EUR 1632.f

COMMUNAUTE EUROPEENNE DE L'ENERGIE ATOMIQUE - EURATOM

MATRICES TOTALEMENT UNIMODULAIRES ET PROBLEMES COMBINATOIRES

par

P. CAMION

1964

Centre Commun de Recherche Nucléaire
Etablissement d'Ispra - Italie
Centre de Traitement de l'Information Scientifique - CETIS

AVERTISSEMENT

Le présent document a été élaboré sous les auspices de la Commission de la Communauté Européenne de l'Energie Atomique (EURATOM).

Il est précisé que la Commission d'EURATOM, ses cocontractants ou toute personne agissant en leur nom :

1° — Ne garantissent pas l'exactitude ou le caractère complet des informations contenues dans ce document, ni que l'utilisation d'une information, d'un équipement, d'une méthode ou d'un procédé décrit dans le présent document ne portent pas atteinte à des droits privatifs.

2° — N'assument aucune responsabilité pour les dommages qui pourraient résulter de l'utilisation d'informations, d'équipements, de méthodes ou procédés divulgués dans le présent document.

Ce rapport est vendu au prix de 125,— francs belges, sur demande adressée à : PRESSES ACADEMIQUES EUROPEENNES — 98, Chaussée de Charleroi, Bruxelles 6.

Le paiement se fait par versement à :

— la BANQUE DE LA SOCIETE GENERALE (Agence Ma Campagne) - Bruxelles - compte N° 964.558,

— la BELGIAN AMERICAN BANK AND TRUST COMPANY - New York - compte N° 22.186

— la LLOYDS BANK (Europe) Ltd. - 10 Moorgate, London E.C.2,

en mentionnant la référence : « EUR 1632.f — MATRICES TOTALEMENT UNIMODULAIRES ET PROBLEMES COMBINATOIRES ».

Ce document a été reproduit à partir de la meilleure copie disponible.

Achevé d'imprimer par L. VANMELLE S.A., GAND
Bruxelles, mai 1964

EUR 1632.f

COMMUNAUTE EUROPEENNE DE L'ENERGIE ATOMIQUE - EURATOM

MATRICES TOTALEMENT UNIMODULAIRES ET PROBLEMES COMBINATOIRES

par

P. CAMION

1964

Centre Commun de Recherche Nucléaire
Etablissement d'Ispra - Italie
Centre de Traitement de l'Information Scientifique - CETIS

DÉFINITION DES TERMES DE THEORIE DES GRAPHES UTILISÉS [2]

Arborescence: (X,U) est une arborescence de racine $x_1 \in X$ si:

1) tout sommet x_1 est l'extrémité terminale d'un seul arc.
2) x_1 n'est l'extrémité terminale d'aucun arc.
3) (X,U) ne contient pas de circuits.

Arbre: Graphe connexe et sans cycles.

Arc: Couple (x,y) avec $y \in \Gamma x$ pour un graphe (X, Γ).

Arête: Ensemble de deux éléments x et y tels que (x,y) ou (y,x) est un arc du graphe.

Articulation: x est un point d'articulation si le sous-graphe obtenu en supprimant x n'est pas connexe.

Chaîne: Une chaîne est une séquence d'arêtes $(u_1,u_2,...)$, chaque arête u_k étant rattachée à u_{k-1} par une de ses extrémités, et à u_{k+1} par l'autre.
Une chaîne est simple si les arêtes utilisées sont toutes différentes, elle est composée dans le cas contraire.

Chemin: Séquence $(u_1,u_2,...)$ d'arcs telle que l'extrémité terminale de chaque arc coincide avec l'extrémité initiale du suivant.
Une chemin est simple s'il n'utilise pas deux fois le même arc, et composé dans le cas contraire.

Circuit: Cycle avec tous les arcs orientés dans le sens d'un parcours.

Cocircuit: Cocycle tel que les arcs sont tous incidents extérieurement ou tous intérieurement au sous-ensemble qui le définit.

Cocycle: Ensemble des arcs incidents intérieurement et extérieurement à un sous-ensemble de sommets A d'un graphe.

Composante: Soit un graphe (X, Γ), $a \in X$, C l'ensemble des sommets reliés à a par une chaîne. Le sous-graphe engendré par C_a est une composante connexe eu composante de (X, Γ).

Couplage: d'un graphe simple (X,Y,Γ) est un ensemble d'arcs W tel que deux arcs quelconques de W ne soient pas adjacents; si un couplage fait correspondre d'une façon biunivoque un ensemble $A \subset X$ et un ensemble $B \subset Y$, on dit aussi que l'on couple l'ensemble A sur l'ensemble B, ou que l'on couple A dans Y.

Cycle: Séquence d'arcs telle que:

1) tout arc de la séquence est relié au précédent par une de ses extrémités et au suivant par l'autre extrémité.
2) la séquence n'utilise pas deux fois le même arc.
3) le sommet initial et le sommet terminal de la séquence coïncident.

Incident: Un ensemble d'arcs est dit incident extérieurement (intérieurement) à un sous-ensemble $A \subset X$ de (X,Γ) si chacun de ces arcs a son extrémité initiale (terminale) dans A et l'autre dans X-A.

Graphe:

a) (X,U) est défini par un ensemble X et un sous-ensemble U des couples ordonnés $X \times X$.
b) (X,Γ) est défini par un ensemble X et une application multivoque Γ de X dans lui-même.
c) Antisymétrique: (X,U) est tel que $(x,y) \in U \Rightarrow (y,x) \in U$.
d) Connexe: il existe une chaîne reliant deux points quelconques de (X,U).
e) Partiel: (X,V) est un graphe partiel de (X,U) si $V \subset U$.
f) Sous-graphe: (Y,U_y) est un sous-graphe de (X,U) si $Y \subset X$ et U_y est l'ensemble des arcs où ne figurent pas de sommets de X-Y.
g) Simple: (X,Γ) est tel que X peut être partitionné en deux sous-ensembles Y et Z tels que Γ est une application de Y dans Z et de Z dans Y.
h) Symétrique: (X,U) est tel que $(x,y) \in U \Rightarrow (y,x) \in U$.

Multi-graphe: Contrairement aux graphes, il peut y avoir dans un multigraphe plusieurs arêtes distinctes reliant le même couple de sommets.

t-cocycle: Réunion de cocycles disjoints.

t-cycle: Réunion de cycles disjoints.

1 . L'UNIMODULARITE TOTALE ET LA PROPRIETE DE DANTZIG

On trouvera les notions sur lesquelles ce chapitre repose dans le chapitre 15 de [2].

1.1 RESUME

Nous allons grouper dans ce chapitre les principaux résultats recueillis dans [2][3][4][21] , etc...
Le lien évident qui existe entre les matrices de Dantzig et les matrices totalement unimodulaires nous permet de ramener le problème de savoir si une matrice est une matrice de Dantzig (ou D-matrice) à celui de savoir si une matrice donnée est une totalement unimodulaire (ou E-matrice). Problème que nous discutons au chapitre II.

1.2 MATRICES ET POLYEDRES DONT LES SOMMETS ONT DES COORDONNEES ENTIERES

1.2.1 On considère un système d'équations et d'inégalités linéaires:

(1) $A\ x = b\ ,\ x \geqslant 0$

où la matrice A à coefficients réels a r lignes, k colonnes et un rang inférieur à k . Si le domaine des solutions est non vide et borné, c'est un polyèdre convexe dans un espace vectoriel de dimension k . Une solution basique est un point $x^{\times}$ dont les coordonnées non nulles sont coefficients de vecteurs linéairement indépendants. On sait qu'une forme linéaire d'un vecteur du domaine a sa valeur extrême en un sommet ou en chaque point de l'enveloppe convexe d'un ensemble de sommets.
De nombreux problèmes combinatoires trouvent une formulation en termes de programmes linéaires dont on recherche les solutions à coordonnées entières [40]. M. R.Fortet [27] a montré à ce propos que l'ensemble des solutions d'une équation Booléenne est aussi l'ensemble des points de coordonnées entières d'un polyèdre.
L'étude des matrices A telles que (1) définit un polyèdre dont les sommets sont à coordonnées entières est donc important. I.Heller étudie la classe des matrices A ayant la propriété: pour tout b tel que $A\ x = b$ a une solution entière, toutes les solutions basiques de $A\ x = b$ sont entières. Une matrice

A qui possède cette propriété sera appelée D-matrice. Si A est une D-Matrice, on a:

I - Si une colonne de A est une combinaison linéaire d'un ensemble de colonnes indépendantes de A, les coefficients de la combinaison sont entiers.

II - La propriété de Dantzig:

Si une colonne de A est une combinaison linéaire d'un ensemble de colonnes indépendants de A, alors les coefficients de la combinaison sont 1, -1 ou 0.

Exemple de D-matrice: $\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 5/2 & 2 \end{vmatrix}$

III L'image de A par une transformation linéaire régulière est une D-matrice.

IV $T = \{x_i - x_j\}$ $(i \neq j \; ; \; i, j = 0, 1, \dots, r)$

où x_0 est le vecteur nul, et $x_1, \dots, x_r$ sont linéairement indépendants, est une D-matrice.

V - Les arêtes (c'est-à-dire, des faces de dimension 1, prises dans les deux orientations et considérées comme vecteurs) d'un simplexe sont les colonnes d'une D-matrice.

1.2.2. - A.J.Hoffman et J.B.Kruskall [31] d'autre part définissent une classe de matrices qui, on s'en apercevra immédiatement, est contenue dans la classe des D-matrices. Il s'agit des matrices A entières telles que chaque polyèdre

$$(2) \qquad Q(b;\, b';\, c;\, c') = (x \mid b \leqslant Ax \leqslant b' \quad \text{et} \quad c \leqslant x \leqslant c'),$$

s'il est non vide, a tous ses sommets avec coordonnées entières, et ce pour tout système de vecteurs b, b', c, c' de coordonnées entières.

Une telle matrice A est caractérisée par le fait que chaque mineur de A vaut +1, -1, 0. Ces matrices sont appelées E-matrices ou matrices totalement unimodulaires. Rappelons qu'un sommet du polyèdre $Q(b;\, b';\, c;\, c')$ est un point $x^* \in Q(b;\, b';\, c,\, c')$ dont les coordonnées non nulles sont coefficients d'un système maximum de vecteurs linéairement indépendants.

1.3 D-MATRICES ET MATRICES COCYCLOMATIQUES

I.Heller observe que une base parmi les arêtes d'un simplexe est un arbre, si l'on transforme T (IV) par l'inverse de cette base, on obtient une matrice cocyclomatique normale. Une matrice est normale si elle contient une matrice unité d'ordre égal au nombre de ses lignes. Une matrice cocyclomatique est une matrice dont les lignes forment une base de u-cocycles d'un graphe (chapitre II). Une matrice normale est de la forme [I,A] où I est une matrice unité. Un u-cocycle est un vecteur de composantes +1, -1, 0 appartenant à l'espace vectoriel engendré par les vecteurs-lignes de la matrice d'incidence (au sens de C.Berge [2] , 15) d'un graphe. Si $x_1, \dots ,x_r$ sont dans IV les vecteurs unités, $T = \{x_i - x_j\}$; $(i \neq j;\ j=0,\ 1,\ \dots ,r)$ devient une matrice d'incidence ayant une ligne supprimée, d'un graphe complet symétrique de r+1 sommets. T est alors appelée par Heller représentation canonique de la classe de toutes les D-matrices obtenues à partir de T par transformation linéaire régulière. Il est clair que cette classe est la classe de toutes les bases de l'espace vectoriel des tensions [1] d'un graphe complet symétrique. $\theta=(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_r)$ est une tension, si pour tout cycle élémentaire μ, on a:

$$(3) \qquad \sum_{i \in \mu^+} \theta_i - \sum_{i \in \mu^-} \theta_i = 0$$

μ^+ et μ^- désignent respectivement les arcs orientés dans le sens du parcours et ceux orientés en sens inverse du parcours. (voir Chapitre II). On a donc:

VI - Une matrice cocyclomatique est une D-matrice.

Puisqu'une matrice cocyclomatique est toujours une sous-matrice d'une matrice cocyclomatique d'un graphe complet symétrique (simplexe).

I.Heller remarque après les auteurs de [39] que la transformation d'une matrice cocyclomatique normale en une autre (du même graphe) est évidemment unimodulaire. En effet une matrice cocyclomatique normale contient toujours une matrice unité et puisque c'est une D-matrice, chaque déterminant d'ordre r vaut q, -q ou

0 donc 1, -1 ou 0. Mais alors, tout déterminant extrait d'une matrice cocyclomatique normale vaut 1, -1 ou 0 puisqu'il donnera sa valeur à un déterminant d'ordre r le contenant et contenant des vecteurs unités. Donc

VII Une matrice cocyclomatique normale est totalement unimodulaire.

A.J.Hoffman et J.B.Kruskal remarquent également, comme annoncé en 1.2.2.

VIII Une matrice totalement unimodulaire est une D-matrice.

Soit [I,A] une matrice cocyclomatique d'un graphe, on sait ([3] , [26]), qu'une matrice cyclomatique normale ([2] , chapitre 15), est nécessairement de la forme [A', -I] , où A' est la transposée de A, d'où

IX Une matrice cyclomatique normale est totalement unimodulaire.

et par conséquent toute base de l'espace vectoriel des flots d'un graphe est une D-matrice. Pour simplifier disons ici qu'un flot est un élément de l'espace vectoriel orthogonal à celui des tensions, le chapitre II s'étendra plus longuement sur ce sujet.

Bien que, à notre connaissance, les D-matrices mentionnées dans la littérature sont des matrices de flots ou de tensions nous verrons (Chapitre 4) qu'il en existe d'autres.

Les résultats VII, VIII et IX sont implicites à I.Heller, 1957 [4] . Ils sont donnés également dans [26] .

1.4 E-MATRICES ET CHAINES D'UN ARBRE

Si on appelle u-chaîne d'un arbre antisymétrique un vecteur c qui a pour composantes 1, -1 ou 0, il correspond à une chaîne γ, $c = (c_1,\ldots,c_m)$

$$(4) \quad \begin{cases} i \in \gamma^+ \Longrightarrow c_i = 1 \\ i \in \gamma^- \Longrightarrow c_i = -1 \\ i \notin \gamma \Longrightarrow c_i = 0 \end{cases}$$

γ^+ et γ^- sont respectivement les arcs parcourus dans le sens de l'orientation et dans le sens opposé lorsque l'on parcourt la chaîne d'une extrémité à l'autre. c est donc défini au signe près.

1.4.1 - Résultats connus

En tenant compte des propriétés d'une matrice cyclomatique normale données en [2] , chapitre 15, on peut énoncer X :

X L'ensemble des u-chaînes d'un arbre forme une matrice totalement unimodulaire.

Les auteurs de [40] donnent (théorème 5)

XI Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de coefficients 0, +1 et -1; pour deux vecteurs-lignes a_i et a_j, on posera $a_i > a_j$ lorsque chaque coefficient non nul a_{jk} de a_j est égal au coefficient a_{ik} de a_i qui est sur la même colonne; la matrice A est totalement unimodulaire lorsque l'on a:

(5) $\quad a_{ik} = a_{jk} \neq 0 \implies a_i > a_j \quad$ ou $\quad a_j > a_i$

(6) $\quad a_{ik} = -a_{jk} \neq 0 \implies a_i > -a_j \quad$ ou $\quad a_j > -a_i$

On démontre aisément que $>$ est une relation de préordre associée à une famille d'arborescences H définie sur l'ensemble des lignes de A. On obtient $H^{\times}$ en adjoignant à H un arc incident intérieurement à chaque racine, il existe alors une correspondance biunivoque entre les arcs de $H^{\times}$ et leur extrémités terminales. Les colonnes de A sont alors des u-chaînes de $H^{\times}$.

1.4.2 - Montrons qu'une classe de E-matrices définie par A.J.Hoffman et J.B.Kruskal est contenue dans la classe des sous-matrices cyclomatiques, c'est à dire, dont les lignes représentent des chaînes d'arbre. Cette classe de matrice est définie au moyen d'un graphe (X,U) dit "alterné" qui a la propriété:

Tout cycle a autant d'arcs orientés dans le sens du parcours que dans le sens opposé, de plus les arcs se présentent alternativement dans l'un et l'autre sens lorsque l'on parcourt le cycle. On dira que tous les cycles sont alternes, ils sont nécessairement de longueur paire.

A chaque chemin élémentaire $\mu = [x_{i_1}, \dots, x_{i_k}]$ de (X,U) correspond un vecteur $v_\mu = (v_\mu(x_1), \dots, v_\mu(x_n))$ où

$$(7) \qquad x_j \in X \begin{cases} x_j \in \mu \longrightarrow v_\mu(x_j) = 1 \\ x_j \notin \mu \Longrightarrow v_\mu(x_j) = 0 \end{cases}$$

et $|X| = n$.

A un ensemble M de chemins correspond une matrice A dont les lignes sont $\bigcup_{\mu \in M} v_\mu$.

Nous allons construire un graphe $(C, \tau(X))$ tel que

1) l'ensemble $\tau(X)$ des arcs est l'ensemble des sommets de (X,U)

2) $(C, \tau(X))$ est un arbre ou une famille d'arbres

3) à $\mu = [x_{i_1}, \dots, x_{i_k}]$, chemin de (X,U), correspond un chemin $\tau(\mu)$ de $(C, \tau(X))$, avec

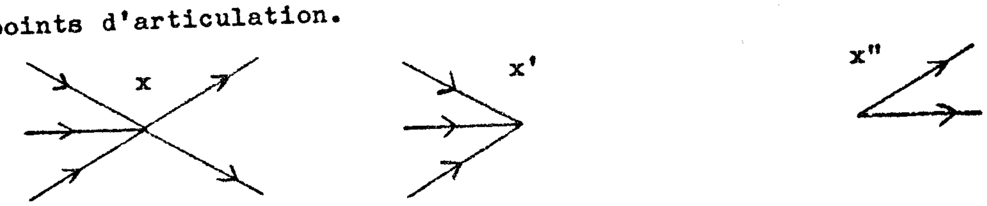
$$(8) \qquad 1 \leq j \leq k , \quad \tau_1(x_{i_j}) = \tau_0(x_{i_{j+1}})$$

$\tau_0(x_i)$ étant l'extrémité initiale de l'arc $\tau(x_i)$ de (Y,X); $\tau_1(x_i)$ son extrémité terminale, ce qui démontrera notre proposition.

a. <u>Chaque sommet</u> x <u>de</u> (X,U) <u>tel que</u> $\Gamma x \neq 0$ <u>et</u> $\Gamma^{-1} x \neq \emptyset$ <u>est un point d'articulation</u>.

Soit en effet $a \in \Gamma x$ et $b \in \Gamma^{-1} x$, s'il existait une chaîne reliant a et b et ne passant pas par x il passerait par b,x,a, un cycle non alterné, ce qui est absurde.

b. "Séparons" (X,U) de toutes les manières possibles en dédoublant les points d'articulation.



On obtient un nouveau graphe (Y,U) tel que $x \in Y \Longrightarrow \Gamma x = \emptyset$ ou $\Gamma^{-1} x = \emptyset$.
Si $\Gamma x = \emptyset$, $x \in Y_1$ sinon $x \in Y_2$; $Y_1 \cup Y_2 = Y$ $\quad Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$.

c. Dans chaque composante connexe relions de toutes les manières possibles $x \in Y_2$ à $y \in Y_1$, on obtient (Y,V).

d. Si nous "fusionnons" les composantes connexes en confondant deux à deux les couples de sommets par l'opération inverse de l'opération b, nous obtenons un graphe (X,V), $U \subset V$ avec tous ses cycles alternés (nous allons le montrer) et tel que μ est un chemin de $(X,U) \Longrightarrow \mu$ est un chemin de (X,V). Dans chaque sous-graphe de (X,V), définit par une composante connexe de (Y,V), il n'y a que des cycles alternés. Il ne peut exister d'autre part un cycle utilisant des arêtes de sous-graphes définis par des composantes connexes différentes de (Y,V), car cela signifierait qu'il existe dans (X,V) un cycle utilisant un point d'articulation.

e. Définissons un graphe $(C \cup B,\ \tau^{x}(Y))$.

C est l'ensemble des composantes connexes de (Y,V). Si $x \in c_i$, $c_i \in C$ $\Gamma x = \emptyset$, $\tau^{x}(x)$ sera dans $\tau^{x}(Y)$ un arc adjacent extérieurement à c_i si $\Gamma^{-1} x = \emptyset$, $\tau^{x}(x)$ sera un arc adjacent intérieurement à c_i. Les sommets $\tau_1^{x}(x')$ et $\tau_0^{x}(y'')$ seront confondus respectivement avec $\tau_0^{x}(x'')$ et $\tau_1^{x}(y')$, ils forment l'ensemble B.

x' et x'', y' et y'' étant les couples de sommets obtenus par dédoublement des points d'articulation x et y de X.

Puisque $\tau^{x}(x')$ et $\tau^{x}(x'')$ sont adjacents en un sommet de degré 2, on définit un nouveau graphe en confondant ces deux arêtes et ce pour tout x, point d'articulation de (X,U). On obtient ainsi $(C,\tau(X))$.

f. 1 - A chaque composante connexe de (X,U) correspond une composante connexe de $(C,\tau(X))$.

2 - Montrons qu'une composante connexe de $(C,\tau(X))$ est dans cycles.

Supposons qu'il existe un cycle $\vartheta = [\tau_1(x_{i_1}), \ldots, \tau_0(x_{i_1}), \tau_1(x_{i_1})]$;

à ϑ correspond dans (Y,V) une séquence de composantes connexes $[c(1,x_{i_1}),\dots,c(0,x_{i_1}), c(1,x_{i_1})]$ telles que deux composantes consécutives ont un sommet commun dans (X,V). A trois composantes consécutives correspondent donc deux sommets de X reliés par un arc de V. A ϑ correspond donc un cycle de (X,V) non alterné, ce qui est absurde.

2) est démontrée.

Pour démontrer 3) il suffit d'observer que si $\mu=[x_{i_1},\dots,x_{i_k}]$ est un chemin de (X,V), $\tau(\mu)=[\tau_0(x_{i_1}),\dots,\tau_1(x_{i_k})]$ est un chemin de $(C,\tau(X))$. Réciproquement on peut démontrer que le graphe adjoint d'un arbre peut être orienté de façon à être un graphe alterné.

1.5 D-MATRICES MAXIMALES

Nous parlerons d'un D-ensemble, il s'agit de l'ensemble des colonnes d'une D-matrice.

1.5.1. I.Heller [4] donne alors les théorèmes:

XII - Un ensemble T composé des arêtes d'un simplexe est un D-ensemble qui est maximal pour sa dimension (dans le sens qu'il n'y a pas de D-ensembles de la même dimension contenant strictement T).

XIII - Soit D un D-ensemble, b un vecteur qui n'est pas dans D, et C l'union de D et de $\{b\}$. Alors C est un D-ensemble si et seulement si les coordonnées de b relativement à chaque base de D sont 0, +1, -1.

1.5.2. Ce dernier théorème permet à I-Heller de construire l'exemple:

l_1, l_2, l_3, l_4 sont des vecteurs linéairement indépendants

$$(9)\quad A=\{\pm l_1, \pm l_2, \pm l_3, \pm l_4, \pm(l_1+l_2+l_3+l_4), \pm(l_1+l_2)\pm(l_2+l_3), \pm(l_3+l_4)\pm(l_4+l_1)\}$$

A, montre-t-il est un D-ensemble maximal qui n'est pas l'ensemble des arêtes d'un simplexe. On vérifie cependant que si $l_1,\dots,l_4$ sont des vecteurs unités, A est une matrice cocyclomatique du graphe non planaire de base homogène de degré 3 de Kuratowski. A.J.Hoffman remarque [40] que ses lignes sont celles d'un graphe alterné.

Nous allons voir que Heller démontre que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un D-ensemble ait $n(n+1)$ éléments est qu'il comporte les arêtes d'un simplexe.

Les deux plus récentes publications de Tutte [24] et [25] sur ce sujet (où précisément les graphes de Kuratowski jouent un rôle fondamental) nous permettront au Chapitre IV de donner un peu plus de lumière sur ce sujet sans pouvoir répondre à la question pendante de I.Heller:

1.5.3 - Déterminer, pour chaque dimension n, un ensemble complet (évidemment fini) de représentants $D_1, D_2, \ldots, D_k$ $(k = k(n))$ de D-ensembles maximaux, dans le sens que

(1) deux D_i distincts ne sont pas liés par une transformation linéaire;

(2) chaque D-ensemble maximal de dimension n est l'image d'un D_i par une transformation linéaire.

Nous pouvons cependant constater que si une D-matrice dont les lignes forment une base de tension d'un graphe est maximale, ce graphe est homogène de degré 3. Cette condition n'est pas suffisante puisqu'il existe des graphes planaires homogènes de degré 3. Leurs matrices cyclomatiques sont cocyclomatiques du graphe dual, elles ne sont pas maximales puisqu'on peut compléter le graphe dual.

1.5.4. - I.Heller donne les théorèmes suivants sur les D-matrices maximales.

XIV - Un D-ensemble de dimension n contient au plus $n(n+1)$ éléments, (sans le vecteur nul); c'est à dire, s'il contient $n(n+1)$ éléments, il est maximal.

XV - Si un D-ensemble de dimension n contient $n(n+1)$ éléments, (sans le vecteur nul), alors D est l'ensemble des arêtes d'un n - simplexe.

Il utilise le théorème:

XVI - L'image D' d'un D-ensemble par une projection le long d'un sous-espace engendré par des vecteurs de D est un D-ensemble.

1.6 - UNE NOUVELLE DEFINITION DES D-MATRICES

A.J.Hoffman observe qu'il est presque équivalent de parler de D-matrices ou de E-matrices (matrices totalement unimodulaires) puisque une D-matrice qui comporte une matrice unité d'ordre maximum est une E-matrice. Cela signifie que étant donné une D-matrice D, on la transforme en une E-matrice en la multipliant à gauche par l'inverse d'une matrice carrée régulière extraite de D. Cela implique:

XVII- Si A est une E-matrice carrée non singulière, A^{-1} l'est aussi. (Cederbaum) [14]

Si A est une E-matrice, [A,I] l'est aussi et par conséquent A^{-1} [A,I] ou [I,A^{-1}], c'est à dire A^{-1}.

Tutte [23] et Seshu (rapporte Reed) parlent d'une classe de matrices que nous allons identifier à celle des D-matrices.

Définition:

Un vecteur v d'un sous-espace vectoriel V est dit élémentaire s'il n'est pas nul et s'il n'existe pas un autre vecteur de V dont l'ensemble des composantes non nulles est strictement contenu dans celui de v.

Soit C_v la classe des vecteurs d'un espace vectoriel considéré contenant v ayant le même ensemble de composantes non nulles que v.

Soit V un sous-espace vectoriel de R^m.

Théorème:

Une matrice A de coefficients entiers dont les lignes engendrent V est une D-matrice si et seulement si pour tout vecteur élémentaire v de V, C_v contient un vecteur de composantes +1, -1 ou 0.

1. La condition est nécessaire.

Seshu démontre en effet qu'une matrice normale satisfaisant l'hypothèse est une E-matrice. (Une matrice est normale si elle contient une matrice unité d'ordre égal au nombre de ses lignes). Si A a r lignes, k colonnes et est de rang r, la propriété de l'hypothèse n'étant pas modifiée par une transformation linéaire, B.A. garde cette propriété; B étant l'inverse d'une matrice k x k extraite de A. Mais alors B.A étant une E-matrice, c'est une D-matrice, donc $B^{-1}(B.A)$ est une D-matrice. Si A est de rang $p < r$ on extrait de A un sous-ensemble C de p lignes linéairement indépendantes(C désignera également la matrice ainsi formée). C est une D-matrice; donc tous les déterminants p x p non nuls extraits de C valent $\pm$ q. A est alors une D-matrice, en vertu de la définition d'une D-matrice (II) .

2. La condition est suffisante.

S'il existe une D-matrice, donc une E-matrice, dont les lignes engendrent V, sous-espace vectoriel de R^m, nous appellerons V un u-espace vectoriel. Il est clair que l'espace orthogonal supplémentaire de V est alors également un u-espace. Tout vecteur v de V est donc orthogonal aux lignes d'une D-matrice D, base de l'espace orthogonal à V. Donc

(10) $D\ v = 0$

Soit D^x les colonnes de D qui ont pour coefficients les composantes non nulles de v. Si v est élémentaire, D^x étant une D-matrice, il existe une combinaison linéaire nulle des colonnes de D^x ayant pour coefficients +1 et -1. c.q.f.d.

Nous verrons au Chapitre III le rôle fondamental joué par les vecteurs élémentaires de composantes +1, -1, 0 dans une généralisation à la fois du théorème de A.J.Hoffman [40] , et des théorèmes de A.J.Hoffman et B.Roy sur l'existence respectivement d'un flot et d'une tension dans un réseau. Nous montrerons d'autre part dans le Chapitre II, comment la notion de vecteur élémentaire d'un u-espace généralise celle de cycle élémentaire et cocycle élémentaire.

CHAPITRE II

CARACTERISATION DES E-MATRICES CONDUISANT A UNE PRESENTATION UNIQUE DES PROPRIETES DE CYCLES ET DE COCYCLES

2.1 ESPACES VECTORIELS DES CYCLES ET COCYCLES D'UN GRAPHE

2.1.1 Introduction

Un sous-graphe partiel est défini par l'ensemble de ses arcs, donc par un vecteur binaire de m composantes, si m est le nombre d'arcs du graphe, chaque composante égale à 1 du vecteur, désignant un arc appartenant à ce sous-graphe partiel. En particulier, l'ensemble des arcs d'un cycle ou d'un cocycle est représenté par un vecteur binaire, appelé B-cycle ou B-cocycle. On montre d'une manière différente de Gould([16] et [17]) que l'ensemble des B-cycles muni de la somme modulo 2 et du champ de galois de deux éléments comme corps d'opérateurs est un espace vectoriel, moyennant une définition convenable d'un cycle. De même l'ensemble des B-cocycles est un espace vectoriel. Cette démonstration est basée sur l'étude de l'homomorphisme de l'ensemble des matrices totalement unimodulaires sur l'ensemble des matrices binaires.

2.2 DEFINITIONS ET RAPPELS

2.2.1 Graphe

Un graphe G est défini par un ensemble X de sommets, notés $x_1,\dots,x_n$, et par un ensemble U d'arcs, notés 1,...,m. Entre deux sommets x_i et x_j, il pourra exister plusieurs arcs allant du premier au second; on les notera alors: (x_i, x_j), $(x_i, x_j)'$ etc.

Nous avons utilisé les définitions classiques de la théorie des multigraphes données par C.Berge dans [2] , celle de t-cycles et de t-cocycles est un peu différente de [1] et [2] .

2.2.2 t-Cycle et t-cocycle

2.2.2.1 Un t-cycle μ d'un graphe est sous-graphe partiel de ce graphe, chaque composante connexe est une séquence d'arcs telle que:

1) tout arc de la séquence est relié au précédent par une de ses extrémités et au suivant par l'autre extrémité.

2) La séquence n'utilise pas deux fois le même arc.

3) Le sommet initial et le sommet terminal de la séquence coïncident.

Rappelons que l'on appelle cycle un sous-graphe partiel connexe satisfaisant 1), 2) et 3). Un t-cycle est élémentaire s'il n'utilise pas deux fois le même sommet. Nous parlerons d'une façon générale de t-cycle, même s'il est connexe.

Cette définition implique pour chaque composante connexe la possibilité d'un parcours.

μ^+ désigne l'ensemble des arcs de μ orientés dans le sens du parcours, μ^- celui de tous les autres arcs du cycle. $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_m)$ désigne un vecteur-cycle ou u-cycle de composante générale:

$$(1) \quad \mu_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \notin \mu \\ +1 & \text{si} \quad i \in \mu^+ \\ -1 & \text{si} \quad i \in \mu^- \end{cases}$$

Si μ^- est vide μ est un t-circuit.

2.2.2.2 - Si A est un ensemble de sommets, $\omega(A)$ désigne l'ensemble d'arcs incidents à A, $\omega^+(A)$ celui des arcs incidents vers l'extérieur, et $\omega^-(A)$ celui des arcs incidents vers l'intérieur. [2]

ω désigne un t-cocycle, c'est à dire un ensemble d'arcs de la forme $\omega(A)$, $(\omega(X-A))$, partitionnés en $\omega^+(A)$ et $\omega^-(A)$, $((\omega^-(X-A)$ et $\omega^+(X-A))$; il est dit élémentaire, s'il relie deux sous-graphes connexes d'une composante connexe du graphe.

La réunion de t-cocycles élémentaires disjoints est un t-cocycle. Donc si $\omega(Aj)$, $j=1,\dots,k$, sont des t-cocycles disjoints, $\bigcup_{j=1}^{k} \omega(Aj)$ est une t-cocycle. Il est appelé t-cocircuit, si tous les arcs sont orientés dans le même sens.

$\omega = (\omega_1,\dots,\omega_m)$ désigne un vecteur appelé vecteur-cocycle ou u-cocycle, de composantes

$$(2) \qquad \omega_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (\forall j) : i \notin \omega(Aj) \\ +1 & \text{si} \quad (\exists j) : i \in \omega^+(Aj) \\ -1 & \text{si} \quad (\exists j) : i \in \omega^-(Aj) \end{cases}$$

Un t-cocycle (un t-cycle) peut admettre différentes décompositions en t-cocycles élémentaires (cycles élémentaires), il est clair qu'à toute décomposition en k t-cocycles élémentaires (k t-cycles élémentaires) correspond 2^k u-cocycles (2^k u-cycles) puisqu'à chaque t-cocycle élémentaire (t-cycle élémentaire) correspondent deux vecteurs de signes opposés.

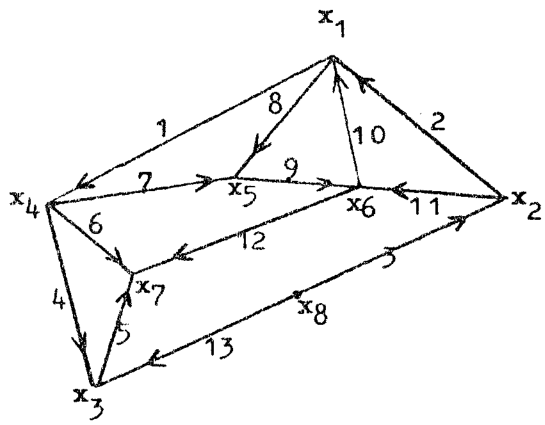


figure 1

Remarquons que la suppression des arcs d'un t-cocycle d'un graphe connexe peut déterminer plus de deux composantes connexes.

Le graphe partiel $\{7,8,10,11,3,13,5,6\}$ n'est pas à la fois un t-cocycle ω (ensemble d'arcs incidents à $\{x_5,x_6,x_7,x_8\}$), et un t-cycle μ, car si l'ensemble d'arcs est le même dans ω et μ, la partition est différente car

$$\mu = (0,0,-1,0,+1,-1,+1,-1,0,-1,-1,0,+1)$$

$$\omega = (0,0,+1,0,-1,-1,-1,-1,0,+1,-1,0,+1)$$

2.2.3 Reprenons les résultats donnés dans [1] :

Proposition I. Soit G un graphe avec n sommets, m arcs, p composantes connexes; les u-cycles engendrent dans R^m un sous-espace vectoriel de dimension $k(G)=m-n+p$; les u-cocycles engendrent un sous-espace vectoriel de dimension $l(G)=n-p$.

Proposition II. Soit G un graphe connexe, H un arbre partiel de G; si i est un arc de G ne figurant pas dans H, son adjonction à H détermine un t-cycle μ^i, et les différents u-cycles μ^i constituent une base de u-cycles indépendants.

Proposition III. Soit $G=(X,U)$ un graphe connexe, $H=(X,V)$ un arbre, $F=(X,U-V)$ son complémentaire (aussi appelé "co-arbre"); si i est un arc ne figurant pas dans F, son adjonction à F détermine un t-cocycle ω^i, et les différents u-cocycles ω^i constituent une base de u-cocycles indépendants.

Proposition IV . Si G est un graphe sans t-circuits, il admet une base de $l(G)=n-p$ u-cocircuits indépendants.

Proposition V. Si G est un graphe fortement connexe, il admet une base de $k(G)=m-n+p$ u-circuits indépendants.

Remarquons que les énoncés restent valables malgré l'extension que nous avons donné à la définition de cycle et cocycle.

Dans l'étude que nous poursuivons, nous désirons trouver la distinction entre les vecteurs du sous-espace vectoriel de R^m engendrés par une base de u-cycles qui sont des u-cycles, et les autres. De même pour les u-cocycles. Reprenons les définitions [1] de:

2.2.4 FLOT ET TENSION

S sera soit l'ensemble des réels R, soit l'ensemble des entiers Z. Soit G un graphe, dont les arcs sont numérotés 1, 2,...,m; un flot est un vecteur $\varphi=(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$, tel que

1) pour tout $i \leqslant m$, on a $\varphi_i \in S$, et le nombre φ_i est appelé le flux dans l'arc i,
2) pour tout sommet x, la somme algébrique des flux dans les arcs entrant dans x, est égale à la somme algébrique des flux dans les arcs sortant de x, en d'autres termes, on a:

$$(3) \qquad \sum_{i \in \omega^-(x)} \varphi_i = \sum_{i \in \omega^+(x)} \varphi_i \quad (x \in X)$$

Une tension (ou différence de potentiel) est un vecteur $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m) \in S^m$ tel que pour tout t-cycle élémentaire μ, on ait:

$$(4) \qquad \sum_{i \in \mu^+} \theta_i - \sum_{i \in \mu^-} \theta_i = 0$$

Théorème I:

Soit G=(X,U) un graphe connexe sans arêtes multiples, H=(X,V) un arbre partiel, 1,2,...,k les arcs de U-V, $\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^k$ les t-cycles correspondants (cf. proposition II) avec pour sens positif celui de leur arc de fermeture. Un flot $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$ est défini d'une façon unique par ses valeurs sur les arcs de U-V au moyen de la formule:

$$\varphi = \varphi_1 \mu^1 + \varphi_2 \mu^2 + \ldots + \varphi_k \mu^k \tag{5}$$

Corollaire:

La condition nécessaire et suffidante pour qu'un vecteur φ soit un flot, est qu'il soit de la forme: $\varphi = s_1 \mu^1 + s_2 \mu^2 + \ldots + s_k \mu^k$ où $s_1, s_2, \ldots, s_k \in S$ et où $\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^k$ sont des t-cycles élémentaires.

Théorème II:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur φ soit un flot de Φ^+ (composantes $\geqslant 0$) est qu'il soit de la forme:

$$\varphi = s_1 \mu^1 + s_2 \mu^2 + \ldots + s_k \mu^k \tag{6}$$

où $s_1, s_2, \ldots, s_k \in S$, $s_1, s_2, \ldots, s_k \geqslant 0$ et où $\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^k$ sont des t-circuits.

Théorème III:

Un vecteur $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)$ est une tension si et seulement s'il existe une fonction t(a) définie sur l'ensemble X des sommets, et à valeur dans S, telle que pour tout arc i on ait: θ_i=t (extrémité initiale de l'arc i) - t (extrémité terminale de l'arc i).

La fonction t(a) s'appelle le potentiel.

Théorème IV:

Soit $G=(X,U)$ un graphe connexe, $H=(X,V)$ un arbre partiel, $1,2,\ldots,$ les arcs de cet arbre, $\omega^1, \omega^2,\ldots,\omega^l$ les t-cocycles correspondants (cf. proposition III), avec pour sens positif celui de leur arc de fermeture. Une tension $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_m)$ est définie d'une façon unique par ses valeurs sur les arcs de l'arbre au moyen de la formule:

$$(7) \qquad \theta = \theta_1\,\omega^1 + \theta_2\,\omega^2 + \ldots + \theta_l\,\omega^l$$

LEMME DES ARCS COLORES:

Soit G un graphe, dont les arcs sont colorés, soit en rouge, soit en vert, soit en noir, et supposons l'arc $i=1$ en noir. On a une, et une seulement, des alternatives suivantes: 1) il passe par l'arc 1 un t-cycle élémentaire uniquement rouge et noir, avec tous les arcs noirs orientés dans le même sens. 2) Il passe par l'arc 1 un t-cocycle élémentaire uniquement vert et noir, avec tous les arcs noirs orientés dans le même sens.

Théorème V:

La condition nécessaire et suffisante pour que $\theta \in \Theta^+$ (ensemble des tensions de composantes $\geqslant 0$) est qu'il soit de la forme:

$$(8) \qquad \theta = s_1\,\omega^1 + s_2\,\omega^2 + \ldots + s_k\,\omega^k$$

où $s_1, s_2,\ldots,s_k \in S$, $s_1,s_2,\ldots,s_k \geqslant 0$, et où $\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^k$ sont des t-cocircuits élémentaires.

2.2.5 ESPACE VECTORIEL B^m.

Les espaces vectoriels (ou modules selon que l'on considère R^m ou Z^m) des flots et tensions paraissent être un outil insuffisant pour étudier les t-cycles et t-cocycles proprement dits au moyen des u-cycles et u-cocycles qui sont des éléments de R^m, mais ne forment pas de sous-espaces vectoriels de R^m. Nous montrerons que un vecteur de Φ dont les composantes sont +1, -1 ou 0 est un u-cycle, un vecteur de Θ dont les composantes sont +1, -1 ou 0 un u-cocycle.

2.2.5.1.

Introduisons B, le champ de Galois de deux éléments, et le groupe B^m du produit cartésien de m ensembles isomorphes à B. On sait [7] que l'extension de la somme modulo 2 à tout couple d'éléments de B^m définit un groupe et que la loi de composition externe X

(9) $\alpha X (a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} = (\alpha X a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, $\alpha \in B, (a_i)_{1 \leqslant i \leqslant m} \in B^m$

définit sur B^m une structure d'espace vectoriel. On sait d'autre part que l'extension de l'homomorphisme de l'anneau Z sur le corps quotient (Z/p) (p premier) à Z^m définit un homomorphisme du Z-module Z^m sur le (Z/p)-module $(Z/p)^m$ (qui est un espace vectoriel). Ceci nous intéresse pour p=2.

On considérera également l'extension de l'application $Z \rightarrow (Z/2)$ à l'ensemble des matrices. Si A est une matrice, $\underline{A}$ sera son image, si a est un vecteur, $\underline{a}$ sera son image etc... La somme modulo 2 sera écrite $\dot{+}$, le produit modulo 2 sera noté comme le produit habituel aussi bien pour les scalaires que pour les matrices. Rappelons qu'une forme linéaire est une application univoque $\sigma \in \underline{\underline{\Sigma}}$ de B^m dans B telle que

(9) $(\underline{a}, \underline{b}, \in B^m)$ $\sigma[\underline{a} \dot{+} \underline{b}] = \sigma[\underline{a}] \dot{+} \sigma[\underline{b}]$

(10) $(\alpha \in B, \underline{a} \in B^m)$ $\sigma[\alpha \underline{a}] = \alpha \sigma[\underline{a}]$

On en déduit:

(11) $\sigma[\underline{0}] = 0$

car

(12) $\underline{0} = \underline{x} \dot{+} \underline{x}$

(13) $\sigma[\underline{x} \dot{+} \underline{x}] = \sigma[\underline{x}] \dot{+} \sigma[\underline{x}] = 0$

On définit la loi de composition T sur $\underline{\underline{\Sigma}}$ par =

(14) $\quad (\sigma_1, \sigma_2 \in \underline{\underline{\Sigma}})\ (\underline{a} \in B^m) : (\sigma_1 \mathrm{T} \sigma_2)\ [\underline{a}] = \sigma_1 [\underline{a}] \dotplus \sigma_2 [\underline{a}]$;

et la loi externe X du corps B sur $\underline{\underline{\Sigma}}$ par

(15) $\quad (\sigma_1 \in \underline{\underline{\Sigma}})\ (\alpha \in B) : (\alpha \mathrm{X} \sigma)\ [\underline{a}] = \sigma[\alpha \underline{a}]$

lois qui définissent sur $\underline{\underline{\Sigma}}$ une structure d'espace vectoriel. L'élément inverse de σ pour la loi T est σ car

(16) $\quad (\sigma \mathrm{T} \sigma)\ [\underline{b}] = \sigma[\underline{b}] \dotplus \sigma[\underline{b}] = 0$

et l'application qui transforme tout élément de B^m en l'élément nul de B est l'élément neutre de $\underline{\underline{\Sigma}}$. Si $(\sigma \in \underline{\underline{\Sigma}})$ et $(\underline{b} \in B^m)$, σ est orthogonal à $\underline{b}$ si

(17) $\quad \sigma \underline{b} = 0$

On sait aussi que l'ensemble des formes linéaires orthogonales à un sous-espace de B^m de dimension r est un sous-espace vectoriel de dimension m-r. On sait de plus que l'on peut définir une application biunivoque de $\underline{\underline{\Sigma}}$ dans B^m qui permet une représentation commode de $\underline{\underline{\Sigma}}$ au moyen des éléments de B^m eux-mêmes. Soit $\underline{A}$ une base de B^m d'éléments $\underline{A}_1, \dots, \underline{A}_m$.

(18) $\quad (\underline{x} \in B^m) \Longrightarrow \underline{x} = \overset{m}{\underset{i=1}{\Sigma}}{}^{\dotplus}\ \underline{x}_i\ \underline{A}_i$

si $\underline{x}_i$ sont les composantes de $\underline{x}$ relatives à $\underline{A}$.

(19) $\quad \sigma[\underline{x}] = \overset{m}{\underset{i=1}{\Sigma}}{}^{\dotplus}\ \underline{x}_i\ \sigma[\underline{A}_i]$

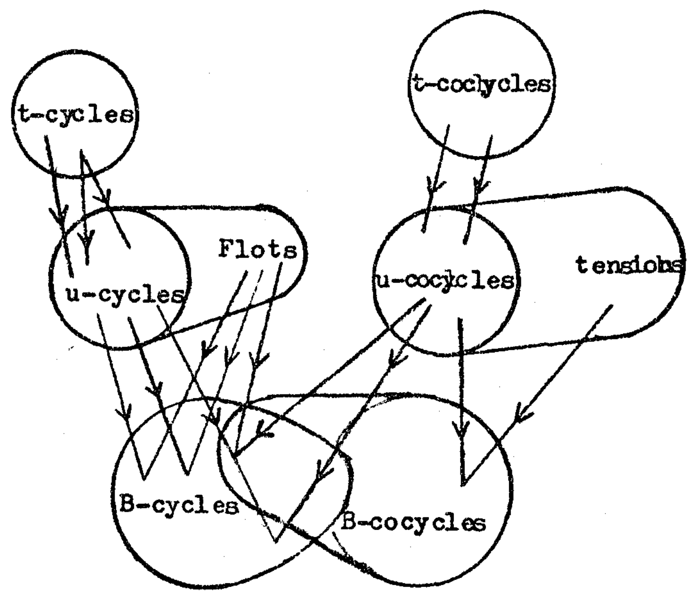
L'image de $\underline{x}$ par σ peut donc être calculée lorsqu'on connait les images des éléments d'une base de B^m. On peut donc identifier σ au vecteur de B^m dont les composantes sont $\sigma[\underline{A}_i]$, $1 \leq i \leq m$, l'ordre des éléments de la base étant fixé une fois pour toutes. Remarquons qu'une représentation analogue dans l'espace vectoriel Euclidien permet d'obtenir un sous-espace orthogonal à un sous-espace dont les éléments représentatifs dans cet espace Euclidien forment un ensemble disjoint de ce sous-espace. Ce ne sera pas le cas ici car un vecteur de B^m de norme paire (somme digitale des composantes égale à 0) se retrouve dans le sous-espace de B^m représentant le sous-espace orthogonal des formes linéaires. Par abus de langage au lieu de δ on parlera du vecteur de B^m qui le représente, c'est-à-dire, pour une base $\underline{A}$ le vecteur dont les composantes relativement à cette base sont $\delta[\underline{A}_i]$, $1 \leqslant i \leqslant m$, et on parlera de sous-espaces vectoriels orthogonaux de B^m.

2.2.5.2 - B-CYCLES ET B-COCYCLES

B-cycles et B-cocycles sont respectivement les images des u-cycles et des u-cocycles dans l'homomorphisme à $Z^m \longrightarrow B^m$.

2.3 t-CYCLES, t-COCYCLES ET STRUCTURES ALGEBRIQUES

2.3.1 - Nous imageons par la figure ci-dessous les correspondances que nous allons étudier.



Nous allons montrer que l'ensemble des vecteurs de B^m orthogonaux aux lignes de $\underline{A}$, homomorphe de A, matrice d'incidence de (X, Γ), graphe antisymétrique, constitue le sous-espace vectoriel des B-cycles de (X,Γ). Pour ce, nous montrerons que à tout $\underline{x}$ tel que $\underline{A}\ \underline{x} = \underline{O}$ correspond au moins un flot φ, tel que l'homomorphe $\underline{\varphi}$ de φ est égal à $\underline{x}$, avec φ_i égale +1, -1 ou O, $1 \leqslant i \leqslant m$ et qu'un tel flot est un u-cycle. Nous montrerons que le sous-espace vectoriel de B^m orthogonal au sous-espace des B-cycles est le sous-espace vectoriel des B-cocycles.

2.3.2 - Toutes les propriétés découlent du théorème:

Théorème VI:

Une condition nécessaire pour qu'une matrice A soit totalement unimodulaire est qu'à tout vecteur $\underline{x}$ de B^m tel que $\underline{A}\ \underline{x} = \underline{O}$ corresponde au moins un vecteur y de composantes +1, -1, ou O tel que A y = O, et tel que l'homomorphe $\underline{y}$ de y soit égal à $\underline{x}$.

Démontrons d'abord le lemme 1.

Soit M une matrice totalement unimodulaire, M est un système de vecteur-colonnes linéairement indépendants si et seulement si $\underline{M}$, homomorphe de M, est un système de vecteurs-colonnes linéairement indépendants dans B^m.

Si le déterminant d'une matrice carrée extraite de M est différent de O, il vaut $\pm$ 1. Son homomorphe vaut donc 1; s'il vaut O, son homomorphe vaut O. Réciproquement, si un déterminant extrait de M est pair, (homomorphe nul), il est nul, puisque M est totalement unimodulaire; s'il est impair, il est nécessairement différent de O.

Démonstration du théorème 7:

Soit $\underline{A}$ une matrice totalement unimodulaire, ne contenant aucune colonne égale à $\underline{O}$. Supposons donc qu'il existe un vecteur $\underline{t}$ de $B^m \neq \underline{O}$ tel que

(20) $\underline{A}\ \underline{t} = \underline{O}$

Supprimons dans A les colonnes correspondants aux composantes nulles de $\underline{t}$, soit B la matrice obtenue, $\underline{B}$ son homomorphe, on a donc

(21) $\underline{B}\ \underline{u} = \underline{0}$

$\underline{u}$ est un vecteur de B^m dont chaque composante égale 1. Soit p un vecteur-colonne de B et C la matrice obtenue en supprimant p de B, on a

(22) $\underline{C}\ \underline{v} = \underline{p}$

$\underline{v}$ étant un vecteur dont chaque composante égale 1. Extrayons de $\underline{C}$ un système minimum de vecteur-colonnes tels que leur somme modulo 2 est égale à $\underline{p}$. Soit $\underline{D}$ la matrice formée par ces vecteurs et $\underline{E}$ celle formée par l'ensemble complémentaire,

(23) $\underline{D}\ \underline{w} = \underline{p}$

$\underline{w}$ étant un vecteur dont chaque composante égale 1. Il est clair que $\underline{D}\ \underline{y} = \underline{p}$ a pour seule solution $\underline{y} = \underline{w}$, sinon il existerait un plus petit sous-ensemble D^* que D tel que $\underline{D}^*\ \underline{w} = \underline{p}$. Dès lors $\underline{D}$ est un système de vecteur-colonnes linéairement indépendant de B^m et D est un système de vecteur-colonnes linéairement indépendants. (Lemme).

Considérons l'équation

(24) $\underline{D}\ \underline{y} = \underline{p}$

Si $\underline{D}$ est carrée (24) a une solution unique (Lemme). Montrons qu'elle a une solution unique lorsque $\underline{D}$ n'est pas carrée. D forme avec p une matrice F dont toutes les sous-matrices carrées maximum ont un déterminant nul modulo 2, puisque $\underline{p}$ appartient au sous-espace vectoriel de B^m engendré par les vecteur-colonnes de $\underline{D}$. Mais alors les déterminants de ces matrices sont nuls puisque ils ne peuvent valoir que +1, -1 ou 0, et puisque D est un système de vecteur-colonnes linéairement indépendants, p appartient au sous-espace vectoriel Euclidien engendré par les vecteur-colonnes de D, d'où

(25) $(\exists\ y^*)\ :\ D\ y^* = p$

et y^* est unique. Toutes les composantes de y^* sont non nulles sans quoi l'homomorphe de y^{*} dans B^{m} serait différent de $\underline{w}$, soit $\underline{w}^{x}$ avec

(26) $\underline{D}\ \underline{W}^{x} = \underline{p}$

donc

(27) $\underline{D}(\underline{W} \dotplus \underline{W}^{x}) = \underline{O}$

y^{x} a ses composantes égales à +1, -1 puisque F est totalement unimodulaire. En refaisant sur $\underline{E}$ le raisonnement fait sur B, et ainsi de suite, on trouve qu'il existe un vecteur t, d'homomorphe $\underline{t}$, de composantes égales à +1, -1 ou 0 tel que

(28) $A\ t = 0$

2.3.3 Théorème VII:

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur μ de Φ de (X,Γ) soit un u-cycle est que ses composantes soient égales à +1, -1 ou 0.

La condition est nécessaire par définition du t-cycle (n'emprunte pas deux fois le même arc) et du u-cycle.

La condition est suffisante:

Considérons chacune des composantes connexes du graphe partiel défini par les composantes non nulles de μ, et changeons l'orientation des arcs de façon à ce que μ^{*} n'ait plus que des composantes positives ou nulles. (X,Γ) devient (X,Γ^{*}). Pour chaque sommet x, $d^{+}(x) = d^{-}(x)$, c'est-à-dire que le nombre d'arcs entrants est égal au nombre d'arcs sortants, donc [2] il existe un circuit Eulérien; donc chaque composante connexe est un cycle connexe de (X,Γ^{*}) et leur ensemble un t-cycle de (X,Γ). μ^{*} est une u-circuit de (X,Γ^{*}) et μ un u-cycle de (X,Γ).

Nous appellerons t-cocycle ou t-cocircuit Eulérien un t-cocycle ou t-cocircuit qui contient tous les arcs de (X,Γ).

2.3.4 Théorème VIII:

Un graphe (X,Γ) admet un t-cocircuit Eulérien si et seulement si tout u-cycle a autant de composantes +1 que -1.

1. La condition est nécessaire.

Soit $\bigcup_{j=1}^{k} \omega(A_j)$ un t-cocircuit Eulérien. Chaque composante de son u-cocircuit vaut 1. Puisque ce vecteur est orthogonal à chaque u-cycle, ces derniers ont autant de composantes égales à +1 qu'à -1.

2. La condition est suffisante.

Montrons-le sur une composante connexe du graphe. Le vecteur dont chaque composante vaut 1 est une tension θ puisqu'il est orthogonal à une base de cycles. Il existe donc un potentiel qui lui correspond. Ayant fixé arbitrairement la valeur du potentiel sur un sommet de la composante connexe, le potentiel se trouve défini par θ sur chaque sommet. [1]

On peut donc partitionner l'ensemble des sommets Y de cette composante en classes de sommets Y_t dont les potentiels valent t.

(29) $\quad (y,z)\in U \;,\; y \in Y_t \quad \text{et} \quad z \in Y_h \Longrightarrow t-h=1$

donc l'ensemble des arcs reliant des sommets de Y_t à des sommets de Y_{t-1} forment un t-cocircuit élémentaire qui sépare le graphe en deux composantes connexes définies par les ensembles $\bigcup_{i<t} Y_i$ et $\bigcup_{i\geqslant t} Y_i$. Soit $\omega(A_t)$ ce t-cocircuit. $\bigcup_{t\in Z} \omega(A_t)$ est un t-cocircuit Eulérien puisque chaque arc de (Y, Γ_Y) appartient à un $\omega(A_t)$. La réunion des t-cocircuits Eulérien des différentes composantes connexes de (X,Γ) forme un t-cocircuit Eulérien de (X,Γ).

2.3.5 Théorème IX:

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur ω de Θ de (X,Γ) soit un u-cocycle est que ses composantes soient égales à +1, -1 ou 0.

Une tension est une somme de u-cocycles élémentaires (corollaire du théorème IV) si cette tension est un u-cocycle, ces u-cocycles élémentaires peuvent constituer une partition du cocycle.

Soit ω un vecteur de Θ de (X, Γ) dont les composantes sont +1, -1 ou 0.

On changera l'orientation des arcs, (X,Γ) devient (X,Γ^*), de façon que ω^* n'ayant que des composantes positives ou nulles et ayant les mêmes composantes différentes de 0 que ω soit une tension de (X,Γ^*). Considérons le graphe partiel (Y,Γ^{**}) de (X,Γ^*) défini par les composantes non nulles de ω^*. ω^* est orthogonal à tous les u-cycles de (X,Γ^*); donc de (Y,Γ^{**}). Chaque u-cycle de (Y,Γ^{**}) a donc autant de composantes +1 que -1, et (Y,Γ^{**}) admet un t-cocircuit qui contient tous ses arcs. (théorème VIII).

Il reste à démontrer que ce t-cocircuit Eulérien $\bigcup_{t\in Z} \omega(A_t)$ de (Y,Γ^{**}) est un t-cocircuit de (X,Γ^*). Le vecteur ω^* est un potentiel de (X,Γ^*), donc tous les arcs de (X,Γ^*) n'appartenant pas à (X,Γ^{**}) joignent nécessairement des sommets équipotentiels. Chaque $\omega(A_t)$ est donc un t-cocircuit de (X,Γ^*). c.q.f.d.

<u>2.3.6</u> <u>Théorème X:</u>

<u>L'espace vectoriel de</u> B^m <u>orthogonal aux lignes de</u> $\underline{A}$ <u>est l'espace vectoriel des B-cycles</u>.

Le théorème de Poincaré [2] et le théorème I permettent de dire que Φ est l'ensemble des vecteurs orthogonaux aux lignes de A, matrice d'incidence de (X,Γ). A un vecteur de B^m orthogonal à $\underline{A}$ correspond un flot auquel il est homomorphe, (théorème VI), auquel correspond un t-cycle (théorème VII). Ce flot est donc un vecteur-cycle et le vecteur de B^m un B-cycle. Réciproquement un B-cycle est orthogonal à $\underline{A}$ puisque

$$(30) \qquad A\,x = 0 \Longrightarrow \underline{A}\,\underline{x} = \underline{0}$$

par l'homomorphisme $Z^m \longrightarrow B^m$, x ayant des coordonnées entières.

<u>2.3.7</u> <u>Théorème XI:</u>

<u>Le sous-espace vectoriel de</u> B^m <u>engendré par les vecteur-lignes de</u> $\underline{A}$, A <u>matrice d'incidence de</u> (X,Γ), <u>est l'ensemble des B-cocycles de</u> (X,Γ).

Soit $\underline{b}$ un élément du sous-espace vectoriel engendré par les lignes de $\underline{A}$.

$\underline{b}$ est donc la somme des vecteur-lignes correspondant à un sous-ensemble de sommet $Y \subset X$. Chaque arc de (Y, Γ_Y) sera représenté par deux composantes non nulles, l'une dans le vecteur-ligne correspondant à l'extrémité initiale, l'autre à l'extrémité terminale de cet arc. La composante de cet arc dans $\underline{b}$ sera donc nulle. Au contraire chaque arc incident extérieurement ou intérieurement à Y n'apparaîtra qu'une seule fois et la composante correspondante sera 1 dans $\underline{b}$. $\underline{b}$ est donc bien l'homomorphe de ω, u-cocycle correspondant au cocycle $\omega(Y)$ ou de ω^*, u-cocycle correspondant au t-cocycle $\omega(X-Y)$. Réciproquement, un B-cocycle appartient au sous-espace vectoriel engendré par les lignes de $\underline{A}$. Ce vecteur est la somme de vecteurs correspondant aux t-cocycles élémentaires disjoints. Chaque u-cocycle élémentaire est la somme des lignes de A correspondantes aux sommets qui définissent le cocycle élémentaire.

<u>Corollaire</u>:

<u>Le sous-espace des B-cycles orthogonal au sous-espace des B-cocycles est homomorphe au sous-module des flots de</u> Z^m, <u>orthogonal au sous-module des tensions de</u> Z^m.

Cela découle de ce qui précède et de l'homomorphisme $Z^m \to B^m$.

<u>Remarque</u>.

Du théorème VI on peut déduire que l'homomorphisme de Z^m sur B^m, restreint à l'ensemble Ψ des vecteurs de coordonnées +1, -1 ou 0, orthogonaux à une matrice totalement unimodulaire, est une application univoque de Ψ <u>sur</u> un sous-espace vectoriel de B^m.

La relation $\Psi_1 \equiv \Psi_2$ modulo 2, $\Psi_1, \Psi_2 \in \Psi$ est une relation d'équivalence R qui partitionne Ψ en classes. La loi de groupe additif au sous-espace vectoriel de B^m, image de Ψ, induit une loi de groupe additif sur l'ensemble quotient de Ψ par R.

2.3.8 CONCLUSIONS DU § 2.3

Nous avons deux conclusions à tirer de ce qui précède. D'abord l'étude des t-cycles et t-cocycles d'un p-graphe est ramenée à l'étude des vecteurs de composantes +1, -1, 0 des espaces vectoriels des flots et des tensions respectivement.

Le lecteur trouvera la suite logique de ce résultat dans le Chapitre III. Ensuite le fait que l'existence d'espaces vectoriels de B-cycles et de B-cocycles est expliquée par l'étude de l'homomorphisme modulo 2 dans les E-matrices nous suggère d'exploiter cet homomorphisme dans la caractérisation des E-matrices.

2.4 CARACTERISATION DES E-MATRICES

2.4.1 Définition

Soit A une matrice de coefficients +1, -1, 0, L l'ensemble de ses lignes, C l'ensemble de ses colonnes. On définit C U L la relation binaire:

(31) $$(c_i \in C)(l_j \in L) : u_{ij} \in \mathcal{U} \Longleftrightarrow c_i \; R \; l_j \Longleftrightarrow a_{ij} \neq 0$$

G(A) = (L U C, U) est appelé graphe de A. Par définition:

(32) $$l(u_{ij}) = a_{ij}$$

est la longueur de l'arête u_{ij}. La longueur déune chaîne ou plus généralement d'un graphe partiel de G(A) est la somme des longueurs des arêtes la composant. Les longueurs des cycles de G(A) étant nécessairement paires, on les dira bipaires ou biimpaires si elles sont respectivement de longueur multiples de 4 ou multiples de 4 plus 2. On dit qu'un cycle élémentaire a une corde, s'il existe un cycle contenant un sous-ensemble d'arêtes de ce cycle et une seule arête étrangère.

2.4.2 Résultats Connus et Conjectures

On connait le théorème, que nous avons amélioré en [44] :

Si chaque cycle de G(M) est bipaire, M est totalement unimodulaire.

Conjecture: (C.Berge)

M est totalement unimodulaire si tout cycle élémentaire biimpaire de G(M) a une

<u>corde</u>.

On peut l'énoncer aussi

M <u>..., si tout cycle élémentaire de</u> G(M) <u>sans corde est biimpaire</u>.

ou

M <u>..., si et seulement si tout sous-graphe a une base de t-cycles bipaires</u>.

C. Berge montre que:

ces conditions sont nécessaires; elles ne sont pas suffisantes, nous donnerons un contre-exemple.

Analysons l'effet de la longueur des cycles sur la valeur des mineurs de M.

Appelons B-couplage le B-vecteur correspondant à l'ensemble des arcs d'un couplage d'un sous-ensemble G dans L dans le graphe simple G(M). Si A est la matrice d'incidence de G(M):

(32) $\underline{A}\ \underline{x} = \underline{1}$

où chaque composante de $\underline{1}$ vaut 1 a pour solutions une variété linéaire de B-vecteurs qui contient les B-couplages. Soit $\underline{x}^1$ et $\underline{x}^2$ deux B-couplages, on a:

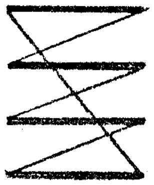
(33)
$$\underline{A}\ \underline{x}^1 = \underline{1}$$
$$\underline{A}\ \underline{x}^2 = \underline{1}$$

donc

(34) $\underline{A}(\underline{x}^1 \dotplus \underline{x}^2) = \underline{0}$

Par conséquent la somme de deux B-couplages est un B-cycle. Il est évident que un B- cycle élémentaire est la somme de deux B- couplage. D'autre part, chaque couplage correspond à une permutation dans une sous-matrice carrée de $\underline{M}$ donc à un terme non nul dans le développement de Laplace du déterminant de cette sous-matrice.

Montrons que les deux couplages d'un cycle élémentaire correspondent à des termes de signes opposés ou à des termes de mêmes signes selon que sa longueur est ou n'est pas multiple de quatre. Supposons d'abord toutes les arêtes du cycle de longueur +1. Le nombre d'inversions nécessaires pour



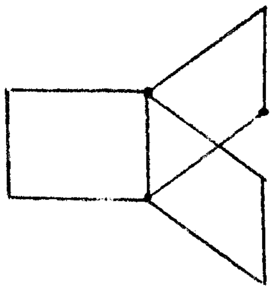
passer d'une permutation à l'autre est égal au nombre d'arêtes d'un couplage moins 1 (moitié du ~~un~~ nombre d'arêtes du cycle moins 1).

Si nous changeons le signe de la longueur d'un nombre impair d'arêtes, la demi-longueur du cycle modulo 2 augmente de 1 modulo 2, tandis que si nous changeons le signe de la longueur d'un nombre pair d'arêtes, le cycle de longueur (non) multiple de quatre reste de longueur (non) multiple de quatre.

S'il existe un cycle élémentaire biimpaire sans corde, le déterminant vaut donc 2.

Contre-exemple pour la conjecture:

G(M) :



Avec une longueur 1 sur chaque arête on a:

(35) $\quad \text{Dét}(M) = \pm\, 2$

Remarquons que G(M) a un cycle Eulérien. Nous formulons alors une nouvelle propriété des E-matrices que nous démontrons. Nous conjecturons que cette propriété caractérise les E-matrices sans pouvoir le démontrer ni donner de contre-exemple.

<u>2.4.3</u> Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des graphes de G(M) correspondant aux sous-matrices carrées de M.

<u>Théorème XII:</u>

<u>Une condition nécessaire pour qu'une matrice soit totalement unimodulaire est</u>

<u>que dans aucun graphe de $\mathfrak{X}$ il n'existe un cycle Eulérien biimpaire.</u>

Supposons donc qu'il existe un graphe de $\mathfrak{X}$ ayant un cycle Eulérien de longueur non multiple de quatre. Soit M la sous-matrice correspondant à ce graphe, on a:

$$(36)\quad \begin{cases} \underline{M}\ \underline{x}^{*} = \underline{0} \\ \\ \underline{M}'\underline{y}^{*} = \underline{0} \end{cases}$$

$\underline{x}^{*} = \underline{y}^{*}$ est de vecteur dont chaque composante vaut 1. $\underline{M}'$ est la transposée de $\underline{M}$. Par le théorème VI on sait que $(\exists x^{*})(\exists y^{*})$:

$$(37)\quad \begin{cases} M\ x^{*} = 0 \\ \\ M\ y^{*} = 0 \end{cases}$$

x^{*} est un vecteur dont l'homomorphe est $\underline{x}^{*}$.

y^{*} est un vecteur dont l'homomorphe est $\underline{y}^{*}$, leurs composantes valent +1 ou -1. Les composantes de x^{*} (de y^{*}) partitionnent l'ensemble des colonnes (des lignes) de M en deux ensembles. x^{*} et y^{*} partitionnent donc M en quatre matrices carrées qui ont pour somme des coefficients la même valeur q. La somme des coefficients de M est donc 4 q, et le cycle Eulérien ne peut pas être de longueur biimpaire.

<u>2.4.4</u> <u>Théorème XIII</u>:

<u>Une matrice M est totalement unimodulaire, si et seulement si toute sous-matrice carrée correspondant à un graphe ayant un cycle Eulérien est singulière.</u>

Il suffit de démontrer le théorème pour les matrices carrées. La démonstration sera faite par induction sur l'ordre des matrices. Le théorème étant vrai pour toute sous-matrice d'ordre $<k$, toutes les mineurs de M, matrice carrée d'ordre k pour laquelle l'hypothèse est vérifiée, valent +1, -1 ou 0. Nous supposons M régulière, dans le cas où elle est singulière, le théorème

est démontré. Soit $\underline{M}$ l'homomorphe de M dans B^m. $\underline{m}_{ij}$ le coefficient correspondant à m_{ij}. Nous allons distinguer le cas où tous les mineurs d'ordre k-1 de $\underline{M}$ valent l'élément unité de B et celui (où il ne peut pas exister de cycle Eulérien) ou un mineur d'ordre k-1 de $\underline{M}$ est l'élément nul de B. Pour ce, considérons le système:

$$\sum_{j=1}^{k}{}^{\dot{+}}\ \underline{m}_{ij}\ \underline{x}_j = 0\ ; \quad i \in I \tag{38}$$

I est un ensemble de k-1 entiers parmi les k premiers entiers. Soit $\mathcal{I}$ la famille des ensembles I. S'il n'existe pas une solution $\underline{x}_j^{\times}$ de (38) telle que

$$\prod_{j=1}^{k} \underline{x}_j^{\times} = 0 \tag{39}$$

et ce pour tout I de $\mathcal{I}$ on écrira le système

$$\sum_{i=1}^{k}{}^{\dot{+}}\ \underline{m}_{ij}\ \underline{y}_i = 0\ ; \quad j \in J \tag{40}$$

Et supposons qu'on ne trouve pas non plus un ensemble J de k-1 entiers parmi les k premiers entiers tel que

$$\sum_{i=1}^{k}{}^{\dot{+}}\ \underline{m}_{ij}\ \underline{y}_i^{\times} = 0 \Longrightarrow \prod_{i=1}^{k} \underline{y}_i^{\times} = 0 \tag{41}$$

Dans ce cas si le graphe n'est pas connexe, le système (38) peut être séparé en deux systèmes n'ayant aucune variable commune. A ces deux systèmes correspondent deux matrices carrées car si ces deux matrices étaient rectangulaires, il y aurait une solution $\underline{x}^{\times}$ à (38) telle que $\prod_{j=1}^{k} \underline{\underline{x}}_j^{\times} = 0$. Alors le déterminant de M a pour valeur le produit des déterminants des deux matrices carrées d'ordre $< k$. Si au contraire le graphe de M est connexe,

$$\text{Dét}(M) = 0 \tag{42}$$

puisque

$$\sum_{j=1}^{k}{}^{\dot{+}}\ \underline{m}_{ij} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{k}{}^{\dot{+}}\ \underline{m}_{ij} = 0 \quad ; \quad i,j=1,\ldots,k \tag{43}$$

et le graphe correspondant à M possède un cycle Eulérien [2] . Considérons alors le cas où les hypothèses faites sur les systèmes (38) et (39) ne sont plus satisfaites. Nous avons alors par exemple

$$(44) \qquad \sum_{j=1}^{k}{}^{+}_{\circ} \; \underline{m}_{ij}\, \underline{x}_j^{*} = \underline{0}; \qquad i=1,\dots,k-1$$

et $\underline{x}_k^{*} = 0$; $\underline{x}^{*} \neq \underline{0}$. Soit P la matrice carrée extraite de $\underline{M}$ correspondant au système

$$(45) \qquad \sum_{j=1}^{k-1} \underline{m}_{ij}\, \underline{x}_j = 0 \quad ; \quad i=1,\dots,k-1$$

Le déterminant de $\underline{P}$ est l'élément nul de B, donc, par le lemme I en 3.2, le déterminant de P est nul. De plus, par le théorème VI, on a

$$(46) \qquad \sum_{j=1}^{k-1} m_{ij}\, y_j^{*} = 0; \qquad i = 1,\dots,k-1$$

avec

$$(47) \qquad \underline{y}_j = \underline{x}_j; \; j=1,\dots,k-1$$

On a

$$(48) \qquad \sum_{j=1}^{k-1} m_{kj}\, y_j^{*} = p$$

$p \neq 0$ puisque M est régulière. Et il existe un système

$$(49) \qquad \sum_{j=1}^{k-1} m_{ij}\, y_j = a_i \qquad i \in I,\; I \neq \{1\} \cup \dots \{k-1\}\,,\; \{k\} \in I$$

et $\begin{cases} i \neq k \Longrightarrow a_i = 0 \\ a_k = p \end{cases}$

correspondant à une matrice régulière Q. En résolvant ce système on trouverait

$$y_j^{*} = \frac{p \circ \alpha_j}{\text{Dét}(Q)}$$

où α_j vaut +1, -1 ou 0. D'où p=+1 ou -1. Mais alors il y a au moins un élément $m_{kj} \neq 0$ dont l'annulation rend M singulière. Le déterminant de M est donc égal au mineur de cet élément, éventuellement changé de signe.

Remarque:

On voit que la valeur du déterminant de M lorsque toutes ses sous-matrices sont totalement unimodulaires vaut $\pm a_k$; a_k étant défini par (44) et par

(50) $$\sum_{j=1}^{k} m_{ij} z_j = 0 \; ; \quad i=1,\ldots,k-1$$

(51) $$\sum_{j=1}^{k} m_{kj} z_j = a_k$$

(52) $$\underline{z}_j = \underline{x}_j ; \; z_j = +1, -1 \text{ ou } 0.$$

S'il existe un cycle Eulérien, a_k est pair, il est multiple de quatre ou non selon que le cycle Eulérien est ou non bipaire. On peut changer les signes de lignes et de colonnes de M de manière que la somme des éléments de chaque ligne et de chaque colonne vaille 0 sauf pour la dernière ligne et la première colonne où cette somme vaut a_k. On aura au préalable opéré éventuellement une permutation des lignes et des colonnes pour que l'intersection de la dernière ligne et de la première colonne soit 0. (Dans le cas où tous les coefficients de M sont différents de 0, a_k=0 car le déterminant de M vaut 0. En effet par changement de signes de lignes et de colonnes on doit pouvoir transformer tous les coefficients de deux rangés parallèles en +1, sinon on aurait une sous-matrice du type $\begin{vmatrix} +1 & -1 \\ +1 & +1 \end{vmatrix}$ dont le déterminant vaut 2.)

Supposons pour fixer les idées $a_k > 0$. On a donc $a_k \geqslant 2$ et dans la première colonne de M comme dans la dernière ligne, on trouvera au moins deux coefficients +1 de plus que de coefficients -1.

Partant d'un coefficient +1 de la première colonne, que l'on effacera, on trouvera dans sa ligne un coefficient -1, que l'on effacera, puis dans la colonne de ce dernier un coefficient +1 etc... . On aboutira nécessairement à un coefficient +1 de la dernière ligne que l'on effacera. En opérant une seconde fois le processus on aura tracé dans le graphe associé à M un cycle de longueur non multiple de quatre. C'est une démonstration du premier théorème énoncé.

2.4.5 Diverses caractérisations des E-matrices

Les propositions suivantes sont équivalentes pour une matrice M, k x m, de coefficients +1, -1, 0:

a. M est une matrice totalement unimodulaire.

b. A tout vecteur $\underline{x}$ de B^m tel que $\underline{M}^* \underline{x} = \underline{0}$ correspond au moins un vecteur y de composantes +1, -1 ou 0 tel que $M^* y = 0$, et tel que l'homomorphe $\underline{y}$ de y soit égal à x, pour toute sous-matrice de lignes M^* de M.

c. A tout couple de vecteurs $\underline{x}$ et $\underline{p}$ de B^m tel que $\underline{M}\ \underline{x} = \underline{p}$ correspond au moins un couple de vecteurs y et q de composantes +1, -1 ou 0 tels que M y = q, et tels que $\underline{y} = \underline{x}$ et $\underline{q} = \underline{p}$.

d. Pour toute sous-matrice de lignes de M, on peut changer les signes de certaines de ces lignes, de manière que dans ses colonnes ayant un nombre pair d'éléments différents de 0 il y ait autant de +1 que de -1.

e. Toute sous-matrice carrée de M ayant un nombre pair d'éléments non-nuls dans chaque ligne et dans chaque colonne est singulière.

Nous venons de voir que e $\Longrightarrow$ a.

a $\Longrightarrow$ b est le théorème VI.

a $\Longrightarrow$ c se montre en appliquant le théorème VI à [M,I] où I est une matrice unité d'ordre k.

c $\Longrightarrow$ d, il suffit d'appliquer c à la transposée de M, de même pour b $\Longrightarrow$ d.

d $\Longrightarrow$ e est immédiat.

Une autre caractérisation est:

f. [M,I] est une matrice de Dantzig. C'est-à-dire: chaque colonne de [M,I] s'exprime au moyen d'une base de colonnes de [M,I] avec des coefficients +1, -1, 0.

Cette dernière caractérisation est très voisine de celle de Cederbaum [14] qui dit:

Soit

$$M\,x = y$$

un système linéaire où $x=(x_1,\ldots,x_n)$ et $y=(y_1,\ldots,y_n)$.

M _est une E-matrice si et seulement si pour tout sous-ensemble de_ n-1 _parmi les_ 2 n _variables_ x_i, y_i _annulées, on peut trouver une paire de vecteurs_ x,y, _avec_ $x \neq 0$ _satisfaisant le système et dans lequel toutes les variables restantes non spécifiées sont égales à_ +1, -1 _ou_ 0.

3. MATRICES TOTALEMENT UNIMODULAIRES ET GROUPES ABELIENS

3.1 u-espaces vectoriels

Un u-espace vectoriel V_k est un sous-espace vectoriel de Q^m (ou R^m) pour lequel il existe une base définissant une matrice k X m totalement unimodulaire. Q est le corps d'opérateurs pour Q^m. L'espace supplémentaire orthogonal V_{m-k} est alors nécessairement un u-espace. Il existe une E-matrice dont les lignes forment une base de V_k de la forme (I,A), il en existe donc une de V_{m-k} de la forme (A',-I) où A' est la transposée de A.

Soit G un groupe abélien quelconque. Au couple (V_k,G) on va faire correspondre un sous-groupe $(G^m)^*$ du groupe G^m. Nous parlerons d'une E-matrice, base de V_k, lorsque ses lignes forment une base de V_k.

La loi de composition du groupe est notée $\oplus$. On définit comme d'habitude la loi externe de multiplication sur G avec Z. Tout groupe Abélien G pouvant être considéré comme un Z-module G. Si $g \in G$, l'inverse de g est notée $\ominus$ g; on notera g_o l'élément nul de G aussi bien que de G^m. On a en particulier $o.g=g_o$, $(-1).g = \ominus g$, $1 \circ g = g$, et $n.g_o = g_o$, $n \in Z$.

3,2 Domaine d'opérateurs pour G^m

Si A et B sont des matrices carrées m x m sur Z, et $x = \langle x_i \rangle$ $(1 \leq i \leq m)$ un élément de G^m, écrivons avec le sens classique donné à cette notation,

(1) $\quad A\,x$

c'est un élément de G^m. On a

(2) $\quad A(Bx) = (AB)x$

par les propriétés du Z-module G^m.

Soit A une matrice m x m totalement unimodulaire régulière, x une variable sur G^m, g un élément de G^m. Il existe toujours un élément x^* de G^m tel que:

(3) $\quad A\,x^* = g$

CHAPITRE III

MATRICES TOTALEMENT UNIMODULAIRES ET GROUPES ABELIENS

En effet, puisque A^{-1} a ses coefficients dans Z, soit

(4) $x^{*} = A^{-1} g$,

on a

(5) $A(A^{-1} g) = (A A^{-1})g = g$

Nous prouverons qu'elle est unique.

3.3 Bijections de G^k dans G^m

3.3.1 Théorème I:

Soit B une matrice m x k, $k \leqslant m$, totalement unimodulaire; elle est de rang k si et seulement si

(6) $B x = g_o$

admet pour seule solution $x = g_o$, g_o étant l'élément nul de G^k ou de G^m.

Démontrons d'abord le lemme 1:

3.3.1.1 Une matrice A unimodulaire à la propriété

(7) $\text{Dét}(A) = \varepsilon \Longrightarrow [\text{Dét}(A)]_p \equiv \bar{\varepsilon}$

avec

(8) $\bar{\varepsilon} = \varepsilon$ mod. p.

p étant un nombre premier différent de 1.

ε est $\pm$ 1 pour Z, ou o et son image dans l'un quelconque des homomorphismes envisagés est respectivement $\pm \bar{1}$ ou $\bar{0}$. $\Longrightarrow$ est évident par l'homomorphisme de l'anneau des entiers rationnels sur le corps des classes modulo p, p premiers, $p \neq 1$. Pour la réciproque supposons $\bar{\varepsilon} = \bar{0}$.
Soit $[\text{Dét}(A)]_p = \bar{0}$ et $\text{Dét}(A) \neq 0$, alors $\text{Dét}(A) = \pm 1$, l'image de 1 ou -1 dans l'homomorphisme de Z sur un groupe additif quelconque ne peut être $\bar{0}$, car le groupe cyclique engendré par 1 (ou -1) aurait pour image $\bar{0}$ et l'homomorphisme

serait celui qui fait correspondre $\bar{0}$ à tout entier, c'est-à-dire celui des classes modulo 1. On a donc:

$$\text{Dét}(A) \neq 0 \Longleftrightarrow \text{Dét}(A) \not\equiv 0 \text{ mod. } p$$

puisque A est unimodulaire, le lemme est démontré.

3.3.1.2

La condition suffisante se démontre immédiatement. Si une E-matrice B $m \times k$, $k \leq m$ est de rang $< k$, on a

(9) $\quad B\,a = 0,\ a \neq 0$

a est un vecteur de composantes +1, -1, 0. (Chapitre II).
En multipliant par $g \in G$, $g \neq g_0$, chaque ligne du système linéaire (9), on obtient:

(10) $\quad B\,g_a = g_0$, avec $g_a \neq g_0$.

3.3.1.3

La condition est nécessaire. Montrons le d'abord pour k=m, par récurrence sur m. Supposons donc que pour toute E-matrice D d'ordre m-1, régulière,

(11) $\quad D\,x = g_0 \Longrightarrow x = g_0,\ x,\ g_0 \in G^{m-1}$

et supposons par impossible

(12) $\quad A\,g^{\dagger} = g_0,\ g^{\dagger},\ g_0 \in G^m,\ g^{\dagger} \neq g_0$

A étant une E-matrice $m \times m$ régulière. Système qu'on écrira

(13) $$\sum_{1 \leqslant j \leqslant m}^{\oplus} A_j\,g_j = g_0,\ A_j\,g_j \in G^m (1 \leqslant j \leqslant m)$$

ou

(14) $$\sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ j \neq k}}^{\oplus} A_j\,g_j = A_k\,g_k,\quad g_k \neq g_0$$

Système qu'on écrira:

$$(15) \qquad B\,x^{*} = g \quad , \quad x^{*} = \langle g_j \rangle \quad (1 \leqslant j \leqslant m,\ j \neq k)$$
$$g = A_k\, g_k$$

B est une E-matrice (m-1) x m de rang m-1 puisque A est de rang m. Extrayant de B une matrice régulière D, (m-1)x(m-1) on déduit de (22):

$$(16) \qquad D\,x^{*} = g^{*} \quad , \quad g^{*} \in G^{m-1}$$

Soit $x^{**} = D^{-1} g^{*}$, et supposons $x^{*} \neq x^{**}$. On a alors:

$$(17) \qquad D(x^{*} \ominus x^{**}) = g_0 \qquad (\ominus\, x^{**} = \oplus (-1)\, x^{**})$$

donc $x^{*} \ominus x^{**} = g_0$, puisque D est une E-matrice régulière (m-1)x(m-1), donc

$$(18) \qquad x^{*} = D^{-1} g^{*} = D^{-1} A_k^{*}\, g_k$$

A_k^{*} est la projection de A_k sur le sous-espace correspondant aux lignes de D. Mais

$$(19) \qquad D^{-1} A_k^{*} = d$$

d a pour composantes +1, -1 ou 0, car $[A_k, D]$ étant une matrice de Dantzig, A_k s'exprime au moyen de la base D avec des coefficients +1, -1 ou 0 (non tous nuls). (14) s'écrit alors, puisque $x^{*} = \langle g_j \rangle$ (15), (18), (19),

$$(20) \qquad g_k \Big(\sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ j \neq k}} A_j\, n_j - A_k \Big) = g_0 \quad ;$$

les m-1 composantes de $\sum\limits_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq k}} A_j\, n_j - A_k$ correspondantes à D, donc a A_k^{*}, sont nulles. n_j vaut +1, -1 ou 0, $1 \leqslant j \leqslant m$, $j \neq k$. Montrons que la composante de ce vecteur non envisagée vaut +1 ou -1 et que dès lors on aboutit à l'absurdité $g_k = g_0$ ou $\ominus\, g_k = g_0$. Pour ce, il suffit de constater que pour p premier, $p \neq 1$, si nous envisageons tous les homomorphismes de l'anneau des entiers sur les champs de Galois de p éléments, on a

$$(21) \qquad \text{Dét}(A) = \varepsilon \iff [\text{Dét}(A)] \text{ mod. } p = \bar{\varepsilon}$$

ε désignant l'élément nul, l'élément unité ou son opposé pour l'un quelconque des groupes additifs modulo p ou des entiers. Par conséquent

(22) $\quad A\, d^{*} = q$

$d^{*} \neq 0$, ses composantes non nulles valant +1 ou -1 et q ayant une seule composante $\neq 0$, si la composante non nulle de q est $\neq \pm 1$, pour un certain p,

(23) $\quad A_p\, d_p = 0$

A_p est A, d_p est d, chaque coefficient étant pris modulo p. Mais alors

(24) $\quad [\text{Dét}(A)]_p = \bar{0}$

puisque d_p est toujours $\neq \bar{0}$, et

(25) $\quad \text{Dét}(A) = 0$

Puisque A est régulière, la composante non nulle de q vaut donc bien +1 ou -1, ce qui est l'absurdité annoncée.

Si une E-matrice B de dimension m x k, $k \leq m$ est de rang k, il existe une E-matrice A carrée d'ordre k dans B régulière, ce qui achève la démonstration.

3.3.2

Une E-matrice carrée régulière définit un opérateur linéaire régulier pour tout groupe abélien G^m.

Théorème II:

Une E-matrice carrée A est régulière si et seulement si A x = g admet une solution et une seule.

Classiquement nous avons:

(26) $\quad A\, x^{*} = g \quad \text{et} \quad A\, x^{**} = g \Longrightarrow A(x^{*} \ominus x^{**}) = g_0$

Si $x^{*} \neq x^{**}$ A est singulière, par le théorème précédent. Si A est singulière et si

(27)

$A\ x^{*} = g$

(28) $(\exists\ y^{*}),\quad y^{*} \neq g_0 : A\ y^{*} = g_0$

donc

(29) $A(x^{*} \oplus y^{*}) = g$

et l'on a évidemment $x^{*} \oplus y^{*} \neq x^{*}$, puisque $y^{*} \neq g_0$.

3.3.3 AUTOMORPHISMES DE G^m

Les E-matrices ne sont pas les seules matrices à coefficients entiers à jouir de cette propriété; en effet, le produit de deux E-matrices n'est pas une E-matrice et pourtant c'est un opérateur linéaire régulier.

Exemple

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Théorème III:

Le sous-groupe des matrices unimodulaires d'ordre m, engendré par les E-matrices régulières d'ordre m, est un ensemble d'opérateurs réguliers pour G^m, G étant un groupe quelconque.

3.3.3.1

De ce qui précède, on déduit que toute E-matrice k x m de rang k définit un isomorphisme de G^k sur un sous-groupe de G^m; dhaque u-espace de Q^m définit un domaine d'opérateurs pour un sous-groupe de G^m.

3.4

Montrons que toute E-matrice B, base d'un sous-espace V_k de Q^m définit le même isomorphisme. (On pourrait parler aussi bien du Z-module engendré par B). Rappelons que un espace V_k qui a pour base une D-matrice, donc une E-matrice, est appelé u-espace. Nous démontrerons donc;

3.4.1 Théorème IV:

Tout u-espace vectoriel V_k de Q^m définit un ensemble d'isomorphismes de G^k dans le même sous-groupe de G^m, G étant un groupe abélien quelconque.

Considérons deux bases B et C, k x m, de V_k, E-matrices de k lignes et m colonnes. Si des colonnes sont égales, on n'aura conservé qu'un représentant par classe d'équivalence. Adjoignons des colonnes à B de façon à obtenir B^*, matrice maximale pour la propriété d'unimodularité totale. B^* est finie puisqu'on n'adjoint pas deux fois la même colonne.

(30) soit $T\,B = C$ et $T\,B^* = C^*$,

montrons que T est une E-matrice. T est nécessairement unimodulaire. B^* est nécessairement normale (contient une matrice unité d'ordre k). C^* est aussi normale, sans quoi, on pourrait adjoindre à C^* des vecteurs unités qui ne s'y trouvent pas encore et obtenir C^{**}. Mais $T^{-1}\,C^{**}$ serait une D-matrice contenant strictement les colonnes de B^*, contenant donc une matrice unité, donc totalement unimodulaire. C'est absurde puisque B^* est maximale. C^* est donc normale, et T est l'inverse d'une sous-matrice carrée A de B^*, donc totalement unimodulaire en vertu du théorème XVII Chap. 1. Donc:

(31) $C' = B'\,T'$

' signifiant "la transposée" et

(32) $(g \in G^k)$, $C'\,g = B'\,T'\,g$

$T'\,g$ parcourt G^k lorsque g parcourt G^k (théorème II), donc l'image de G^k par C' dans G^m est le même sous-groupe que l'image de G^k par B'.

Corollaire:

Une matrice régulière qui transforme une E-matrice en une E-matrice est une E-matrice.

3.4.2 A un u-espace V_{m-k}, muni d'un groupe abélien G, correspond un sous-groupe de G^m, $V_{m-k}(G^m)$, appelé sous-groupe des u-flots. A l'u-espace orthogonal V_k muni de G correspond un sous-groupe de G^m, $V_k(G^m)$, appelé sous-groupe, des u-tensions.

3.5

Une conséquence importante de la propriété d'unimodularité totale.

3.5.1

Une démonstration unique pour chaque théorème sur les flots et les tensions.

Les appellations flots et tensions sont donc échangeables de sorte que du théorème de base que nous allons démontrer il suffira chaque fois d'une démonstration unique pour dériver, dans les graphes, des propriétés de flots et tensions, cycles et cocycles, circuits et cocircuits. On a vu dans le chapitre II qu'un u-vecteur de l'espace des flots (tensions) d'un graphe est un cycle (cocycle). Ce théorème de base généralise, comme nous le verrons, deux théorèmes de A.J.Hoffman [41] , [40] et un théorème de B-Roy [12] , un des théorèmes de A.J.Hoffman et le théorème de B.Roy ayant déjà été formalisés et démontrés en termes de groupes abéliens par A.Ghouila-Houri [13] . Nous reprenons ici les quatre axiomes de A.Ghouila-Houri définissant une famille $\mathfrak{A}$ de parties d'un groupe abélien. L'exposé qui précède et qui aboutit à la définition des sous-groupes de u-flots et de u-tensions nous permettra de démontrer par récurrence sur la dimension de V_k (démonstration valable pour V_{m-k}) ce qui était démontré par récurrence sur le nombre de sommets et le nombre d'arcs d'un graphe dans [13] .

3.5.2 Extension des définitions connues pour les réseaux

Un vecteur élémentaire v de V_k(de V_{m-k}) est tel qu'il n'existe pas un vecteur de V_k dont l'ensemble des composantes non nulles est strictement contenu dans celui de v. Un u-vecteur élémentaire est un vecteur élémentaire de composantes +1, -1 ou 0. Soit I l'ensemble des axes coordonnés de Q^m, I_v^+ et I_v^- respectivement les ensembles de composantes égales à +1 et -1 dans le u-vecteur élémentaire v. On associe à chaque axe $i \in I$ un ensemble non vide d'éléments de G, $C(i)$, appelé capacité. Un u-flot admissible est un élément $\langle g_i \rangle (i \in I)$ de $V_{m-k}(G^m)$ tel que

(33) $\quad (i \in I) \Longrightarrow g_i \in C(i)$

Soit $\mathcal{A}$ une famille de parties de G vérifiant les quatre axiomes:

(34)
I_1 : $X \in \mathcal{A} \Longrightarrow (\ominus X) \in \mathcal{A}$;

I_2 : $X \in \mathcal{A}$ et $Y \in \mathcal{A} \Longrightarrow (X \oplus Y) \in \mathcal{A}$;

I_3 : $x \in X$ et $X \in \mathcal{A} \Longrightarrow \{x\} \in \mathcal{A}$;

I_4 : toute famille finie d'éléments de $\mathcal{A}$, ayant deux à deux une intersection non vide, a une intersection non-vide. Il existe toujours une famille telle que $\mathcal{A}$, par exemple $\mathcal{A} = \bigcup_{g \in G} \{g\}$

3.5.3 Théorème V:

Soit V_k un u-espace de Q^m, V_k^* l'ensemble de ses u-vecteurs élémentaires, $C(i)$ $(i \in I)$, la famille de capacités, associées au système d'axe coordonné, prises dans la famille $\mathcal{A}$; une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un u-flot g admissible est que:

(35) $\quad (v \in V_k^*) \Longrightarrow g_0 \in \sum^{\oplus}_{i \in I_v^+} C(i) \ominus \sum^{\oplus}_{i \in I_v^-} C(i)$

3.5.3.1 La condition est nécessaire.

Soit $B = [I, A]$ une E-matrice normale dont les lignes engendrent V_k, les lignes de $C = [A', -I]$ engendrent alors V_{m-k}. On définit comme précédemment v.g, où v est un u-vecteur élémentaire de V_k, g un élément de $V_{m-k}(G^m)$, donc un u-flot, mais admissible. Montrons que v.g est l'élément nul de G.

(36) $\quad v.g = \sum^{\oplus}_{i \in I} \left(\left(\sum^{+}_{j \in K} b_{ij}\, d_j \right) \left(\sum^{\oplus}_{k \in K'} c_{ik}\, g_k \right) \right)$

K et K' étant respectivement les ensembles (1,...,k) et (1,...,m-k).

(37) $\quad v.g = \sum^{\oplus}_{j \in K} \left(\sum^{\oplus}_{k \in K'} g_k \left(\sum^{+}_{i \in I} b_{ij}\, c_{ik}\, d_j \right) \right)$

(38) $\quad \sum^{+}_{i \in I} b_{ij}\, c_{ik} = 0,$

puisque V_k et V_{m-k} sont orthogonaux, donc

(39) $\quad v.g = g_0$

Puisque $g_i \in C(i)$, la condition nécessaire est démontrée.

3.5.3.2 La condition est suffisante.

3.5.3.2.1 Montrons d'abord que si

(40) $\quad (v \in V_k^*) \Longrightarrow v\, g = g_0,$ alors

(41) $\quad g \in V_{m-k}(G^m)$

Chaque u-vecteur, s'il n'est pas élémentaire, peut être décomposé en une somme de vecteurs élémentaires, disjoints. Car un u-vecteur est orthogonal aux vecteurs d'une base de l'u-espace orthogonal, donc aux lignes d'une D-matrice. La propriété découle alors de la définition de D-matrice. On a:

(42) $\quad B.g = g_0$

ou,

(43) $$\sum_{k+1 \leqslant j \leqslant m}^{\oplus} a_{ij}\, g_j = -g_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant k$$

a_{ij} est le coefficient général de A. Si l'on écrit

(44) $\quad x_k^* = -g_k \quad k+1 \leqslant k \leqslant m,$

(43) et (44) s'écrivent

(45) $$\begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix} x^* = g \qquad \text{ou} \quad C'\, x^* = g.$$

Donc $g \in V_{m-k}(G^m)$, puisque C est totalement unimodulaire (4.1 théorème IV).

3.5.3.2.2

Pour k=1 le théorème est vrai, soit v le vecteur ligne unique de B. (35) nous assure que

(46) $\quad (\forall_i)(\exists\, g_i),\ g_i \in C(i) : v \langle g_i \rangle \quad (1 \leqslant i \leqslant m) = g_0$

$g^{*} = \langle g_i \rangle$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ est donc, par 3.5.3.2.1 un u-flot admissible.

Montrons que si la condition est suffisante pour k=r-1, elle l'est pour k=r.

Si

(47) $\qquad (\forall i) : \ |C(i)| = 1$

le théorème est démontré car $\langle g_i \rangle$, $g_i = C(i)$, est un u-flot admissible par (35) et 3.5.3.2.1. Si

(48) $\qquad (\exists j) : \ |C(j)| > 1$

nous allons montrer que l'on peut réduire C(j) à un seul élément de façon à ce que le nouveau système de capacité ainsi obtenu satisfasse (35). Le théorème sera alors démontré. Montrons qu'il existe

(49) $\qquad g_j^{*} \in C(j)$

tel que

(50) $$(v \in V_r^{*}) \ (j \in I_v^{+}) \Longrightarrow g_j^{*} \in \sum_{i \in I_v^{-}}^{\oplus} C(i) \ominus \sum_{\substack{i \in I_v^{+} \\ i \neq j}}^{\oplus} C(i)$$

donc

(51) $$g_0 \in (-1) \Big(\sum_{i \in I_v^{-}}^{\oplus} C(i) \ominus \sum_{\substack{i \in I_v^{+} \\ i \neq k}}^{\oplus} C(i) \ominus \{g_j^{*}\} \Big)$$

$\{g_j^{*}\}$ sera donc le nouveau C(j) annoncé, puisque $\{g_j^{*}\} \in \mathfrak{a}$ par I_3 ou I_1 et I_2.

Si l'on prouve

(52) $$\bigcap_{v \in V_r^{*}} \Big(\sum_{i \in I_v^{-}}^{\oplus} C(i) \ominus \sum_{\substack{i \in I_v^{+} \\ i \neq j}}^{\oplus} C(i) \Big) \neq 0$$

on aura montré qu'un tel g_j^{*} existe, puisque si

(53) $$c_{v,j} = \sum_{i \in I_v^{-}}^{\oplus} C(i) \ominus \sum_{\substack{i \in I_v^{+} \\ i \neq j}}^{\oplus} C(i)$$

par (35).

(54) $\quad (v \in V_r^*) : C_{v,j} \cap C(j) \neq \emptyset$

Par I_1 et I_2, $C_{v,j} \in \mathcal{a}$, par (52), (54) et I_4, (49) et (50) seront donc vérifiés. Pour prouver (52), nous allons montrer qu'il existe un u-flot admissible pour le système de capacités

$$(55) \quad \begin{aligned} C^*(i) &= C(i) \qquad i \neq j \\ C^*(j) &= G \end{aligned}$$

Soit g^{**} un tel u-flot, (35) sera vérifié pour les capacités $C^*(i)$, donc

$$(56) \quad g_j^{**} \in \bigcap_{v \in V_r^*} \Big(\sum_{i \in I_v^-}^{\oplus} C(i) \; - \sum_{\substack{i \in I_v^+ \\ i \neq j}}^{\oplus} C(i) \Big)$$

et (56) $\Longrightarrow$ (52).

Avant de construire le flot g^{**}, observons que, si nous changeons de base pour V_k

$$(57) \quad B \longrightarrow TB = D$$

de manière que D soit totalement unimodulaire et normale

$$(58) \quad (g \in G^m) : T.Bg = g_0$$

Par le même raisonnement qu'en 3.5.3.2.1., on peut alors montrer que g est l'image dans G^m d'un élément de G^k au moyen d'une transformation linéaire représentée par une E-matrice de rang k, base de V_{m-k}.
g est donc un u-flot de $V_{m-k}(G^m)$. Soit donc T une matrice construite à partir de la matrice unité k x k en remplaçant son $t^{ème}$ vecteur par b_j^*. Le $j^{ème}$ vecteur colonne de B étant b_j, si b_{tj} est un élément non nul de ce vecteur:

$$(59) \quad \begin{aligned} b_{ij}^* &= b_{ij} \qquad i \neq t \\ b_{tj}^* &= -b_{tj} \end{aligned}$$

On sait que

(60) $\quad T\ b_j = e_t$

où e_t est le vecteur unité dont la $t^{ème}$ composante est 1 et que D est normale. (Cette transformation est celle qui introduit le vecteur b_j dans la base dans la méthode du simplexe). T est unimodulaire, TB étant normale est une E-matrice. Supprimons le $t^{ème}$ vecteur ligne de T.B, soit E la matrice obtenue, E est une E-matrice à quoi correspond un u-espace V_{r-1}, sous-espace de V_r.

(61) $\quad v \in V^{*}_{r-1} \Longrightarrow v \in V^{*}_{r}$

Par (35) il existe donc $g^{\dagger}$ admissible avec

(62) $\quad E\ g^{\dagger} = g_0$

puisque (35) suffit pour k=r-1.

$g_j^{\dagger}$, dans (62) est coefficient du vecteur nul, remplaçons le par g_j^{**} défini par

(62) $$g_j^{**} = \sum^{\oplus}_{\substack{1 \leqslant s \leqslant m \\ s \neq j}} - d_{ts} \cdot g_s^{\dagger}$$

g^{**} est le vecteur ainsi obtenu, on a

(63) $\quad D\ g^{**} = g_0$

g^{**} est donc un u-flot de $V_{m-k}(G^m)$ admissible pour (55). c.q.f.d.

3.6 COROLLAIRES DU THEOREME V

3.6.1 Corollaire I

(A.J.Hoffman [41])(M. Hoffman nous a conseillé d'examiner la relation entre ce theorème et nos résultats). Soit R un ensemble d'éléments $\{P_1, \ldots, P_n\}$ et soit $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ une famille de sous-ensembles de R. Soit $a_i \leqslant b_i$ $(i=1,\ldots,m)$ des entiers donnés et $0 \leqslant w_j (j=1,\ldots,n)$ des entiers donnés.

<u>Si la matrice</u> m x n <u>d'incidence des ensembles</u> S_i, <u>vis à vis des éléments</u> P_j,

est totalement unimodulaire, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des entiers $x_j (j=1,\dots,n)$ satisfaisant $0 \leqslant x_j \leqslant w_j (j=1,\dots,n)$ et

(64) $$a_i \leqslant \sum_{P_j \in S_i} x_j \leqslant b_i \quad (i=1,\dots,m)$$

est que si

(65) $$(A \subset \{1,\dots,m\}) : n_j(A) = \left|\{i/P_j \in S_i,\ i \in A\}\right| \quad , j=1,\dots,n$$

(66) $$A, B, \subset \{1,\dots,m\} \qquad A \cap B = \emptyset$$

et valeur absolue de $(n_j(A) - n_j(B)) \leqslant 1$, $(j=1,\dots,n)$, implique

(67) $$\sum_{i \in A} a_i \leqslant \sum_{i \in B} b_i + \sum_{n_j(A) > n_j(B)} w_j$$

Transformons un peu la formalisation de cet énoncé. Soit M la matrice m x n de coefficients m_{ij}

(68) $$m_{ij} = 1 \Longleftrightarrow P_j \in S_i$$

sinon

(69) $$m_{ij} = 0$$

Soit

(70) $$\begin{aligned} x &= \langle x_j \rangle && (1 \leqslant j \leqslant n) \\ w &= \langle w_j \rangle && (1 \leqslant j \leqslant n) \\ a &= \langle a_t \rangle && (n+1 \leqslant t \leqslant n+m) \\ b &= \langle b_t \rangle && (n+1 \leqslant t \leqslant n+m) \\ z &= \langle z_t \rangle && (n+1 \leqslant t \leqslant n+m) \end{aligned}$$

(71) $$y = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

(72) $$Q = [M, -I]$$

(64) s'écrit

(73) $Q\,y = 0 \qquad 0 \leqslant x \leqslant w, \quad a \leqslant z \leqslant b$

car (73) implique

(74) $M\,x = I\,z = z, \quad 0 \leqslant x \leqslant w, \quad a \leqslant z \leqslant b$

ce qui est équivalent à (64). D'autre part (64) $\Longrightarrow$(74) $\Longrightarrow$(73). Soit G=Z le groupe additif des entiers rationnels, $\mathcal{Q}$ la famille des intervalles définie par la relation d'ordre totale < habituelle.

(75) $I \in \mathcal{Q} \Longrightarrow [(a,\ b \in I) \Longrightarrow ((a < c < b) \Longrightarrow (c \in I))]$

$\mathcal{Q}$ satisfait les axiomes de Ghouila-Houri, car la fermeture convexe des éléments de $\mathcal{Q}$ dans R définit $\sigma\mathcal{Q}$. $\sigma\mathcal{Q}$ est une famille d'ensembles convexes fermés satisfaisant I_4 par le théorème de Helly [42] p.211. Il suffit alors d'observer que

(76) $(I,\ I' \in \mathcal{Q}) : \sigma I \cap \sigma I' \neq \emptyset \Longleftrightarrow I \cap I' \neq \emptyset$

et $I \cap I' \in \mathcal{Q}$ car $|N|$ étant fini,

(77) $I_i \bigcap\limits_{i,j \in N} I_j \neq \emptyset \Longrightarrow \sigma I_i \bigcap\limits_{i,j \in N} \sigma I_j \neq \emptyset \Longrightarrow (\bigcap\limits_{i \in N} \sigma I_i \neq \emptyset) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow (\bigcap_{i \in N} I_i \neq 0)$$

La dernière implication se démontre par récurrence; supposons la vraie pour $|N| - 1$ intervalles non vides, par (76) il est permis de remplacer, dans chacun des deux membres de cette implication, deux intervalles par leur intersection non vide. Dès lors, il existe pour (73) une solution y admissible si et seulement si pour tout u-vecteur élémentaire v, orthogonal aux lignes de $T = [I,\ M']$, on a (soit $v = [v_1, v_2]$ pour séparer les composantes relatives à I et M')

(78) . $\displaystyle\sum_{i \in I^+_{v_2}} a_i \leqslant \sum_{i \in I^-_{v_2}} b_i + \sum_{j \in I^-_{v_1}} w_j$

Pour prouver l'équivalence de (78) et de (67), construisons tous les vecteurs v tels que à chaque couple A,B satisfaisant (66) correspond un v avec

$$(79)\quad \begin{cases} I^{+}_{v_2} = A \\ I^{-}_{v_2} = B \end{cases}$$

$I^{-}_{v_1} = \{ j \mid n_j (A) > n_j (B) \}$ (voir (66))

On voit que, étant donné la définition en (66) de A et B, v est un u-vecteur élémentaire orthogonal aux lignes de T. On voit réciproquement que si A et B sont définis par (79), (66) est vérifiée (au signe près de v). Le théorème peut être énoncé de manière plus générale puisque les intervalles peuvent contenir des entiers négatifs.

<u>3.6.2</u>. <u>Corollaire II</u> (A.J.Hoffman [2] p.80)

Soit un réseau de transport où à chaque arc u sont associés deux nombres entiers b(u) et c(u) [avec $0 \leq b(u) \leq c(u)$] .

Soit $c(U^{-}_{A}) = \sum_{u \in U^{-}_{A}}^{+} c(u)$. $U^{-}_{A}(U^{+}_{A})$ est l'ensemble des arcs ayant leurs extrémités terminales (initiales) en un sommet de A et leurs extrémités initiales (terminales) en un sommet de X-A.

<u>Soit $\mathfrak{C}$ la famille des sous-ensembles de X qui ne contiennent ni x_0 ni z, ou qui contiennent à la fois x_0 et z. Il existe un flot φ tel que $b(u) \leq \varphi(u) \leq c(u)$ pour tout u si et seulement si $c(U^{-}_{A}) \geq b(U^{+}_{A})$ $(A \in \mathfrak{C})$</u>

Il suffit, pour démontrer ce théorème, de rappeler que l'espace des flots est un u-espace et que à chaque cocycle élémentaire correspond un u-vecteur élémentaire de l'espace orthogonal (Chap. II). Les intervalles sont les mêmes que ceux définis en 3.6.1.

<u>3.6.3 Corollaire III</u> (B.Roy [12] [1])

<u>Il existe une tension θ telle que $\theta_u \geq b_u$ pour $u \in U$, si et seulement si pour tout circuit μ l'on a</u>

$\sum_{i \in \mu} b_i \leqslant 0$

U est l'ensemble des arcs du graphe.

Il suffit de considérer l'u-espace orthogonal à l'u-espace des flots.

3.6.4

Si $v \in V_{m-k}$, V_{m-k} u-espace vectoriel de Q^m, (resp. V_k) ne contient respectivement que des composantes 1, -1 ou 0; ou 1 ou 0; on dira que c'est un u-cycle ou un u-circuit (resp. un u-cocycle ou un u-cocircuit). Un u-vecteur est donc un u-cycle ou un u-cocycle.

Pour les corollaires qui suivent, G sera le groupe additif des nombres réels. La famille $\mathcal{a}$ est celle des intervalles. Ces corollaires sont les extensions de théorèmes connus [1] sur les flots et les tensions sur un graphe. φ^+ est un u-flot dont chaque composante est non négative.

3.6.4.1 Corollaire IV:

Il existe un u-flot φ^+ avec chaque composante non nulle si et seulement si v_k ne contient pas de u-cocircuits.

Remarquons que ce corollaire est une extension du théorème[6]:

Un graphe (X, Γ) est fortement connexe si et seulement si $A \subset X \Longrightarrow \Gamma A - A \neq \emptyset$

Il suffit, pour démontrer 3.6.4.1 de vérifier l'existence d'un u-flot lorsque chaque composante a ses valeurs dans un intervalle $[+0, \infty]$. L'énoncé dual est implicite.

3.6.4.2 Corollaire V

Tout u-flot φ^+ est une combinaison linéaire positive de u-circuits.

Soit V_{m-k} le sous-espace des u-flots. L'énoncé est vrai si φ^+ a deux composantes positives, montrons que s'il est vrai si φ^+ a r-1 composantes positives, il est vrai pour r. Soit $V_{m-k}^{\dagger}$ le sous-espace de V_{m-k} obtenu en projetant V_{m-k} le long des axes où les composantes de φ^+ sont nulles. Le u-espace orthogonal $V_k^{\dagger}$ à $V_{m-k}^{\dagger}$ ne contient pas de u-tension > 0, car celle-ci devrait être orthogonale à la projection de φ^+ sur V_{m-k}.

Donc $V^{\dagger}_{m-k}$, par le dual de 3.6.4.1 contient un u-circuit μ . Si $\{\mu^+\}$ est l'ensemble des composantes non nulles de μ, considérons

$$\varphi_j = \min \quad \{\varphi_i \,/\, i \in \{\mu^+\}\} \neq 0$$

$\varphi^+ - \varphi_j \mu$ est un nouveau u-flot qui a r-1 composantes positives. L'énoncé dual est implicite.

3.6.4.3 Corollaire VI:

S'il existe dans V_{m-k} un u-flot φ ayant un sous-ensemble donné de composantes non nulles, il existe un u-cycle ayant ses composantes non nulles contenues dans ce sous-ensemble.

Il suffit de remarquer que $V^{\dagger}_{k}$, obtenu en changeant de signe une même composante de chaque vecteur de V_k est un u-espace. 3.6.4.2 démontre alors 3.6.4.3.

3.6.4.4 Corollaire VII:

S'il existe un u-flot φ ayant une composante j non nulle, il existe nécessairement un u-cycle dont l'ensemble des composantes non-nulles, est contenu dans l'ensemble des composantes non nulles de φ et dont la $j^{\text{ème}}$ composante est non nulle.

Sinon φ ne pourrait être combinaison linéaire des cycles satisfaisant 3.6.4.3, propriété qui est implicite à 3.6.4.2 et à la démonstration de 3.6.4.3.

Nous allons énoncer une généralisation du lemme des arcs colorés [1] . Soit V_k un u-espace vectoriel, partitionnons en trois l'ensemble des axes coordonnés et comme pour le lemme de Minty, disons que dans la première classe les axes sont rouges, dans la deuxième noirs, dans la troisième verts.

3.6.4.5. Corollaire VIII:

Dans V_{m-k}, s'il n'existe pas un u-cycle ayant une composante j noire non nulle avec des composantes non nulles uniquement rouges et noires, les composantes non nulles noires valant 1, il existe dahs V_k un u-cocycle de composante j égale à 1 avec des composantes non nulles uniquement vertes et noires, les composantes non nulles valant 1.

Définissons trois classes d'intervalles:

Pour les axes rouges: $[-\infty, +\infty]$;

pour les axes noirs : $[0, +\infty]$ pour la composante j, $[+0, +\infty]$

pour les axes verts : tous les intervalles se réduisent à 0.

S'il existe un u-flot compatible avec ces intervalles, il existe un u-cycle dont les composantes vertes sont nulles, l'ensemble de ses composantes non nulles rouges et noires est non vide, sa composante j vaut 1.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un tel u-flot n'existe pas est qu'il existe un u-vecteur élémentaire (donc un u-cocycle) qui ne satisfait pas les conditions (35) du théorème V.

Ce u-cocycle ne peut pas avoir de composantes rouges non nulles, toutes ces composantes non nulles sont noires et vertes. La composante ayant pour intervalle $[+0, \infty]$ est non nulle puisque tous les autres intervalles contiennent 0. Toutes ses composantes noires doivent avoir le même signe que celle de $[+0, +\infty]$.

3.6.4.5.1 Corollaire IX:

Il existe un u-circuit ou un u-cocircuit (exclusivement) ayant une composante non nulle sur un axe donné. (immédiat)

Soit θ^+ une tension telle que $(\forall i) : \theta_i^+ \geqslant 0$:

3.6.4.5.2 C

S'il n'existe pas un flot φ^+ ayant une composante non nulle sur un axe donné, il existe une tension θ^+ avec une composante non nulle sur cet axe.

3.6.5 Corollaire X:

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un u-espace ait un u-circuit (u-cocircuit) utilisant tous les axes, est que chaque u-cocycle (u-cycle) ait autant de composantes +1 que -1.

La condition énoncée est nécessaire et suffisante pour qu'il existe un u-flot (une u-tension) prenant la valeur 1 sur chaque axe. Ce flot est une somme de u-circuits (u-cocircuits) élémentaires qui définissent une partition de l'ensemble des axes. (3.6.4.2).

3.6.5.1 Corollaire XI:

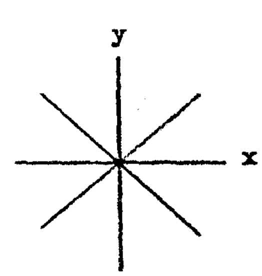
Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe ait un t-circuit (t-cocircuit) utilisant tous les arcs est que chaque t-cocycle (t-cycle) ait autant d'arcs entrants que sortants.

Il,suffit de démontrer que à tout u-circuit (u-cocircuit) élémentaire de l'u-espace des flots (tensions) correspond un t-circuit (t-cocircuit). On sait que l'homomorphe modulo 2 de l'u-module des flots (tensions) est l'espace vectoriel des B-cycles (B-cocycles) (Chapitre II et [3]). D'autre part à un B-cycle élémentaire (B-cocycle élémentaire) correspond un et un seul u-cycle élémentaire (u-cocycle élémentaire) au signe près (Chapitre II) ce qui démontre l'énoncé.

3.6.6. Théorème VI:

Pour chaque dimension k, il existe un nombre fini d'u-espaces vectoriels qui soient des sous-espaces de Q^k.

Soit A, matrice $r \times k$ de rang $r \leqslant k$, c'est une matrice dont les lignes engendrent $V_r \subset Q^k$. Soit $A_{i_1},\dots,A_{i_r}$ le système de vecteurs linéairement indépendants tels que $i_j < i_{j+s}$, $1 \leqslant s \leqslant r-j+1$, et i_r le plus petit entier tel que $A^\times = \{A_{i_1},\dots,A_{i_j},\dots,A_{i_r}\}$ est un système de vecteurs-colonnes linéairement indépendants de A. Pour toute matrice T régulière, l'ensemble $T A^\times =$ $= \{T A_{i_1},\dots,T A_{i_j},\dots,T A_{i_r}\}$ a la même propriété vis à vis de T A que A vis à vis de A. On sait que $A^{\times -1} A$ est appelée matrice échelon de l'espace vectoriel V_k et que cette matrice est unique pour V_k. La matrice échelon d'un u-espace vectoriel est normale donc totalement unimodulaire. Ses coefficients sont 1, -1 ou 0. Il y a dond un nombre fini de matrices échelons donc un nombre fini d'u-espaces vectoriels qui soient sous-espaces de Q^k. Les u-espaces de R^2 sont:



BIBLIOGRAPHIE

[1] C.BERGE
"Les problèmes de flot et de tension"
Cahiers du Centre d'Etudes de R.O., Vol.3, No.2 - 1961 , page 69.

[2] C.BERGE
"Théorie des graphes et ses applications"
Dunod, Paris 1958.

[3] S.SESHU & M.B.REED
"Linear graphs and Electrical Networks"
Addison-Wesley Publishing Company Inc., Reading, Mass., USA

[4] I-HELLER
"On linear systems with integral valued solutions"
Pacific Journal of Mathem., pp. 1351-1364

[5] I.HELLER
"On sets of Generators in a free Abelian group"
(Abstract), Bull. Ann. Math. Soc., 1956.

[6] B.ROY
"Cheminement et connexité dans les graphes; application auc problèmes d'ordonnancement". Thèse.

[7] N.BOURBAKI
Livre II Algèbre, Chapitre 1: Structures, Chapitre 2: Algèbre linéaire.

[8] A.LICHNEROVICZ
"Algèbre et Analyse Linéaire"
Masson, Paris 1960

[9] P.DUBREIL et M.L.DUBREIL-JACOTIN
"Leçons d'Algèbre Moderne"
Dunod, Paris 1961.

[10] O.ORE
"Theory of Graphs"
American Mathematical Soc., Providence, R.I., Vol. XXXVIII, 1962

[11] L.FUCHS
"Abelian Groups"
Pergamon Press, 1960

[12] B-ROY
"Contribution de la théorie des graphes à l'étude de certains problèmes linéaires"
C.R. Ac. Sci., 248, 1959, p.2.437

[13] A.GHOUILA-HOURI
"Sur l'existence d'un flot ou d'une tension prenant ses valeurs dans un groupe abélien"
C.R. Acad. des Sciences, 250, 1960, p. 3931

[14] I.CEDERBAUM
"Matrices all of whose elements and subdeterminants are 1, -1 or 0".
J. Math. and Phys. 36, 351-361 (1958)

[15] I.CEDERBAUM
"Application of Matric Algebra to Network Theory"
Trans.Inst. Radio Engrg. CT.6 (special supplement), 152-157 (May 1959).

[16] R.L.GOULD
"Application of graph theory to the synthesis of contact networks"
Proc.Int.Symp.on Switching Circuits, Harvard Univ., April 1957.

[17] R.L.GOULD
"Graphs and Vector Spaces"
J.Math. and Phys., 38, 193-214, (1958).

[18] S.LEFSCHETZ
"Introduction to Topology"
Princeton N.J., Princeton Univ. Press, 1949.

[19] J.RIORDAN
"Introduction to combinatorial analysis"
New York, Wiley 1958.

[20] S.SESHU
"Topological considerations in the design of driving point functions"
Trans.Inst.Radio Engrs., CT-2, 356-367 (Dec. 1955)

[21] W.T.TUTTE
"A ring in graphe theory"
Proc. Cambridge Phil. Soc., 43, 26-40 (1947).

[22] W.T.TUTTE
"A theorem of planar graphs"
Trans. Am. Math. Soc., 82, 99-116 (1956)

[23] W.T.TUTTE
"A class of abelian groups"
Can. J. Math., 8, 13-28, (1956)

[24] W.T.TUTTE
"A homotopy theorem for matroids, I, II".
Trans. Am. Math. Soc., 88, 144-174 (may 1958)

[25] W.T.TUTTE
"Matroids and graphs"
Trans. Am. Math., Soc., 90, 527-552 (March 1959)

[26] G. DE GHELLINCK
"Aspects de la notion de dualité en théorie des graphs"
Cahiers du Centre d'Etudes de R.O., Vol., 3, No.2, 1961, page 94.

[27] R.FORTET
"L'algèbre de Boole et ses applications en recherche opérationnelle"
Cahiers du Centre d'Etudes de R.O., 4, 1959

[28] A.CHARNES, W.W.COOPER and A.HENDERSON
"An introduction to linear programming"
N.Y., John Wiley & Sons, 1953.

[29] D.A.GREENWALD
"Linear programming - An explanation of the simplex algorithm"
Ronals Press, 1957

[30] S.VADJA
"The theory of Games and Linear Programming"
N.Y., John Wiley & Sons, 1958

[31] M.WAGNER-HARVEY
"The simplex method for beginners"
Operations Research, Vol. 6, p. 190-199, 1958.

[32] M. WAGNER-HARVEY
"A practical guide to the dual theorem"
Operations Research, Vol. 6, p.364-384, 1958.

[33] L. DERWIDUE
"Introduction à l'Algèbre supérieure et au calcul numérique algébrique"
Masson & Cie., Paris, Sciences et Lettres, Liège 1957.

[34] "Linear Inequalities and Related Systems"
(Annals of Mathematics Studies, No. 38),
Princeton University Press, 1956

[35] J.R.JACKSON
"On the existence problem of linear programming"
Pacific Journal of Mathematics, Vol., 4, No. 1, mars 1954, p. 29

[36] R. FRISCH
"Principles of Linear Programming"
Memorandum Fra Universitetets Socialøkonomiske Institutt, Oslo.

[37] ACZEL et RUSSEL
"New Methods of solving linear programs"
Operational Research Quarterly, Vol. 8, No.4, Dec. 1957

[38] H.M.WAGNER
"The dual simplex algorithm for bounded variables"
Naval Research Log. Quart., 5, No. 3, (1958)

[39] A.J.HOFFMAN and J.KRUSKALL
"Integral boundary points of convex polyhedra"
Ann.Math. Study No. 38.

[40] A.J.HOFFMAN
"Some recent applications of the theory of linear inequalities to extremal combinatorial analysis"
Proc. Symp. in Appl. Math., Vol. X

[41] A.J.HOFFMAN and H.W.KUHN
"On systems of distinct representatives (Linear inequalities and related systems"
Annals of Math. Sciences Studies, 38, 1956, p.199

[42] C.BERGE
"Espaces Topologiques, fonctions multivoques"
Dunod 1959

[43] P.CAMION
"Espaces vectoriels des cycles et cocycles d'un graphe
EUR/C-IS/80/62 F, Appendice 1, janvier 1962

[44] P.CAMION
"Sur une propriété de l'espace normé C_α et ses applications aux matrices unimodulaires"
C.R. Acad. des Sciences, 1962, p.625.

APPENDICE

CARACTERISATION DES MATRICES CYCLOMATIQUES ET COCYCLOMATIQUES D'UN GRAPHE

Résumé:

Les résultats de cette étude répondent à la question: "Une matrice d'entiers modulo 2 est-elle l'homomorphe modulo 2 d'une matrice totalement unimodulaire"?

C'est-à-dire, y a-t-il moyen de remplacer certains éléments non nuls d'une matrice binaire par des -1 de manière que la matrice Euclidienne obtenue soit totalement unimodulaire. Appelons R-matrice une matrice d'entiers modulo 2 homomorphe d'une E-matrice. Tutte [11][12] répond à la question posée par:

Une matrice $\underline{F}$ d'entiers modulo 2 est une R-matrice si et seulement si aucune de ses formes normales ne contient l'une des matrices

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Les formes normales de F étant toutes les matrices obtenues en multipliant F par les inverses de ses matrices carrées régulières d'ordre maximum, ce beau résultat théorique n'a pas un intérêt d'application directe, puisqu'il y a un nombre combinatoire de formes normales de F.

La caractérisation des R-matrices que nous donnons dans ce chapitre ramène le problème posé à celui de savoir si <u>une</u> matrice donnée est une E-matrice.

Nous donnons comme aboutissement de ce chapitre une légère généralisation du théorème de Tutte caractérisant les homomorphes modulo 2 des matrices cyclomatiques et cocyclomatiques.

1. Définitions:

Soit $\underline{A}$ une matrice d'entiers modulo 2, L l'ensemble de ses lignes, C l'ensemble de ses colonnes, on définit sur C $\cup$ L la relation binaire:

$$(1) \qquad (c_i \in C)(l_j \in L) : u_{ij} \in U \Longleftrightarrow c_i R l_j \Longleftrightarrow a_{ij} = 1$$

$G(\underline{A})=(L \cup C,U)$ est appelé graphe de $\underline{A}$. [17] . Si $\underline{A}$ a m coefficients non-nuls, à chaque couple (i,j) tel que $a_{ij}=1$ faisons correspondre un entier $1 \leqslant k \leqslant m$, tout vecteur de B^m définit un sous-ensemble d'arêtes V de U.

(2) $\quad (\underline{b} \in B^m) : \underline{b}_k = 1 \Longleftrightarrow u_{ij} \in V$

Un vecteur $\alpha = (\alpha_k)_{1 \leqslant k \leqslant m} \qquad \alpha_k \in S \qquad S = \{1\} \cup \{-1\}$ définit une norme sur B^m:

(3) $\quad (\underline{b} \in B^m) : \alpha(\underline{b}) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \underline{b}_k = N_\alpha(\underline{b})$

On voit d'autre part que α définit une matrice A_α qui a pour homomorphe $\underline{A}$:

(4) $\quad \underline{a}_{ij} = 0 \Longrightarrow a_{ij} = 0$

(5) $\quad \underline{a}_{ij} = 1 \Longrightarrow a_{ij} = \underline{b}_k \alpha_k$

S^m définit de cette manière l'ensemble des matrices ayant pour coefficients +1, -1 ou 0 et pour homomorphe $\underline{A}$.

Pour une matrice $\underline{A}$ nous allons définir une classification des vecteurs $\alpha \in S^m$ basée sur la norme des cycles de G. Pour tout α, la norme de chaque cycle est paire, nous distinguerons dès lors les cycles de norme multiple de quatre et les cycles de norme non multiples de quatre, les premiers seront appelés <u>cycles bipaires</u>, les seconds <u>cycles biimpaires</u>.

(6) $\quad \mathcal{S}_4 : \alpha \in \mathcal{S}_4 \Longrightarrow A_\alpha$ est totalement unimodulaire.

(7) $\quad \mathcal{S}_3 : \underline{\alpha} \in \mathcal{S}_3 \Longrightarrow$ Tout cycle élémentaire biimpaire a une corde.

Un cycle élémentaire a une corde s'il existe un cycle élémentaire contenant un sous-ensemble d'arêtes de ce cycle et une seule arête étrangère. Cette classification est due à C.Berge, il formulait la conjecture: $\mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_4$, nous donnons un contre-exemple qui nous a suggéré la condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit totalement unimodulaire.

(8) $\mathcal{S}_2 : \alpha \in \mathcal{S}_2 \Longrightarrow$ Il existe une base de cycles élémentaires bipaires sans corde.

(9) $\mathcal{S}_1 : \alpha \in \mathcal{S}_1 \Longrightarrow$ Il existe une base de cycles élémentaires sans corde.

1. Nous allons montrer que : $\mathcal{S}_1 \supset \mathcal{S}_2 \supset \mathcal{S}_3 \supset \mathcal{S}_4$.
2. " " " " : $\mathcal{S}_1 = S^m$
3. " " " " : $\mathcal{S}_2$ n'est jamais vide.
4. " " " " : $\mathcal{S}_3 \neq \emptyset \Longrightarrow \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_3$
5. " " " " : $\mathcal{S}_4 \neq \emptyset \Longrightarrow \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_4$

1. Il s'agit de montrer que $\mathcal{S}_1 \supset \mathcal{S}_2 \supset \mathcal{S}_3 \supset \mathcal{S}_4$. Il est évident que $\mathcal{S}_1 \supset \mathcal{S}_2 \supset \mathcal{S}_3$. $\mathcal{S}_3 \supset \mathcal{S}_4$ est une propriété observée par C.Berge, pour la démontrer on montre que le déterminant de la sous-matrice carrée correspondant à un cycle élémentaire biimpaire sans corde est $\neq \pm 1$. Ci-dessous des exemples sont donnés sous forme de graphes, les composantes α_k sont écrites sur les arêtes.

G_1 :

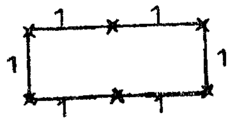


Fig. 1

Pour G_1, $\alpha \in \mathcal{S}_1$, $\alpha \notin \mathcal{S}_2$, $\alpha \notin \mathcal{S}_3$, $\alpha \notin \mathcal{S}_4$.

G_2 :

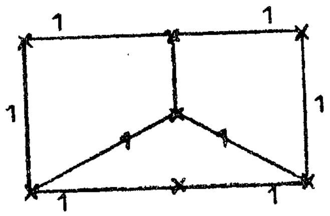


Fig. 2

Pour G_2, $\alpha \in \mathcal{S}_1$, $\alpha \in \mathcal{S}_2$, $\alpha \notin \mathcal{S}_3$, $\alpha \notin \mathcal{S}_4$.

G_3 :

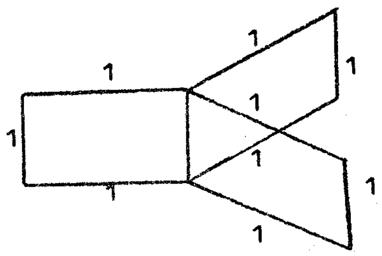


Fig. 3

Pour G_3: $\alpha \in \varphi_1$, $\alpha \in \varphi_2$, $\alpha \in \varphi_3$, $\alpha \notin \varphi_4$.

Les matrices correspondant à G_2 et G_3 sont respectivement:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Les démonstrations qui suivent prouvent en particulier qu'il est impossible de rendre ces matrices totalement unimodulaires en changeant de signe certains éléments non nuls.

2. Théorème I:

Il existe toujours dans un graphe une base de cycles élémentaires sans cordes.

Soient en effet $\underline{c}_1,\dots,\underline{c}_s$ le plus grand ensemble de B-cycles élémentaires sans corde linéairement indépendants. Supposons qu'il existe un B-cycle $\underline{c}_{s+1}$ du graphe qui n'appartient pas à l'enveloppe linéaire des vecteurs précités. On a, en décomposant le t-cycle correspondant à $\underline{c}_{s+1}$ en cycles élémentaires:

$$(10) \qquad \underline{c}_{s+1} = \sum_{i=1}^{t} {}^{+}\, \underline{c}_{s+1,i}$$

où les $\underline{c}_{s+1,i}$ sont des B-cycles élémentaires tels que leurs ensembles d'arcs sont disjoints. Soit $\underline{c}_{s+1,j}$, $j \in J$ où J est un sous-ensemble de l'ensemble $1,\dots,t$ des indices de (10), les B-cycles élémentaires n'appartenant pas au sous-espace vectoriel engendré par $\underline{c}_1,\dots,\underline{c}_s$. J est non vide. Les cycles correspondants contiennent chacun une corde sinon $\underline{c}_1,\dots,\underline{c}_s$ ne serait pas un système maximal de B-vecteurs élémentaires linéairement indépendants sans corde.

Mais alors, $\underline{c}_{s+1,j^*}$, $j^* \in J$, par exemple, est la somme de deux B-cycles ayant en commune une corde de $\underline{c}_{s+1,j^*}$, et ayant chacun au moins une arête de moins que $\underline{c}_{s+1,j^*}$. $\underline{c}_{s+1,j^*}$, $j^* \in J$ est donc la somme de k B-cycles élémentaires sans corde. C'est absurde puisque dans ce cas un au moins de ces derniers B-cycles n'appartiendrait pas à la fermeture linéaire de $\underline{c}_1,\dots,\underline{c}_s$ et pourrait être adjoint à ce système pour former un système de s+1 B-cycles élémentaires sans corde linéairement indépendants.

Donc $\mathcal{S}_1 = S^m$.

3. Théorème II.

Pour toute matrice $\underline{A}$, il existe une norme N_α telle que dans $G(\underline{A})$ il y a une base de cycles élémentaires bipaires sans corde.

Soit $\alpha^* \in S^m$ un vecteur définissant une norme telle que $\underline{c}_1,\dots,\underline{c}_s$ soit le plus grand système de B-cycles élémentaires bipaires linéairement indépendants de $G(\underline{A})$. Soit $\underline{C}$ la matrice ayant $\underline{c}_1,\dots,\underline{c}_s$ pour lignes.

Si $\underline{C}$ n'est pas une base de cycles on peut montrer par le même raisonnement qu'en 2 qu'il existe un B-cycle élémentaire, biimpaire cette fois et sans corde qui forme avec $\underline{c}_1,\dots,\underline{c}_j$ un système de s+1 vecteurs linéairement indépendants.

Soit $\underline{D}$ la matrice de s+1 lignes obtenue en adjoignant $\underline{c}_{s+1}$ à $\underline{C}$. Soit $\underline{E}$ la matrice obtenue en adjoignant une m+1$^{\text{ème}}$ colonne à $\underline{D}$, soit le vecteur unité $\underline{e}_{s+1}$ dont la composante égale à 1 est sur la s+1$^{\text{ème}}$ ligne de $\underline{D}$. Soit $\underline{x}$ une solution de

$$(11) \qquad \underline{E}\,\underline{x} = \underline{0}$$

$\underline{x}^* \neq \underline{0}$, avec $\underline{x}^*_{n+1} = 1$ satisfaisant (11) existe car les s+1 lignes de $\underline{D}$ sont des vecteurs linéairement indépendants. Les composantes non nulles de $\underline{x}^*$, soient x^*_i, $i \in I$, $i \neq m+1$, désignent un ensemble d'arcs qui a un nombre pair d'éléments communs avec $\underline{c}_1,\dots,\underline{c}_s$ et un nombre impair avec $\underline{c}_{s+1}$.

Mais alors soit α^{**} tel que $i \in I$: $\alpha^{**}_i = -\alpha^*_i$ et $i \notin I$: $\alpha^{**}_i = \alpha^*_i$, α^{**} est tel que $\underline{c}_1,\dots,\underline{c}_s,\underline{c}_{s+1}$ soient un système de B-cycles élémentaires bipaires linéairement indépendants de $G(\underline{A})$ ce qui est impossible.

4. Matrices bipaires.

4.1 Théorème III.

Il existe deux classes distinctes de matrices entières modulo 2 $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$. Si $\underline{A} \in \mathcal{M}_1$, pour toutes les normes N_α telles qu'il existe dans $G(\underline{A})$ une base de cycles élémentaires bipaires sans corde, il n'existe pas dans $G(\underline{A})$ un cycle élémentaire biimpaire sans corde. Si $\underline{A} \in \mathcal{M}_2$, pour chaque norme N_α telle qu'il existe dans $G(\underline{A})$ une base de cycles élémentaires bipaires sans corde, il existe dans $G(\underline{A})$ au moins un cycle élémentaire biimpaire sans corde.

G_4 :

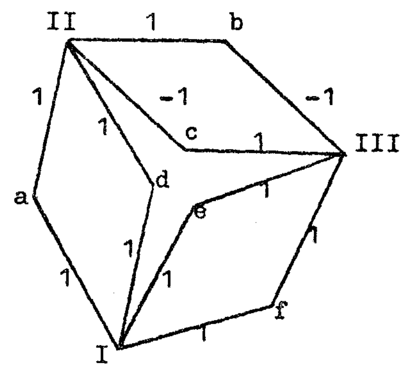


Fig. 4

Soit $\underline{A} \in \mathcal{M}_1$, c'est à dire, il existe $\alpha^\times \in \mathcal{S}_2$ tel que

(13) $\quad N_\alpha(\underline{c}) = 0 \text{ mod. } 4$

$\underline{c}$ étant un B-cycle élémentaire sans corde quelconque. Montrons que (13) est vrai pour tout $\alpha \in \mathcal{S}_2$. Soit $\alpha^{\times\times} \in \mathcal{S}_2$ auquel correspond une nouvelle base $\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_s$, formant une matrice $\underline{C}$, de $\underline{B}$-cycles bipaires élémentaires sans corde et tel que, par impossible,

(14) $\quad N_{\alpha^{\times\times}} \; (\underline{c}_{s+1}) \neq 0 \text{ mod. } 4,$

$\underline{c}_{s+1}$ étant un cycle élémentaire sans corde. On a évidemment que $N_{\alpha^{\times\times}}(\underline{c}_i) - N_{\alpha^\times}(\underline{c}_i)$ $1 \leqslant i \leqslant s$ est nul modulo 4. Donc pour passer de $\alpha^{\times\times}$ à $\alpha^\times$, il a fallu trouver un vecteur $\underline{x} \in B^m$, les composantes non nulles de $\underline{x}$ désignant les composantes de $\alpha^\times$ à changer de signe, tel que

(15) $\quad \underline{C} \; \underline{x} = \underline{0}$

Puisque

(16) $\quad \underline{c}_{s+1} = \underline{t} \; \underline{C},$

(17) $\underline{c}_{s+1}\ \underline{x} = 0$

donc

(18) $N_{\alpha^*}(\underline{c}_{s+1}) \neq 0 \text{ mod. } 4,$

ce qui est absurde.

Cela prouve en même temps la deuxième partie de l'énoncé.

4.2 Nous appelons matrices bipaires les matrices $\underline{A}$ d'entiers modulo 2 telles que pour toute norme N_α il n'existe pas un cycle élémentaire bi-impaire sans corde.

5. Caractérisation des matrices cyclomatiques et cocyclomatiques.

5.1 Lemmes

Lemme 1 - Pour passer d'une norme N_{α^*}, $\alpha^* \in \mathcal{S}_3$ à une norme $N_{\alpha^{**}}$, $\alpha^{**} \in \mathcal{S}_3$, il est nécessaire et suffisant de changer de signes les composantes de α^* relatives à un cocycle de $G(\underline{A})$.

Puisque $\mathcal{S}_3 \neq \emptyset$, $\mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_2$, il existe une base $\underline{C}$ de B-cycles bipaires qui doivent rester bipaires lorsque α^* devient α^{**}. Puisque les vecteurs $\underline{x}$ tels que (15) soit vérifié forment le sous-espace vectoriel de B-cocycles de $G(\underline{A})$, la condition est nécessaire. La condition est suffisante car si on change de signe les composantes de $\underline{\alpha}^*$ désignées par les composantes non nulles de $\underline{x}$, avec

(19) $\underline{c}\ \underline{x} = \underline{0}$

$\underline{c}$ étant un B-cycle quelconque, on a

(20) $N_{\alpha^{**}}(\underline{c}) - N_{\alpha^*}(\underline{c}) = 0 \text{ mod. } 4$

Lemme 2 - Soient A^* et A^{**} deux matrices d'homomorphe $\underline{A}$ dont les coefficients a^*_{ij} et a^{**}_{ij} sont +1, -1 ou 0. On peut transformer A^* en A^{**} en changeant de signe tous les éléments de lignes et de colonnes de A^* si et seulement si les couples (i,j) tels que $a^*_{ij}\ a^{**}_{ij} = -1$ désignent les arêtes d'un cocycle de $G(\underline{A})$.

Si (i,j) est tel que $\underline{a}^{\times}_{ij}\ \underline{a}^{\times\times}_{ij} = -1$, il faudra changer de signe soit la colonne j, soit la ligne i de $\underline{A}^{\times}$. Soit $\underline{x}_i$ une variable binaire associée à la ligne i et $\underline{y}_j$ une variable binaire associée à la colonne j avec:

$\underline{x}_i = 1 \Longleftrightarrow$ On change de signe les éléments de la ligne i

$\underline{y}_j = 1 \Longleftrightarrow$ On change de signe les éléments de la colonne j

d'où

(21) $\underline{a}^{\times}_{ij}\ \underline{a}^{\times\times}_{ij} = -1 \Longrightarrow \underline{x}_i \dotplus \underline{x}_j = 1$ ($\dotplus$ est la somme modulo 2)

(22) $\underline{a}^{\times}_{ij}\ \underline{a}^{\times\times}_{ij} = 1 \Longrightarrow \underline{x}_i \dotplus \underline{x}_j = 0$

A chaque arête u_{ij} de $G(\underline{A})$correspond donc une équation

(23) $\underline{x}_i \dotplus \underline{x}_j = \beta_{ij}$

Mais on sait que (15) a une solution si et seulement si $\beta = (\beta_{ij})$ est un B-cocycle de $G(\underline{A})$.

5.2 Caractérisation de la classe des E-matrices ayant même homomorphe.

Théorème IV.

Si $A^{\times}$ est une matrice totalement unimodulaire, toute matrice $A^{\times\times}$ obtenue en changeant de signes certains coefficients non-nuls de $A^{\times}$ est totalement unimodulaire si et seulement si $A^{\times\times}$ est obtenue en changeant de signe tous les éléments de lignes et de colonnes de $\underline{A}^{\times}$.

Si l'on change de signe les éléments non nuls d'une ligne ou d'une colonne de $A^{\times}$, elle reste totalement unimodulaire puisque les mineurs qui comportent ces éléments changent de signes, les autres n'étant pas modifiés.

$\mathcal{S}_4 \subset \mathcal{S}_3$, donc les lemmes 1 et 2 prouvent le théorème, puisque une R-matrice est bipaire.

5.3 Caractérisation des R-matrices.

Théorème V:

Soit $\underline{A}$ une matrice binaire, s'il existe α tel que A_α est totalement unimodulaire, pour tout α^x tel que dans $G(\underline{A})$ il existe une base de cycles élémentaires bipaires sans corde, A_{α^x} est totalement unimodulaire.

$\alpha \in \mathcal{S}_4$ donc $\alpha \in \mathcal{S}_3$. Si l'on opère sur α tous les changements de signes qui maintiennent la propriété d'unimodularité totale de la matrice, α prend toutes les valeurs de $\mathcal{S}_3$, par le lemme 1, de sorte que $\mathcal{S}_4 \supset \mathcal{S}_3$, on a donc $\mathcal{S}_4 = \mathcal{S}_3 \neq 0$, puisque $\mathcal{S}_4 \subset \mathcal{S}_3$. Mais, par le théorème III, $\mathcal{S}_3 \neq \emptyset \Longrightarrow \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_3$, donc $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_4$.

Théorème VI:

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice binaire soit une R-matrice est que pour un $\alpha \in \mathcal{S}_2$, A_α soit totalement unimodulaire.

On peut dire aussi que les R-matrices sont caractérisées par le fait que $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_4$. Enonçons alors un théorème donnant une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit cyclomatique.

5.4 -------- Caractérisation des matrices cyclomatiques et cocyclomatiques.

Théorème VII:

A_α est cyclomatique (co-cyclomatique) normale si et seulement si $\underline{A}$ est une R-matrice B-cyclomatique (B-cocyclomatique) normale et $\alpha \in \mathcal{S}_2$.

Rappelons qu'une matrice normale est une matrice qui contient une matrice unité d'ordre maximum.

Condition nécessaire.

Si A_α est cyclomatique (cocyclomatique), c'est donc une E-matrice (Heller-Tutte-Seshu), donc $\alpha \in \mathcal{S}_2$ et $\underline{A}$ est une R-matrice cyclomatique (cocyclomatique).

Condition suffisante.

Faisons la démonstration pour "cyclomatique", elle est analogue pour "cocyclomatique".

Si $\underline{A}$ est B-cyclomatique, ses lignes représentent des chaînes d'abre H.

(voir 1.4). En donnant une orientation arbitraire aux arêtes et en parcourant les chaînes on définira $\alpha^{\times}$ et une matrice $A_{\alpha^{\times}}$ totalement unimodulaire. Mais A_{α} est une E-matrice, on passe donc de $A_{\alpha^{\times}}$ à A_{α} en changeant de signe les éléments de lignes et de colonnes (théorème IV). En changeant l'orientation des arcs du coarbre (lignes) et de l'arbre (colonnes) on obtient le graphe orienté correspondant à A_{α}.

6. Discussion du fait que A est ou non une R-matrice.

1. On cherche une valeur de $\alpha \in \mathcal{G}_2$.

   L'algorithme est donné dans la démonstration du théorème II.

2. On vérifie si A_{α} est totalement unimodulaire, si elle ne l'est pas A n'est pas l'homomorphe d'une matrice totalement unimodulaire.

Exemple 1: Considérons la matrice

$$\begin{array}{c|ccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
a & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
b & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
c & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
d & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

Fig. 5

Son graphe est

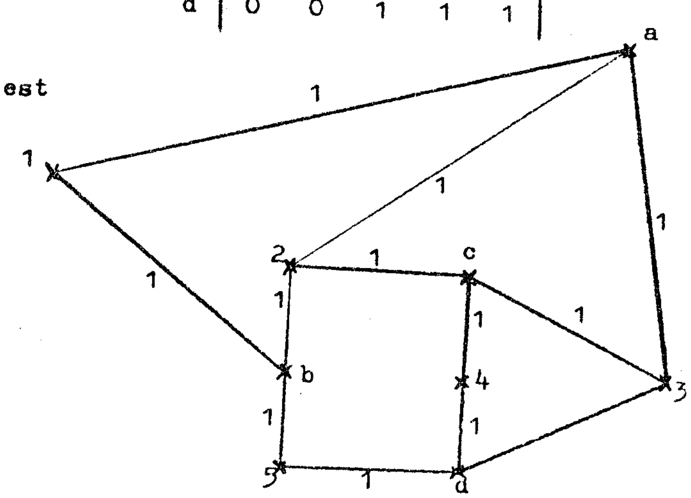


Fig. 6

On trouve un système maximal de cycles élémentaires bipaires linéairement indépendants:

[a, 1, b, 2, a] , [a, 2, c, 3, a] , [c, 3, d, 4, c] .

auquel on adjoint $[c, 4, d, 5, b, 2, c]$ en changeant le signe de $\alpha_{d,5}$.
Le nombre cyclomatique du graphe étant 4, on a une base de cycles bipaires sans corde.

A_α est donc:

$$\begin{array}{c|ccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
a & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
b & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
c & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
d & 0 & 0 & 1 & 1 & -1
\end{array}$$

Fig. 7

La matrice définie par les lignes b, -c et d est totalement unimodulaire puisque c'est une matrice d'incidence. Soit T l'ensemble $\{1\} \cup \{-1\} \cup \{0\}$.
On voit que, en désignant les vecteurs lignes par les mêmes lettres que les lignes:

$$a - b \in T^5$$
$$a - c \in T^5$$
$$a - d \in T^5$$
$$a - b - c \in T^5$$
$$a - c + d \in T^5$$
$$a - b - d \in T^5$$
$$-a + b - c + d \in T^5$$

Donc, ([18], chapitre II), A_α est totalement unimodulaire.

Exemple II

$\underline{A}$ est donné par $G(\underline{A})$:

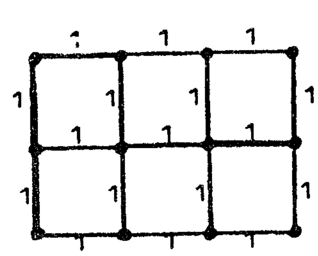


Fig. 8

$G(\underline{A})$ est planaire et on voit que pour $\alpha = (1,\ldots,1)$ il existe une base de cycles bipaires élémentaires.

Puisqu'il existe un cycle élémentaire biimpaire sans corde (la face infinie) $\underline{A}$ n'est pas l'homomorphe d'une matrice totalement unimodulaire. Remarquons que pour cet exemple $\mathcal{S}_2 - \mathcal{S}_3 \neq \emptyset$ donc $\mathcal{S}_3 = \emptyset$.

Exemple III

$\underline{A}$ est donné par $G(\underline{A})$:

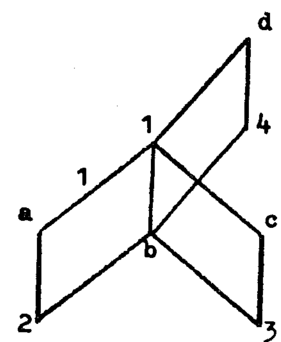


Fig. 9

Le nombre cyclomatique de ce graphe est 3. Pour $\alpha = (1,\dots,1)$ on a une base de cycles élémentaires bipaires sans corde $[a, 1, b, 2, a]$, $[d, 1, b, 4, d]$, $[c, 1, b, 3, c]$ et pourtant A_α n'est pas totalement unimodulaire. Il suffit de vérifier que Dét.$(A_\alpha) \notin T$. A n'est donc pas l'homomorphe d'une matrice totalement unimodulaire. Remarquons que pour cet exemple $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_3 \quad \mathcal{S}_4 = \emptyset$.

Exemple IV

La matrice

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right| \end{array}$$

Fig. 10

n'est pas une R-matrice.

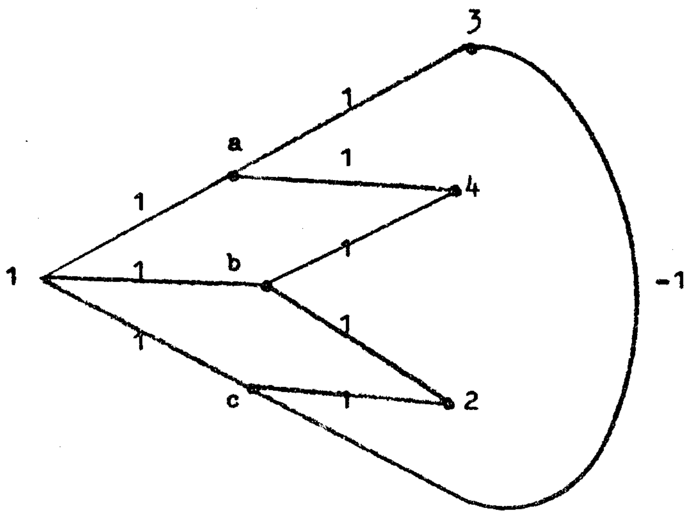


Fig. 11

Nous avons choisi α de façon à ce qu'il existe une base de cycles élémentaires bipaires. Il existe un cycle biimpaire: $[1,a,3,c]$.

7. E-matrices qui ne sont ni cyclomatiques ni cocyclomatiques

Nous appelons transformation normale de $[\underline{I},\underline{A}]$ une transformation au moyen de l'inverse d'une base $\underline{B}$ extraite de $[\underline{I},\underline{A}]$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
a	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
b	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
c	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
d	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
f	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
g	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
h	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
i	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Fig. 12

On vérifie que la matrice de la Fig. 12 est totalement unimodulaire qui n'est ni B-cyclomatique, ni B-cocyclomatique. On voit qu'elle contient une matrice B-cyclomatique et B-cocyclomatique normale du graphe homogène de degré 3 de Kuratowski. Nous avons à ce propos le théorème de Tutte [11,12] :

"Une matrice A d'entiers modulo 2 est B-cocyclomatique (B-cyclomatique) si et seulement si c'est une R-matrice et si aucune transformation normale de A ne fait apparaître une matrice B-cyclomatique (B-cocyclomatique) d'un des deux graphes non planaires basiques de Kuratowski".

Nous énonçons alors finalement le

Théorème VIII:

Une matrice A est cocyclomatique (cyclomatique) si et seulement si elle est totalement unimodulaire et si aucune transformation normale de A ne fait apparaître une matrice cyclomatique (cocyclomatique) d'un des deux graphes non planaires basiques de Kuratowski.

On sait en effet que la transformée normale d'une E-matrice est une E-matrice. La démonstration découle immédiatement du théorème de Tutte ci-dessus et du théorème VII .

BIBLIOGRAPHIE

[1] C.BERGE
"Les problèmes de flot et de tension"
Cahiers du Centre d'Etudes de R.O., Vol. 3, No. 2 - 1961, page 69.

[2] C.BERGE
"Théorie des graphes et ses applications"
Dunod, Paris 1958

[3] S.SESHU et M.B.REED
"Linear graphs and Electrical Networks"
Addison-Wesley Publishing Company Inc., Reading, Mass., USA

[4] O.ORE
"Theory of Graphs"
American Mathematical Society, Providence, R.I., Vol. XXXVIII, 1962.

[5] I.CEDERBAUM
"Matrices all of whose elements and subdeterminants are 1, -1 or 0".
J. Math. and Phys., 36, 351-361 (1958).

[6] R.L.GOULD
"Application of graph theory to the synthesis of contact networks"
Proc. Int. Symp. on Switching Circuits, Harvard Univ., April 1957.

[7] R.L.GOULD
"Graphs and vector spaces"
J. Math. and Phys., 38, 193-214, (1958).

[8] W.T.TUTTE
"A ring in graph theory"
Proc. Cambridge Phil. Soc., 43, 26-40 (1947).

[9] W.T.TUTTE
"A theorem of planar graphs"
Trans. Am. Math. Soc., 82, 99-116 (1956).

[10] W.T.TUTTE
"A class of abelian groups"
Can. J. Math., 8, 13-28, (1956).

[11] W.T.TUTTE
"A homotopy theorem for matroids, I-II"
Trans. Am. Math. Soc., 88, 144-174, (May 1958).

[12] W.T.TUTTE
"Matroids and graphs"
Trans. Am. Math. Soc., 90, 527-552, (March 1959).

[13] A.J.HOFFMAN and J.KRUSKALL
"Integral boundary points of convex polyhedra"
Ann. Math. Study No. 38

[14] A.J.HOFFMAN
"Some recent applications of the theory of linear inequalities to extremal combinatorial analysis"
Proc. Symp. In Appl. Math., Vol. X.

[15] A.J.HOFFMAN et H.W.KUHN
"On systems of distinct representatives" (Linear inequalities and related systems).
Annals of Math. Studies, 38, 1956, p. 199.

[16] P.CAMION
"Espaces vectoriels des cycles et cocycles d'un graphe"
EUR/C-IS/80/62/f Appendice 1, Janvier 1962.

[17] P.CAMION
"Sur une propriété de l'espace normé C_α et ses applications aux matrices unimodulaires".
C.R. Académie des Sciences 1962, p. 625.

[18] P.CAMION
"Matrices totalement unimodulaires et problèmes combinatoires"
Thèse.

MATRICES TOTALEMENT UNIMODULAIRES ET PROBLEMES COMBINATOIRES (1)

ERRATUM

Page — Ligne (↑ comptée du bas, ↓ comptée du haut) — Au lieu de: — Lire:

Page	Ligne	Au lieu de:	Lire:
4	↓ 1	La première ligne doit se terminer à "1, -1 ou 0". "Mais alors" commence à la ligne suivante.	
4	↑ 8	"sont implicites à I. Heller"	"Découlent immédiatement des résultats de I. Heller".
4	↑ 1	"chaîne γ ,"	"chaîne γ quelconque de cet arbre"

5 Remplacer la première phrase de la démonstration de XI par:
"On peut supposer sans diminuer la généralité de l'énoncé que tous les vecteurs-lignes de A sont différents. On démontre aisément alors que $>$ est une relation d'ordre définie sur l'ensemble des lignes de A. On dit que [9] , dans un ensemble ordonné E, b couvre a, si $a<b$ et s'il n'existe pas d'élément e de E compris strictement entre a et b.
On montre aisément que la relation binaire de couverture définit une famille H d'arborescence ayant pour sommets les lignes de A, c'est à dire que une ligne de A est couverte au plus par une autre ligne de A".

Page	Ligne	Au lieu de:	Lire:
6	↓ 9	$\bigcup_{\mu \in M} v_\mu$	$\{v_\mu \mid \mu \in M\}$

8 Supprimer: "Réciproquement on peut démontrer que le graphe adjoint d'un arbre peut être orienté de façon à être un graphe alterné".

Page	Ligne	Au lieu de:	Lire:
12	↓ 5	cycle	<u>cycle</u>
12	↓ 5	cocycle	<u>cocycle</u>
12	↓ 5	B-cycle	<u>B-cycle</u>
12	↓ 6	B-cocycle	<u>B-cocycle</u>
12	↓ 7	B-cycles	<u>B-cycles</u>
12	↓ 9	cycle	<u>cycle</u>

ERRATUM (2)

Page	Ligne	Au lieu de:	Lire:
	↑ comptée du bas ↓ comptée du haut		
12	↓ 9	B-cocycles	*B-cocycles*
12	↓ 12	binaires	entières modulo 2
12	↑ 8	t-cycles	*t-cycles*
12	↑ 8	t-cocycles	*t-cocycles*
12	↑ 5	t-cycle	*t-cycle*
13	↓ 10	u-cycle	*u-cycle*
13	↑ 5	u-cocycle	*u-cocycle*
21	↓ 1	Pour ce, nous montrerons	Nous montrerons
21	↑ 6	théorème 7	théorème VI
22	↑ 1	non nulles	non nulles modulo 2
28	↓ 3	biimpaire	bipaire
29	↑ 1	une matrice	une matrice M
36	↓ 14	sur G avec Z	sur G avec Z, anneau des entiers rationnels.

37 — Remplacer la première ligne par:
"En effet, A^{-1} a ses coefficients dans Z, puisque la condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible dans Z est qu'elle soit unimodulaire".

37 — Remplacer la 5^{e} ligne par:
"Elle est unique, puisque si $A\ x^{xx} = g$, $A^{-1}(A\ x^{xx}) = A^{-1}g = x^{x} = x^{xx}$."
Supprimer depuis: "Démontrons d'abord le lemme 1: ...." jusque page 41 "*Théorème III:*" exclusivement.
Conserver le titre.
3.3.3 *Automorphismes de G^{m}*.
et supprimer dans l'énoncé du théorème III "engendré par les E-matrices régulières d'ordre m".

Page	Ligne	Au lieu de:	Lire:
49	↓ 6	$P_i \in S_i$	$P_j \in S_i$
49	↓ 8	valeur absolue de $(n_j(A)-n_j(B))$	$\lvert n_j(A)-n_j(B)\rvert$

APPENDICE

ERRATUM

Page	Ligne	Au lieu de:	Lire:
1	↑ 2	C L	$C \cup L$
2	↓ 15	G	G(A)
4	Page 4, le théorème I est évident par une analyse directe.		
6	Page 6, remplacer l'énoncé par: "Il existe deux classes distinctes de matrices entières modulo 2 $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$. Si $A \in \mathcal{M}_1$, pour tout α de $\mathcal{G}_2$, tout cycle élémentaire biimpaire pour N_α a une corde. Si $A \in \mathcal{M}_2$, pour tout α de $\mathcal{G}_2$, il existe au moins un cycle élémentaire biimpaire pour N_α sans corde.		
7	↓ 13	cocycle	t-cocycle
8	↓ 8	x_j	y_j
8	↓ 9	x_j	y_j
8	↓ 11	x_j	y_j