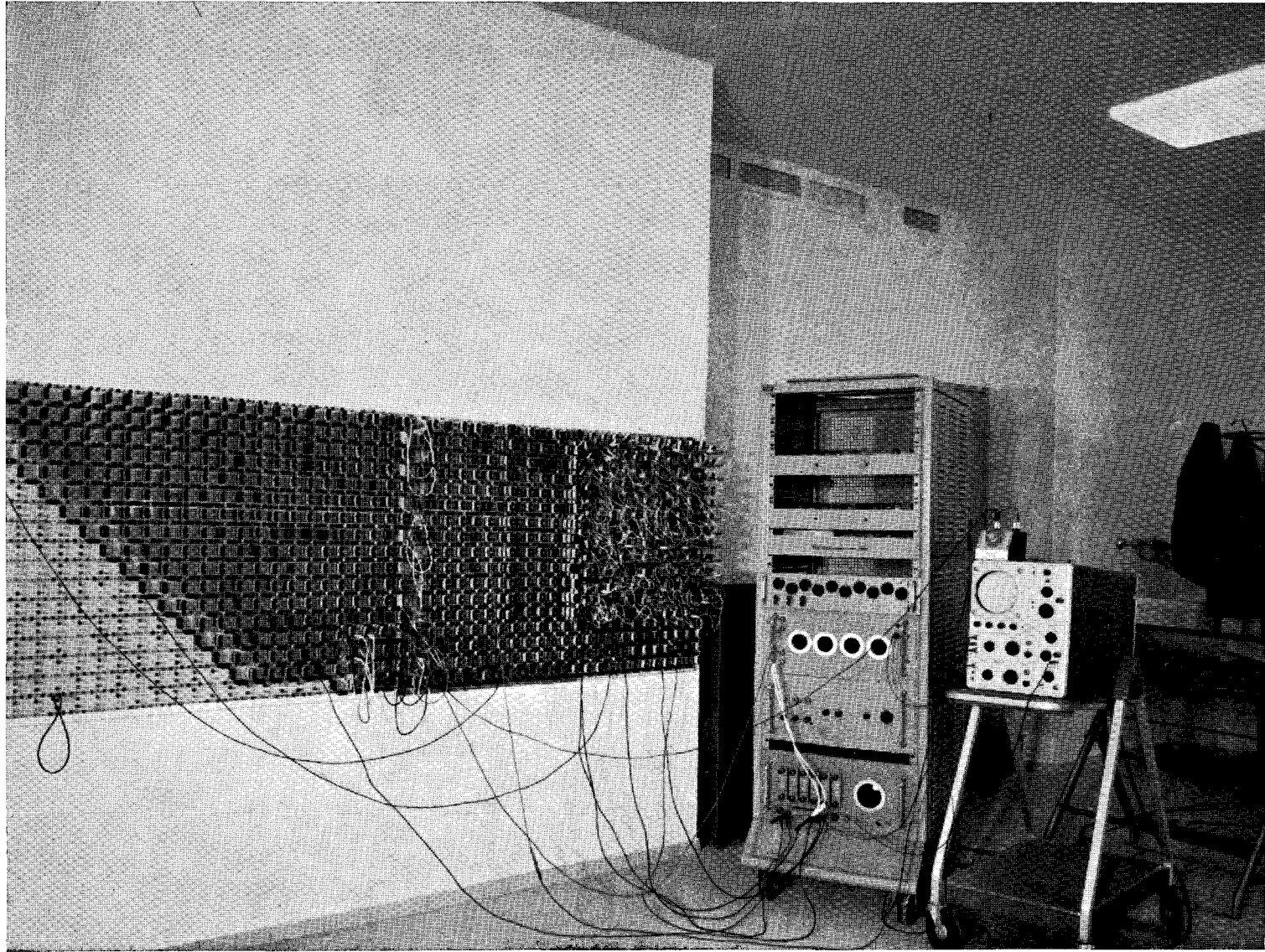


fig. 13 — Réseau de résistances.

## CHAPITRE 6

### 6. CONCLUSIONS GENERALES

On a présenté un certain nombre de méthodes pour l'étude des perturbations de température dans une gaine cylindrique:

- méthodes mathématiques pour la détermination des perturbations de température résultant de perturbations polaires de la génération de chaleur dans le combustible, des coefficients d'échange gaine-combustible et gaine-fluide, et de la température de fluide. Les solutions se présentent sous forme de séries. Lorsque les amplitudes relatives de ces perturbations demeurent faibles, on a établi des solutions linéarisées qui permettent d'étudier séparément l'influence des phénomènes perturbateurs et ensuite de les additionner. Lorsque les amplitudes deviennent importantes, on dispose de solutions réitératives d'un emploi assez lourd. Un code pour machine IBM 7090 a été mis au point pour traiter ces derniers cas.
- méthodes rhéoanalogiques pour l'étude de perturbations polaires et axiales. Lorsque les perturbations sont très brutales et localisées (point chaud par exemple), les séries mathématiques convergent lentement et une méthode rhéoanalogique utilisant un papier conducteur est souvent plus commode. On a traité une application concernant les zones chaudes. Pour les perturbations axiales, les méthodes utilisant les réseaux de résistances permettent d'aborder les problèmes en géométrie cylindrique. En application deux études sont présentées concernant les distributions de température au voisinage d'un bouchon, et les effets de températures résultant de l'excentration de deux pastilles de combustible.

Pour les applications qui ont été traitées, les valeurs numériques des paramètres ont été choisies dans les ordres de grandeur qui intéressent un élément combustible du type ORGEL. Ces applications permettent de dégager les remarques suivantes:

- a) dans le cas d'une perturbation polaire de la génération de chaleur dans le combustible, provoquée par exemple par un creusement de flux, la perturbation de température qui en résulte dans la gaine



est assez atténuée. A une perturbation relative de 25% dans la génération de chaleur, correspond une perturbation dans la température de gaine de 5% à 10% suivant les cas traités. Une liaison métallique entre le combustible et la gaine ne favorise pas l'atténuation. La perturbation sur gaine, pour ce phénomène, décroît lorsque la résistance gaine-combustible croît.

- b) l'influence sur les températures de gaine, de perturbations circonférentielles des coefficients d'échange gaine-combustible et gaine-fluide, dépend de la conductivité thermique et de l'épaisseur de gaine, des valeurs moyennes des coefficients d'échange et de la forme de la perturbation (perturbation diamétrale ou perturbation très localisée). Pour les perturbations diamétrales, correspondant, par exemple, à une excentration du combustible dans sa gaine, ou à une excentration de la gaine dans un espace annulaire, la conductivité thermique ou l'épaisseur de gaine agit peu. On obtient pratiquement les mêmes écarts de température dans une gaine en inox de 0,4 mm d'épaisseur, que dans une gaine en SAP de 1,3 mm d'épaisseur. Ce n'est que pour les perturbations localisées que la conductivité thermique ou l'épaisseur devient efficace. La présence d'une liaison métallique entre la gaine et le combustible ne diminue les écarts circonférentiels de température d'une façon efficace que pour les perturbations circonférentielles du coefficient d'échange gaine-combustible. Cette liaison a moins d'effet en ce qui concerne les perturbations du coefficient d'échange gaine-fluide. D'une manière générale, une perturbation du coefficient d'échange gaine-fluide a un effet plus prononcé sur les températures de gaine, qu'une perturbation du coefficient d'échange gaine-combustible de même importance relative, compte tenu des valeurs des paramètres adoptées.
- c) l'étude des perturbations de température, résultant de zones thermiquement isolées sur une portion de gaine, montre que les élévations locales de température peuvent être considérables sur une gaine en inox. Elles sont très atténuées sur une gaine en SAP, à cause de la bonne conductivité thermique.
- d) l'excentration diamétralement opposée de deux pastilles combustibles consécutives peut se traduire, en l'absence de liaison métallique

entre la gaine et le combustible par des perturbations circonférentielles et axiales de température, qui sont appréciables.

(L'exemple traité correspondait à des conditions assez pessimistes).

En présence d'une liaison métallique, ces perturbations deviennent faibles.

- e) l'étude des distributions de température au voisinage d'un bouchon, montre que le bouchon peut être maintenu assez facilement à une température acceptable; par contre, des gradients de température longitudinaux importants peuvent apparaître dans la gaine au niveau de la jonction. Il est difficile d'évaluer analytiquement les contraintes thermiques correspondantes.

Les différentes méthodes présentées peuvent contribuer à l'évaluation des "hot channel factors". Elles permettent d'établir un rapport quantitatif entre différents phénomènes perturbateurs et les effets de température qui en résultent dans une gaine.

A - ANNEXE MATHÉMATIQUE AU CHAPITRE 2  
ÉTUDE DES PERTURBATIONS CIRCONFÉRENTIELLES  
DE TEMPÉRATURE

1. GEOMETRIE ET HYPOTHESES

On considère un élément combustible cylindrique, constitué par une zone combustible de rayon  $r_i$  et de conductivité thermique  $\lambda_i$ , entourée d'une gaine de rayon intérieur  $r_i$ , de rayon extérieur  $r_e$  et de conductivité thermique  $\lambda_e$ . (voir fig. 1).

La génération de chaleur dans le combustible est représentée par la fonction  $\Phi(r, \theta)$ .

La gaine est refroidie extérieurement par un fluide en convection forcée, défini par sa température  $T_f(\theta)$ .

Le coefficient d'échange entre le combustible et la gaine est représenté par la fonction  $h_i(\theta)$  et le coefficient d'échange entre la gaine et le fluide est représenté par la fonction  $h_e(\theta)$ .

On rappelle en outre les hypothèses énumérées au paragraphe 2.1

2. EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Dans un système de coordonnées polaires  $(r, \theta)$  les équations qui régissent les distributions de température  $S(r, \theta)$  dans le combustible et  $T(r, \theta)$  dans la gaine sont:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} = - \frac{\Phi(r, \theta)}{\lambda_i} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2)$$

Pour la suite des calculs, il est commode de décomposer la fonction  $\Phi(r, \theta)$  en un produit de deux séries, l'une correspondant à une décomposition en série de Fourier par rapport à la variable  $(\theta)$ , l'autre

correspondant à une décomposition en série de Taylor par rapport à la variable  $r$ .

$$\Phi(r, \theta) = \frac{\lambda_i T_e}{r_i^2} \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} (a_{mn} \cos n\theta + b_{mn} \sin n\theta) \left(\frac{r}{r_i}\right)^m \quad (3)$$

$T_e$  est la température moyenne sur la paroi extérieure de gaine. On introduit cette température de référence, qui est pratique pour la suite, dans le groupement  $\frac{\lambda_i T_e}{r_i^2}$  afin de rendre les coefficients  $a_{mn}$  et  $b_{mn}$  non dimensionnels.

$T_e$  est définie par la relation:

$$T_e = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{r_i} \Phi(r, \theta) r dr d\theta}{r_e \int_0^{2\pi} h_e(\theta) d\theta} \quad (4)$$

Les coefficients  $a_{mn}$  et  $b_{mn}$  sont reliés à la fonction  $\Phi(r, \theta)$  par les relations:

$$a_{00} = \frac{r_i^2}{\lambda_i T_e} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(0, \theta) d\theta \quad (5)$$

$$a_{m0} = \frac{r_i^2}{\lambda_i T_e} \cdot \frac{r_i^m}{2\pi(m!)} \cdot \frac{\partial^m}{\partial r^m} \int_0^{2\pi} \Phi(r, \theta) d\theta \Big|_{r=0} \quad m \geq 1 \quad (6)$$

$$a_{0n} = \frac{r_i^2}{\lambda_i T_e} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(0, \theta) \cos n\theta d\theta \quad n \geq 1 \quad (7)$$

$$a_{mn} = \frac{r_i^2}{\lambda_i T_e} \cdot \frac{r_i^m}{\pi(m!)} \cdot \frac{\partial^m}{\partial r^m} \int_0^{2\pi} \Phi(r, \theta) \cos n\theta d\theta \Big|_{r=0} \quad m \geq 1 \text{ et } n \geq 1 \quad (8)$$

$$b_{m0} = 0 \quad (9)$$

$$b_{0n} = \frac{r_i^2}{\lambda_i T_e} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(0, \theta) \sin n\theta \, d\theta \quad (10)$$

$$b_{mn} = \frac{r_i^2}{\lambda_i T_e} \cdot \frac{r_i^m}{\pi(m!)} \cdot \frac{\partial^m}{\partial r^m} \int_0^{2\pi} \Phi(r, \theta) \sin n\theta \, d\theta \Big|_{r=0} \quad m \geq 1 \text{ et } n \geq 1 \quad (11)$$

Les coefficients  $a_{0n}$  et  $b_{0n}$  sont en général nuls, car ils correspondent à un point singulier au centre.

### 3. SOLUTIONS GENERALES

Les solutions générales des équations (1) et (2) s'écrivent, en exprimant la fonction  $\Phi(r, \theta)$  sous la forme de la relation (3);

$$\begin{aligned} \frac{S(r, \theta)}{T_e} = & A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \left(\frac{r}{r_i}\right)^n - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{m0}}{(m+2)^2} \left(\frac{r}{r_i}\right)^{m+2} \\ & - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_i}\right)^{m+2} \frac{(a_{mn} \cos n\theta + b_{mn} \sin n\theta)}{(m+2)^2 - n^2} \quad (\text{avec } m+2 \neq n) \\ & - \text{Log} \left(\frac{r}{r_i}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_i}\right)^{m+2} \frac{(a_{mn} \cos n\theta + b_{mn} \sin n\theta)}{2(m+2)} \quad (\text{avec } m+2=n) \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{T(r, \theta)}{T_e} = & C_0 + D_0 \text{Log} \frac{r}{r_i} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_n \left(\frac{r}{r_i}\right)^n + D_n \left(\frac{r}{r_i}\right)^{-n} \right\} \cos n\theta + \left\{ E_n \left(\frac{r}{r_i}\right)^n + F_n \left(\frac{r}{r_i}\right)^{-n} \right\} \sin n\theta \quad (13) \end{aligned}$$

Les constantes d'intégration  $A_0, A_n, B_n, C_0, C_n, D_0, D_n, E_n, F_n$  sont déterminées par les conditions aux limites.

#### 4. CONDITIONS AUX LIMITES

##### 4.1 Entre le combustible et la gaine

Le coefficient d'échange thermique entre le combustible et la gaine est représenté par la fonction  $h_i(\theta)$  qui, décomposée en série de Fourier, s'écrit:

$$h_i(\theta) = h_i \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (\alpha_{in} \cos n\theta + \beta_{in} \sin n\theta) \right\} \quad (14)$$

$$h_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_i(\theta) d\theta \quad (15)$$

$$\alpha_{in} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{h_i} \int_0^{2\pi} h_i(\theta) \cos n\theta d\theta \quad (16)$$

$$\beta_{in} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{h_i} \int_0^{2\pi} h_i(\theta) \sin n\theta d\theta \quad (17)$$

La conservation du flux se traduit par les deux relations:

$$-\lambda_i \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)_{r=r_i} = -\lambda_e \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=r_i} = h_i(\theta) (S - T)_{r=r_i} \quad (18)$$

##### 4.2 Entre la gaine et le fluide

Le coefficient d'échange  $h_e(\theta)$  entre la gaine et le fluide peut se décomposer en série de Fourier sous la forme:

$$h_e(\theta) = h_e \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (\alpha_{en} \cos n\theta + \beta_{en} \sin n\theta) \right\} \quad (19)$$

où

$$h_e = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_e(\theta) d\theta \quad (20)$$

$$\alpha_{en} = \frac{1}{\pi h_e} \int_0^{2\pi} h_e(\theta) \cos n\theta \, d\theta \quad (21)$$

$$\beta_{en} = \frac{1}{\pi h_e} \int_0^{2\pi} h_e(\theta) \sin n\theta \, d\theta \quad (22)$$

On exprime de même la température de fluide  $T_f(\theta)$ , dont la valeur moyenne est supposée nulle, par une série de Fourier

$$T_f(\theta) = T_e (\delta_n \cos n\theta + \epsilon_n \sin n\theta) \quad (23)$$

$$\delta_n = \frac{1}{\pi T_e} \int_0^{2\pi} T_f(\theta) \cos n\theta \, d\theta \quad (24)$$

$$\epsilon_n = \frac{1}{\pi T_e} \int_0^{2\pi} T_f(\theta) \sin n\theta \, d\theta \quad (25)$$

La condition aux limites sur la paroi extérieure de gaine s'écrit:

$$-\lambda_e \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=r_e} = h_e(\theta) \left( T(r_e, \theta) - T_f(\theta) \right) \quad (26)$$

##### 5. DETERMINATION DES CONSTANTES D'INTEGRATION DANS LE CAS D'UNE SOLUTION LINEARISEE

On exprime les deux relations (18) et la relation (26) à l'aide des fonctions (12), (13), (14), (19).

La première des relations (18) s'écrit alors:

$$\lambda_i \left\{ - \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{a_{m0}}{m+2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \right.$$

$$- \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} (m+2) \left( \frac{a_{mn} \cos n\theta + b_{mn} \sin n\theta}{(m+2)^2 - n^2} \right) - \sum_{m=0}^{m=\infty} \left( \frac{a_{mn} \cos n\theta + b_{mn} \sin n\theta}{2(m+2)} \right) \left. \right\}$$

$(m+2 \neq n) \qquad \qquad \qquad (m+2=n)$

$$= \lambda_e \left\{ D_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} n \left[ (C_n - D_n) \cos n\theta + (E_n - F_n) \sin n\theta \right] \right\} \quad (27)$$

La seconde des relations (18) s'écrit:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\lambda_e}{r_i} \left\{ D_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left( n (C_n - D_n) \cos n\theta + n (E_n - F_n) \sin n\theta \right) \right\} = \\
 & h_i \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (\alpha_{in} \cos n\theta + \beta_{in} \sin n\theta) \right\} \left\{ A_0 - C_0 - \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{a_{m0}}{(m+2)^2} \right. \\
 & - \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left( \frac{a_{mn} \cos n\theta + b_{mn} \sin n\theta}{(m+2)^2 - n^2} \right) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left( (A_n - C_n - D_n) \cos n\theta + \right. \\
 & \left. \left. + (B_n - E_n - F_n) \sin n\theta \right) \right\} \quad (28)
 \end{aligned}$$

La relation (26) s'écrit:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\lambda_e}{r_e} \left\{ D_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} n \left( C_n \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^n - D_n \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^{-n} \right) \cos n\theta + \right. \\
 & \left. + n \left( E_n \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^n - F_n \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^{-n} \right) \sin n\theta \right\} \\
 & = h_e \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (\alpha_{en} \cos n\theta + \beta_{en} \sin n\theta) \right\} \left\{ C_0 + D_0 \text{Log} \left( \frac{r_e}{r_i} \right) + \right. \\
 & \left. + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left( C_n \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^n + D_n \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^{-n} - \delta_n \right) \cos n\theta + \left( E_n \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^n + F_n \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^{-n} - \epsilon_n \right) \sin n\theta \right\} \quad (29)
 \end{aligned}$$

Si on suppose que les perturbations des fonctions  $h_i(\theta)$  et  $h_e(\theta)$  sont faibles autour de leur valeur moyenne, (inférieures à 25% par exemple pour rester dans des précisions acceptables) les perturbations qui en résultent dans les températures de gaine et de combustible sont en tout état de cause plus faibles encore en valeur relative, et on peut négliger, dans les relations (28) et (29), comme étant du second ordre, les termes qui correspondent à des produits de perturbations. Ainsi linéarisées, les relations (28) et (29) s'écrivent:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\lambda_e}{r_i h_i} D_0 - \frac{\lambda_e}{r_i h_i} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left( n (C_n - D_n) \cos n\theta + n (E_n - F_n) \sin n\theta \right) = \\
 & A_0 - C_0 - \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{a_{m0}}{(m+2)^2} - \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(a_{mn} \cos n\theta + b_{mn} \sin n\theta)}{(m+2)^2 - n^2} + \dots \\
 & \quad \quad \quad (m+2 \neq n)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left( (A_n - C_n - D_n) \cos n\theta + (B_n - E_n - F_n) \sin n\theta \right) + \\
 & + \left( A_0 - C_0 - \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{a_{m0}}{(m+2)^2} \right) \left( \sum_{n=1}^{n=\infty} (\alpha_{in} \cos n\theta + \beta_{in} \sin n\theta) \right) \quad (30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\lambda_e}{r_e h_e} D_0 - \frac{\lambda_e}{r_e h_e} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ n \left( C_n \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^n - D_n \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^{-n} \right) \cos n\theta + \right. \\
 & \left. + n \left( E_n \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^n - F_n \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^{-n} \right) \sin n\theta \right\} = \\
 & C_0 + D_0 \operatorname{Log} \frac{r_e}{r_i} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ \left( C_n \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^n + D_n \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^{-n} - \delta_n \right) \cos n\theta + \right. \\
 & \left. + \left( E_n \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^n + F_n \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^{-n} - \epsilon_n \right) \sin n\theta \right\} + \\
 & + \left( C_0 + D_0 \operatorname{Log} \frac{r_e}{r_i} \right) \left( \sum_{n=1}^{n=\infty} \alpha_{en} \cos n\theta + \beta_{en} \sin n\theta \right) \quad (31)
 \end{aligned}$$

En identifiant les termes de rang 0, indépendants de  $\theta$ , les termes en  $\cos n\theta$  et les termes en  $\sin n\theta$ , dans les relations (27), (30) et (31), on peut déterminer les constantes d'intégration en résolvant des systèmes d'équations linéaires.

Pour les termes de rang 0, on trouve, en tenant compte de la relation (4):

$$A_0 = 1 + \frac{H_e \lambda_e}{H_i \lambda_i} + H_e \operatorname{Log} \frac{r_e}{r_i} + \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{a_{m0}}{(m+2)^2} \quad (32)$$

$$C_0 = 1 + H_e \operatorname{Log} \frac{r_e}{r_i} \quad (33)$$

$$D_0 = - H_e \quad (34)$$

On a introduit les nombres sans dimensions, analogues à des nombres de Nusselt:

$$H_e = \frac{h_e r_e}{\lambda_e} \quad (35)$$

$$H_i = \frac{h_i r_i}{\lambda_i} \quad (36)$$

Pour les termes de rang  $n$ , les constantes d'intégration  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$ ,  $E_n$  et  $F_n$  sont définies par les déterminants suivants:

$$A_n = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{H_e \lambda_e}{H_i \lambda_i} \alpha_{in} + \sum_{\substack{m=0 \\ (m+2 \neq n)}}^{\infty} \frac{a_{mn}}{(m+2)^2 - n^2} & \left(\frac{n \lambda_e}{H_i \lambda_i} - 1\right) & -\left(\frac{n \lambda_e}{H_i \lambda_i} + 1\right) \\ \delta_n - \alpha_{en} & \left(\frac{n}{H_e} + 1\right) \left(\frac{r_e}{r_i}\right)^n & -\left(\frac{n}{H_e} - 1\right) \left(\frac{r_e}{r_i}\right)^{-n} \\ \sum_{\substack{m=0 \\ (m+2 \neq n)}}^{\infty} \frac{(m+2) a_{mn}}{\left((m+2)^2 - n^2\right) n} + \frac{a_{n-2,n}}{2n^2} & -\frac{\lambda_e}{\lambda_i} & \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \end{vmatrix}}{\Delta_n} \quad (37)$$

$$B_n = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{H_e \lambda_e}{H_i \lambda_i} \beta_{in} + \sum_{\substack{m=0 \\ (m+2 \neq n)}}^{\infty} \frac{b_{mn}}{(m+2)^2 - n^2} & \left(\frac{n \lambda_e}{H_i \lambda_i} - 1\right) & -\left(\frac{n \lambda_e}{H_i \lambda_i} + 1\right) \\ \epsilon_n - \beta_{en} & \left(\frac{n}{H_e} + 1\right) \left(\frac{r_e}{r_i}\right)^n & -\left(\frac{n}{H_e} - 1\right) \left(\frac{r_e}{r_i}\right)^{-n} \\ \sum_{\substack{m=0 \\ (m+2 \neq n)}}^{\infty} \frac{(m+2) b_{mn}}{\left((m+2)^2 - n^2\right) n} + \frac{b_{n-2,n}}{2n^2} & -\frac{\lambda_e}{\lambda_i} & \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \end{vmatrix}}{\Delta_n} \quad (38)$$

$$C_n = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{H_e \lambda_e}{H_i \lambda_i} \alpha_{in} + \sum_{\substack{m=0 \\ (m+2 \neq n)}}^{\infty} \frac{a_{mn}}{(m+2)^2 - n^2} & -\left(\frac{n \lambda_e}{H_i \lambda_i} + 1\right) \\ 0 & \delta_n - \alpha_{en} & -\left(\frac{n}{H_e} - 1\right) \left(\frac{r_e}{r_i}\right)^{-n} \\ 1 & \sum_{\substack{m=0 \\ (m+2 \neq n)}}^{\infty} \frac{(m+2) a_{mn}}{\left((m+2)^2 - n^2\right) n} + \frac{a_{n-2,n}}{2n^2} & \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \end{vmatrix}}{\Delta_n} \quad (39)$$

$$\begin{array}{l}
 1 \\
 0 \\
 1
 \end{array}
 \left[ \begin{array}{l}
 -\frac{H_e \lambda_e}{H_i \lambda_i} \beta_{in} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_{mn}}{(m+2)^2 - n^2} \\
 \epsilon_n - \beta_{en} \\
 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+2) b_{mn}}{((m+2)^2 - n^2)} + \frac{b_{n-2,n}}{2n^2}
 \end{array} \right]
 \begin{array}{l}
 - \left( \frac{n \lambda_e}{H_i \lambda_i} + 1 \right) \\
 - \left( \frac{n}{H_e} - 1 \right) \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^{-n} \\
 \frac{\lambda_e}{\lambda_i}
 \end{array}
 \quad (40)$$

$$\begin{array}{l}
 1 \\
 0 \\
 1
 \end{array}
 \left[ \begin{array}{l}
 \left( \frac{n \lambda_e}{H_i \lambda_i} - 1 \right) \\
 \left( \frac{n}{H_e} + 1 \right) \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^n \\
 - \frac{\lambda_e}{\lambda_i}
 \end{array} \right]
 \begin{array}{l}
 -\frac{H_e \lambda_e}{H_i \lambda_i} \alpha_{in} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{mn}}{(m+2)^2 - n^2} \\
 \delta_n - \alpha_{en} \\
 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+2) a_{mn}}{((m+2)^2 - n^2)} + \frac{a_{n-2,n}}{2n^2}
 \end{array}
 \quad (41)$$

$$\begin{array}{l}
 1 \\
 0 \\
 1
 \end{array}
 \left[ \begin{array}{l}
 \left( \frac{n \lambda_e}{H_i \lambda_i} - 1 \right) \\
 \left( \frac{n}{H_e} + 1 \right) \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^n \\
 - \frac{\lambda_e}{\lambda_i}
 \end{array} \right]
 \begin{array}{l}
 -\frac{H_e \lambda_e}{H_i \lambda_i} \beta_{in} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_{mn}}{(m+2)^2 - n^2} \\
 \epsilon_n - \beta_{en} \\
 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+2) b_{mn}}{((m+2)^2 - n^2)} + \frac{b_{n-2,n}}{2n^2}
 \end{array}
 \quad (42)$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & \left(\frac{n\lambda_e}{H_i\lambda_i} - 1\right) & -\left(\frac{n\lambda_e}{H_i\lambda_i} + 1\right) \\ 0 & \left(\frac{n}{H_e} + 1\right)\left(\frac{r_e}{r_i}\right)^n & -\left(\frac{n}{H_e} - 1\right)\left(\frac{r_e}{r_i}\right)^{-n} \\ 1 & -\frac{\lambda_e}{\lambda_i} & \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \end{vmatrix} \quad (43)$$

## 6. CONCLUSIONS CONCERNANT LA SOLUTION LINEARISEE

On considère des perturbations circonférentielles, mises sous forme de développement en séries de Fourier:

- de la génération de chaleur dans le combustible, représentée par la fonction (3)
- du coefficient d'échange gaine-combustible représentée par la fonction (14)
- du coefficient d'échange gaine-fluide représentée par la fonction (19)
- de la température du fluide autour de l'élément, représentée par la fonction (23)

Si l'amplitude de ces perturbations est faible en valeur relative (inférieure à 25% par exemple pour obtenir une précision acceptable), on peut négliger, dans les solutions, les termes qui concernent les produits de ces amplitudes et on peut déterminer les distributions de températures de combustible et de gaine en calculant les constantes d'intégration à partir de systèmes d'équations linéaires.

Les fonctions de température de combustible et de gaine sont représentées par les équations (12) et (13), dans lesquelles apparaissent les constantes d'intégration  $A_0, A_n, B_n, C_0, C_n, D_0, D_n, E_n, F_n$ , qui sont définies par les relations (32), (37), (38), (33), (39), (34), (41), (40), (42).

Les propriétés linéaires des équations permettent d'étudier séparément l'influence de chacun des quatre phénomènes et d'additionner ensuite les effets. On donne ci-dessous les formules correspondantes.

### 6.1 Cas d'une variation polaire de la génération de chaleur.

On suppose que seule la génération de chaleur présente une variation polaire. Les coefficients d'échange interne et externe sont constants, la température de fluide est constante. Les relations (12) et (13) s'écrivent alors, après avoir déterminé les valeurs des constantes:

Température de combustible:

$$\begin{aligned}
 \frac{S(r, \theta)}{T_e} = & 1 + H_e \operatorname{Log} \left( \frac{r_e}{r_i} \right) + \frac{\lambda_e H_e}{\lambda_i H_i} + \sum_{m=0}^{m=\infty} \left[ \frac{a_{m0}}{(m+2)^2} \left( 1 - \left( \frac{r}{r_i} \right)^{m+2} \right) \right] \\
 & - \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{m=0}^{m=\infty} \left[ \frac{(a_{mn} \cos n\theta + b_{mn} \sin n\theta)}{n(m+2+n)} \cdot \left( \frac{r}{r_i} \right)^n \cdot \right. \\
 & \left. \left\{ \frac{\left( \frac{n}{H_e} + 1 \right) \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^n - \left( \frac{n}{H_e} - 1 \right) \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^{-n}}{\left( \frac{r_e}{r_i} \right)^n \left( \frac{n}{H_e} + 1 \right) \left( \frac{n}{H_i} + 1 + \frac{\lambda_i}{\lambda_e} \right) - \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^{-n} \left( \frac{n}{H_e} - 1 \right) \left( \frac{n}{H_i} + 1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_e} \right)} \right\} \right] \\
 & + \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{m=0}^{m=\infty} \left[ \frac{(a_{mn} \cos n\theta + b_{mn} \sin n\theta)}{(m+2)^2 - n^2} \left( \frac{m+2}{n} \left( \frac{r}{r_i} \right)^n - \left( \frac{r}{r_i} \right)^{m+2} \right) \right] + \\
 & \quad (m+2 \neq n) \\
 & + \sum_{n=2}^{n=\infty} \left[ \frac{(a_{n-2,n} \cos n\theta + b_{n-2,n} \sin n\theta)}{2n^2} \left( 1 - n \operatorname{Log} \frac{r}{r_i} \right) \left( \frac{r}{r_i} \right)^n \right] \quad (44)
 \end{aligned}$$

Température de gaine:

$$\begin{aligned}
 \frac{T(r, \theta)}{T_e} = & 1 - H_e \operatorname{Log} \frac{r}{r_e} + \frac{\lambda_i}{\lambda_e} \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{m=0}^{m=\infty} \left[ \frac{(a_{mn} \cos n\theta + b_{mn} \sin n\theta)}{n(m+2+n)} \cdot \right. \\
 & \left. \left\{ \left( \frac{r}{r_e} \right)^n \left( \frac{n}{H_e} - 1 \right) + \left( \frac{r}{r_e} \right)^{-n} \left( \frac{n}{H_e} + 1 \right) \right\} \right] \\
 & \cdot \left[ \frac{\left( \frac{r_e}{r_i} \right)^n \left( \frac{n}{H_e} + 1 \right) \left( \frac{n}{H_i} + 1 + \frac{\lambda_i}{\lambda_e} \right) - \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^{-n} \left( \frac{n}{H_e} - 1 \right) \left( \frac{n}{H_i} + 1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_e} \right)}{\right] \quad (45)
 \end{aligned}$$

### 6.2 Cas d'une variation circonférentielle du coefficient d'échange gaine-combustible.

Seul le coefficient d'échange gaine-combustible  $h_i(\theta)$  présente une variation circonférentielle.

Les températures de combustible et de gaine s'écrivent:

$$\frac{S(r, \theta)}{T_e} = 1 + H_e \operatorname{Log} \left( \frac{r_e}{r_i} \right) + \frac{\lambda_e H_e}{\lambda_i H_i} + \sum_{m=0}^{m=\infty} \left[ \frac{a_{m0}}{(m+2)^2} \left( 1 - \left( \frac{r}{r_i} \right)^{m+2} \right) \right]$$

$$- \frac{\lambda_e H_e}{\lambda_i H_i} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[ (\alpha_{in} \cos n\theta + \beta_{in} \sin n\theta) \left( \frac{r}{r_i} \right)^n \cdot \right.$$

$$\left. \frac{\left( \frac{n}{H_e} + 1 \right) \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^n - \left( \frac{n}{H_e} - 1 \right) \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^{-n}}{\left( \frac{r_e}{r_i} \right)^n \left( \frac{n}{H_e} + 1 \right) \left( \frac{n}{H_i} + 1 + \frac{\lambda_i}{\lambda_e} \right) - \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^{-n} \left( \frac{n}{H_e} - 1 \right) \left( \frac{n}{H_i} + 1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_e} \right)} \right] \quad (46)$$

$$\frac{T(r, \theta)}{T_e} = 1 - H_e \operatorname{Log} \left( \frac{r}{r_e} \right) + \frac{\lambda_e H_e}{\lambda_i H_i} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[ (\alpha_{in} \cos n\theta + \beta_{in} \sin n\theta) \cdot \right.$$

$$\left. \frac{\left( \frac{r}{r_e} \right)^n \left( \frac{n}{H_e} - 1 \right) + \left( \frac{r}{r_e} \right)^{-n} \left( \frac{n}{H_e} + 1 \right)}{\left( \frac{r_e}{r_i} \right)^n \left( \frac{n}{H_e} + 1 \right) \left( \frac{n}{H_i} + 1 + \frac{\lambda_i}{\lambda_e} \right) - \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^{-n} \left( \frac{n}{H_e} - 1 \right) \left( \frac{n}{H_i} + 1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_e} \right)} \right] \quad (47)$$

### 6.3 Cas d'une variation circonférentielle du coefficient d'échange gaine-fluide.

Seul le coefficient d'échange gaine-fluide  $h_e(\theta)$  présente une variation circonférentielle.

Les températures de combustible et de gaine s'écrivent:

$$\frac{S(r, \theta)}{T_e} = 1 + H_e \operatorname{Log} \left( \frac{r_e}{r_i} \right) + \frac{\lambda_e H_e}{\lambda_i H_i} + \sum_{m=0}^{m=\infty} \left[ \frac{a_{m0}}{(m+2)^2} \left( 1 - \left( \frac{r}{r_i} \right)^{m+2} \right) \right]$$

$$- \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[ \frac{2 (\alpha_{en} \cos n\theta + \beta_{en} \sin n\theta) \left( \frac{r}{r_i} \right)^n}{\left( \frac{r_e}{r_i} \right)^n \left( \frac{n}{H_e} + 1 \right) \left( \frac{n}{H_i} + 1 + \frac{\lambda_i}{\lambda_e} \right) - \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^{-n} \left( \frac{n}{H_e} - 1 \right) \left( \frac{n}{H_i} + 1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_e} \right)} \right] \quad (48)$$

$$\frac{T(r, \theta)}{T_e} = 1 - H_e \operatorname{Log} \left( \frac{r}{r_e} \right) - \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[ (\alpha_{en} \cos n\theta + \beta_{en} \sin n\theta) \cdot \dots \right]$$

$$\dots \left[ \frac{\left(\frac{n}{H_i} + 1 + \frac{\lambda_i}{\lambda_e}\right)\left(\frac{r}{r_i}\right)^n + \left(\frac{n}{H_i} + 1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_e}\right)\left(\frac{r}{r_i}\right)^{-n}}{\left(\frac{r_e}{r_i}\right)^n \left(\frac{n}{H_e} + 1\right)\left(\frac{n}{H_i} + 1 + \frac{\lambda_i}{\lambda_e}\right) - \left(\frac{r_e}{r_i}\right)^{-n} \left(\frac{n}{H_e} - 1\right)\left(\frac{n}{H_i} + 1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_e}\right)} \right] \quad (49)$$

#### 6.4 Cas d'une variation circonférentielle de la température de fluide.

Seule la température de fluide  $T_f(\theta)$  présente une variation circonférentielle.

Les températures de combustible et de gaine s'écrivent:

$$\begin{aligned} \frac{S(r, \theta)}{T_e} &= 1 + H_e \text{Log} \left(\frac{r_e}{r_i}\right) + \frac{\lambda_e H_e}{\lambda_i H_i} + \sum_{m=0}^{m=\infty} \left[ \frac{a_{m0}}{(m+2)^2} \left(1 - \left(\frac{r}{r_i}\right)^{m+2}\right) \right] \\ &+ \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[ \frac{2 (\delta_n \cos n\theta + \epsilon_n \sin n\theta)}{\left(\frac{r_e}{r_i}\right)^n \left(\frac{n}{H_e} + 1\right)\left(\frac{n}{H_i} + 1 + \frac{\lambda_i}{\lambda_e}\right) - \left(\frac{r_e}{r_i}\right)^{-n} \left(\frac{n}{H_e} - 1\right)\left(\frac{n}{H_i} + 1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_e}\right)} \right] \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \frac{T(r, \theta)}{T_e} &= 1 - H_e \text{Log} \left(\frac{r}{r_e}\right) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[ (\delta_n \cos n\theta + \epsilon_n \sin n\theta) \cdot \right. \\ &\left. \frac{\left(\frac{n}{H_i} + 1 + \frac{\lambda_i}{\lambda_e}\right)\left(\frac{r}{r_i}\right)^n + \left(\frac{n}{H_i} + 1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_e}\right)\left(\frac{r}{r_i}\right)^{-n}}{\left(\frac{r_e}{r_i}\right)^n \left(\frac{n}{H_e} + 1\right)\left(\frac{n}{H_i} + 1 + \frac{\lambda_i}{\lambda_e}\right) - \left(\frac{r_e}{r_i}\right)^{-n} \left(\frac{n}{H_e} - 1\right)\left(\frac{n}{H_i} + 1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_e}\right)} \right] \end{aligned} \quad (51)$$

### 7. DETERMINATION DES CONSTANTES D'INTEGRATION DANS LE CAS DE LA SOLUTION EXACTE

On suppose que les produits de perturbation ne peuvent pas être négligés. On doit déterminer les constantes d'intégration à partir des équations (27), (28), (29).

#### 7.1 Considérations préliminaires et définition d'un opérateur.

Afin d'illustrer la méthode utilisée, considérons 2 fonctions  $X(\theta)$  et  $Y(\theta)$  dont la valeur moyenne est nulle dans l'intervalle  $(0-2\pi)$  et le produit  $Z(\theta)$  de ces deux fonctions

$$Z(\theta) = X(\theta) \cdot Y(\theta) \quad (52)$$

Ces trois fonctions, décomposées en séries de Fourier, s'écrivent:

$$X(\theta) = \sum_{n=1}^{n=\infty} (x_n \cos n\theta + x'_n \sin n\theta) \quad (53)$$

$$Y(\theta) = \sum_{n=1}^{n=\infty} (y_n \cos n\theta + y'_n \sin n\theta) \quad (54)$$

$$Z(\theta) = z_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (z_n \cos n\theta + z'_n \sin n\theta) \quad (55)$$

On montre que les coefficients  $z_0$ ,  $z_n$ ,  $z'_n$  sont reliés aux coefficients  $x_n$ ,  $x'_n$ ,  $y_n$ ,  $y'_n$  par les relations:

$$z_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=\infty} x_n y_n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=\infty} x'_n y'_n \quad (56)$$

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{j=n-1} x_j y_{n-j} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{j=\infty} x_j y_{n+j} + \frac{1}{2} \sum_{j=n+1}^{j=\infty} x_j y_{j-n} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{j=n-1} x'_j y'_{n-j} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{j=\infty} x'_j y'_{n+j} + \frac{1}{2} \sum_{j=n+1}^{j=\infty} x'_j y'_{j-n} \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} z'_n &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{j=n-1} x_j y'_{n-j} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{j=\infty} x_j y'_{n+j} - \frac{1}{2} \sum_{j=n+1}^{j=\infty} x_j y'_{j-n} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{j=n-1} x'_j y_{n-j} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{j=\infty} x'_j y_{n+j} + \frac{1}{2} \sum_{j=n+1}^{j=\infty} x'_j y_{j-n} \end{aligned} \quad (58)$$

Pour la suite des calculs, on représentera ces 3 dernières relations par les opérateurs  $L_0$ ,  $L_n$ ,  $L'_n$ :

$$z_0 = L_0 \left\{ (x_j, x'_j), (y_j, y'_j) \right\} \quad (59)$$

$$z_n = L_n \left\{ (x_j, x'_j), (y_j, y'_j) \right\} \quad (60)$$

$$z'_n = L'_n \left\{ (x_j, x'_j), (y_j, y'_j) \right\} \quad (61)$$



7.2 Solution réitérative.

En identifiant les termes indépendants de  $\theta$ , les termes en  $\cos n\theta$ , et les termes en  $\sin n\theta$ , dans les équations (27), (28), (29) on trouve les relations suivantes:

Pour les termes indépendants de  $\theta$ :

$$D_0 = - \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{a_{m0}}{m+2} \quad (62)$$

$$- \frac{\lambda_e}{h_i r_i} D_0 = A_0 - C_0 - \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{a_{m0}}{(m+2)^2} + K_0 \quad (63)$$

$$- \frac{\lambda_e}{h_e r_e} D_0 = C_0 + D_0 \text{Log} \left( \frac{r_e}{r_i} \right) + U_0 \quad (64)$$

où

$$K_0 = L_0 \left\{ (\alpha_{ij}, \beta_{ij}), \left( - \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{a_{mj}}{(m+2)^2 - j^2} + A_j - C_j - D_j, - \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{b_{mj}}{(m+2)^2 - j^2} + B_j - E_j - F_j \right) \right\} \quad (65)$$

$$U_0 = L_0 \left\{ (\alpha_{ej}, \beta_{ej}), \left( C_j \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^j + D_j \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^{-j} - \delta_j, E_j \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^j + F_j \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^{-j} - \epsilon_j \right) \right\} \quad (66)$$

Pour les termes en  $\cos n\theta$ :

$$A_n - \frac{\lambda_e}{\lambda_i} C_n + \frac{\lambda_e}{\lambda_i} D_n = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(m+2) a_{mn}}{n \left( (m+2)^2 - n^2 \right)} + \frac{a_{n-2,n}}{2n^2} \quad (67)$$

(m+2 ≠ n)

$$A_n + \left( \frac{n\lambda_e}{H_i \lambda_i} - 1 \right) C_n - \left( \frac{n\lambda_e}{H_i \lambda_i} + 1 \right) D_n = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{a_{mn}}{(m+2)^2 - n^2} - \alpha_{in} \left( \frac{H_e \lambda_e}{H_i \lambda_i} \right) + K_0 \alpha_{in} - K_n \quad (68)$$

$$\left( 1 + \frac{n}{H_e} \right) \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^n C_n + \left( 1 - \frac{n}{H_e} \right) \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^{-n} D_n = \delta_n - \alpha_{en} - U_n + U_0 \alpha_{en} \quad (69)$$

où

$$K_n = L_n \left\{ (\alpha_{ij}, \beta_{ij}), \left( - \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{a_{mj}}{(m+2)^2 - j^2} + A_j - C_j - D_j, - \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{b_{mj}}{(m+2)^2 - j^2} + B_j - E_j - F_j \right) \right\} \quad (70)$$

$$U_n = L_n \left\{ (\alpha_{ej}, \beta_{ej}), \left( C_j \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^j + D_j \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^{-j} - \delta_j, E_j \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^j + F_j \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^{-j} - \epsilon_j \right) \right\} \quad (71)$$

Pour les termes en  $\sin n\theta$ :

$$B_n - \frac{\lambda_e}{\lambda_i} E_n + \frac{\lambda_e}{\lambda_i} F_n = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(m+2) a_{mn}}{n \left( (m+2)^2 - n^2 \right)} + \frac{a_{n-2,n}}{2n^2} \quad (72)$$

(m+2 ≠ n)

$$B_n + \left( \frac{n\lambda_e}{H_i \lambda_i} - 1 \right) E_n - \left( \frac{n\lambda_e}{H_i \lambda_i} + 1 \right) F_n = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{a_{mn}}{(m+2)^2 - n^2} - \alpha_{in} \left( \frac{H_e \lambda_e}{H_i \lambda_i} \right) + K_0 \beta_{in} - K'_n \quad (73)$$

(m+2 ≠ n)

$$\left( 1 + \frac{n}{H_e} \right) \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^n E_n + \left( 1 - \frac{n}{H_e} \right) \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^{-n} F_n = \epsilon_n - \beta_{en} - U'_n + U_0 \beta_{en} \quad (74)$$

où

$$K'_n = L'_n \left\{ (\alpha_{ij}, \beta_{ij}), \left( - \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{a_{mj}}{(m+2)^2 - j^2} + A_j - C_j - D_j, - \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{b_{mj}}{(m+2)^2 - j^2} + B_j - E_j - F_j \right) \right\} \quad (75)$$

(m+2 ≠ j)

$$U'_n = L'_n \left\{ (\alpha_{ej}, \beta_{ej}), \left( C_j \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^j + D_j \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^{-j} - \delta_j, E_j \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^j + F_j \left( \frac{r_e}{r_i} \right)^{-j} - \epsilon_j \right) \right\} \quad (76)$$

$L_0, L_n, L'_n$  sont les opérateurs définis dans le paragraphe 7.1

On retrouve des systèmes d'équations qui sont équivalents à ceux utilisés pour la solutions linéarisée, excepté pour les groupements  $K_0, K_n, K'_n, U_0, U_n, U'_n$  qui ne sont plus négligés ici.

On ne peut pas directement déterminer les constantes d'intégration  $A_0, A_n, B_n, C_0, C_n, D_0, D_n, E_n, F_n$  car dans les groupements intervient l'ensemble des constantes  $A_j, B_j, C_j, D_j, E_j, F_j$ .

On peut utiliser une méthode réitérative. On donne aux constantes  $A_j, B_j, C_j, D_j, E_j, F_j$  dans les groupements  $K_0, K_n, K'_n, U_0, U_n, U'_n$  les valeurs correspondant à la solution linéarisée, on calcule ensuite les constantes  $A_0, A_n, B_n, C_0, C_n, D_0, D_n, E_n, F_n$  par les systèmes d'équations linéaires représentés par les relations (58) à (70), et on réinjecte les valeurs ainsi obtenues dans les différents groupements. On n'a pas démontré la convergence de cette méthode réitérative, mais elle s'est vérifiée dans toutes les applications numériques qui ont été programmées sur machine IBM 7090 et l'exactitude des solutions a été vérifiée par une méthode d'analogie rhéoélectrique.

NOMENCLATURE

$A_j, A_n, A_o$	constantes d'intégration
$a_{mn}, a_{oo}, a_{on},$ $a_{mo}, a_{mj}$	coefficients du développement en série de la fonction $\Phi(r, \theta)$
$B_j, B_n$	constantes d'intégration
$b_{mn}, b_{on}, b_{mj}$	coefficients du développement en série de la fonction $\Phi(r, \theta)$
$C_j, C_n, C_o$	constantes d'intégration
$D_j, D_n, D_o$	constantes d'intégration
$E_j, E_n$	constantes d'intégration
$F_j, F_n$	constantes d'intégration
$He = \frac{h_e r_e}{\lambda_e}$	nombre sans dimension, équivalent à un nombre de Nusselt
$Hi = \frac{h_i r_i}{\lambda_i}$	nombre sans dimension, équivalent à un nombre de Nusselt
$h_e(\theta)$	coefficient d'échange entre la gaine et le fluide
$h_e$	valeur moyenne du coefficient d'échange entre la gaine et le fluide
$h_i(\theta)$	coefficient d'échange entre la gaine et le combustible
$h_i$	valeur moyenne du coefficient entre la gaine et le combustible
$K_n, K'_n, K_o$	groupements définis par les formules (70), (75), (65)
$L_n, L'_n, L_o$	opérateurs définis par les relations (60), (61), (59)
$r$	variable radiale
$r_e$	rayon extérieur de gaine
$r_i$	rayon de combustible, rayon intérieur de gaine
$S(r, \theta)$	fonction de température dans le combustible
$T(r, \theta)$	fonction de température dans la gaine
$T_e$	température moyenne de gaine sur la paroi extérieure
$T_f(\theta)$	température de fluide autour de la gaine
$U_n, U'_n, U_o$	groupements définis par les formules (71), (76), (66)
$X(\theta)$	fonction de $(\theta)$
$x_n, x'_n$	coefficients du développement en série de Fourier de la fonction $X(\theta)$
$Y(\theta)$	fonction de $(\theta)$
$y_n, y'_n$	coefficients du développement en série de Fourier de la fonction $Y(\theta)$

$Z(\theta)$	fonction de $(\theta)$
$z_n, z'_n, z_0$	coefficients du développement en série de Fourier de la fonction $Z(\theta)$
$\alpha_{en}$	coefficients du développement en série de Fourier de la fonction $h_e(\theta)$
$\alpha_{in}$	coefficients du développement en série de Fourier de la fonction $h_i(\theta)$
$\beta_{en}$	coefficient du développement en série de Fourier de la fonction $h_e(\theta)$
$\beta_{in}$	coefficient du développement en série de Fourier de la fonction $h_i(\theta)$
$\Delta_n$	déterminant défini par la relation (43)
$\delta_n$	coefficient du développement en série de Fourier de la fonction $T_f(\theta)$
$\epsilon_n$	coefficient du développement en série de Fourier de la fonction $T_f(\theta)$
$\theta$	variable polaire
$\lambda_e$	conductivité thermique de la gaine
$\lambda_i$	conductivité thermique du combustible
$\Phi(r, \theta)$	fonction de génération de chaleur dans le combustible

### INDICES

e	indice se rapportant à la paroi extérieure de gaine, ou à la gaine
i	indice se rapportant à la paroi intérieure de gaine, à la périphérie du combustible, ou au combustible indice de variation dans les formules
m	indice de variation pour le développement en série de Taylor de la fonction $\Phi(r, \theta)$
n	indice de variation pour le développement en série de Fourier de la fonction $\Phi(r, \theta)$
o	indice de rang zéro dans les développements en série de Fourier et de Taylor.

BIBLIOGRAPHIE

- L. MALAVARD La méthode d'analogies rhéoélectriques, ses possibilités et ses tendances.  
Journées Internationales du Calcul Analogique  
Sept. 1955
- G. LIEBMANN Solution of Partial Differential Equations with a resistance network analogue.  
British Journal of Applied Physics  
Vol. 1 n° 4 - April 1950
- P. HUARD DE LA MARRE Sur l'imposition des Conditions aux limites dans les réseaux de conductances.  
Journées Internationales du Calcul Analogique  
Sept. 1955
- G. RENARD Sur l'imposition des Conditions aux limites dans le calcul analogique rhéoélectrique et la méthode des réseaux de conductances.  
2<sup>nd</sup> International Analogue Computation Meetings  
1958
- P. GIFFARD L'analyseur différentiel à réseaux Delta 600.  
Le Calcul Analogique appliqué au processus chimiques - p. 152 - 161 Bruxelles 1962
- D. ALLENDEN Electronic Instrumentation for resistance network analog computers.  
2<sup>nd</sup> International Analogue Computation Meetings.
- R. ADLER Application de la représentation analogique des champs thermiques bidimensionnels permanents par feuille conductrice.  
Journées de la Transmission de la Chaleur 4.II
- G. BURNAY Sur l'étude analogique du refroidissement des gainages par analogie rhéoélectrique.  
Méthodes Analogiques dans les Problèmes de l'Energie nucléaire - Bruxelles 1961 p. 124-127