DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ESPACIAL EN ESTUDIANTES DE GRADO SÉPTIMO DEL MUNICIPIO DE LA VIRGINIA RISARALDA MEDIADO POR LAS SITUACIONES PROBLEMA.

MAURICIO ALBERTO BERMÚDEZ GRANADA

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
Pereira, Junio del 2017

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ESPACIAL EN ESTUDIANTES DE GRADO SÉPTIMO DEL MUNICIPIO DE LA VIRGINIA RISARALDA MEDIADO POR LAS SITUACIONES PROBLEMA.

MAURICIO ALBERTO BERMÚDEZ GRANADA

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de:
Magister en enseñanza de las matemáticas

Director
Dr José Gerardo Cardona Toro

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
MAESTRíA EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
Pereira, junio del 2017

Nota de aceptación

____

____

____

____

____

____

Firma del director

____

Firma del jurado

____

Firma del jurado

Pereira, Junio de 2017

DEDICATORIA

Quiero dedicar este trabajo de grado a todas las personas que se constituyeron en mi vida en un peldaño para alcanzar el triunfo:

A Dios todopoderoso por fortalecerme, guiarme y darme todo lo que me convino, aunque no se lo haya sabido pedir, por iluminarme con su Santo Espíritu y permitirme acceder al mundo del conocimiento

A Carlos y Zulma, mis padres, quienes son mi sol, mi viento y mis grandes maestros, y junto a ellos mis hermanos que durante todos estos años han estado presentes.

A mi gran amor por creer en mí, por tenerme tantísima paciencia, y por darme un mundo de sueños por conquistar de su mano.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a la Universidad Tecnológica de Pereira, a la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas y a todos los profesores que hicieron parte de mi formación profesional: de cada uno aprendí conocimientos valiosísimos que hoy me hacen diferente, mejor persona y mejor profesor de matemáticas.

Al Dr. José Gerardo Cardona Toro, director de este trabajo, por su valioso tiempo, asesoría continua, orientación y aportes permanentes, guía, y paciencia, los cuales fueron fundamentales para la construcción de este trabajo investigativo.

A mis compañeros maestrantes por el compañerismo, la lucha, la tenacidad y la entrega.

A las instituciones educativas del municipio de La Virginia, especialmente a la Institución educativa Bernardo Arias Trujillo por brindarme los espacios y los escenarios al permitirme hacer de mis clases un laboratorio de conocimientos. A mis estudiantes quienes son el motor de mi quehacer docente.

A todas las personas que estuvieron conmigo durante este proceso: familia, amigos, mi buen amor, pues considero que el ánimo y la fortaleza fueron claves para llevar este proceso a cabo, además la convicción que me brindaron de que yo era capaz, cuando muchos otros mejores se han quedado en el camino.

Quiero agradecer especialmente al maestro de maestros: Mi Señor Jesucristo, por permitir que mis pensamientos, palabras y acciones fluyeran en esta investigación, y por llevarme de su mano a todo momento, dándome la vida y el sustento.

A todos mil gracias.

CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

LISTA DE ILUSTRACIONES

RESUMEN

Este estudio aplicado en el aula parte de las falencias que han tenido los estudiantes de grado séptimo de la Virginia Risaralda por acceder al saber geométrico correspondiente a su nivel de escolaridad, ya que su plan de estudios no contempla la enseñanza de la geometría mediante el uso de las situaciones problema y mucho menos referentes teóricos como el modelo de Van Hiele, además de dejarse sus objetos de estudio relegados para las últimas semanas de clase trayendo como una de sus consecuencias un bajo nivel en pensamiento espacial y sistemas geométricos evaluados desde los lineamientos curriculares y los estándares de calidad en educación.

Esta problemática se pretende abordar desde cuatro ejes que componen el marco teórico: las situaciones problema como estrategia para trabajar los objetos matemáticos, las secuencias didácticas como ruta de enseñanza, el desarrollo del pensamiento espacial y el Modelo de Van Hiele como referente teórico para la enseñanza del saber geométrico.

Se pretendió cumplir con los siguientes objetivos: determinar las causas del por qué los estudiantes no se han acercado al saber geométrico correspondiente al grado séptimo, diseñar una estrategia de enseñanza sustentada en las necesidades de los educandos y guiada por los referentes teóricos y establecer pautas para el adecuado diseño de situaciones problema, acorde a los niveles y fases de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, el objeto matemático y el tipo de contexto que se tenga.

Esta investigación pretende aportar razones de la importancia que tiene la enseñanza de la geometría mediante las situaciones problema y basada en el Modelo de Van Hiele, ya que responde a las necesidades que afrontan no sólo los estudiantes de grado séptimo del municipio de la Virginia, sino de una gran población de estudiantes colombianos, situación que se demuestra en los bajos niveles de desempeño en las *Pruebas Saber 11 y Saber 9*, donde los resultados asociados al pensamiento espacial y sistemas geométricos no son los mejores, conociendo que las bases de la geometría se dan desde la educación preescolar y la educación básica.

Entonces es pertinente que en un nivel como el grado séptimo hacer una reflexión sobre cómo se ha enseñado geometría y plasmar una nueva estrategia para su enseñanza que tenga en cuenta sus fortalezas, aspectos a mejorar y a la vez vincule el contexto y las posibles expectativas de los jóvenes. Un método de enseñanza del saber geométrico contextualizado que propenda en desencadenar verdaderos procesos de aprendizaje tal como lo plantean los Lineamientos curriculares de matemáticas MEN (1998):

> *El acercamiento de los estudiantes a las matemáticas, a través de situaciones problemáticas procedentes de la vida diaria, de las matemáticas y de las otras ciencias es el contexto más propicio para poner en práctica el aprendizaje activo, la inmersión de las matemáticas en la cultura, el desarrollo de procesos de pensamiento y para contribuir significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas. (p. 24)*

Se espera al final consolidar una estrategia para la enseñanza del saber geométrico basado en el uso de las situaciones problema, las secuencias didácticas y el modelo de Van Hiele que responda a las necesidades no solo de los estudiantes de grado séptimo, sino que se pueda aplicar como referente a cualquier institución pública del país.

ABSTRACT

This study applied in the classroom starts with the shortcomings of the seventh grade students of the Virginia Risaralda to access the geometric knowledge corresponding to their level of education, since their curriculum does not contemplate the teaching of geometry through the use of Problem situations and much less theoretical references such as the Van Hiele model, in addition to leaving their objects of study relegated to the last weeks of class bringing as a consequence a low level of spatial thinking and geometric systems evaluated from the curriculum guidelines and Standards of quality in education.

This problem is addressed from four axes that compose the theoretical framework: problem situations as a strategy for working mathematical objects, teaching sequences as a teaching route and the Van Hiele Model as a theoretical reference for the teaching of geometric knowledge.

It was intended to fulfill the following objectives: to determine the reasons why the students have not approached the geometric knowledge corresponding to the seventh grade from La Virginia city, to design a strategy of education based on the needs of the students and guided by the theoretical referents and establish guidelines for The appropriate design of problem situations, according to the levels and phases of teaching and learning geometry, the mathematical object and the type of context that one has.

This research aims to provide reasons for the importance of the teaching of geometry through problem situations and based on the Van Hiele Model, since it responds to the needs faced not only by students of seventh grade, but also a large population of Colombian students, a situation that is demonstrated in the low levels of performance in the tests Saber 11 and Saber 9, where the results associated with spatial thinking and geometric systems are not the best, knowing that the bases of geometry are from pre-school education And basic education.

It is therefore pertinent that at a level such as the seventh grade reflect on how geometry has been taught and a new strategy for its teaching that takes into account its strengths, aspects to be improved and at the same time to link the context and the possible expectations of the young boys. A method of teaching contextualized geometric knowledge that tends to trigger true learning processes as set out in the curriculum guidelines of mathematics MEN (1998)

> *The students' approach to mathematics, through problematic situations coming from daily life, mathematics and other sciences is the most conducive context to put into practice active learning, the immersion of mathematics in culture, The development of thought processes and to contribute significantly to the meaning and utility of mathematics. (P.24).*

It is hoped at the end to consolidate a strategy for the teaching of geometric knowledge based on the use of problem situations, didactic sequences and Van Hiele model that responds to the needs not only of seventh grade students, but can be applied As referring to any public institution of the country.

CAPÍTULO 1

1.1. TÍTULO

Desarrollo del pensamiento espacial en estudiantes de grado séptimo del municipio de La Virginia Risaralda mediado por las situaciones problema.

1.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Durante los últimos tiempos se observa como la formación en geometría ha cobrado gran importancia dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje no sólo por la relevancia que le han dado el contexto histórico, sino por la exigencia del mundo moderno que requiere personas con unas nociones sólidas en pensamiento espacial y sistemas geométricos. Jaime & Gutiérrez en su artículo: "Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria" (2011) conciben la enseñanza del saber geométrico como un conjunto de actividades metodológicas que deben facilitar exploraciones y descubrimientos hechos por los estudiantes, haciendo las clases más activas y participativas.

Paralelo a esto Gutiérrez (1998) plantea como la enseñanza y el aprendizaje del saber geométrico pierde sentido al ser relegado para los últimos capítulos de los textos y las últimas semanas de clase limitándose al abordaje de unos pocos conocimientos sobre figuras planas y espaciales con algunas fórmulas para cálculo de áreas, y a su vez, carecen de aplicación al no contextualizarse. Asi mismo lo describe Gamboa (2009) cuando afirma

> *En el sistema de educación formal, usualmente los contenidos de geometría son presentados a los estudiantes como el producto acabado de la actividad matemática, que deja en segundo plano los procesos implícitos de la construcción y de razonamiento en este conocimiento. La enseñanza tradicional de la geometría se enfatiza hacia el estudio memorístico de áreas, volúmenes, definiciones geométricas, teoremas y propiedades, apoyadas en construcciones mecanicistas y descontextualizadas (p.114)*

Al abordar el desarrollo del pensamiento espacial y sistemas geométricos y por ende del nivel de razonamiento geométrico Camargo (2002) propone que el desarrollo del pensamiento espacial se da en ambientes educativos donde la geometría se relaciona directamente con sus objetos representados, tomando la desconfiguración y reconfiguración de los objetos matemáticos como una herramienta cognitiva para el tratamiento y solución de problemas. Así mismo este se favorece con actividades que fortalezcan la exploración de propiedades, formulación de conjeturas y donde se apliquen criterios de orden y clasificación (p 308). La dificultad se percibe como siendo el pensamiento espacial un aspecto inherente al desarrollo del saber matemático no es tenido en cuenta dentro del contexto educativo, que en ultimas se limita a trasmitir el concepto de un objeto matemático.

Desde el campo especifico de las situaciones problematizadoras (o problemas) Piedrahita & Londoño (2009) conciben una situación problema como un asunto que de alguna manera orienta al logro de los conocimientos y promueve el aprendizaje significativo, la capacidad intelectual y la creatividad (p 77). Al analizar los planes de estudio y las prácticas de muchas instituciones educativas se aprecia como el eje central son los contenidos matemáticos excluyendo las situaciones problema que deberían ser centro de organización.

Es así como en Colombia desde el Ministerio de educación nacional se promulgan determinadas normas que regulan, incentivan, promueven, y evalúan el currículo de matemáticas en las comunidades educativas como son los lineamientos curriculares de matemáticas, los Estándares de competencias básicos en matemáticas, las pruebas Saber (grados tercero, quinto, noveno y once) y el Sistema Nacional de Evaluación de Estudiantes (decreto 1290).

Por un lado los Lineamientos y Estándares de Calidad enrutan el proceso educativo develando la trascendencia del saber geométrico, de su trabajo constante mostrando estrategias que conllevan a su adquisición y a su relación dentro de las matemáticas y en las otras disciplinas, pero de otra parte las Pruebas Saber arrojan unos resultados deplorables que se evidencian en los bajos desempeños de los estudiantes en las áreas de matemáticas y lenguaje relacionados con el no reconocimiento de conceptos sobre espacialidad, medición, rotaciones traslaciones, semejanzas y otras propiedades de las figuras y los cuerpos.

Estos resultados a menudo son mal interpretados echándole la culpa a los estudiantes y profesores de los grados tercero, quinto noveno y once desconociendo que es en todo el camino educativo donde están las causas de estos altibajos y se deben fundamentalmente a estrategias metodológicas no aptas para la enseñanza de la geometría como la enseñanza memorística de fórmulas y algoritmos, el desconocimiento de algunos docentes por enseñar los objetos matemáticos, la no adecuada estructuración de los planes de área, situación que se percibe al revisar la estructura curricular del campo de matemáticas dentro de las instituciones educativas de La Virginia ya que se observa el no tener en cuenta la transversalidad y la integración curricular para contextualizar el saber matemático dándole sentido, y entre otras la falta de motivación e interés de algunos estudiantes por el aprendizaje.

Desde la observación y el quehacer docente, la visualización de los resultados de las Pruebas Saber (quinto, noveno y once) además de los comentarios hechos por los docentes de matemáticas se observa cómo los estudiantes de grado séptimo del municipio de La Virginia Risaralda, presentan un bajo nivel de competencias en pensamiento espacial y sistemas geométricos visualizado en el mal manejo de conceptos, la apatía por la clase, las pocas estrategias de solución a situaciones que involucran patrones de medición y de geometría básica, seguido un sistema de enseñanza del saber geométrico fundamentado en la presentación de una fórmula, el cálculo de un área, un ángulo o un lado sin llevar estos elementos a la realidad y un plan de clases no muy acorde con los *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*, ya que no se tiene como estrategia de enseñanza las situaciones problemas, o la lúdica, o los intereses y necesidades de los educandos como contexto para acercarse al conocimiento de la geometría.

1.3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Partiendo de las dificultades encontradas en los estudiantes mediante la práctica pedagógica (revisión de talleres, pruebas escritas y verbales, ejercicios de interpretación de enunciados geométricos, ejercicios de orientación espacial, reconocimiento de figuras y propiedades entre otras), y la observación directa que se hace del trabajo de la geometría en las instituciones públicas de la Virginia se hace pertinente plantear el siguiente interrogante que se constituye en el eje central de este trabajo de investigación:

¿Cómo las situaciones problematizadoras contribuyen en el desarrollo del pensamiento espacial en los estudiantes de grado séptimo del municipio de la Virginia?

1.4. OBJETIVO GENERAL

Analizar la influencia de las situaciones problematizadoras en el desarrollo del pensamiento espacial en estudiantes de grado séptimo cuyos niveles en este campo son mínimos para su grado de escolaridad.

1.5. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Determinar qué causas han propendido para que los estudiantes no hayan adquirido un buen nivel de razonamiento geométrico y por consiguiente el desarrollo óptimo de pensamiento espacial correspondiente al grado séptimo.

- Diseñar una secuencia de enseñanza y aprendizaje de la geometría fundamentada en las situaciones problemas y el modelo de Van Hiele.
- Establecer pautas para el apto y adecuado diseño de situaciones problemas acorde al grado de escolaridad, necesidades de los estudiantes, el contexto, el objeto matemático, el modelo de van Hiele y los parámetros establecidos por el Ministerio de educación nacional.

1.6. JUSTIFICACIÓN

Hablar de educación y en este caso de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en Colombia implica partir desde unos referentes normativos y sociales que dan luces a los diversos procesos formativos.

Como primera instancia está la Ley General de Educación (1994) cuyos principios se fundamentan en la formación integral y la condición humanizante del acto educativo, además de considerar las matemáticas como un área fundamental y obligatoria (artículo 23: p. 8).

En esta línea se ubican los *Lineamientos Curriculares y los Estándares de Calidad*, que partiendo de unos conocimientos básicos enmarcan el pensamiento espacial y los sistemas geométricos como uno de los ejes para organizar los currículos y planes de área de las instituciones. Como segundo, desde una sociedad cambiante y globalizada se puede concebir la geometría como aquella parte del saber matemático que permite organizar espacios, realizar construcciones y generar estrategias que transforman el entorno y mejoran la calidad de vida.

Las concepciones anteriores develan tres grandes reflexiones que tienen que ver con la educación matemática: inicialmente es la importancia de trabajar la geometría y sus objetos de estudio en la educación básica y media, ya que el pensamiento espacial, entendido como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y manipulan las representaciones mentales de los objetos en el espacio, el estudio de los conceptos y propiedades del espacio geométrico (M.E.N, *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*, 2006: p. 61) fundamentan la esencia de una educación integral, de calidad y digna de cualquier ser humano.

Posteriormente es mirar qué estrategias metodológicas dirigidas hacia los estudiantes hacen posible y facilitan el aprendizaje de los conceptos geométricos, sus relaciones y las aplicaciones posibles vistas desde su entorno más inmediato logrando la aprehensión de los saberes propios acordes al grado de escolaridad. Una tercera reflexión tiene que ver con la manera de abordar el trabajo del pensamiento espacial dentro de la mayoría de los colegios públicos, observándose como éste queda aislado para las últimas semanas de clase, descontextualizado de la realidad y abordado como un conjunto de figuras, fórmulas y teoremas sin sentido.

Esta investigación pretende aportar razones de la importancia que tiene la enseñanza de la geometría mediante las situaciones problema y basada en el Modelo de *Van Hiele*, ya que responde a las necesidades que afrontan no sólo los estudiantes de grado séptimo, sino de una gran población de estudiantes colombianos, situación que se demuestra en los bajos niveles de desempeño en las *Pruebas Saber 11 y Saber 9*, donde los resultados asociados al pensamiento espacial y sistemas geométricos no son los mejores, conociendo que las bases de la geometría se dan desde la educación preescolar y la educación básica.

Entonces es pertinente que en un nivel como el grado séptimo hacer una reflexión sobre cómo se ha enseñado geometría y plasmar una estrategia para su enseñanza que tenga en cuenta sus fortalezas, aspectos a mejorar y a la vez vincule el contexto y las posibles expectativas de los jóvenes. Un método de enseñanza del saber geométrico contextualizado que propenda en desencadenar verdaderos procesos de aprendizaje tal como lo plantean los *Lineamientos Curriculares de Matemáticas MEN (1998)*

> *El acercamiento de los estudiantes a las matemáticas, a través de situaciones problemáticas procedentes de la vida diaria, de las matemáticas y de las otras ciencias es el contexto más propicio para poner en práctica el aprendizaje activo, la inmersión de las matemáticas en la cultura, el desarrollo de procesos de pensamiento y para contribuir significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas. (p.24)*

CAPÍTULO 2

2.1. ESTADO DEL ARTE

Desde la formación profesional del docente, la preocupación existente porque los estudiantes mejoren sus niveles de desarrollo en el pensamiento numérico, tiende a opacar el hecho real de que casi todo el mundo ha de afrontar con mucha mayor frecuencia problemas espaciales que problemas numéricos, esto se hace evidente en actividades científicas y cotidianas donde se requieren de personas que tengan un alto desarrollo espacial.

Sin embargo y en concreto, al abordar el desarrollo del pensamiento espacial mediante las situaciones problemas desde el enfoque del *Modelo de Van Hiele* se encuentran las siguientes investigaciones que hacen alguna referencia:

Godino, Batanero & Font (2004) en *"Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática"* proponen un estudio cuyo objetivo es que los maestros en formación desarrollen una visión de la enseñanza de las matemáticas que contemple entre otras cosas, las clases como comunidades matemáticas, el razonamiento matemático más que los procedimientos de simple memorización, la formulación de conjeturas, la invención, la resolución de problemas, la conexión de las ideas matemáticas y sus aplicaciones y la tecnología como elemento esencial en la enseñanza para estimular el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes.

En el capítulo alusivo a la geometría se establece que el aprendizaje del espacio es significativo en el medio en que el estudiante está inmerso, debido a que la realidad que está alrededor comprende objetos con formas y dimensiones diferenciadas y al desarrollar los contenidos relacionados con el conocimiento, orientación y la representación espacial el educando debe ir progresando en función de sus vivencias y nivel de competencias cognitivas.

El Ministerio de Educación Nacional a través de los *Lineamientos Curriculares en Matemáticas (1998)* y *Estándares Básicos de Competencias en la misma área (2006)*, constituyen la base para la orientación de los procesos de enseñanza y aprendizaje en las aulas escolares. Para ello se establecen unos conocimientos básicos, los cuales permiten desarrollar el pensamiento matemático y hacen referencia a diferentes tipos: numérico, espacial, métrico, variacional y aleatorio.

De acuerdo a los lineamientos, se plantea una nueva visión del conocimiento matemático en la escuela dentro de sus referentes curriculares haciendo énfasis en la importancia de la geometría por su mismo carácter de herramienta para interpretar, entender y apreciar un mundo que es eminentemente geométrico; por tanto, constituye una importante fuente de modelación y un ámbito por excelencia para desarrollar el pensamiento espacial y procesos de nivel superior y, en particular, formas diversas de argumentación.

En cuanto a los sistemas geométricos se hace énfasis en el desarrollo del pensamiento espacial, el cual es considerado como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones y sus diversas traducciones a representaciones materiales.

Rico (1990) en"*Didáctica de la matemática y la investigación"* plantea que resolver problemas no es solo llegar a la respuesta de algo que antes no se conocía, sino que intervienen diferentes procesos en los que se involucran la comprensión, el planteamiento y elección de estrategias. En particular, el autor afirma:

> *Resolver problemas no se reduce a usar la matemática conocida, requiere de una gran dosis de creatividad y reelaboración de hechos, conceptos y relaciones, en el sentido más real del término, resolución de problemas es crear y construir matemática. Memorizar y repetir todas las reglas deductivas que operan en un sistema formal fuertemente estructurado constituye a veces una derivación del comportamiento real del matemático. Confundir los procesos de producción y elaboración del conocimiento matemático con sus resultados cristalizados es un error frecuente en nuestra enseñanza; por ello, la resolución de problemas constituye no sólo una buena estrategia metodológica sino que supone una forma de aproximación más real al trabajo en matemática. (p.15).*

Otros estudios encontrados sobre el desarrollo del pensamiento espacial los proporcionan Leonor Camargo Uribe y su grupo de investigación de la Universidad Pedagógica Nacional. Camargo & Samper en *"la construcción de conceptos: una actividad importante para desarrollar razonamiento en geometría*" (2002) plantean como mediante un modelo descriptivo y secuencial como el de Van Hiele se logra avanzar en el razonamiento geométrico en los estudiantes mediante actividades que partan de la visualización y exploración de propiedades, así como la clasificación para obtener ejemplos y contraejemplos (p 308). En el estudio: "*Desarrollo del razonamiento deductivo a través de la geometría euclidiana"* de las mismas autoras, busca proponer un camino para el trabajo curricular que desencadene procesos direccionados a las actividades propias de la geometría vinculando el contexto:

> *El esquema que se propone apunta al desarrollo de estrategias de razonamiento a partir de actividades de construcción del conocimiento geométrico y a la integración de variables relativas a la cultura como a negociación de significados, contenidos flexibles, estableciendo relaciones democráticas en torno al aprendizaje y preocupación por la comprensión acerca del conocimiento informal que los estudiantes llevan a la escuela (p.3)*

ASOCOLME, Asociación Colombiana de matemática educativa (2003) en su publicación *"Tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la geometría"*, de las autoras Camargo, Leguizamón y Samper, proponen actividades que desarrollan el razonamiento y así potenciar el pensamiento espacial mediante la construcción de conceptos geométricos mediado por las fases de aprendizaje de Van Hiele y de sus niveles de desarrollo geométrico argumentando la importancia de este modelo:

> *La teoría propuesta por los esposos Van Hiele es muy útil para comprender la complejidad del razonamiento en el aprendizaje de la geometría. Una tarea que puede ser analizada a la luz de dicha teoría es la de conceptualizar, como lo ha demostrado la investigación empírica pues se establece el nexo entre el estado de evolución en la adquisición, por el estudiante, de un concepto o relación y las posibilidades de éxito que éste tiene al enfrentarse a otras actividades geométricas como las de resolver problemas, investigar y demostrar (p.9)*

Ángel Gutiérrez y Adela Jaime Pastor pertenecientes al Departamento de didáctica de la Universidad de Valencia han adelantado varios estudios sobre el desarrollo del pensamiento espacial desde el modelo de Van Hiele. Jaime & Gutiérrez (1990) realizaron una propuesta para la enseñanza de la geometría en la que se asume como referente teórico el *Modelo propuesto por Van*

Hiele. Inicialmente se explicó uno a uno los niveles de razonamiento en el que se tomaban como ejemplos los cuadriláteros, luego se abordaron siete actividades en las que se pretendía elevar los niveles de desarrollo de los estudiantes. Cada actividad estaba sustentada en el *Modelo de Van Hiele,* de acuerdo a sus niveles y fases de aprendizaje.

De manera similar desarrollan "*El modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la geometría*. *Un ejemplo: los giros"* (1991) donde se muestra detalladamente la aplicación y el desarrollo del pensamiento espacial mediante la aplicación de los conceptos de giro, traslación y simetría describiéndolos según los niveles de desarrollo y con actividades acordes a las fases de aprendizaje.

Morales & Maje (2011) en su trabajo de maestría *"Competencia matemática y desarrollo del pensamiento espacial"* plantean que a partir del *Modelo de Van Hiele* se logra una relación adecuada entre profesores y estudiantes para lograr con más facilidad el acceso a niveles superiores de razonamiento en los procesos de enseñanza y el aprendizaje de la Geometría. Se concibe como objetivo general planificar y diseñar una unidad didáctica para un caso particular, dentro del marco conceptual del *Modelo de Van Hiele*.

Piedrahita & Londoño (2009) en su trabajo de maestría: *"La enseñanza de la geometría con fundamento en la solución de problemas cotidianos: una propuesta metodológica orientada por el Modelo de Van Hiele"* pretenden responder a las exigencias enfocadas a movilizar en los ambientes educativos procesos que incrementan la capacidad de resolver problemas y que les posibilite un aprendizaje significativo desde diversas situaciones que se pueden observar desde la cotidianidad.

Asimismo, Piedrahita & Londoño (2009) plantean la necesidad de fomentar en el aula estrategias didácticas que posibiliten la aprehensión de conceptos mostrando actitudes de compromiso por la búsqueda del conocimiento:

> *… la enseñanza basada en la solución de problemas que hace énfasis en el desarrollo de pensamiento en los procesos de aprendizaje y en los contenidos matemáticos geométricos lleva a educando a articularse más sólidamente con su realidad y su cultura y así ganar mayor personalidad en la toma de decisiones que finalmente le darán mayor sentido a su vida. (p 79)*

2.2. MARCO TEÓRICO

Actualmente ha tomado mucha fuerza desde las políticas educativas nacionales el contextualizar el saber para generar así procesos de enseñanza y aprendizaje de impacto y que enriquezcan los diferentes procesos formativos.

Es así como en Colombia desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, los estándares de competencias básicos y los derechos básicos de aprendizajes se fundamentan unas estrategias para el trabajo de las matemáticas en las aulas de clase de tal manera que éstas estén ligadas al contexto y a la cultura.

Bajo esta visión se plantean tres grandes campos que conjugados entre sí promueven saberes y determinan el éxito en el quehacer profesional del docente de matemáticas; estas categorías son: la secuencia didáctica como ruta de enseñanza, la situación problema como estrategia y el modelo de Van Hiele como referente teórico general de la enseñanza del saber geométrico. A continuación se definen a groso modo cada uno de estos aspectos:

2.1.1. Secuencia Didáctica Como Ruta De Enseñanza

Pensar en una secuencia implica dar cabida a un proceso estructurado de pasos que conectados se conciben como un camino que busca una meta o un fin determinado; sólo quien sabe el fin determina qué pasos debe de seguir para llegar hasta él, como lo dice el adagio paisa popular: *"no hay camino favorable para quien no sabe hacia dónde va".*

En la misma línea, la didáctica desde una visión más general se plantea como como el constructo teórico de la pedagogía donde convergen los elementos del acto de educar: estudiantes, profesores, objetivos y alcances, métodos y técnicas, evaluación, retroalimentación y el contexto. Como lo plantea Larroyo (s.f.) citado por Fernández en su cátedra (mayo 16, 2015) y que plantea:

> *La didáctica es aquella parte de la pedagogía que describe, explica y fundamenta los métodos más adecuados y eficaces para conducir al educando a la progresiva adquisición de hábitos técnicas y conocimientos, en suma, a su adecuada e integral formación. (notas de clase)*

Así pues, el autor suscita la idea que la didáctica es la parte de la pedagogía que trata de la dirección del aprendizaje, que esta lo es todo en educación, que ella envuelve en la metodología la dirección del aprendizaje y la técnica de enseñanza, y aunque es parte de la pedagogía no es su totalidad.

Apoyados en las definiciones anteriores se devela el concepto de secuencia didáctica en geometría como el camino que apoyado desde el acto de educar lleva al estudiante al alcance de las competencias básicas de esta disciplina y a los distintos niveles de desarrollo de pensamiento lógico matemático, tal como lo plantea el documento Secuencias didácticas en matemáticas del MEN (2013):

> *Las secuencias didácticas son un ejercicio y un posible modelo que se propone al docente interesado en explorar nuevas formas de enseñar las matemáticas. Así se presentan las secuencias didácticas del área de matemáticas, que con una temática seleccionada apropiada para cada grado, tienen el propósito de ayudar al docente en la planeación y ejecución de varias sesiones de clase, y están desarrolladas desde la perspectiva del aprendizaje basado en la resolución de problemas y la indagación. Se trata entonces de un material que facilitará al docente que trabaja reflexiva y críticamente, enriquecer sus conocimientos didácticos del contenido matemático, y al estudiante encontrar el sentido y el significado de lo que está aprendiendo, un propósito que involucra tanto los contenidos a enseñar como la didáctica para hacerlo. La resolución de problemas que están relacionados brinda a los estudiantes la oportunidad de explorar el uso de algunos procedimientos y la necesidad de perfeccionarlos para mejorar su solución y comprensión del concepto matemático que está en juego. (p. 9)*

Así se van diferenciando los elementos que hacen parte de una secuencia didáctica: temática (concepto matemático), planeación, ejecución, perspectiva de aprendizaje (logros y competencias a alcanzar), metodología (en este caso la resolución de problemas). Algunos ejemplos de secuencias didácticas encontrados en diferentes fuentes se muestran en la siguiente síntesis:

A. Secuencia didáctica tomada del documento "*Secuencias didácticas en matemáticas*" del Ministerio de educación nacional (2013) que presenta como visión general:

• Ruta de aprendizaje.

• Descripción de aprendizajes.

• Instrumento de evaluación.

B. Secuencia didáctica tomada del texto *"Adaptación del modelo de Secuencia Didáctica en la Educación Superior"*

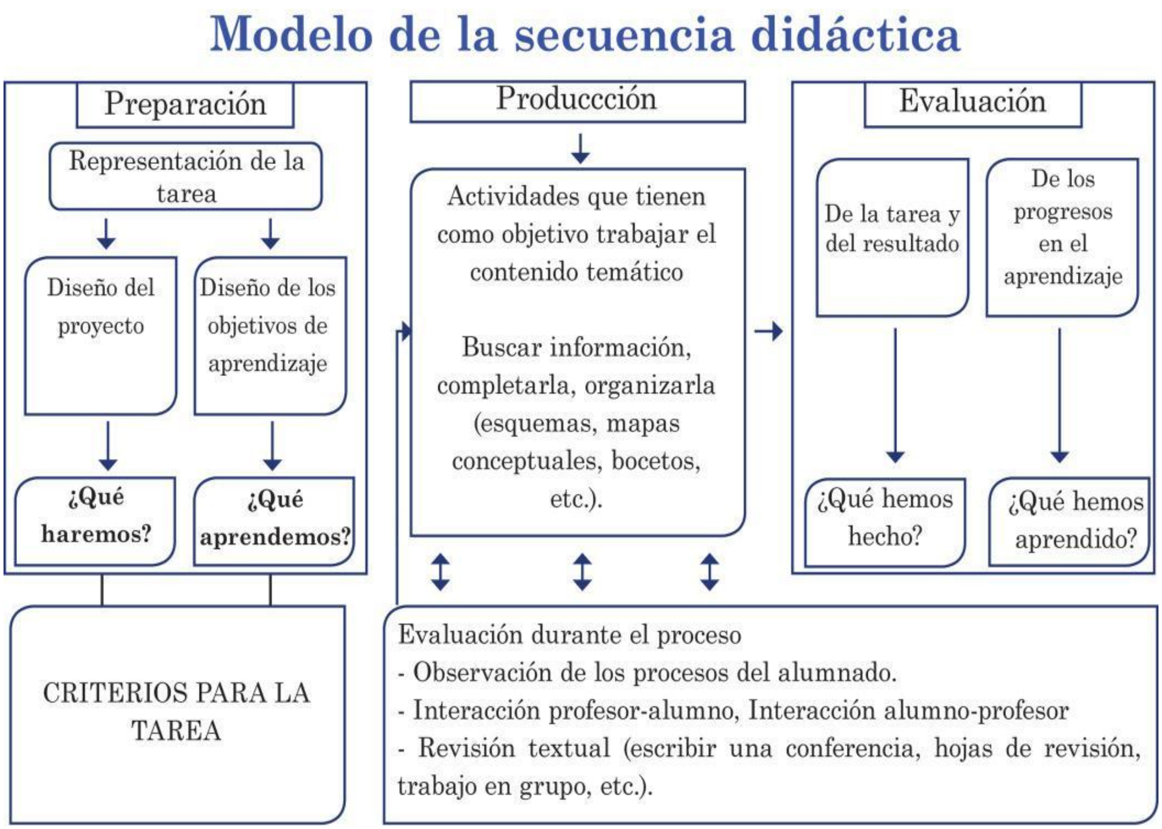


Ilustración No. 1 Adaptación del Modelo de la Secuencia Didáctica

Fuente: Adaptación del modelo Camps, citado por Vilá, Santasusana, Ballesteros, Castellá, Cros, Grau y Palau (2005: p. 122)

C. Secuencia didáctica propuesta por Salazar (2012) y publicada en Redes Sociales

Tabla No. 1: Secuencia Didáctica para las Ciencias énfasis en Física

<table>
<tr><th colspan="4">Secuencia didáctica para ciencias énfasis en física</th></tr>
<tr><td colspan="2">Identificación de la secuencia didáctica</td><td colspan="2">Problema significativo del contexto</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nivel de estudios: secundaria
Asignatura: ciencias II énfasis en física
Docente: Prof. Juan Carlos Salazar Martínez
Numero de sesiones:2
Bloque: Leyes del Movimiento
Tema: la explicación del movimiento en el entorno
Subtema: primera Ley de Newton. El estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme. La inercia y su relación con la masa</td><td colspan="2">Comprender la primera Ley de Newton como un conjunto de normas que le ayudan a explicar sucesos cotidianos relacionados con el movimiento de los cuerpos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Competencia</td></tr>
<tr><td colspan="4">Interpreta y aplica las Leyes de Newton como un conjunto de reglas para describir y predecir los efectos de las fuerzas en experimentos y situaciones cotidianas</td></tr>
<tr><td>Saber conocer</td><td colspan="2">Saber hacer</td><td>Saber ser</td></tr>
<tr><td>-Conoce el concepto de movimiento
-Conoce el concepto de inercia
-Conoce el concepto de fuerza
-Conoce el postulado de la primero ley de Newton.</td><td colspan="2">-Analiza gráficas que representan el movimiento de los cuerpos
-Realiza experimentos para comprobar los efectos de la primera ley de Newton
-Identifica los efectos que produce la primera Ley de Newton en los cuerpos.</td><td>Reflexiona sobre las consecuencias que puede traer la primera Ley de Newton en situaciones cotidianas.</td></tr>
<tr><td>Competencias Genéricas</td><td colspan="3">Criterios</td></tr>
</table>

Se expresa y se comunica	-Expresa ideas y conceptos mediante representaciones matemáticas o gráficas. -Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.
Piensa crítica y reflexivamente.	-Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos. -Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez. -Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y producir nuevas preguntas.

Fuente: Secuencia Didáctica de Salazar (2012) publicada en Slideshare en la Url: https://es.slideshare.net/iemjcarlos/secuencia-didactica-juan-carlos-salazar-mtz

Se puede inferir que hay muchas maneras de diseñar una secuencia didáctica, pero al hacer una lectura de las tres maneras planteadas se ve que hay unos elementos comunes y son precisamente estos elementos los que hacen posible llamar un proceso de enseñanza como un acto didáctico, donde convergen temas, objetivos, problemas orientadores, competencias a alcanzar, estrategias metodológicas, criterios de evaluación y retroalimentación de saberes.

2.1.2. Las Situaciones Problemas Como Estrategia Para Trabajar Los Objetos Matemáticos

Al observar la evolución de las matemáticas se aprecia que todo concepto ha nacido de la necesidad de solucionar un problema, siendo el contexto el laboratorio más adecuado para descubrir el saber matemático; así fue como desde grandes necesidades como contar, medir, hallar soluciones, plantear estrategias y hallar variaciones se gestaron grandes campos como la aritmética, la geometría, el álgebra y el cálculo entre otros.

Este aspecto no puede ser desligado de la educación matemática y en el caso particular de la enseñanza y aprendizaje de la geometría, que desde la generalización y la modelación plantea criterios para solucionar problemas similares a una determinada situación. Una situación problema es una estrategia que busca acercar al estudiante al concepto matemático mediante una inquietud, dificultad, altibajo que siendo significativo para él representa una oportunidad para redescubrir el saber y ponerlo en juego a su favor y al favor de la comunidad

Ahora bien, uno de los retos de las situaciones problemas es mejorar tanto los procesos de enseñanza como del aprendizaje de las matemáticas. Ante esto Obando y Múnera (2003) en su trabajo *"Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática"* hace algunas aproximaciones a su definición y utilidad dentro del quehacer docente:

> *Una situación problema la podemos interpretar como un contexto de participación colectiva para el aprendizaje, en el que los estudiantes, al interactuar entre ellos mismos, y con el profesor, a través del objeto de conocimiento, dinamizan su actividad matemática, generando procesos conducentes a la construcción de nuevos conocimientos. Así, ella debe permitir la acción, la exploración, la sistematización, la confrontación, el debate, la evaluación, la autoevaluación, la heteroevaluación (p.185)*

Moreno y Waldegg (2002) hacen un trabajo más detallado sobre las condiciones que debe cumplir una situación problema en matemáticas para que se generen procesos de construcción de nuevos saberes. Dichos autores hacen referencia a la integración dentro de la situación problema de los objetos matemáticos a abordar, las estrategias metacognitivas de solución y los presaberes:

> *La situación-problema constituye el punto de partida de las situaciones didácticas. Definida como una situación didáctica fundamental, pone en juego, como instrumento implícito, los conocimientos que el alumno debe aprender. La situación-problema es el detonador de la actividad cognitiva; para que esto suceda debe tener las siguientes características:*
>
> *a) Debe involucrar implícitamente los conceptos que se van a aprender.*

b) *Debe representar un verdadero problema para el estudiante, pero a la vez, debe ser accesible a él.*
c) *Debe permitir al alumno utilizar conocimientos anteriores*
d) *Debe ofrecer una resistencia suficiente para llevar al alumno a poner en duda sus conocimientos y a proponer nuevas soluciones*
e) *Debe contener su propia validación (p.186)*

Asi la resolución de la situación-problema desde el desarrollo del pensamiento espacial supone una serie de interacciones entre el estudiante que redescubre el saber y el docente que guía y facilita los medios, pero también supone la superación de un conflicto cognitivo interno del sujeto entre sus conocimientos anteriores y los que resuelven la situación planteada. Obando y Muñera (2003) establecen que una situación problema en matemáticas se compone de una red conceptual que se constituye en su elemento básico, el motivo y los medios que se convierten en los materiales sobre los cuales se estructura la situación, las actividades que son su parte visible, la validación que determina el grado de certeza, la evaluación que respeta los ritmos y canaliza los errores y por último la institucionalización que es donde el docente organiza y sistematiza las estructuras de los objetos matemáticos (p. 185-198)

Al respecto, en los Lineamientos curriculares del MEN (1994) en el apartado 2.4.1 se considera que:

El acercamiento de los estudiantes a las matemáticas a través de situaciones problemáticas procedentes de la vida diaria, de las matemáticas y de las otras ciencias es el contexto más propicio para poner en práctica el aprendizaje activo, la inmersión de las matemáticas en la cultura, el desarrollo de procesos de pensamiento y para contribuir significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas. Las aplicaciones y los problemas no se deben reservar para ser considerados solamente después de que haya ocurrido el aprendizaje, sino que ellas pueden y deben utilizarse como contexto dentro del cual tiene lugar el aprendizaje. El contexto tiene un papel preponderante en todas las fases del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, es decir, no sólo en la fase de aplicación sino en la fase de exploración y en la de desarrollo, donde los alumnos descubren o reinventan las matemáticas. Esta visión exige que se creen situaciones *problemáticas en las que los alumnos puedan explorar problemas, plantear preguntas y reflexionar sobre modelos. (p.24)*

Referente a las situaciones problema Guzmán (2007) en la Revista Iberoamericana de Educación y Cultura plantea que

… la enseñanza a partir de situaciones problemáticas pone el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamiento eficaces (p.35).

Se trata de considerar como lo más importante:

- ★ Que el alumno manipule los objetos matemáticos.
- ★ Que active su propia capacidad mental.
- ★ Que reflexione sobre su propio proceso de pensamiento con el fin de mejorarlo conscientemente.
- ★ Que, de ser posible, haga transferencias de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental.
- ★ Que adquiera confianza en sí mismo.
- ★ Que se divierta con su propia actividad mental.
- ★ Que se prepare así para otros problemas de la ciencia y, posiblemente, de su vida cotidiana.
- ★ Que se prepare para los nuevos retos de la tecnología.

2.1.3. El Pensamiento Espacial Y Los Sistemas Geométricos

Desde la perspectiva que encamina esta investigación y desde la lectura de documentos que tratan de educación matemática, es seguro decir que el pensamiento matemático no está solo relacionado específicamente sobre los fundamentos de la matemática, ni en la práctica exclusiva de los matemáticos; sino que trata de todas las formas posibles de construir ideas matemáticas, incluidas aquellas que provienen de la vida cotidiana.

Sin embargo, es importante reconocer que el pensamiento matemático está estructurado a partir de cinco tipos de pensamiento: el numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional. De los pensamientos anteriormente nombrados, el que brinda un mayor soporte y pertinencia a este estudio es el pensamiento espacial.

Según los *Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (2006),* se puede definir el pensamiento espacial y los sistemas geométricos como:

> *… el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales, contempla las actuaciones del sujeto en todas sus dimensiones y relaciones espaciales para interactuar de diversas maneras con los objetos situados en el espacio, desarrollar variadas representaciones y, a través de la coordinación entre ellas, hacer acercamientos conceptuales que favorezcan la creación y manipulación de nuevas representaciones mentales. Esto requiere del estudio de conceptos y propiedades de los objetos en el espacio físico y de los conceptos y propiedades del espacio geométrico en relación con los movimientos del propio cuerpo y las coordinaciones entre ellos y con los distintos órganos de los sentidos.*
>
> *Desde esta perspectiva se rescatan, de un lado, las relaciones topológicas, en tanto reflexión sistemática de las propiedades de los cuerpos en virtud de su posición y su relación con los demás y, de otro lado, el reconocimiento y ubicación del estudiante en el espacio que lo rodea, en lo que Grecia Gálvez ha llamado el meso-espacio y el macro-espacio, refiriéndose no sólo al tamaño de los espacios en los que se desarrolla la vida del*

> *individuo, sino también a su relación con esos espacios. En este primer momento del pensamiento espacial no son importantes las mediciones ni los resultados numéricos de las medidas, sino las relaciones entre los objetos involucrados en el espacio, y la ubicación y relaciones del individuo con respecto a estos objetos y a este espacio. (p. 61)*

De manera paralela cuando se habla de pensamiento espacial y sistemas geométricos se debe hacer alusión a su desarrollo y adquisición: El pensamiento espacial es fundamental para la construcción de habilidades matemáticas que a través de los años la persona utilizará para dar solución a problemas matemáticos, no rutinarios. Camargo (2002) expone que el desarrollo de este pensamiento es la representación bidimensional del espacio tridimensional, ya que a pesar de que vivimos en un mundo tridimensional, la mayor parte de las experiencias matemáticas que se proporcionan a los niños se hacen desde una perspectiva bidimensional; por su parte, Gutiérrez y Bulla, citando a Clements y Samara(2009) exponen dos tipos de competencias fundamentales para la construcción y desarrollo del pensamiento espacial: la orientación y la visualización espacial:

> *Las competencias mencionadas implican la comprensión y funcionamiento de las relaciones entre posiciones en el espacio en donde se identifica el tamaño y forma de objetos; representación y ubicación en un espacio tridimensional, a través de la manipulación activa del entorno, esto, visto desde la orientación espacial, por su parte, la visualización espacial compromete habilidades de procesar y producir creaciones, interpretaciones, uso y reflexión de imágenes, dibujos y diagramas mentales en papel o en herramientas tecnológicas, con el proceso de comunicar información sobre el pensamiento y el desarrollo de ideas adquiridas con anterioridad (p.22)*

También dichos autores (citando a Vargas) plantean que para evidenciar la evolución del pensamiento espacial de deben de tener en cuenta tres categorías que son: comprender objetos tridimensionales partiendo de gráficos bidimensionales, y viceversa, habilidad para imaginar una representación tridimensional desde distintas perspectivas, y habilidad para visualizar concretamente e imaginariamente efectos de reflexión e inversión de objetos-imágenes. (p.23)

Para direccionar este proceso de investigación en cuanto al desarrollo del pensamiento espacial se puede afirmar que marco teórico que mejor lo describe y lo trabaja es el modelo de Van Hiele. Tanto Camargo como Jaime y Gutiérrez coinciden que este modelo es un referente para apuntar al desarrollo de los procesos que hacen parte del saber geométrico. Jaime y Gutiérrez (1991) opinan lo siguiente:

> *La moderna investigación sobre el proceso de construcción del pensamiento geométrico indica que éste sigue una evolución muy lenta desde las formas intuitivas iniciales hasta las formas deductivas finales, aunque los niveles finales corresponden a niveles escolares bastante más avanzados que los que se dan en la escuela. El modelo de Van Hiele es la propuesta que parece describir con bastante exactitud esta evolución y que está adquiriendo cada vez mayor aceptación a nivel internacional en lo que se refiere a geometría escolar (p.49)*

Así mismo, Camargo y Samper (2003) refieren:

> *Una de las actividades más frecuentes en matemáticas es la construcción de conceptos. Los conceptos geométricos, tanto de objetos como de relaciones, son el fundamento para el desarrollo del pensamiento geométrico, sobre el que descansa el sentido espacial. La teoría propuesta por los esposos Van Hiele es muy útil para comprender la complejidad del razonamiento en el aprendizaje de la geometría (p.8, 9)*

2.1.3.1. Referentes conceptuales sobre el objeto matemático (los cuadriláteros)

Haciendo una intersección entre las investigaciones abordadas en el estado del arte y el marco teórico, y los referentes curriculares propuestos para el grado séptimo desde el Ministerio de Educación Nacional, se establece como estructura matemática formal sobre la cual se planteará las situaciones problema el objeto matemático "Cuadriláteros", ya que este hace parte de los saberes previos de los estudiantes, es condición para resolver la prueba de entrada y se constituye en fundamento para la formulación y solución de la situación problema. La estructura conceptual es reunida de las investigaciones de Morales & Maje (2011), Caldera & Vargas (2016), Maguiña (2013) y Baldor (1981) y aparece en el Anexo B. El lector allí encontrará la forma como se presenta el objeto matemático cuadrilátero en la escuela, sus propiedades, características y respectiva clasificación.

García (2006) en su trabajo *"Didáctica de la geometría euclidiana, conceptos básicos para el desarrollo de la inteligencia espacial"* distingue los cuadriláteros como una de los conceptos básicos para el desarrollo del pensamiento espacial y lo define como "línea poligonal cerrada de cuatro lados. Por ejemplo: cuadrados, rombos, romboides, rectángulos, trapecios, trapezoides. Se les define así por tener cuatro lados, cuatro vértices y cuatro ángulos. Las relaciones entre los elementos, y el tipo de elementos determinarán las diferencias" (p.105)

Godino (2004) con respecto a los cuadriláteros opina que después de los triángulos los polígonos más sencillos por tener menor número de lados son los cuadriláteros, y que realizar clasificaciones de estos objetos geométricos no solo ayuda a entender mejor sus propiedades sino a establecer relaciones entre ellos (p. 468)

2.1.4. Niveles de Van Hiele

Los esposos *Van Hiele* establecen una relación adecuada entre maestros y estudiantes para lograr el camino a niveles superiores de razonamiento a través de dos aspectos: el primero explica cómo progresan los estudiantes en sus niveles de desarrollo geométrico, el cual se han denominado niveles de razonamiento.

El segundo hace énfasis en el papel que deben cumplir los docentes para ayudar al estudiante a pasar de un nivel a otro, tal como lo ha denominado Morales & Majé (2011) fases de aprendizaje y que para este trabajo se asume de la siguiente manera:

> ***Nivel 1: Visualización****: el estudiante identifica, nombra, compara y opera sobre figuras geométricas de acuerdo con su apariencia global. Este es el nivel más elemental de razonamiento. Cuando los niños se dedican, bajo la guía del profesor, a manejar determinados tipos de figuras (por ejemplo algunos cuadriláteros), aprenden sus nombres y practican actividades de reconocimiento en los dos sentidos: nombre ↔ figura. De esta manera, si se asignan un grupo de cuadriláteros, los estudiantes pueden seleccionar los rombos, los cuadrados, los rectángulos, etc. y si se toman, uno detrás de otro, varios de esos polígonos, los niños podrán decir sus nombres.*
>
> ***Nivel 2: Análisis:*** *mientras para un estudiante del nivel 1 de Van Hiele un rectángulo es una figura reconocible porque tiene una determinada forma (como las puertas o los libros), para otro que se encuentre en el nivel 2, un rectángulo es un cuadrilátero con lados paralelos dos a dos, ángulos rectos, lados opuestos iguales, etc.; es decir, su respuesta a qué es un rectángulo será una lista de las propiedades que conoce.*
>
> ***Nivel 3: Ordenación y clasificación:*** *un estudiante en este nivel relaciona de manera lógica propiedades y reglas descubiertas previamente siguiendo argumentos deductivos informales. Si la capacidad de razonamiento propia del nivel 2 no permitía a los estudiantes entender que unas propiedades pueden deducirse de otras, al alcanzar el nivel 3 conectan lógicamente diversas propiedades de la misma o de diferentes figuras.*

En el nuevo nivel de desarrollo de los estudiantes pueden clasificar inclusivamente los diferentes cuadriláteros (los cuadrados son rombos y rectángulos,...) y así, dar definiciones matemáticamente correctas, sin redundancias, en vez de definir las figuras mediante listas exhaustivas de propiedades como hacían en el nivel 2.
Nivel 4: Deducción formal: *el estudiante demuestra teoremas deductivamente de una manera formal (usando axiomas y teoremas antes demostrados) y establece redes de teoremas. Los estudiantes del nivel 4 pueden hacer demostraciones formales de las propiedades que ya habían demostrado informalmente con anterioridad, así como descubrir y demostrar nuevas propiedades más complejas y, también estarán en condiciones de relacionar los cuadriláteros con otras partes de la geometría Euclídea que han estudiado, de darse cuenta de que hay algunos elementos comunes a todas ellas (puntos, rectas, paralelismo, ...) y llegarán a reconocer que las diferentes partes de la geometría que conocen, tanto plana como espacial, son en realidad partes de un único sistema formal basado en los Postulados de Euclides.*
Nivel 5: Rigor: *el estudiante establece teoremas en diferentes sistemas axiomáticos y analiza y compara estos sistemas. Algunos estudios han mostrado que la población estudiantil media no alcanza los dos últimos niveles, especialmente el del rigor, pues "exige un nivel de cualificación matemático elevado, y que no hay mucha diferencia entre estos dos niveles" (MEN, Lineamientos curriculares en matemáticas 1998).*
En ese orden de ideas, la propuesta de Van Hiele es apropiada y relevante para determinar el nivel de desarrollo de razonamiento geométrico de los estudiantes respecto al objeto matemático cuadriláteros. Además, también lo es para trabajar paso a paso con mayor nivel de complejidad cada una de las competencias que se ponen en juego en el estudio de las matemáticas; sin embargo, en cada uno de los niveles de Van Hiele no se podría afirmar que se trabaja una u otra competencia específica, ya que en el estudio de cualquier objeto matemático es posible vincular diversas competencias definidas por MEN dependiendo de la estrategia metodológica y los recursos utilizados por el docente en clase. (Morales y Majé, 2011: pp. 72 - 74)

2.1.4.1. Fases De Aprendizaje Del Modelo De Van Hiele

Las actividades planteadas en la presente investigación han sido elaboradas teniendo en cuenta las 5 fases de aprendizaje incluidas en el modelo propuesto por los esposos Van Hiele. Este modelo tiene una componente de recomendación a los profesores de geometría para que organicen su enseñanza siguiendo unas determinadas pautas, que reciben el nombre de las fases de aprendizaje.. De acuerdo con lo anterior, el proyecto de investigación asume las fases de aprendizaje propuestas por Van Hiele definidas por Morales & Maje (2011) de la siguiente manera: (pp: 131-132)

- **Fase 1. Información:**

El profesor debe identificar los conocimientos previos que pueden tener los estudiantes y su nivel de razonamiento en el mismo. En particular, se incuyen actividades en la fase de información para cada nivel de razonamiento, en la cual se pretende identificar *concepciones* en los estudiantes, las propiedades que reconocen en los diferentes así como las posibles relaciones o clasificaciones inclusivas que se puedan establecer.

- **Fase 2. Orientación dirigida:**

Durante esta fase se plantean actividades en las que el estudiante aprende las diversas relaciones o componentes básicos de la red de relaciones que debe formar. Como afirma Jaime & Gutiérrez (1993), el profesor debe seleccionar los problemas donde la resolución promueva los conceptos, propiedades, definiciones y relaciones que los estudiantes aprenden para su nuevo nivel de desarrollo.

- **Fase 3. Explicitación:**

En esta fase los estudiantes expresan de forma oral o escrita los resultados que se han obtenido. A su vez intercambian experiencias y discuten sobre ellas con el profesor y los demás estudiantes, con el fin de afianzar el uso y dominio de los diversos sistemas de representación para el objeto matemático: en lenguaje natural, formal y sistema de representación gráfico. En ese sentido Gutiérrez (2002) propone que:

Los estudiantes al mismo tiempo que avanzan en la resolución de un problema, van escribiendo notas comentando su actividad, los motivos de sus decisiones, etc. La directriz dada a los estudiantes es que, paralelamente a la resolución del problema, escriban comentarios sobre sus procesos metacognitivos de toma de decisiones, ideas o acciones, motivo por el que han decidido actuar así. (p.6)

- **Fase 4. Orientación libre:**

En esta fase los estudiantes emplean los conocimientos construidos durante las fases anteriores para resolver actividades diferentes a las precedentes. De esta manera el profesor propone a los estudiantes actividades que no sean de simple aplicación de un dato o algoritmo conocido, sino de situaciones con varias vías de resolución, con varias soluciones o con ninguna.

- **Fase 5. Integración:**

En esta fase se establece una visión global de todo lo aprendido sobre el objeto matemático, como se mencionó anteriormente permitirá en el desarrollo de las actividades para cada nivel de razonamiento geométrico poner en juego la negociación de significados entre estudiantes – estudiantes – docente. En ese sentido se ha planteado de manera global las siguientes actividades:

- ❖ Lectura de los protocolos de los estudiantes.
- ❖ Discusiones sobre posibles contradicciones.
- ❖ Consolidación de las conclusiones: Profesor y estudiantes.

- **Características del modelo:**

Inherente a los niveles de desarrollo geométrico y las fases de aprendizaje están las características propias del modelo que al tenerlas en cuenta hace más fácil la comprensión y análisis según el desempeño de los estudiantes. Así, Vargas & Gamboa (2013) describen las características propias del modelo:

> ***Recursividad:*** *el éxito en un nivel depende del grado de asimilación que tenga el estudiante de las estrategias del nivel anterior. Los objetos de un nivel se convierten en los objetos de estudio del siguiente, es decir, se hacen explícitos aquellos conocimientos que eran implícitos en el nivel anterior.*
> ***Secuencialidad:*** *no se puede alcanzar un nivel sin haber superado de forma ordenada todos los niveles inferiores, cada nivel de razonamiento se apoya en el nivel anterior, hay que tener cuidado ya que una mala instrucción o aprendizaje en un nivel anterior puede llevar a aparentar que ya están preparados para pasar al siguiente nivel, cuando no es así. Van Hiele decía que la edad no es un factor determinante para el paso de los niveles.*
> **Especificidad del lenguaje***: las diferentes capacidades de razonamiento asociadas a los niveles de Van Hiele no solo se reflejan en la forma de resolver los problemas propuestos, sino en la forma de expresarse y en el significado que se le da a determinado vocabulario. Cada nivel lleva asociado un tipo de lenguaje y un significado específico del vocabulario matemático; por tanto, el docente debe ajustarse al nivel en que están sus estudiantes.*
> ***Continuidad:*** *se refiere a la forma en cómo el individuo pasa de un nivel a otro. El paso en los niveles de Van Hiele se produce de forma continua y pausada, puede tardar varios años en los niveles 4 y 5. Se puede dar el caso de que el individuo no llegue a alcanzar el nivel 5.*
> ***Localidad:*** *por localidad de los niveles se entiende que un individuo puede razonar en diferentes niveles al trabajar en distintos campos de la geometría. Por lo general, un estudiante no se encuentra en el mismo nivel de razonamiento en cualquier área de la geometría, pues el aprendizaje previo y los conocimientos que tenga son un elemento básico en su habilidad de razonamiento. Una vez alcanzado un nivel en algún concepto o campo de la geometría, será más fácil para el individuo alcanzar ese mismo nivel para otros conceptos o áreas. (pp: 86 - 87)*

CAPÍTULO 3

3.1 DISEÑO METODOLÓGICO

La investigación será de carácter cualitativo de tipo descriptivo e interpretativo, y su marco teórico será el modelo de Van hiele. Vílchez (2007), citado por Morales y Maje (2011) afirma que la investigación educativa tiene como finalidad prioritaria apoyar los procesos de reflexión y crítica para tratar de mejorar la enseñanza y el aprendizaje. En ese sentido el proyecto de investigación centra la atención en una investigación de tipo aplicada, porque su finalidad radica en realizar una intervención a un problema práctico de la educación matemática, específicamente, en el ámbito de la didáctica de las matemáticas, y de esta manera contribuir al mejoramiento de los procesos pedagógicos en la educación básica.

Folgueiras (2013) citado por Caldera & Vargas (2016) afirma en el caso del enfoque cualitativo que se utiliza para descubrir y refinar preguntas de investigación basándose en descripciones y observaciones reconstruyendo la realidad tal como se observa mediante la observación reflexiva, entrevistas en grupos, evaluación de experiencias personales, interacción con grupos. La recolección de datos está influida por experiencias y prioridades de los participantes

El investigador está directamente involucrado con las personas que estudia y sus experiencias, por lo que adquiere un punto de vista “interno”, aunque mantiene una perspectiva analítica. Utiliza técnicas de investigación flexibles. Analiza tanto los aspectos explícitos como los implícitos e inconscientes

En cuanto al *Modelo de Van Hiele*, el diseño de guías e instrumentos de recolección de información tendrá en cuenta las fases de aprendizaje y los niveles de razonamiento. Jaime (1993) en sus tesis doctoral *"Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele"* le da alta pertinencia al modelo ya que permite aplicar y evaluar pensamiento espacial y a su vez responde a las necesidades de la investigación en educación matemática (geométrica):

> *Una de las preocupaciones centrales de los investigadores en didáctica de las matemáticas es tratar de describir y explicar los procesos cognitivos de los estudiantes de matemáticas. En las últimas décadas ha destacado de manera espacial dentro de este terreno el modelo de razonamiento matemático de Van Hiele, que ha sido estudiado con intensidad y utilizado con éxito como marco de referencia para el diseño curricular (p.i)*

3.2. POBLACIÓN OBJETO

La población está determinada por 300 estudiantes de grado séptimo del municipio de La Virginia Risaralda. Son estudiantes que en su mayoría provienen de estrato bajo, padres con un nivel mínimo de escolaridad (primaria o bachillerato incompleto) cuyo sustento depende del cultivo de la caña o de material extraído de río.

Un alto porcentaje proviene de familias disfuncionales, es decir, que no son familias constituidas por padre y madre. Cabe anotar que el contexto geográfico también afecta la población objeto en cuanto a sus ritmos de aprendizaje ya que La Virginia posee una temperatura que varía entre los 28°C y 37°C, anexándole que las instituciones educativas de este municipio no cuentan con infraestructura adecuada como salones ventilados y dotados de artefactos tecnológicos o laboratorio de matemáticas que faciliten el aprendizaje de la geometría. También se debe mencionar que por las condiciones sociales, culturales, económicas y de oportunidades para la vida la población de los grados séptimos, todos adolescentes o preadolescentes entre los 12 y 15 años, están en constante riesgo de consumo, tráfico e influencia de sustancias psicoactivas.

Para la muestra se utilizará un muestreo aleatorio simple para la población objeto con un nivel de confianza del 95% y error del 5%.

3.3. ETAPAS DE LA INVESTIGACIÓN

El desarrollo de la investigación se llevará a cabo de acuerdo a las siguientes etapas:

3.3.1. Etapa De Alcance Objetivo 1:

Realizar un análisis al plan de área de grado séptimo de las instituciones educativas para saber desde qué parámetros se trabaja la asignatura de geometría (analizar desde qué referentes teóricos se trabaja la geometría y que tanto se aproximan o asemejan al modelo de Van Hiele y a la enseñanza mediante Situaciones problema).

Este análisis permitirá hacer un acercamiento hacia la estructura curricular y didáctica que tienen los docentes que orientan geometría en los grados séptimos de: sus estrategias de enseñanza, sus metodologías, los libros de texto y los recursos que utiliza y la forma de evaluar el saber geométrico entre otros. Igualmente facilita un diagnóstico sobre los estudiantes conociendo sus saberes y posibles desempeños en cuanto al saber geométrico.

3.3.2. Etapa de alcance objetivo 2:

- Definición de un marco teórico que se fundamente en las situaciones problema y el modelo de Van Hiele.
- Aplicación de test y cuestionario a los estudiantes para determinar en qué nivel de Van hiele se ubican.
- Elaboración y diseño de guía de enseñanza y material didáctico que tenga en cuenta el entorno de los estudiantes, sus expectativas y necesidades, y fundamentada en los referentes teóricos abordados desde la investigación (las situaciones problema y los niveles de desarrollo geométrico y fases de aprendizaje del modelo Van Hiele).
- Aplicación de esta guía de clase a los estudiantes haciendo un seguimiento detallado a los avances y dificultades que presentan.
- Compilación de material didáctico elaborado, situaciones y esquemas de trabajo en clase haciendo una evaluación detallada de la utilidad y pertinencia de este.

3.3.3. Etapa De Alcance Objetivo 3

- Observación y sistematización de los alcances obtenidos con la aplicación de la propuesta trabajada desde el objetivo 2 mediante el análisis de instrumentos de recolección de información como son la aplicación de la prueba de entrada y de la guía de enseñanza: apuntes, copias, fotos, percepciones del investigador y observación directa de los procesos donde se verán los registros de momentos de clase haciendo un análisis bajo los referentes teóricos.

- Identificación de los aspectos más importantes a tener en cuenta para el desarrollo del pensamiento espacial y los niveles de razonamiento geométrico a partir de los resultados obtenidos.
- Redacción final del documento de trabajo desarrollado en esta investigación.

3.3. CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES

Tabla No 2: Cronograma de Actividades

ACTIVIDAD	**Jun. 2016**	**Jul. 2016**	**Ag. 2016**	**Sept. 2016**	**Oct. 2016**	**Nov. 2016**	**Dic. 2016**	**En. 2017**	**Feb. 2017**	**Mar. 2017**	**Ab. May 2017**
Revisión bibliográfica	**X**	**X**									
Búsqueda de antecedentes	**X**	**X**	**X**								
Análisis al plan de área				**X**	**X**						
Observación de clases de geometría					**X**	**X**					
Diseño de test según modelo de Van Hiele							**X**				
Aplicación de test a estudiantes. Análisis de resultados								**X**			
Diseño de guías de enseñanza								**X**	**X**		
Aplicación y desarrollo de las guías de enseñanza de geometría. Análisis de resultados									**X**	**X**	
Compilación de observaciones y resultados. Redacción informe final										**X**	
Presentación trabajo de grado Posible sustentación											**X**

Fuente: Producción propia

3.4. RESULTADOS / PRODUCTOS ESPERADOS Y POTENCIALES BENEFICIARIOS

- Determinar los conocimientos previos y concepciones que tienen los estudiantes sobre la geometría correspondiente al grado séptimo según los lineamientos curriculares, Estándares de calidad y plan de estudio de las instituciones educativas.
- Identificación y aplicación de situaciones problema desde las matemáticas y el contexto que permitan el aprendizaje de la geometría y sus objetos de estudio
- Mejores resultados académicos a corto mediano plazo visualizados en los desempeños en las pruebas externas(Saber 7) e internas (sistema institucional de evaluación)
- Fortalecer las estrategias didácticas de tal manera que permean en el colectivo de docentes de matemáticas y en el plan de estudios de las instituciones educativas vinculando la enseñanza mediante situaciones problemas y el modelo que proponen los esposos Van Hiele
- Motivar al estudiante hacia un aprendizaje activo, dinámico, innovador , desmitificando falsas creencias sobre la geometría
- Cualificar la práctica profesional docente mediante prácticas pedagógicas estructuradas a la luz de la investigación y reflexiones pedagógicas profundas avaladas por los referentes teóricos.

CAPÍTULO 4

4. RESULTADOS Y ANÁLISIS

4.1. ANÁLISIS AL PLAN DE ESTUDIOS

Al realizar un análisis al plan de estudios que desarrollan los estudiantes de grado séptimo del municipio de La Virginia se encuentra que las diferentes instituciones educativas se ciñen a los contenidos temáticos que se derivan de los Estándares de calidad y los Derechos básico de aprendizaje del M.E.N (2016), apoyados por la temática que plantean los libros de texto de las editoriales Santillana y Norma.

Por lo tanto, los planes de estudio conservan todos la misma similitud. Para su análisis se tiene en cuenta los siguientes aspectos haciendo una comparación con los estándares y competencias planteadas por el M.E.N:

- Objetos matemáticos abordados.
- Actividades metodológicas.
- Referentes teóricos

4.1.1. REFERENTES DEL PLAN DE ESTUDIOS DE GEOMETRÍA

En la siguiente Tabla No 3 el lector encontrará los referentes del plan de estudios de geometría que abordan los estudiantes de grado séptimo de las diversas instituciones de la Virginia.

Tabla No. 3: Elementos del Plan de Estudios hallados en las Instituciones Educativas de la Virginia Risaralda

Objeto Matemático	Actividades Metodológicas	Referentes Teóricos
Medida de ángulos en grados. Cuadriláteros, perímetros y áreas. Triángulos: clasificación y semejanza de triángulos, construcción de alturas, medianas, mediatrices y bisectrices, área del triángulo. Simetrías, traslaciones, reflexiones y rotaciones. Sólidos geométricos. (concepto de sólido sin trabajar volúmenes o áreas totales)	Problemas de aplicación Toma de apuntes Trabajo con matemática recreativa Fortalecimiento del trabajo en equipo fundamentando los valores de la responsabilidad, la honestidad, el respeto y la escucha. Realización de talleres consultas y exposiciones. Elaboración de sólidos geométricos con cartulina y material reciclable	Lineamientos curriculares de matemáticas Estándares de calidad en educación. Derechos básicos de aprendizaje. Nuevas matemáticas 7 editorial Santillana edición 2007. Hipertexto matemático editorial Santillana edición 2014. Espiral séptimo editorial Norma edición 2010

Fuente: Producción Propia

En la Tabla No. 4 se encuentran los elementos que brinda el MEN (2006) para el abordaje de la geometría de grado séptimo:

Tabla No. 4: Referentes del MEN para orientar los Planes de Área de Geometría

Ítem	Descripción
Objetos matemáticos propuestos por los diversos textos que refieren las Instituciones educativas	* Polígonos y cuerpos: definición y clasificación. * Poliedros regulares e irregulares: cubos pirámides y prismas. * Cuerpos redondos * Triángulos: clasificación, construcción y propiedades. * Cuadriláteros. * Polígonos congruentes y semejantes
Objetivos	* Describir dibujar y analizar figuras de dos y tres dimensiones. * Identificar y describir relaciones entre diversas formas geométricas. * Aplicar homotecias sobre una figura geométrica
Estándares de calidad para grado séptimo en cuanto al saber geométrico	* Represento objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas. * Identifico y describo figuras y cuerpos generados por cortes rectos y transversales de objetos tridimensionales. * Clasifico polígonos en relación con sus propiedades. * Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte. * Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales. * Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos. * Identifico características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica.
Derechos básicos de aprendizaje relacionados con el pensamiento geométrico	* Hace dos copias iguales de dos rectas paralelas cortadas por una secante y, por medio de superposiciones, descubre la relación entre los ángulos formados. Soluciona problemas en contextos geométricos que involucran calcular ángulos faltantes en un triángulo o cuadrilátero. * predice el resultado de rotar, reflejar, trasladar, ampliar o reducir una figura
Metodologías propuesta para la enseñanza de la geometría según los lineamientos curriculares de matemáticas	* Organización del currículo y los planes de matemáticas entorno a tres aspectos: procesos generales de la actividad matemática, el conocimiento, el contexto y el conocimiento de los estudiantes. * Fomento de la investigación en el aula. * Enseñanza de las matemáticas mediante las situaciones problema, el cual debe ser el eje central del currículo de matemáticas. * la geometría activa como una alternativa para restablecer el estudio de los sistemas geométricos como herramientas de exploración y representación del espacio, que parten de la actividad del alumno y su confrontación con el mundo * El modelo de Van Hiele como estrategia de enseñanza ya que facilita el avance y desarrollo de los diferentes niveles de pensamiento geométrico

Fuente: Documento adaptado por el autor de este trabajo de los Derechos Básicos de Aprendizaje (2015), los Lineamientos curriculares (1998); y los Estándares de Calidad (2006)

Luego de hacer una lectura y obtener comparativos entre los elementos que tienen en cuenta las instituciones educativas y los referentes que brinda el MEN para su puesta en marcha se puede inferir lo siguiente:

- En cuanto a los objetos matemáticos están muy aproximados a lo que plantean los estándares de calidad y derechos básicos de aprendizaje. Sin embargo se aprecia cómo las instituciones educativas están muy enfocadas a los contenidos y dejan de lado los procesos inmersos de la geometría como son los niveles y los procesos de pensamiento.
- Las actividades metodológicas que trabajan las instituciones educativas están encaminadas al fortalecimiento en valores, al trabajo en equipo y la responsabilidad que si bien son importantes, no son el todo en la educación matemática.
- Al realizar una lectura de los planes de estudio se aprecia que estos no contemplan estrategias como el trabajo de secuencias didácticas enfocados en la solución de situaciones problema y no existe un derrotero donde se muestre cómo es el trabajo de los objetos matemáticos: este trabajo se ve limitado a lo que proponen los libros de texto y no se contemplan los proceso generales de la actividad matemática como lo son la formulación y resolución de problemas, la modelación de procesos y fenómenos de la realidad, la comunicación, el razonamiento y la formulación, comparación y ejercitamiento de procedimientos y algoritmos.
- Estos planes de estudio aunque tienen como referentes teórico conceptuales los Lineamientos curriculares de matemáticas, los estándares de calidad y los derechos básicos del aprendizaje obvian por completo estrategias como el *Modelo de Van Hiele* para la

enseñanza de la geometría. Al hacer una lectura minuciosa del modelo se aprecia que estos planes están desligados por completo de la estructura del trabajo planeado para el aula corroborando lo expuesto anteriormente cuando se afirma una gran tendencia al trabajo de un concepto o una fórmula sin sentido.

4.3. DISEÑO DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA (TEST) PARA DETERMINAR EL NIVEL DE DESARROLLO GEOMÉTRICO DE LOS ESTUDIANTES

Para el diseño y aplicación de esta prueba diagnóstica se debe tener en cuenta el diseño curricular de las instituciones educativas del municipio de la Virginia, ya que este da una orientación sobre los conocimientos previos que poseen los estudiantes. Analizado este diseño y por información que aportan los docentes de matemáticas de grados sexto y séptimo en entrevistas y conversatorios con ellos, se deduce que los estudiantes tienen conocimientos previos en los siguientes temas:

- Rectas paralelas, secantes y perpendiculares
- Ángulos: clases, medición clasificación y construcción con regla y transportador.
- Polígonos: elementos de un polígono, clasificación (regular e irregular), construcción de algunos polígonos regulares
- Triángulos y cuadriláteros: clasificación y construcción de estos.

Sin embargo, los docentes de las instituciones educativas manifiestan que los estudiantes de toda la secundaria y especialmente los de grado séptimo poseen muchos vacíos conceptuales en geometría, razón por la cual se diseña el test con el tema de los cuadriláteros que encierra todos los saberes previos.

Para el diseño de esta prueba se toman en cuenta los tres primeros niveles del modelo Van Hiele, ya que se considera que los dos últimos niveles (deducción formal y rigor) no son alcanzados por la mayoría de los estudiantes colombianos: *"Algunos estudios han mostrado que la población estudiantil media no alcanza los dos últimos niveles, especialmente el del rigor, pues "exige un nivel de cualificación matemático elevado, y que no hay mucha diferencia entre estos dos niveles" (MEN, 1998: p. 39).*

Sin embargo, si al aplicar el test se determina que algún o algunos estudiantes superan el tercer nivel (Ordenación y clasificación o deducción informal) se elaborara un segundo test para saber en qué grado se encuentra en el nivel de deducción formal y rigor.

Este test consta de 10 puntos, a través de los cuales se busca determinar a través de los saberes previos de los estudiantes en qué fase de aprendizaje del saber geométrico se encuentran. Para resolverlo los estudiantes deben tener necesariamente lápiz, y regla y transportador por si consideran que necesitan estos elementos.

La prueba ha sido adaptada del test que utilizó Maguiña (2013) en su trabajo de maestría *"una propuesta didáctica para la enseñanza de los cuadriláteros basada en el modelo Van Hiele" (p. 117),* así como su interpretación a la luz de los niveles de aprendizaje del respectivo modelo. El test se encuentra en el Anexo A y a continuación se presenta el nivel en que se ubica cada pregunta con sus respectivas características para la interpretación:

Tabla No. 5: Descripción del Test a partir del Modelo de Van Hiele

Nivel	Ítem	objetivo
1. Visualización y reconocimiento	1	Reconocer un cuadrilátero por su forma global
	2	Agrupar cuadriláteros de acuerdo a sus formas globales
2. Análisis	3	Establecer las propiedades principales que caracterizan a los cuadriláteros
	4	Identificar y describir las propiedades de un paralelogramo
	5	Establecer relaciones entre los elementos de un rombo
	6	Identificar y definir las propiedades de los diferentes tipos de cuadriláteros
3. Ordenación o clasificación (deducción informal)	7	Promover que el estudiante explique y justifique sus argumentos, así mismo, promover la utilización de la notación matemática
	8	Establecer relaciones entre los elementos y las propiedades de los diferentes tipos de cuadriláteros.
	9	Realizar demostraciones sencillas, a partir de los datos explícitos que proporciona el problema, así como también, justificar los argumentos de sus demostraciones, en base a las propiedades implícitas presentes en el problema.
	10	Resolver problemas contextualizados que impliquen la organización de datos

Fuente: Maguiña (2013: p. 117)

4.3.1. Aplicación De La Prueba Diagnóstica O Prueba De Entrada

La prueba diseñada según los niveles de razonamiento del *Modelo Van Hiele* y los presaberes que según el plan de estudios, el M.E.N y los docentes de las instituciones educativas fue aplicada a un grupo de 30 estudiantes de grado séptimo del municipio de la Virginia elegidos aleatoriamente.

Para la aplicación se concentraron en la Institución Educativa Bernardo Arias Trujillo en uno de los salones con mejores condiciones de ventilación y luminosidad, entre las 6:20 am y 8:20 am, ya que el calor a esta hora afecta menos los niveles de concentración.

Se le solicitó a uno de los docentes titulares del área para que supervisara la aplicación de la prueba y si era posible hiciera los registros correspondientes en su Diario de campo.

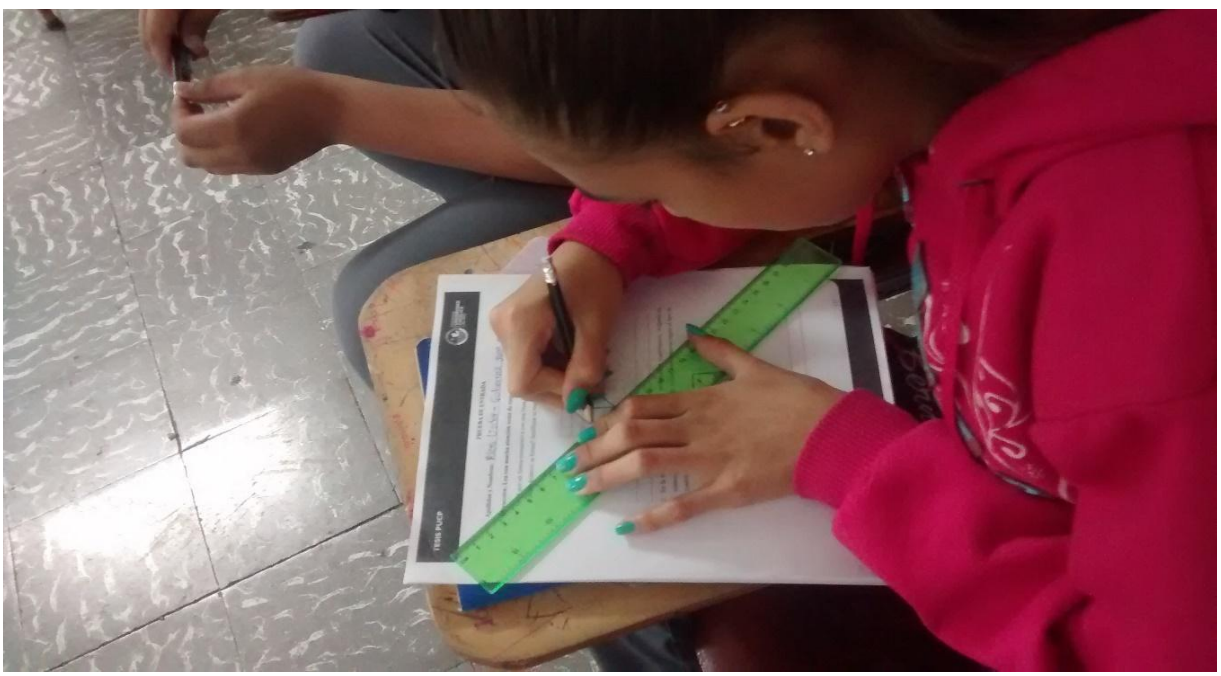


Ilustración 2: Inicio Aplicación de la Prueba de Entrada

Fuente: Producción Propia

4.3.2. Análisis De Resultados Obtenidos Con La Aplicación De La Prueba De Entrada

Para realizar este análisis se tuvo en cuenta la descripción del Test a partir del *Modelo de Van Hiele*. En cada pregunta surgen varios tipos de respuestas que se van especificando más adelante, apoyándose en las tablas de frecuencias de la estadística elemental. En cada pregunta se muestran algunas respuestas de los estudiantes, pero se aclara que para tabular se tiene en cuenta la totalidad de las respuestas.

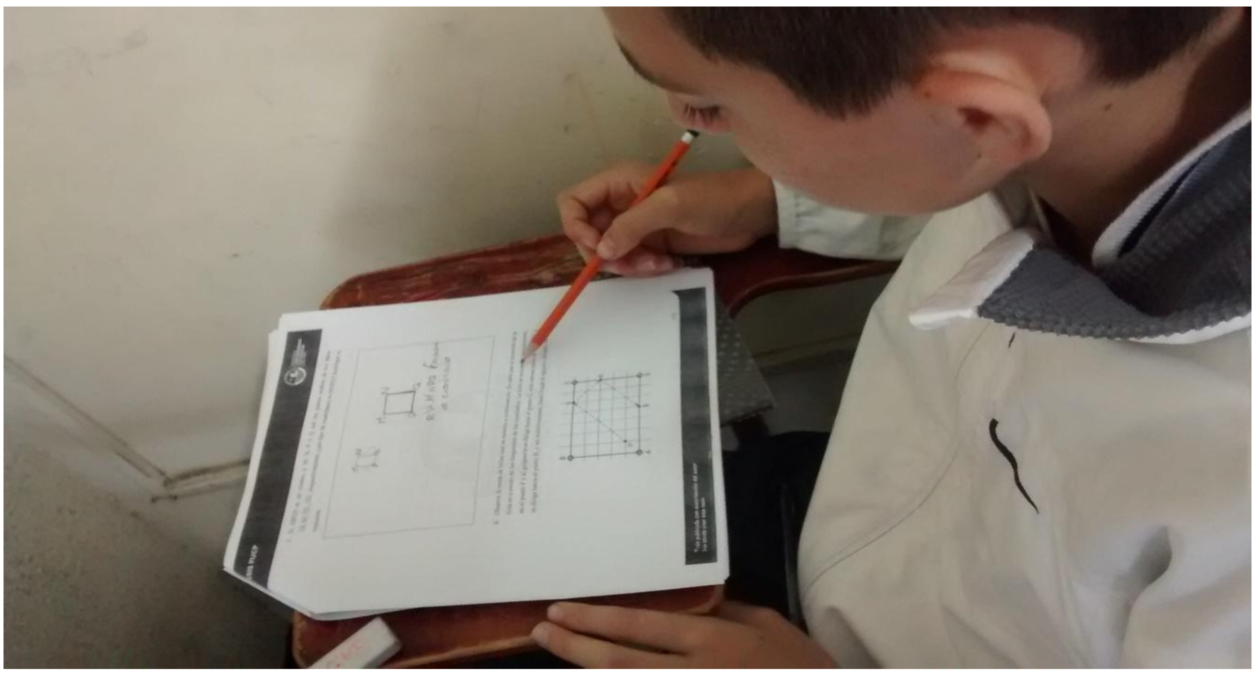


Ilustración 3: Estudiante Resolviendo la Prueba en el ítem No. 6

Fuente: producción propia

4.3.2.1. Análisis y comentarios a la pregunta número 1

Al iniciar la lectura de cada análisis y comentarios el lector encontrará en primera medida la pregunta tomada del test que aparece en el anexo número 1, que corresponde a la pregunta que cada estudiante debía resolver. Las ilustraciones respectivas corresponden a cada ítem y buscan contextualizar el análisis.

Así se da inicio a los comentarios de la pregunta 1:

Al unir en forma consecutiva con una línea recta los puntos A, B, C, D y A. ¿Qué tipo de cuadrilátero se forma? Justifique su respuesta.

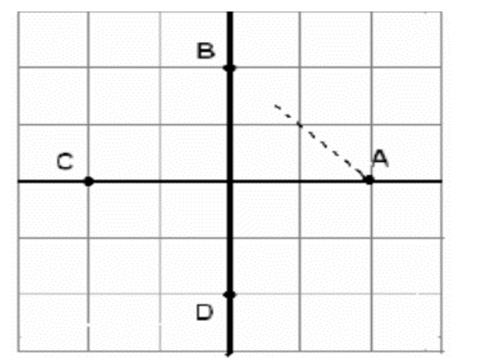


Ilustración No 4: ¿Qué tipo de cuadrilátero?

Fuente: Maguiña (2013) Tomado del Anexo A

Esta pregunta obedece al primer nivel de razonamiento (visualización o reconocimiento) y busca en los estudiantes el reconocer los cuadriláteros por su forma global. Algunas respuestas fueron las siguientes:

<u>Contestada incorrectamente:</u> se define de esta manera pues se esperaba que el estudiante relacionara las condiciones de la pregunta con una figura de cuatro lados y no precisamente con un triángulo, ver ilustración No. 5.

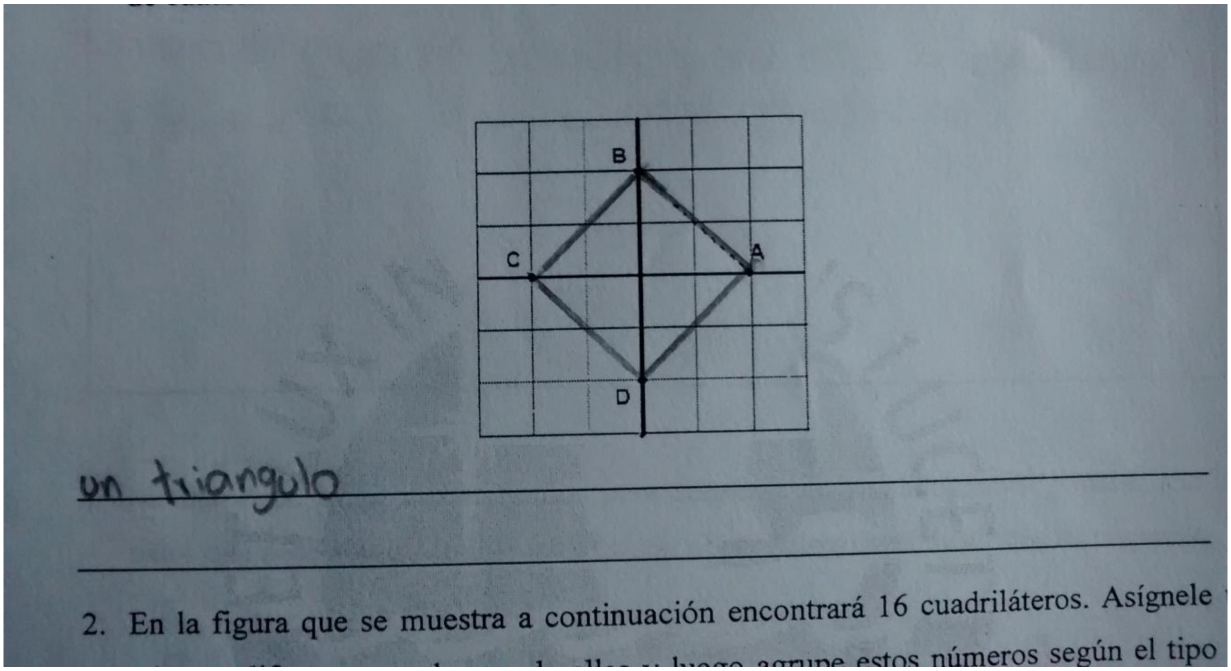
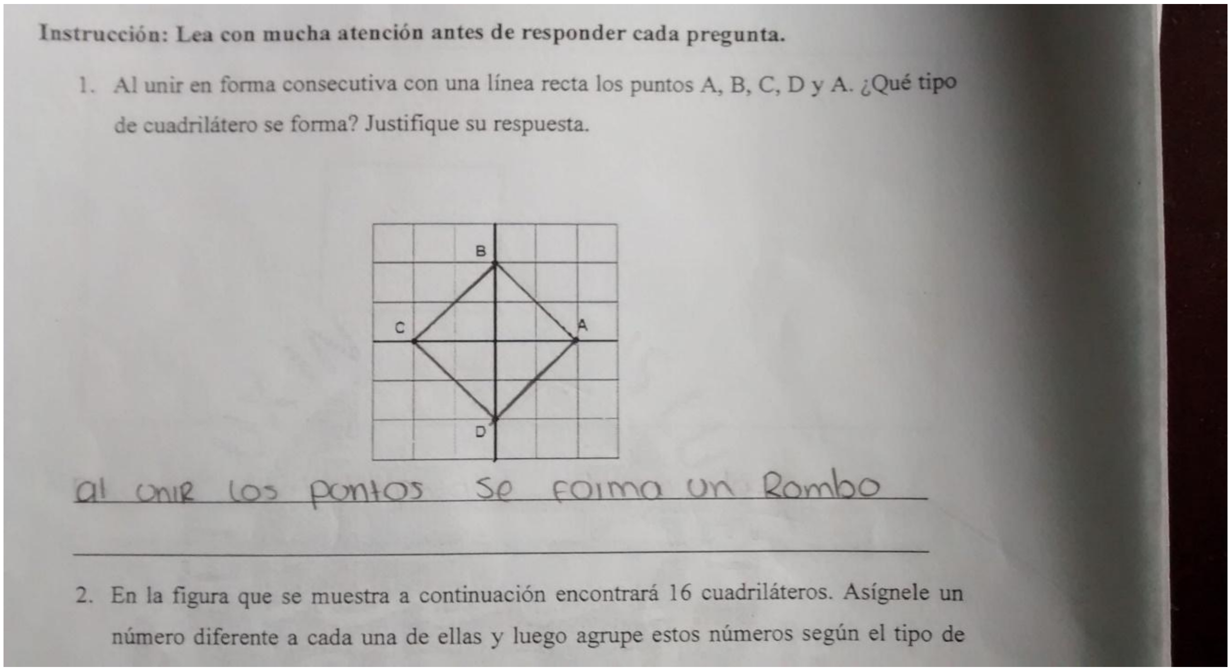


Ilustración No. 5: Respuesta Pregunta Tipo 1 "Contestada incorrectamente"

Fuente: producción propia

<u>Responde que es un rombo pero no justifica su respuesta:</u> aunque no es un rombo, el primer nivel de visualización le permite decir al estudiante a simple vista que si lo es, pero se hubiera esperado que hiciera un comparativo con un objeto conocido (cometa, diamante). Ver Ilustración No. 6.



Instrucción: Lea con mucha atención antes de responder cada pregunta.

1. Al unir en forma consecutiva con una línea recta los puntos A, B, C, D y A. ¿Qué tipo de cuadrilátero se forma? Justifique su respuesta.

B C A D

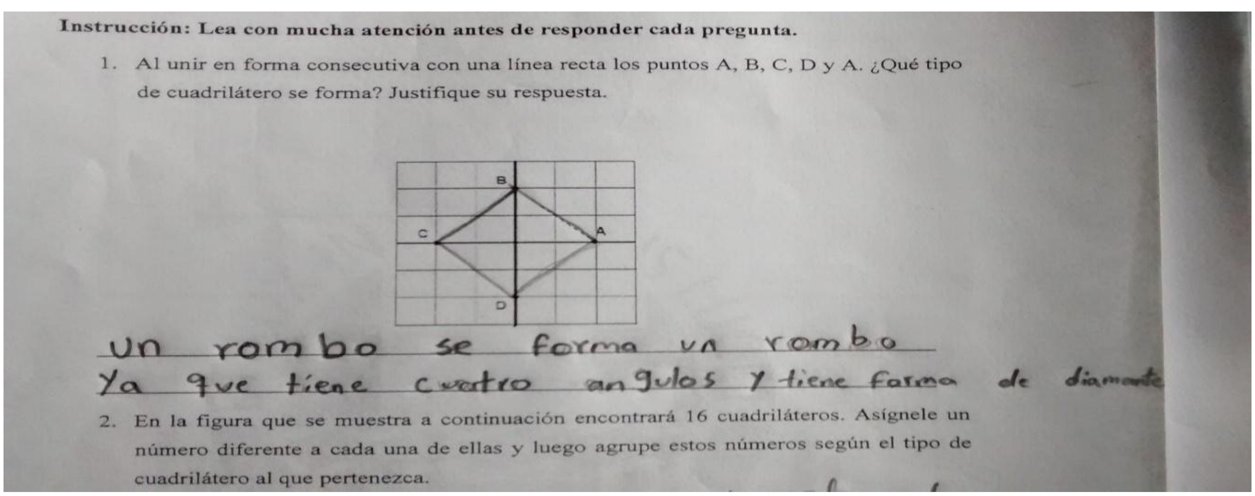
al unir los pontos se foima un Rombo

2. En la figura que se muestra a continuación encontrará 16 cuadriláteros. Asígnele un número diferente a cada una de ellas y luego agrupe estos números según el tipo de

Ilustración No. 6: Respuesta tipo 2 Pregunta No. 1 "Responde qué es un rombo pero no justifica su respuesta"

Fuente: Producción Propia

<u>Contesta que es un rombo pero justifica de forma incompleta</u>: el nivel de visualización se observa muy claro en esta respuesta porque el estudiante relaciona la figura geométrica con algo conocido y la describe desde esta concepción, aunque se nota que no hay claridad en él entre las diferencias entre un rombo y un cuadrado. Ver Ilustración No. 7.



Instrucción: Lea con mucha atención antes de responder cada pregunta.

1. Al unir en forma consecutiva con una línea recta los puntos A, B, C, D y A. ¿Qué tipo de cuadrilátero se forma? Justifique su respuesta.

B C A D

un rombo se forma un rombo
Ya que tiene cuatro angulos y tiene forma de diamante

2. En la figura que se muestra a continuación encontrará 16 cuadriláteros. Asígnele un número diferente a cada una de ellas y luego agrupe estos números según el tipo de cuadrilátero al que pertenezca.

Ilustración No. 7: Respuesta Tipo 3 Pregunta 1 "Contesta qué es un rombo pero justifica de forma incorrecta"

Fuente: Producción Propia

El total de respuestas se puede apreciar en la Tabla No. 6:

Tabla No. 6: Tipo de Respuestas a la Pregunta No. 1 (Visualización y Reconocimiento)

Tipo de respuesta	**Cantidad (estudiantes)**
1. Contestadas incorrectamente	2
2. Responde que es un rombo pero no justifica su respuesta	22
3. Contesta que es un rombo pero justificada de forma incompleta	6
4. Contestadas y justificadas correctamente (un cuadrado)	0
Total	30 estudiantes

Fuente: Producción Propia

De la tabla anterior se puede extraer que ninguno de los 30 estudiantes contesta y justifica correctamente que al unir los puntos de la figura se forma un cuadrado, razón que lleva a pensar que el total de la muestra no diferencia entre un rombo y un cuadrado en posición diferente a la convencional

Tabla No.7: Distribución de Frecuencia para Tipos de Respuestas Pregunta No. 1

Variable(tipo de pregunta)	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia acumulada**	**Frecuencia relativa**	**Frecuencia relativa acumulada**
Tipo 1	2	2	2/30= 0.066	0.066
Tipo 2	22	24	22/30= 0.733	0.8
Tipo 3	6	30	6/30= 0.2	1
Tipo 4	0	30	0/30= 0	1
Total	30		30/30= 0.999	

Fuente: producción propia

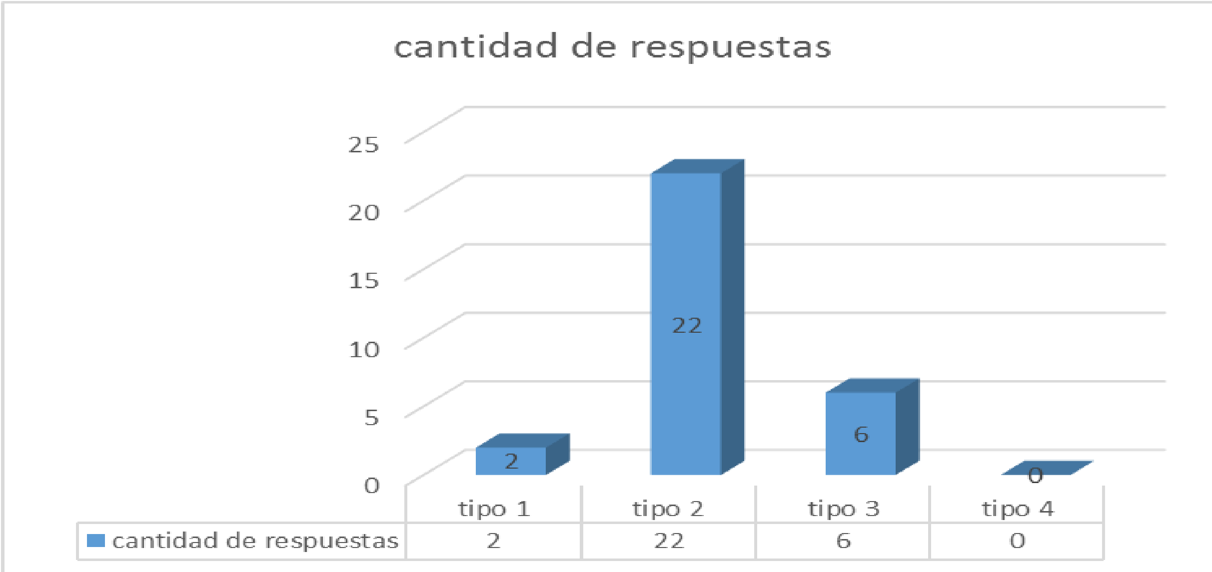


Ilustración No. 8: Cantidad de Respuestas a la Pregunta No. 1

Fuente: Producción Propia

Tal como se aprecia en la Tabla No. 7 e Ilustración No. 8 según las respuestas de los estudiantes que 28 de ellos (93.4%) reconocieron que al unir los puntos se formaba un rombo, esto lo hacen por la apariencia global que se maneja en el nivel de visualización, además que de los 30 estudiantes sólo 6 (20%) se arriesgaron a justificar su respuesta y aunque los argumentos son válidos no son los pertinentes (respuesta tipo 3). Por ejemplo un estudiante contesta *"se forma un rombo, ya que tiene 4 ángulos y tiene forma de diamante" (E1),* otros cuatro contestan *"esta figura es un rombo porque tiene cuatro lados" (E3, E18, E21 y E26).* Preocupa la respuesta que dieron 2 estudiantes afirmando que "la figura obtenida es un triángulo" (E7).

4.3.2.2. Análisis y Comentarios a la Pregunta No. 2

En la siguiente ilustración perteneciente al Anexo A se recoge la instrucción que se le da a los estudiantes en relación con la Pregunta No. 2, allí se describe que cada uno de ellos encontrará 16 cuadriláteros y la tarea en tal sentido es asignarle un número diferente a cada una de ellas y luego deberá proceder a agrupar los números según, el tipo de cuadrilátero al que pertenezca.

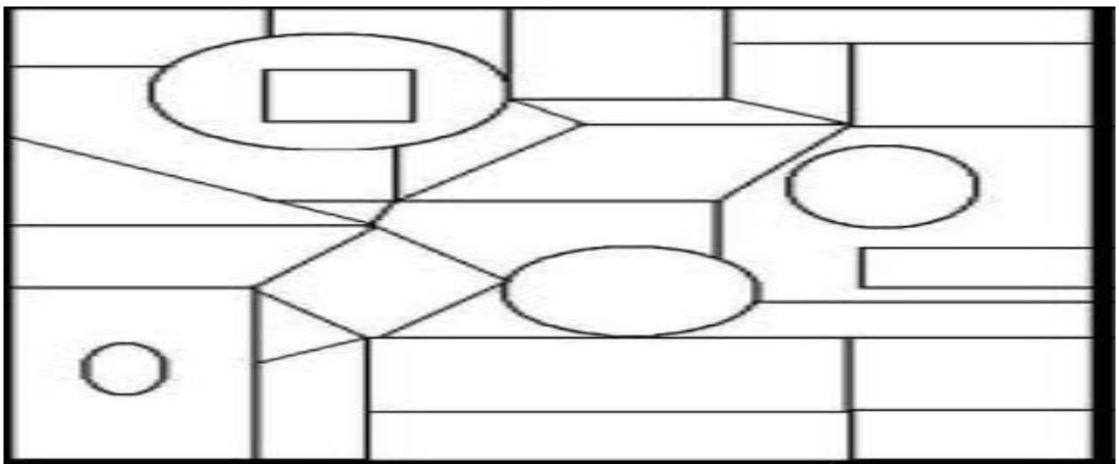


Ilustración No. 9: Complemento del enunciado de la Pregunta No. 2 Prueba de Entrada Anexo A

Fuente: Maguiña (2013)

Esta pregunta también obedece a las características del primer nivel del modelo y pretende que mediante un ejercicio de visualización y reconocimiento el estudiante agrupe los cuadriláteros de acuerdo a sus formas globales.

Algunas respuestas que dieron los estudiantes a la pregunta: Identifica algunos cuadriláteros y los agrupa, fueron las siguientes:

Identifica algunos cuadriláteros pero no los agrupa: acá lo que hace el estudiante es que nombra los cuadriláteros que para él son conocidos, notándose que posee vacíos conceptuales cuando contesta a la pregunta número 2: "cuadro, triángulo, perímetro". Ver Ilustración No. 10.

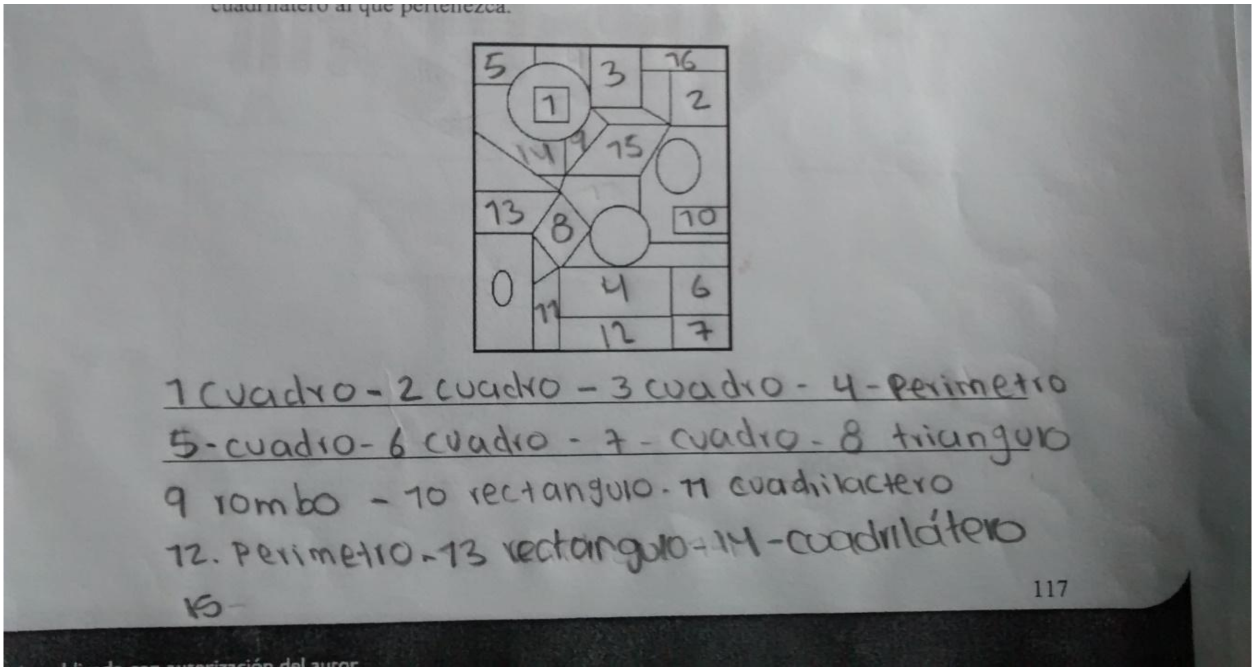


Ilustración No. 10: Respuesta Tipo 2 a la Pregunta No. 2 (E2)

Fuente: producción propia

Identifica algunos cuadriláteros: acá se ve una mejor apropiación conceptual del objeto matemático sin dejar pasar que se detecta que hay confusión entre los rectángulos y romboides como se aprecia en la ilustración No. 11.

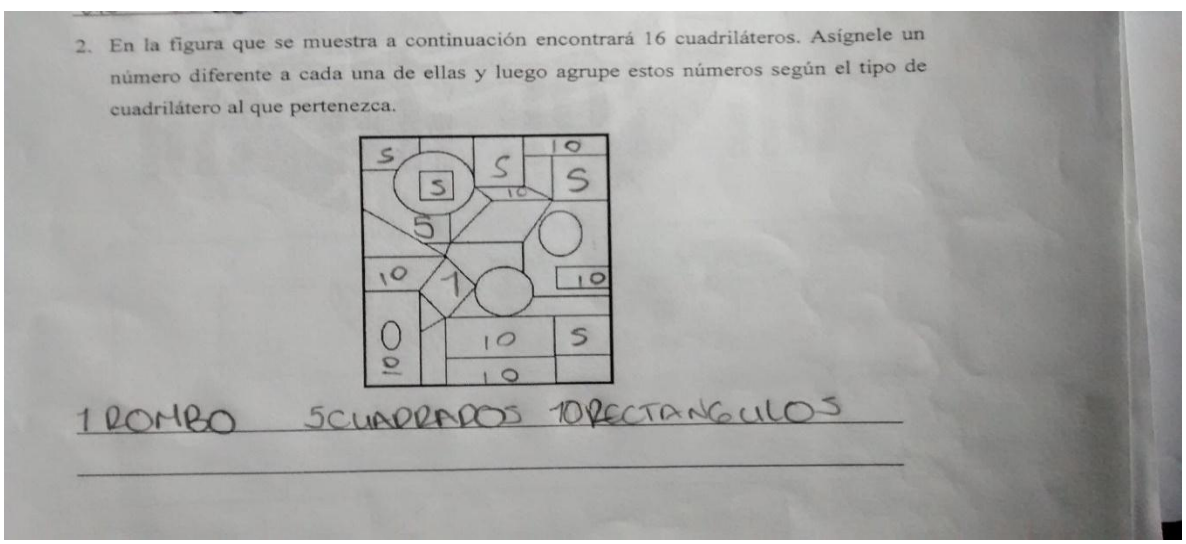


Ilustración No. 11: Respuesta Tipo 3 a la Pregunta No. 2 "Identifica algunos cuadriláteros"

Fuente: producción propia

<u>Identifica y agrupa todos los cuadriláteros:</u> acá hay mayor claridad en los tipos de cuadriláteros y el estudiante que dio esta respuesta entendió mejor la condición que se le pedía dejando claro su conocimiento sobre estos. *Ver Ilustración No. 12*

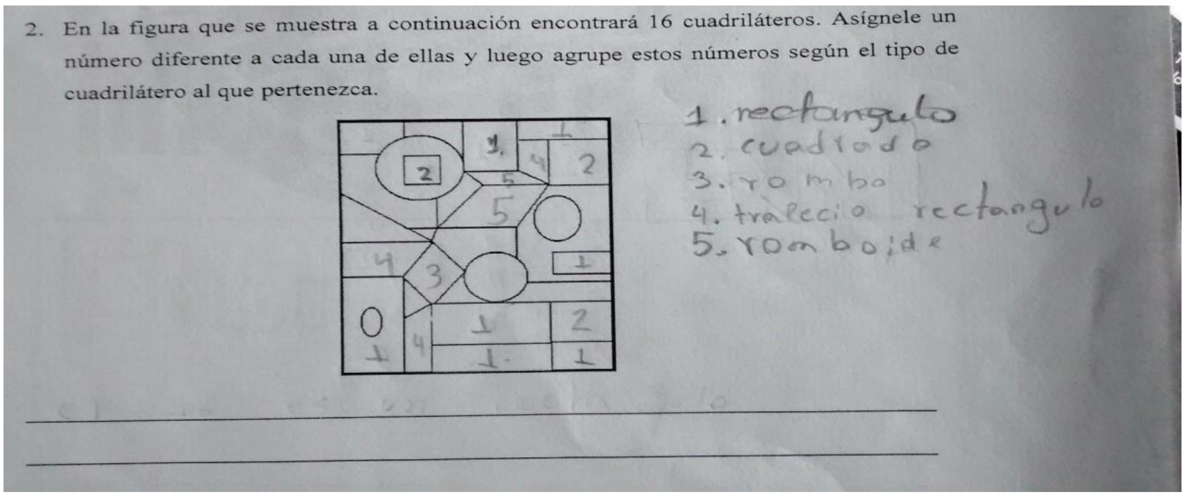


Ilustración No. 12: Respuesta Tipo 4 a la Pregunta No 2 "Identifica y agrupa todos los cuadriláteros"

Fuente: producción propia

Las respuestas a la pregunta número 2 evidencian cuál es el conocimiento que tienen los estudiantes de los cuadriláteros, agrupándolos por su apariencia global tal como lo muestra el nivel de visualización.

El total de respuestas se aprecia en la Tabla No. 8:

Tabla No. 8: Tipos de respuestas a la Pregunta No. 2 (Visualización y Reconocimiento"

Tipo de respuesta	**cantidad**
1. No identifica los cuadriláteros ni los agrupa por su forma y características (no responde a la pregunta)	1
2. Identifica algunos cuadriláteros pero no los agrupa	12

3. Identifica y agrupa algunos cuadriláteros por sus formas y características	15
4. Identifica y agrupa todos los cuadriláteros por sus formas y características	2
Total	30

Fuente: Producción propia

Las respuestas anteriores correspondientes a una pregunta del nivel de visualización dejan ver que hasta el momento sólo 2 de 30 estudiantes identifican y agrupan tanto paralelogramos como trapecios y trapezoides por sus formas y características, llamando la atención que 1 de 30 estudiantes no responde a una pregunta que en apariencia es elemental para un estudiante de grado septimo.

Tabla No. 9: Distribución de Frecuencias para tipos de respuestas a la pregunta No. 1

Variable(tipo de pregunta)	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia acumulada**	**Frecuencia relativa**	**Frecuencia relativa acumulada**
Tipo 1	1	1	0.0333	0.0333
Tipo 2	12	13	04	0.4333
Tipo 3	15	28	0.5	0.9333
Tipo 4	2	30	0.0666	0.9999
Total	**30**		**0.9999**	

Fuente: producción propia

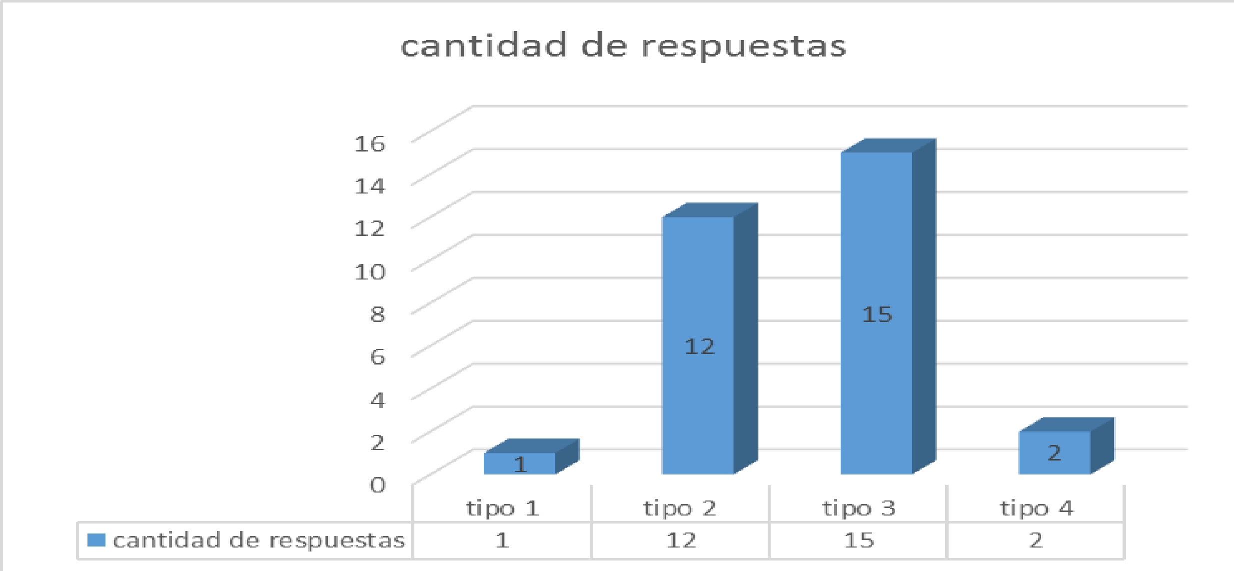


Ilustración 13: Cantidad de Respuestas a la Pregunta No. 2 (Visualización y Reconocimiento)

Fuente: producción propia

Las respuestas a la Pregunta No. 2 dan una idea más precisa sobre el nivel de desarrollo geométrico en el que se encuentran los estudiantes.

Aunque sólo 2 de los 30 estudiantes equivalentes al 6.6% identifican y agrupan todos los cuadriláteros por sus formas y características, se denota que 27 estudiantes (el 90%) muestran altibajos, bien sea por el no reconocimiento de todos los cuadriláteros, o porque asocian que un cuadrilátero al ser cambiado de posición deja de ser el cuadrilátero inicial; por citar un ejemplo, un estudiante aunque conoce las figuras geométricas básicas asumió que los círculos y triángulos también pertenecen a los cuadriláteros (E12). Este 90% de estudiantes tienen presaberes sobre este objeto matemático, ya que agrupan y reconocen algunos cuadriláteros por sus formas, aunque no hay consolidación de saber en cuanto a las propiedades y nombres de los mismos.

De las preguntas No. 1 y 2 que fueron planteadas para el primer nivel de razonamiento se puede hacer el siguiente análisis comparativo que permite dar precisión sobre la situación real de los estudiantes de grado séptimo tal como se evidencia en la Tabla No. :

Tabla No. 10: Cuadro Comparativo entre características esperadas y observadas para el nivel de Visualización y Reconocimiento

Primer Nivel: visualización y reconocimiento	
Características esperadas en este nivel	**Características observadas en este nivel según el Test y Desempeños.**
En este nivel los objetos se perciben en su totalidad como un todo, no diferenciando sus características y propiedades. Las descripciones son visuales y tendientes a asemejarlas con elementos familiares. Ejemplo: identifica y agrupa paralelogramos en un conjunto de figuras. Identifica ángulos y triángulos en diferentes posiciones en imágenes.	Los estudiantes identifican las figuras por sus formas y semejanzas, por ejemplo comparan un rombo con un diamante. No hay claridad en el concepto de cuadrilátero ni de paralelogramo, por lo cual asocia los triángulos y círculos a estos conceptos. Se observa que los estudiantes piensan que al girar un cuadrilátero este pierde sus propiedades, por ejemplo, al girar un cuadrado este se convierte en un rombo. Los estudiantes contestan las preguntas desde su percepción y visualización.

Fuente: producción propia

4.3.2.3. Análisis Y Comentarios A La Pregunta Número 3

En la instrucción que se recoge en el Anexo A perteneciente a la Pregunta No. 2 de la Prueba de Entrada. *"Tomás dice: "Tengo un cuadrilátero que tiene cuatro ángulos rectos y sus lados opuestos de igual medida". ¿Qué tipo de cuadrilátero tiene Tomás? Justifique su respuesta" (Maguiña, 2013: p. 118)*

Esta pregunta corresponde al segundo nivel de desarrollo geométrico según el modelo de Van Hiele tal como lo plantea Piedrahita & Londoño (2009) en su trabajo *"La enseñanza de la geometría con fundamento en la solución de problemas":*

> *… los individuos comienzan un análisis de los conceptos geométricos; pueden analizar las partes y propiedades particulares de las figuras. A través de la observación y la experimentación, los estudiantes empiezan a discernir las características de las figuras, pero no explican relaciones entre propiedades de distintas familias de estas.(pp. 72 -73)*

Se busca entonces que los estudiantes establezcan las propiedades principales que caracterizan a los cuadriláteros.

Algunas respuestas fueron las siguientes:

Hace un gráfico de la posible respuesta, pero ni nombra ni justifica su proceso: acá el estudiante hace una aproximación de lo que él entiende por cuadrilátero de lados opuestos y ángulos rectos, aunque no concluye su respuesta,es decir, responde desde el nivel de visualizacion. Ver Ilustración No. 14.

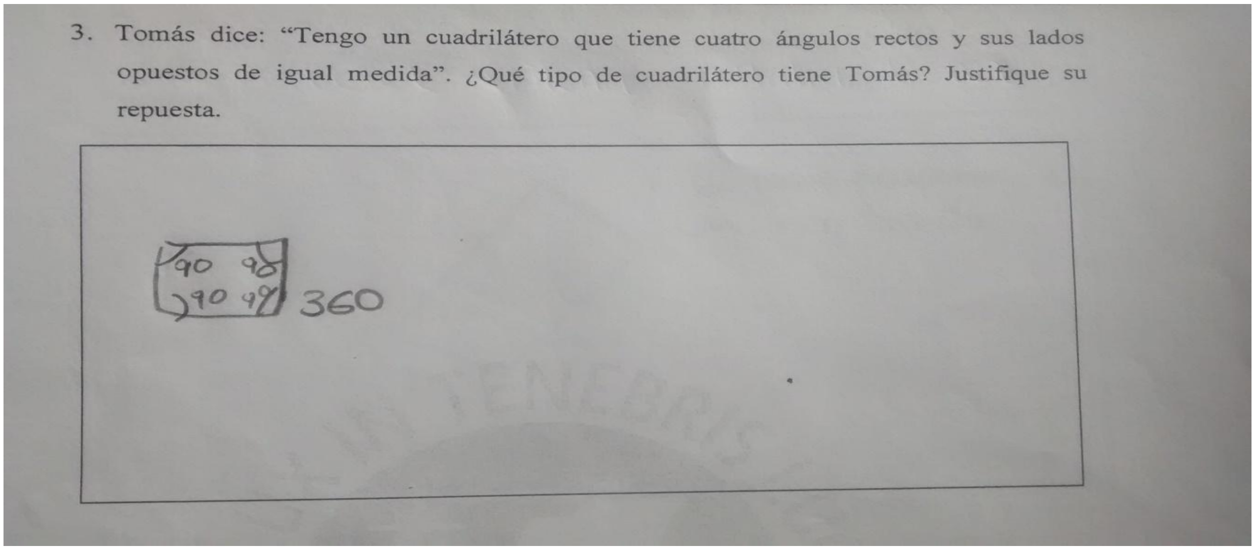


Ilustración No. 14: Respuestas Tipo 1 a la Pregunta No. 3 "Hace un gráfico de la posible respuesta, pero ni nombra, ni justifica su proceso" (E14)

Fuente: producción propia

<u>Dice que cuadrilátero se obtiene pero no justifica su respuesta:</u> se esperaría que el estudiante desde el nivel de análisis argumentara el por qué se forma un rectángulo, aunque asocia el significado de ángulo recto con 90 grados. Ver Ilustración No. 15

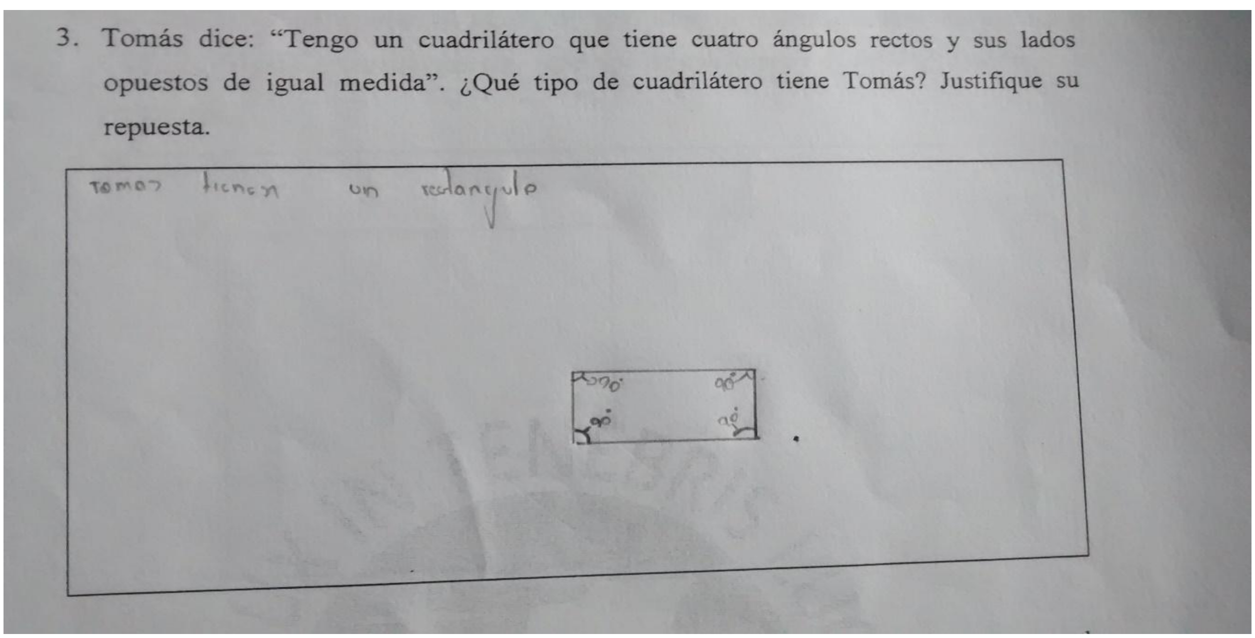


Ilustración No. 15: Respuesta Tipo 2 a la Pregunta No. 3 "Dice qué cuadrilátero se obtiene pero no justifica su respuesta"

Fuente: producción propia

Dice que cuadrilátero se obtiene pero su justificación no es la apropiada: acá lo que hace el estudiante es que utiliza la definición de la pregunta para justificar, y lo correcto es que hiciera una diferencia entre el cuadrado y el rectángulo. Ver Ilustración No. 16.

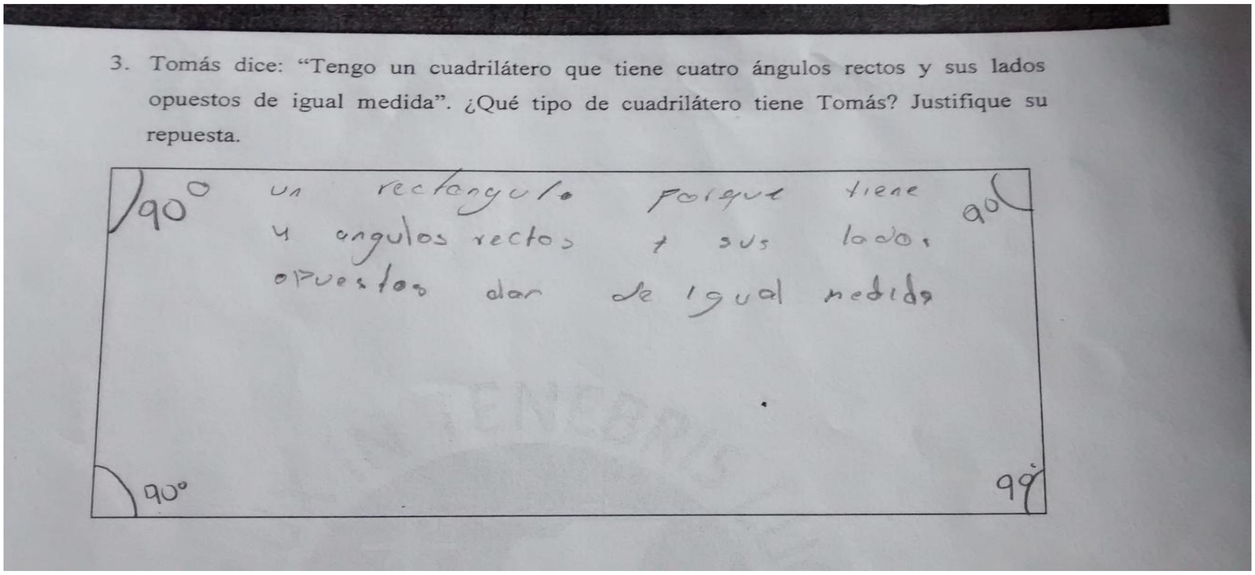


Ilustración No. 16: Respuesta Tipo 3 a la Pregunta No. 3
"Dice qué cuadrilátero se obtiene pero su justificación no es la apropiada"

Fuente: producción propia

Los tipos de respuestas obtenidos con la pregunta número 3 dejan ver de forma clara qué porcentaje de la muestra responde desde el nivel de análisis en pensamiento espacial y cómo las justificaciones muestran el desarrollo de éste.

Se esperaría que los estudiantes en este nivel justificaran el por qué se forma un rectángulo, y tal como se ve más adelante ningun estudiante cumplió con esta expectativa de respuesta.

El total de respuestas se ve en la siguiente tabla No. 11:

Tabla No. 11: Tipos de respuesta a la Pregunta No. 3 (Análisis)

Tipo De Respuesta	**Cantidad**
1. Hace un gráfico de la posible respuesta, pero ni nombra ni justifica su proceso	10
2. Dice que cuadrilátero se obtiene pero no justifica su respuesta	6
3. Dice que cuadrilátero se obtiene pero su justificación no es la apropiada	14
Total	30

Fuente: producción propia

Se puede notar que 14 de 30 estudiantes responden efectivamente qué cuadrilátero se forma, pero sus argumentos no justifican su respuesta, notándose así que el desempeño de éstos que fueron los que mejor respondieron no cumplen con las características del nivel de argumentación, como son la percepción de las propiedades de los objetos geométricos y la descripción a partir de estas. En la siguiente tabla se muestra un porcentaje según cada tipo de respuesta a la pregunta 3:

Tabla No. 12: Distribución de Frecuencia para tipo de Respuestas a la Pregunta No. 3

Variable (tipo de pregunta)	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia acumulada**	**Frecuencia relativa**	**Frecuencia relativa acumulada**
Tipo 1	10	10	0.33	0.33
Tipo 2	6	16	0.2	0.53
Tipo 3	14	30	0.466	0.999
Total	30		0.999	

Fuente: producción propia

Como se puede observar en la tabla anterior, el 46.6% equivalente a 14 estudiantes de la muestra utilizan los mismos referentes de la pregunta para contestar sin ir más allá de las propiedades de los cuadriláteros y el 53.3% restante continúan percibiendo los objetos geométricos como un todo, siendo sus descripciones y procesos más visuales que analíticos.

La siguiente ilustración muestra las respectivas posiciones de los tipos de respuestas a la pregunta 3 correspondiente al nivel de análisis:

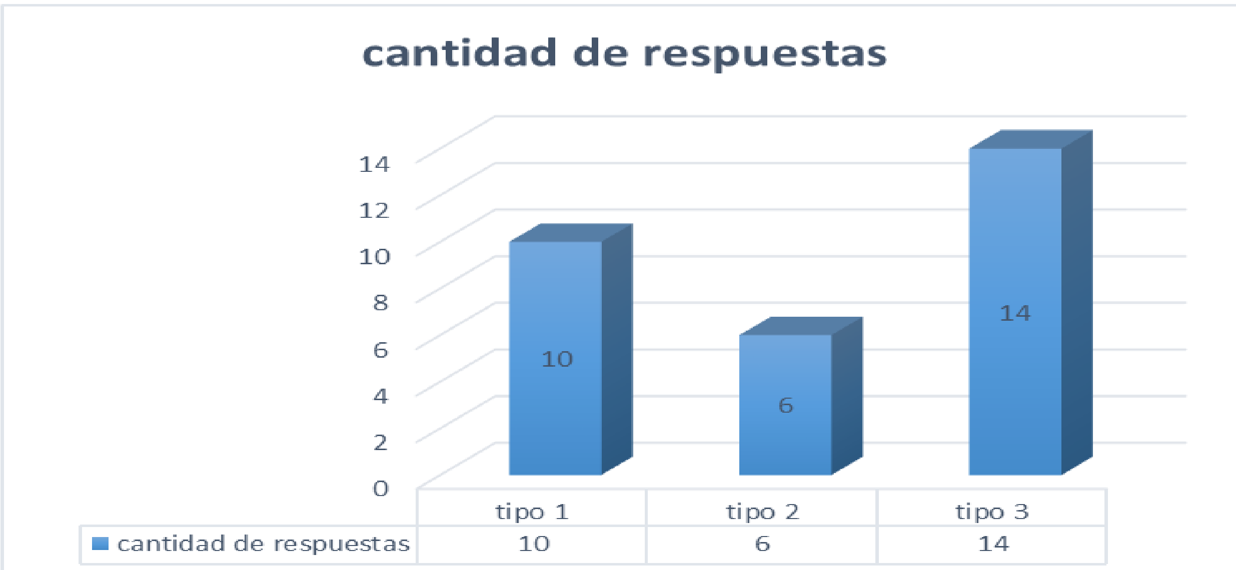


Ilustración No. 17: Cantidad por Tipo de Respuestas a la Pregunta No. 3 (Análisis)

Fuente: producción propia

Según las respuestas que dan los estudiantes se aprecia que ninguno de los estudiantes establece y aplica las características básicas que tienen los rectángulos haciendo las justificaciones apropiadas. El 99.9% presenta altos vacíos conceptuales, no diferencian concretamente entre un cuadrado y un rectángulo y algunas respuestas se ve que para los estudiantes un cuadrilátero y un cuadrado es lo mismo.

Ante esto se puede afirmar que si los estudiantes no hacen discernimientos entre las propiedades de las figuras geométricas y solo las reconocen por su apariencia general es porque no hay un desarrollo claro del nivel de análisis y contestaron a esta pregunta desde su nivel de visualización.

4.3.2.4. Análisis Y Comentarios De La Pregunta Número 4

Para realizar el análisis de la pregunta No. 4 retomamos el enunciado de la misma (Ver Anexo A) *"Matilde debe elegir cuatro palitos para construir un paralelogramo. ¿Cuáles son los palos que debe elegir Matilde para formar el paralelogramo? Justifique su respuesta"* y se anexa *la siguiente ilustración:*

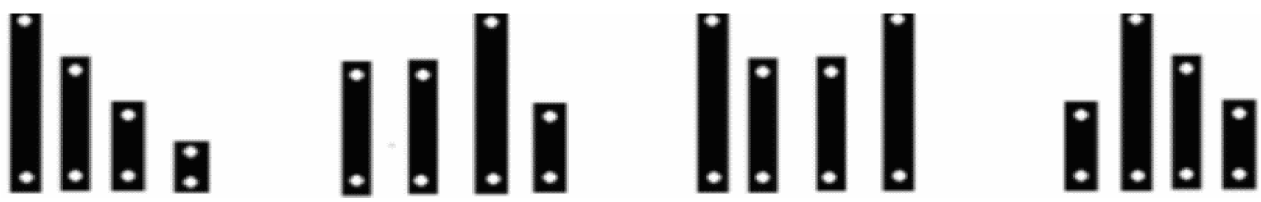


Ilustración No. 18: Enunciado Pregunta No. 4

Fuente: Maguiña (2013) Anexo A

Esta pregunta corresponde al segundo nivel de desarrollo geométrico (análisis) y se pretende mirar qué tanto los estudiantes identifican, describen y aplican las propiedades de los paralelogramos.

Algunas respuestas fueron las siguientes:

<u>Hace un esquema de la pregunta pero no responde</u>: la respuesta muestra una posible gráfica de la situación, pero no hay un argumento claro que muestre el conocimiento de las propiedades de los paralelogramos. Ver ilustración No. 19.

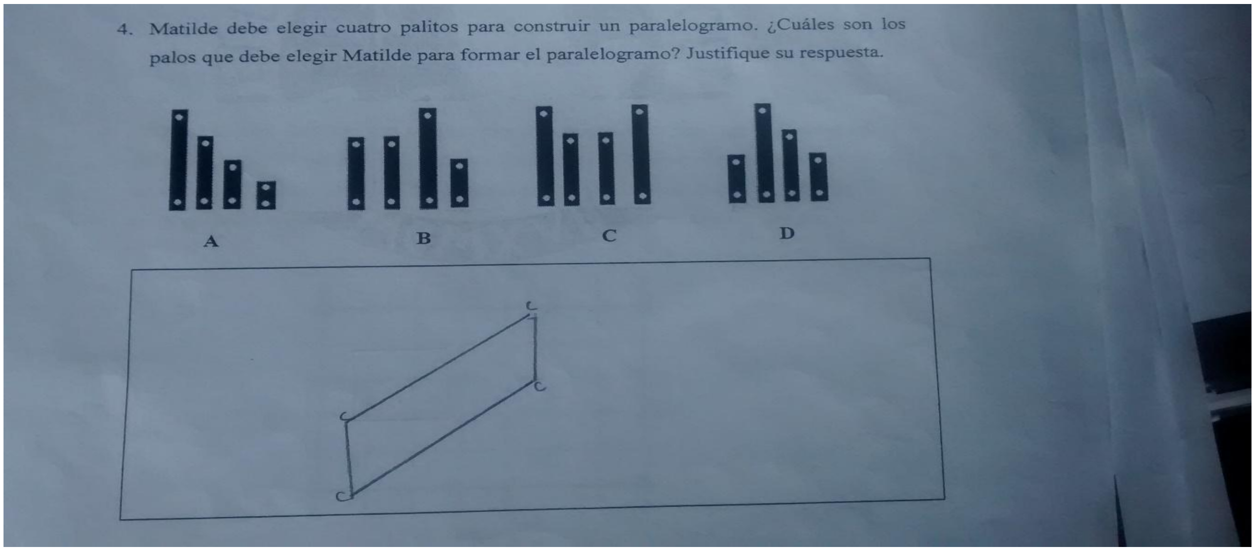


Ilustración No 19: Respuestas Tipo 1 a la Pregunta No. 4
"Hace un esquema de la pregunta pero no responde"

Fuente: Producción Propia

<u>Responde correctamente pero no justifica</u>: la respuesta es válida, pero los argumentos no son suficientes para apreciar la diferencia entre los paralelogramos pues se remite a la definición de la pregunta. Ver Ilustración No. 20.

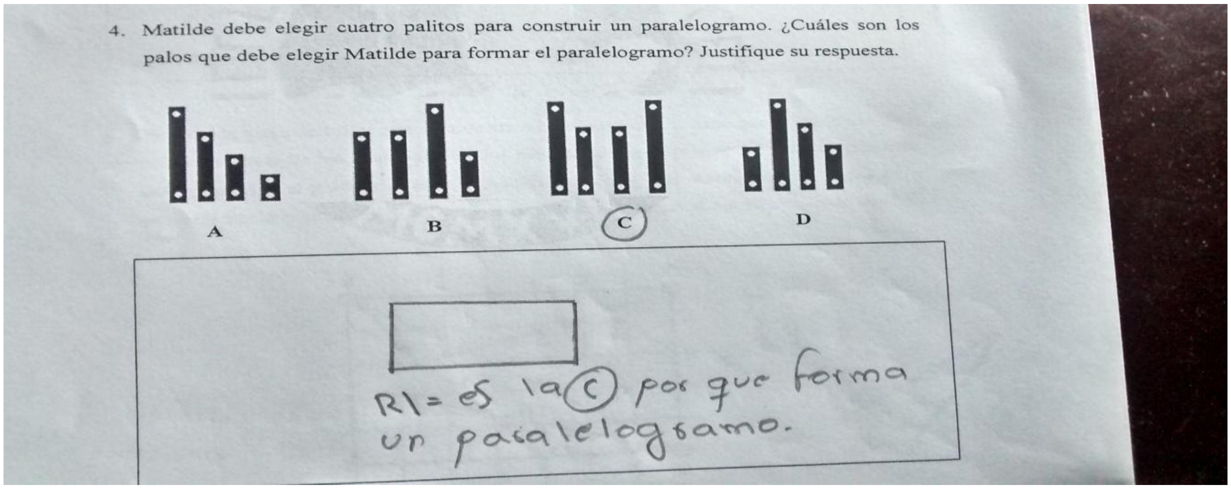


Ilustración No. 20: Respuesta Tipo 2 Pregunta No. 4 "Responde correctamente pero no justifica"

Fuente: Producción Propia

Responde correctamente pero se queda corto en las justificaciones: acá hay una asociación de conceptos (paralelogramo con rectángulo) que es correcta en cierta medida, aunque la respuesta no muestra tener en cuenta el romboide como paralelogramo.

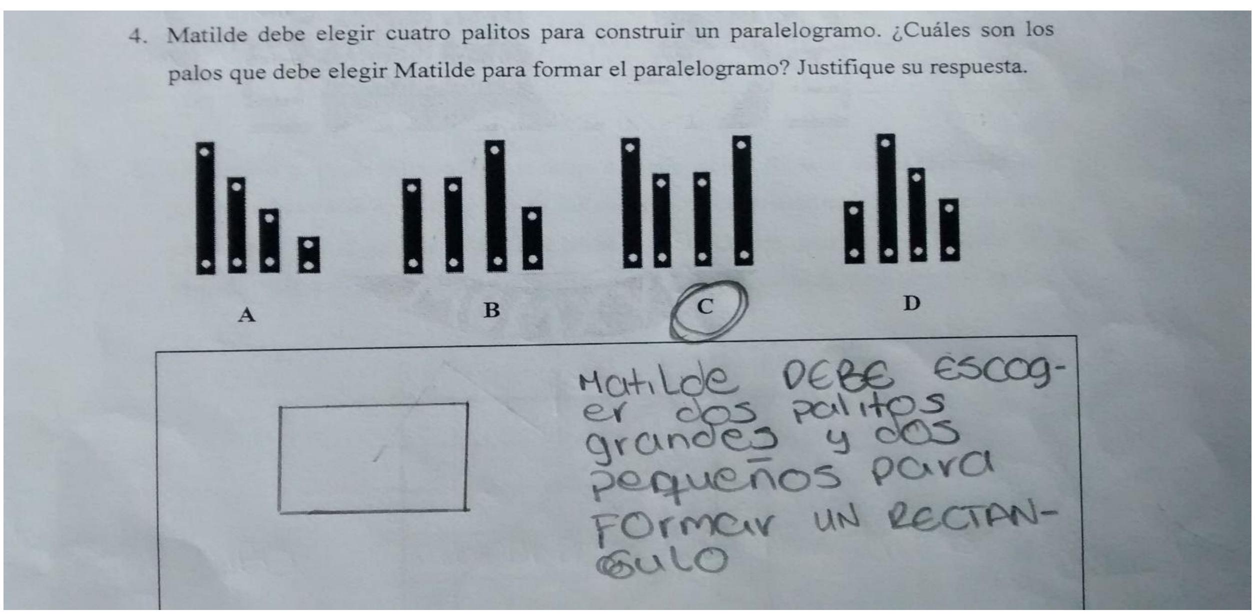


Ilustración No. 21: Respuesta Tipo 3 Pregunta No 4
"Responde correctamente pero se queda corto en las justificaciones"

Fuente: Producción Propia

El total de respuestas fueron:

Tabla 13: Consolidado de Respuestas a Pregunta No. 4 (Análisis)

Tipo de respuesta	**Cantidad**
1. Hace un esquema de la pregunta pero no responde	4
2. Responde correctamente pero no justifica	12
3. Responde correctamente pero se queda corto en las justificaciones	14
4. Responde y justifica correctamente	0
Total	30

Fuente: Producción propia

La anterior tabla muestra en uno de sus apartes que 14 de 30 estudiantes responden correctamente al asociar los palitos que necesita Matilde para formar el paralelogramo, pero no tienen en cuenta o desconocen las propiedades de este tipo de cuadriláteros. En este nivel de análisis se hubiese esperado una relación entre los palitos “C” tanto con el rectángulo como con el romboide y que la justificación hubiese partido de las diferencias entre estas dos figuras, aspecto que no se vio. La siguiente distribución de frecuencias deja ver los porcentajes que obtiene cada tipo de respuesta a la pregunta número 4

Tabla 14: Distribución de Frecuencias para tipo de respuestas a Pregunta No 4 (Análisis)

Variable (tipo de pregunta)	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia acumulada**	**Frecuencia relativa**	**Frecuencia relativa acumulada**
Tipo 1	4	4	0.1333	0.1333
Tipo 2	12	16	0.4	0.5333
Tipo 3	14	30	0.4666	0.9999
Tipo 4	0	30	0	0.9999
Total	30		0.99999	

Fuente: producción propia

Se observa que el 99.9% de la muestra está por debajo de contestar y justificar desde el nivel de análisis, pues no identifican ni describen las propiedades que rigen los paralelogramos y solo un 46.6% responden correctamente, pero sus justificaciones no son pertinentes. La siguiente ilustración muestra la posición que ocupa cada tipo de respuestas:

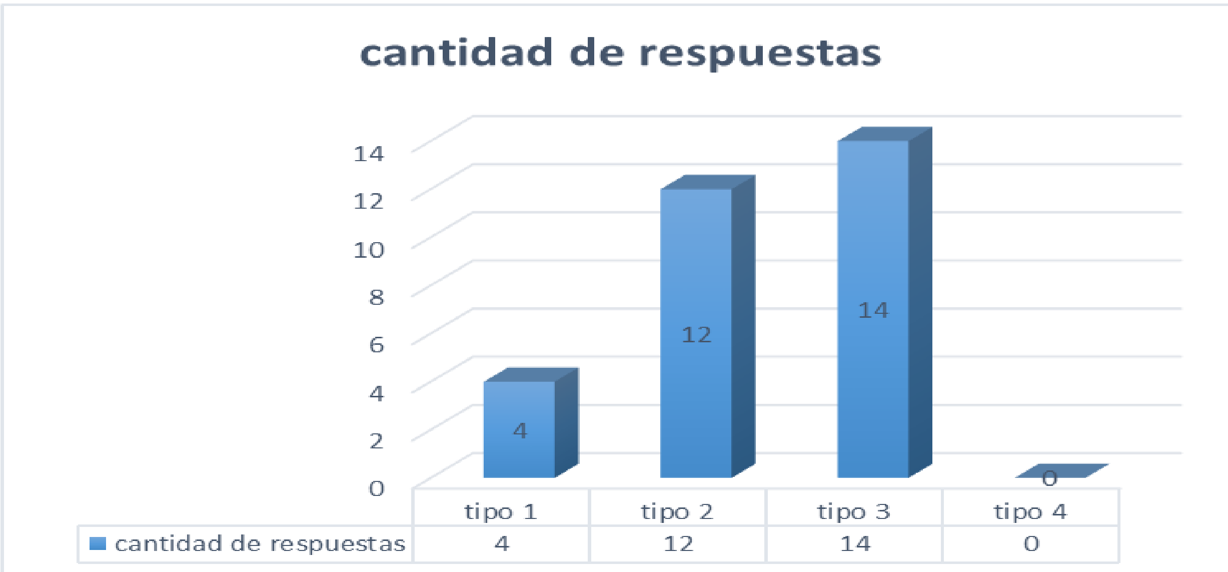


Ilustración 22: Cantidad por tipo de Respuestas a Pregunta No. 4 (Análisis)

Fuente: producción propia

En la ilustración No. 22 se aprecia que ninguno de los estudiantes responde y justifica correctamente a la pregunta que tiene como fondo el concepto y las propiedades de los paralelogramos. Ya en respuestas anteriores se notaba que había confusión en la diferencia de los cuadriláteros, por lo tanto es muy probable que los estudiantes no conozcan el concepto de paralelogramo. Sin embargo en algún momento de su formación vieron el concepto, porque la pregunta fue contestada por un 86.6% y un 46% hicieron justificaciones de las respuestas muy limitadas. Por ende no hay un análisis de los conceptos geométricos, ni una generalización de ciertas propiedades de las figuras, es decir, no se evidencia un desarrollo del nivel de análisis

4.3.2.5. Análisis Y Comentarios A La Pregunta Número 5

El enunciado que se tiene para esta pregunta No. 5 (Ver Anexo A) es el siguiente: *"Si ABCD es un rombo, y M, N, P y Q son los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente, ¿qué tipo de cuadrilátero es MNPQ? Justifique su respuesta."*

Esta pregunta también es del nivel de análisis y busca establecer relaciones entre los elementos de un rombo, aplicándolos a una situación concreta. Un estudiante en este nivel sabe que un rombo tiene 4 lados iguales y que si tiene un par de ángulos opuestos iguales, el otro par de ángulos opuestos también son iguales entre sí, también supone que al unir los puntos medios de un rombo se forma un rectángulo y como los ángulos del rombo son iguales dos a dos entonces los lados del cuadrilátero formado serán iguales dos a dos

Algunas respuestas fueron las siguientes

<u>Responde que es un cuadrado pero no justifica su respuesta</u>: esta respuesta se da por la asociación que se hace de la gráfica que se obtuvo, pues aparentemente la figura resultante es un cuadrado. Faltó más indagación e ir más allá de lo observado. Ver Ilustración No. 23.

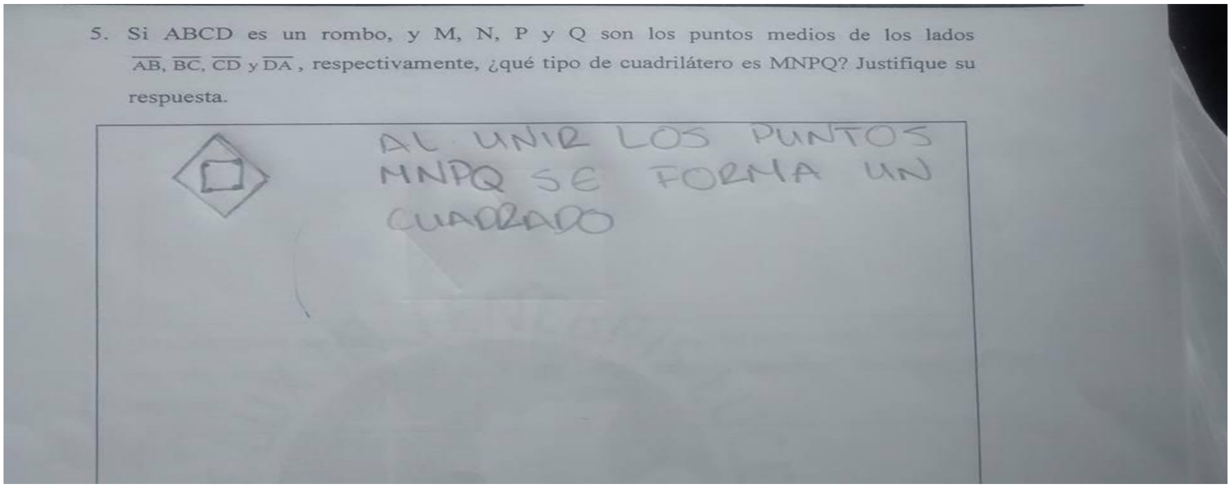


Ilustración No. 23: Respuesta Tipo 2 Pregunta No. 5
"Responde qué es un cuadrado pero no justifica su respuesta"

Fuente: Producción Propia

<u>Responde que es un rombo o romboide pero no justifica su respuesta:</u> no es clara la manera de cómo el estudiante llegó a esta respuesta, lo que denota no tener apropiación conceptual sobre las características de algunos paralelogramos (rombo y romboide para este caso) tal como se evidencia en la Ilustración No. 24.

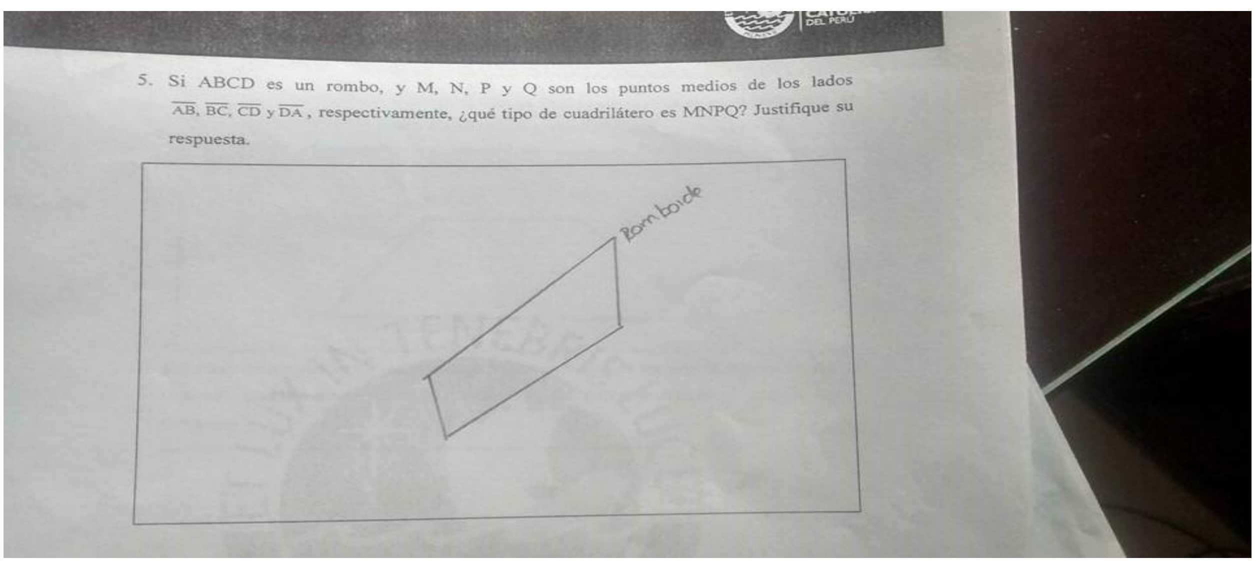


Ilustración 24: Respuesta Tipo 3 Pregunta No. 5
"Responde qué es un rombo o romboide pero no justifica su respuesta"

Fuente: Producción Propia

El total de respuestas fueron las siguientes como se ilustra en la Tabla No. 15.

Tabla No. 15: Consolidado de respuestas a la pregunta No. 5 (Análisis)"

Tipo De Respuesta	Cantidad
1. No sabe, no responde	6
2. Responde que es un cuadrado pero no justifica su respuesta	11
3. Responde que es un rombo o romboide pero no justifica su respuesta	10
4. Responde que es un rectángulo pero no justifica su respuesta	3
5. Responde que es un rectángulo y justifica su respuesta	0
Total	30

Fuente: Producción Propia

De la tabla anterior se establece que 6 de 30 estudiantes no responden a la pregunta, pudiendo inferir que estos pueden conocer la apariencia de un rombo, pero al no entender el lenguaje en el que está formulada, no saben relacionar los conceptos de segmento y punto medio; además 11 de 30 estudiantes se remitieron a observar la gráfica que hicieron, sin tener en cuenta desde el nivel de análisis otros dibujos de otros rombos diferentes y así elaborar conjeturas para justificar. En la siguiente Tabla No. 16 de Distribución de Frecuencias se cuantifica la información anterior en términos porcentuales:

Tabla No. 16: Distribución de Frecuencias para tipo de respuestas a la Pregunta No. 5 (Análisis)

Variable(tipo de respuesta)	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada	frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
Tipo 1	6	6	0.2	0.2
Tipo 2	11	17	0.366	0.566
Tipo 3	10	27	0.333	0.899
Tipo 4	3	30	0.1	0.999
Tipo 5	0	30	0	0.999
Total	30		0.9999	

Fuente: Producción Propia

Se aprecia que el 99.9% de la muestra no deducen las propiedades de las figuras a partir de la observación y la generalización, siendo probable que sus respuestas hayan sido de tipo intuitivo dejando de lado por ejemplo el análisis de las partes que componen un rombo como son sus ángulos opuestos iguales, sus lados iguales y la unión de sus puntos medios.

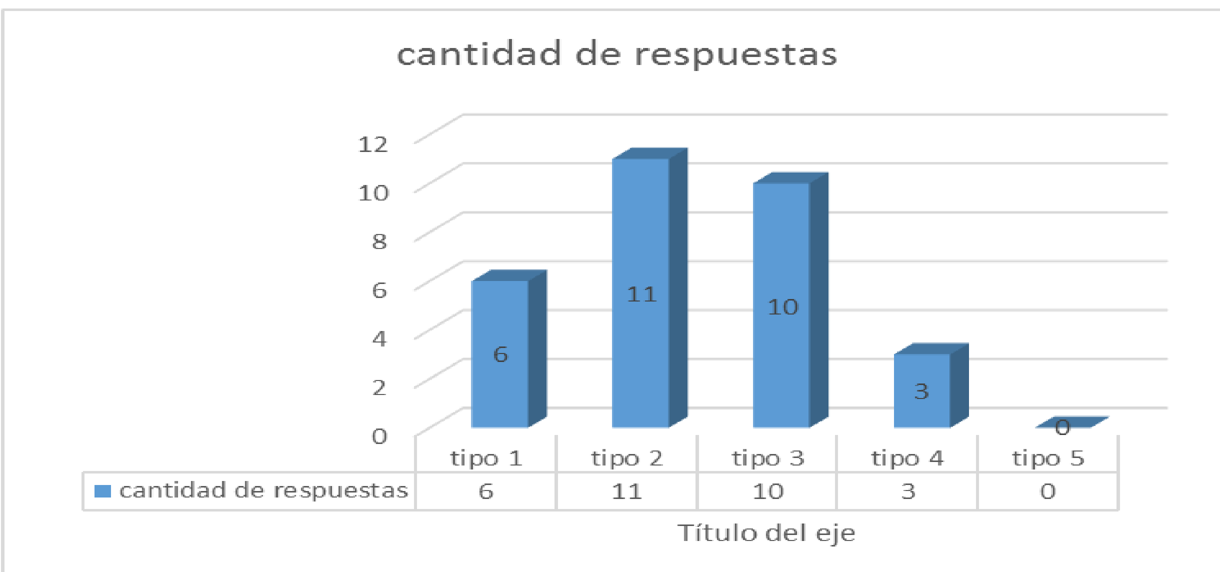


Ilustración No. 25: Cantidad por tipo de respuestas a pregunta No. 5

Fuente: Producción Propia

Esta tabulación deja ver claramente que el 0.00% de los estudiantes muestra un eficiente desempeño en el nivel de análisis, porque se quedaron cortos en los argumentos para defender sus respuestas. Si bien identifican un rombo por su forma, no analizan sus elementos y propiedades; aunque un 10% respondieron que interiormente se formaba un rectángulo, lo hicieron más de forma intuitiva que de forma analítica, pues estas respuestas carecieron de gráfico.

Si se mira que un 69.99% (21 estudiantes) dieron una respuesta muy desfasada de la pregunta (respuestas tipo 2 y 3) es porque no hay claridad en ellos sobre los cuadriláteros, por ende, si no hay claridad en esto no puede haber análisis.

4.3.2.6. Análisis Y Comentarios De La Pregunta Número 6

Para hacer el análisis de la pregunta No. 6 se retoma el enunciado de de dicho ítem (Ver Anexo A).

> *Observe la mesa de billar que se muestra a continuación. Se sabe que el recorrido de la bola es a través de las diagonales de los cuadrados. La bola se encuentra, inicialmente, en el punto P y al golpearla se dirige hacia el punto Q, este rebota sobre la banda BC y se dirige hacia el punto R, y así sucesivamente, hasta llegar al agujero ubicado en C. (p. 117)*

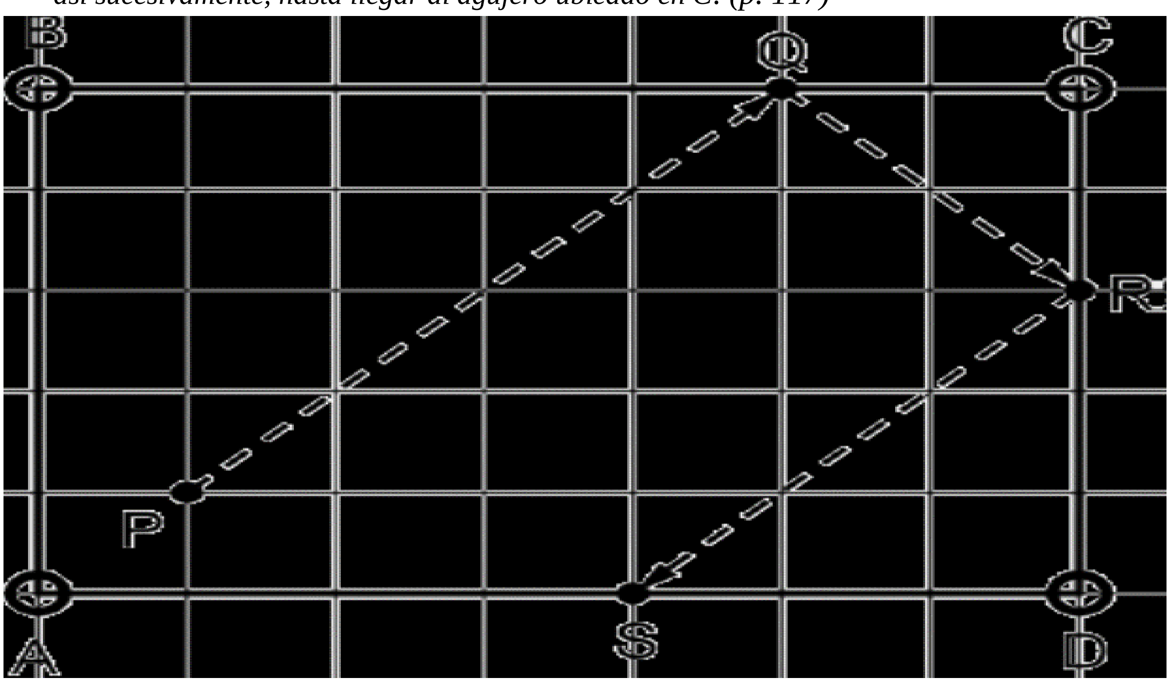


Ilustración No. 26: Enunciado Pregunta No. 6

Fuente: Anexo A. Maguiña (2013: p. 119)

a. *¿Qué tipo de cuadrilátero se forma al unir en forma consecutiva el punto de partida, el primer, segundo y tercer punto donde ocurre el rebote? Justifique su respuesta.*
b. *¿El cuadrilátero que se forma al unir en forma consecutiva los puntos donde ocurren el segundo, cuarto, sexto y octavo rebote es un trapecio isósceles? Justifique su respuesta.*
c. *¿Qué tipo de cuadrilátero se forma al unir en forma consecutiva los puntos donde ocurren el cuarto, octavo, séptimo y tercer rebote? Justifique su respuesta (Maguiña, 2013: pp. 117-119)*

Esta pregunta es la que muestra el nivel más completo y complejo de análisis y según la descripción del Test a partir del *Modelo de Van Hiele*, pretende mirar cómo los estudiantes identifican, definen y aplican las características y propiedades de los diferentes tipos de cuadriláteros. Se esperaba que los estudiantes al ítem "a" respondieran y justificaran que era un rectángulo, al ítem "b" que justificaran que no se formaba un trapecio isósceles, sino que se formaba un trapecio escaleno, y al ítem "c" que justificaran que se formaba un romboide.

Solamente un estudiante (E4) respondió a la pregunta "a" que se formaba un rectángulo aunque no justificó su respuesta. Las otras respuestas a todas las tres preguntas fueron carentes de argumentos, en algunos casos dibujaron un trapecio isósceles, en otros casos contestaron "no se" y otros optaron por no contestar.

Pudo pasar que los estudiantes no entendieron la pregunta, o no siguieron la instrucción para resolverla, debido a la función del lenguaje en cada nivel siendo posible que una pregunta formulada para un nivel de análisis sea contestada por estudiantes en nivel de visualización.

Ya en las preguntas 3, 4 y 5 se veía que no había un buen desarrollo del nivel de análisis en los estudiantes y que solo dos estudiantes (E4 y E14) correspondientes al 6.66% hacen un acercamiento, muy mínimo a este nivel que se puede apreciar en las respuestas de la pregunta número 3.

Fundamentados en los resultados obtenidos con las preguntas que corresponden a este nivel de análisis, a continuación se hace una comparación general entre las características de este nivel y las que muestran los estudiantes de grado séptimo:

Tabla No. 17: Cuadro Comparativo entre características esperadas y observadas para el nivel de Análisis

Segundo nivel: análisis	
Características Esperadas En Este Nivel	**Características Observadas En Los Estudiantes De Grado Séptimo Según El Test**
Se perciben propiedades de los objetos geométricos. Pueden describir objetos a través de sus propiedades (ya no solo visualmente). Pero no puede relacionar las propiedades unas con otras. Ejemplo: los estudiantes establecen las propiedades que identifican a los cuadriláteros (un cuadrado tiene lados iguales. Un cuadrado tiene ángulos iguales)	No se observan estas características en los estudiantes ya que las respuestas muestran que ellos responden según el nivel de visualización en el que se encuentran, por ejemplo, responden sin argumentos sólidos que se deben elegir dos palitos grandes y dos pequeños para formar un rectángulo, o no definen que figura se obtiene al unir los puntos medios de los lados de un rombo. Por ende no describen los objetos por sus propiedades sino por sus formas

Fuente: producción propia

4.3.2.7. Análisis Y Comentarios A La Pregunta Número 7

Para el análisis de la pregunta No. 7 veamos el enunciado respectivo (Anexo A):

En un trapecio isósceles ABCD, con AB = CD, se ubican los puntos M, N, P y Q, que son los puntos medios de los lados AB, BC, CD y AD, respectivamente. ¿Qué figura se forma al unir en forma consecutiva los puntos M, N, P y Q? (p. 72)

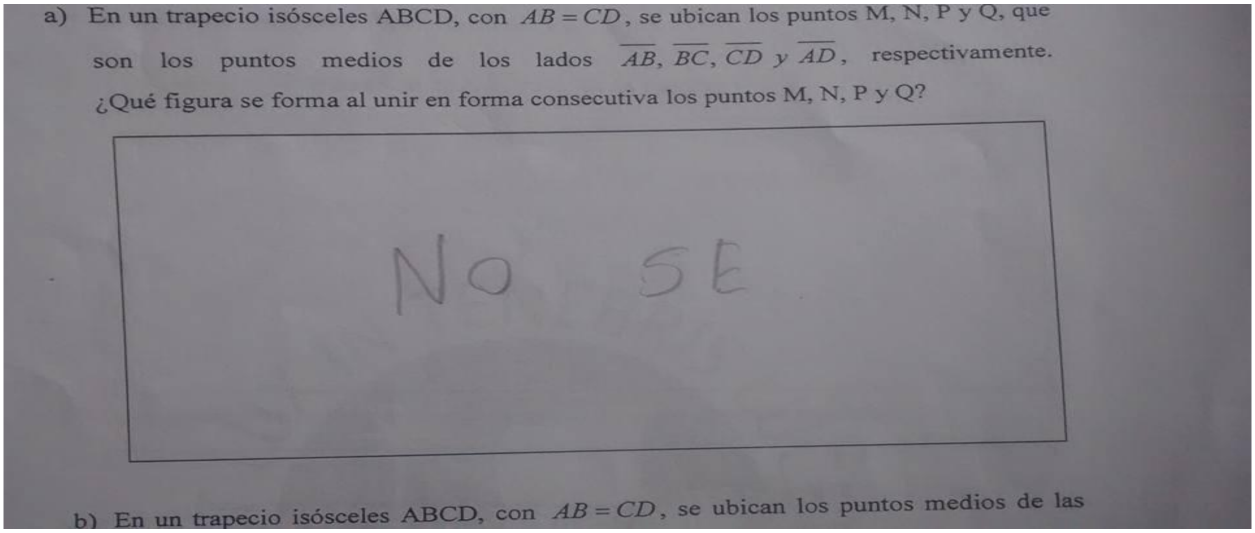
Esta pregunta corresponde al tercer nivel de desarrollo geométrico propuesto por *Van Hiele: "Ordenación, Clasificación o Deducción Informal"*, y busca promover en los estudiantes que expliquen sus argumentos utilizando la notación matemática. Según Piedrahita & Londoño (2009): *"En este nivel se pueden comprender las primeras definiciones que describen las interrelaciones con sus partes constituyentes" (p. 73)*

Es decir, en este nivel el estudiante analiza las figuras geométricas en términos de sus componentes y relaciones entre componentes, y descubre empíricamente propiedades y reglas de una clase de figuras. Aquí, los estudiantes son conscientes que las figuras pueden estar formadas por elementos y son portadoras de ciertas propiedades.

Ante esta pregunta un estudiante en este nivel respondería que se formaría un rombo, ya que los puntos medios son colineales dos a dos y que al unirlos las distancias serían equivalentes, además de apoyarse en un gráfico que justifique su respuesta.

Las respuestas encontradas fueron entre otras las siguientes:

Responde no sabe o no responde: tal como se evidencia en la Ilustración No. 27 en la que abiertamente manifiesta el estudiante que no sabe.



a) En un trapecio isósceles ABCD, con $AB = CD$, se ubican los puntos M, N, P y Q, que son los puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$, respectivamente. ¿Qué figura se forma al unir en forma consecutiva los puntos M, N, P y Q?

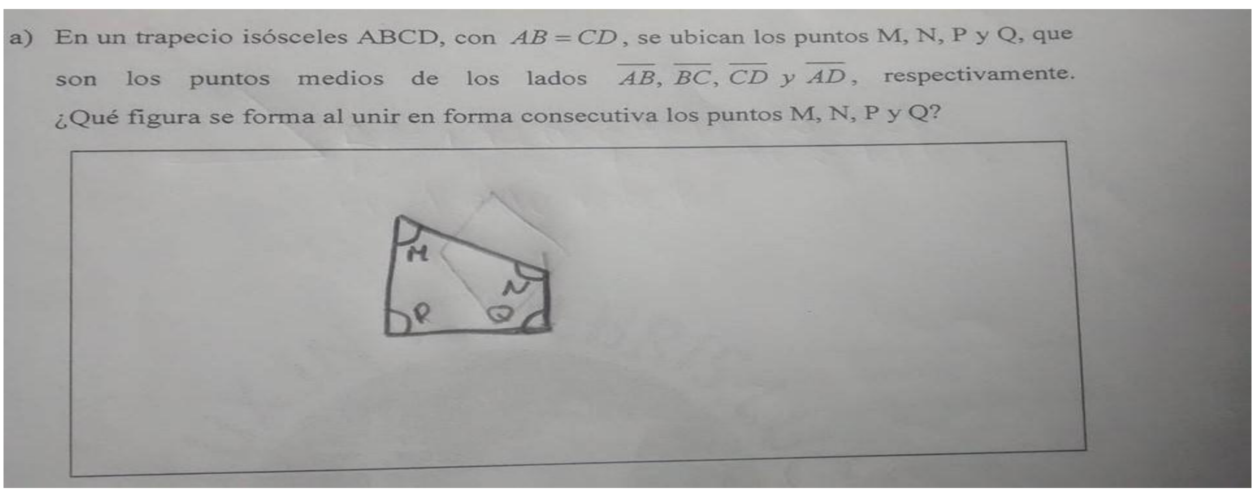
No SE

b) En un trapecio isósceles ABCD, con $AB = CD$, se ubican los puntos medios de las

Ilustración No. 27: Respuesta Tipo 1 Pregunta No. 7 "No sabe o no responde"

Fuente: Producción Propia

<u>Responde con un esbozo de la gráfica, aunque incorrecta:</u> otras respuestas muestran intentos de recrear la pregunta pero como la gráfica que se genera no corresponde a lo que se pide no hay una deducción informal que conlleve a una justificación correcta:

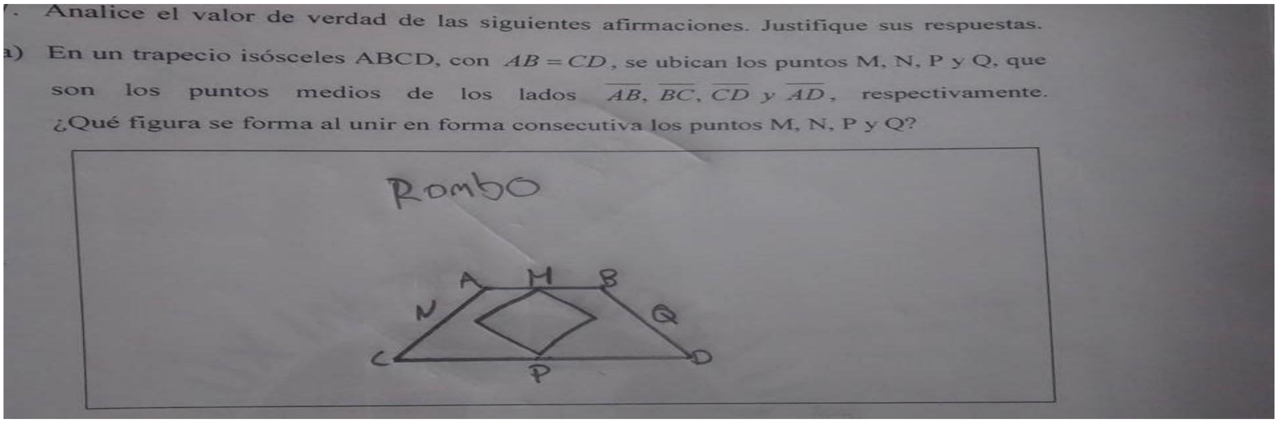


a) En un trapecio isósceles ABCD, con $AB = CD$, se ubican los puntos M, N, P y Q, que son los puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$, respectivamente. ¿Qué figura se forma al unir en forma consecutiva los puntos M, N, P y Q?

Ilustración No. 28: Respuesta Tipo 2 Pregunta No. 7 "Hace un esbozo de la gráfica aunque incorrecta"

Fuente: Producción Propia

<u>Responden con un esbozo de la gráfica y contesta qué es un rombo, aunque no justifica su respuesta:</u> existe otro tipo de respuesta más aproximado donde hay ciertos elementos matemáticos para llevar a un razonamiento correcto, pero un estudiante en el nivel de deducción informal debería reconocer que unas propiedades se derivan de otras, y acá no se ven esta característica:


7. Analice el valor de verdad de las siguientes afirmaciones. Justifique sus respuestas.

a) En un trapecio isósceles ABCD, con $AB = CD$, se ubican los puntos M, N, P y Q, que son los puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$, respectivamente. ¿Qué figura se forma al unir en forma consecutiva los puntos M, N, P y Q?

Ilustración 29: Respuesta Tipo 3 Pregunta No. 7
"Hace un esbozo de la gráfica y contesta qué es un rombo, aunque no justifica su respuesta"

Fuente: Producción Propia

El total de respuestas se puede apreciar en la siguiente tabla:

Tabla No. 18: Consolidado de respuestas a la Pregunta No. 7

Tipo De Respuesta	***Cantidad***
1. No sabe o no responde	*23*
2. Hace un esbozo de la gráfica aunque incorrecta	*5*
3. Hace un esbozo de la gráfica y contesta que es un rombo, aunque no justifica su respuesta	*2*
4. Realiza el gráfico, concluye que es un rombo y justifica su respuesta utilizando un lenguaje matemático o apropiado	*0*
Total	*30*

Fuente: producción propia

La tabla anterior muestra que 23 de 30 estudiantes no saben o no contestan a una pregunta planteada para el tercer nivel de deducción informal (ordenación o clasificación), por lo tanto el entendimiento de la naturaleza axiomática de la geometría no se hace presente en ellos. Similar ocurre con las respuestas tipo 2 y 3 (7 de 30 estudiantes) quienes contestan con un gráfico, pero no siguen ninguna demostración que evidencie el conocimiento mínimo de algún postulado.

Tabla No. 19: Distribución de Frecuencias para tipos de respuesta a la Pregunta No. 7 (Ordenación, clasificación o deducción informal)

Variable(tipo de pregunta)	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada	frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
Tipo 1	23	23	0.766	0.766
Tipo 2	5	28	0.166	0.933
Tipo 3	2	30	0.066	0.999
Tipo 4	0	30	0	0.999
Total	30		0.999	

Fuente: producción propia

De la distribución de frecuencias para la pregunta No. 7 se puede decir que el 0.00 % no hacen descripciones formales de algunos conceptos y propiedades, ni establecen relaciones entre los componentes de un trapecio isósceles como son sus vértices, lados, ángulos internos; además qué se puede derivar de la unión de sus puntos medios teniendo dos lados no paralelos de igual medida.

Sin embargo hay un 6.6% que se limita a contestar y justifica su respuesta con una gráfica. El siguiente diagrama muestra la posición de los diferentes tipos de respuestas para esta pregunta:

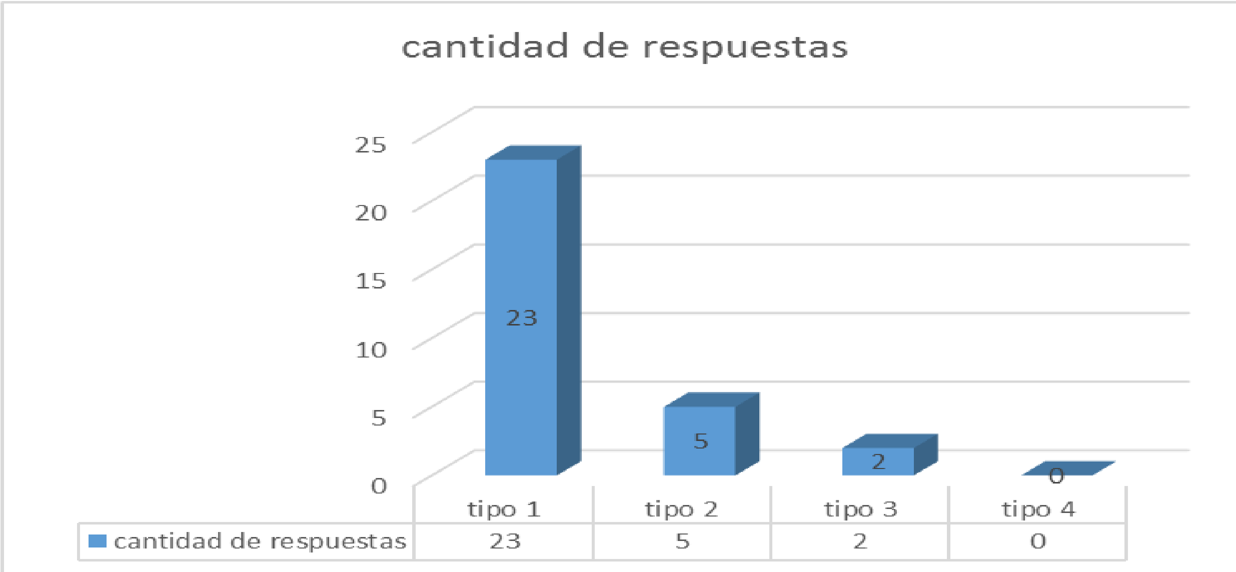


Ilustración No. 30: Cantidad de respuestas por tipo para la Pregunta No. 7

Fuente: producción propia

De entrada se aprecia que en el grupo de estudiantes no hay ninguno que esté en este nivel de desarrollo geométrico y que hay un 23.3%, es decir 7 estudiantes que utilizan sus capacidades de visualización y reconocimiento para tratar de acercarse a la respuesta.

4.3.2.8. Análisis Y Comentarios De La Pregunta Número 8

Para hacer el análisis a la pregunta No. 8 el siguiente fue el enunciado (Ver Anexo A)

"Analice el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Si es verdadera, presente una prueba y si es falsa, muestra un contraejemplo.

a. Si un paralelogramo tiene un ángulo recto, es un cuadrado.

b. Todo cuadrilátero tiene por lo menos un par de lados opuestos paralelos". (p. 122)

Esta pregunta corresponde también al tercer nivel de desarrollo geométrico y busca mirar cómo los estudiantes establecen relaciones entre los elementos y las propiedades de los diferentes tipos de cuadriláteros.

Ante el ítem “a” un estudiante en este nivel se esperaría que respondiera “falso” argumentando mediante un modelo matemático que el paralelogramo que tiene un ángulo recto, no solo es el cuadrado sino que además el rectángulo cumple esta característica y ante el ítem “b” respondería “falso”, apoyado de un esquema, pues el trapezoide también es un cuadrilátero que no tiene ningún par de lados paralelos. Las respuestas fueron las siguientes, tanto al ítem “a” como al ítem “b”

Una de las respuestas fue:

Intenta responder y hacen un gráfico de la situación pero no responden o no justifica adecuadamente su proceso: se observa en la respuesta que el estudiante (E14) utiliza el concepto de ángulo recto al hacer un esbozo de un gráfico para argumentar su respuesta sin tener en cuenta el concepto de paralelogramo, así mismo justifica el ítem b, por lo tanto intenta hacer un gráfico de la.situacion pero no responde o no justifica su proceso

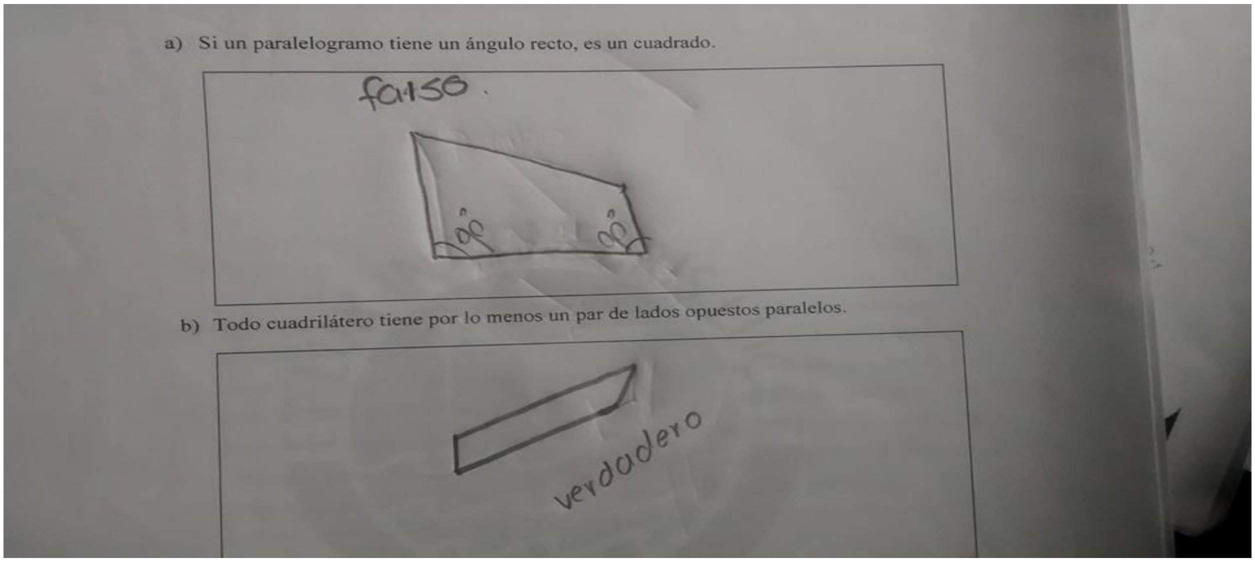


Ilustración No. 31: Respuesta Tipo 2 Pregunta No. 8 "Intenta hacer un gráfico de la situación pero no responde o no justifica adecuadamente su proceso"

Fuente: Producción Propia

A continuación se muestran los tipos de respuesta para esta pregunta:

Tabla No. 20: Consolidado tipo de respuestas a la Pregunta No. 8 (Deducción informal)

Tipo De Respuesta	Cantidad
1. No sabe o no responde	25
2. Intenta hacer un gráfico de la situación pero no responde o no justifica adecuadamente su proceso	5
3. Responde adecuadamente justificando con una prueba o contraejemplo	0
Total	30

Fuente: producción propia

Los tipos de respuestas dan a entender que los 30 estudiantes no disciernen entre los enunciados que se dan y su interpretación geométrica, es decir, para el caso del enunciado *"Si un paralelogramo tiene un ángulo recto es un cuadrado"* se debía centrar la respuesta a los rectángulos y cuadrados, pero una de las 5 respuestas muestra una asociación con un trapecio que no es paralelogramo. Así se puede decir que las respuestas no evidencian conexión entre los objetos y sus propiedades, que es una característica del nivel de deducción informal o clasificación.

La siguiente distribución de frecuencias ubica los tipos de respuestas de una manera más específica:

Tabla No. 21: Distribución de Frecuencias para tipos de respuesta a la Pregunta No. 8

Variable (tipo de respuesta)	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
Tipo 1	25	25	0.833	0.8333
Tipo 2	5	30	0.166	0.999
Tipo 3	0	30	0	0.999
Total	30		0.999	

Fuente: producción propia

En la siguiente Ilustración se muestra la posición que ocupa cada tipo de respuesta en relación con los demás, teniendo en cuenta que la respuesta tipo 3 no tuvo valor en su frecuencia:

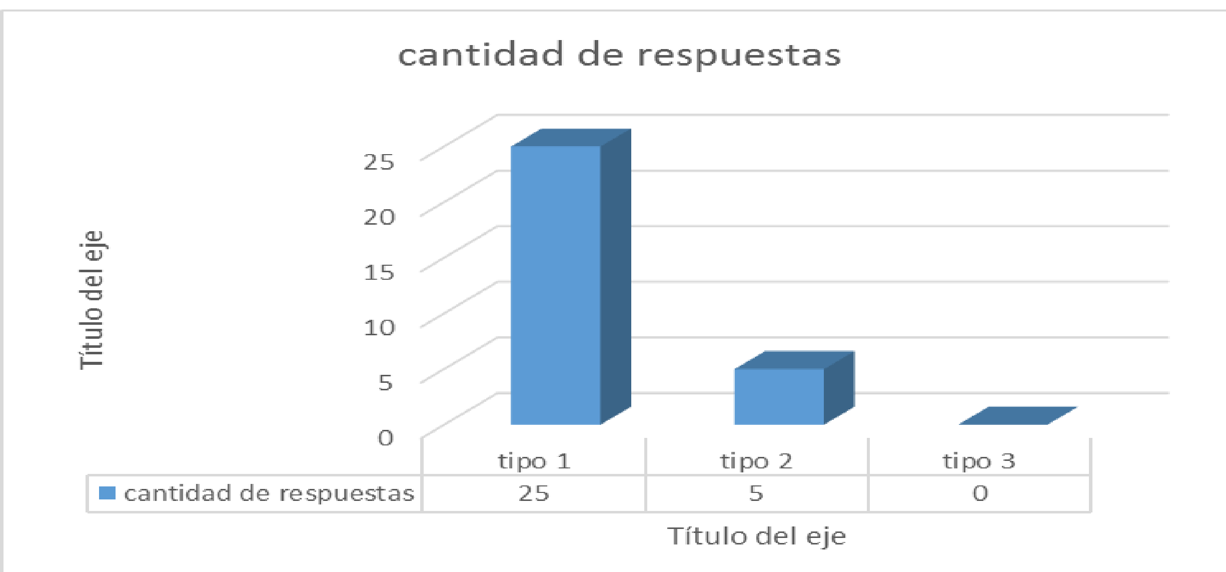


Ilustración No.32: Consolidado de Respuestas por tipo a la Pregunta No. 8

Fuente: producción propia

Con esta información se verifica que el 99.9 % de los estudiantes no logran establecer las relaciones y propiedades de los diferentes tipos de cuadriláteros y menos hacer uso de la notación matemática.

Además si se tiene en cuenta que dos de las características del modelo son la secuencialidad de los niveles y asociado a esta el lenguaje propio de cada nivel, es decir, que no se alcanza un nivel sin pasar por el anterior, quedando demostrado que los estudiantes están en la etapa de visualización y reconocimiento, es difícil que contesten correctamente una pregunta planteada para el tercer nivel (deducción informal), pues no se puede saltar el segundo nivel (análisis). Muestra de esto es la respuesta de un estudiante que contesta al ítem “b” que todo cuadrilátero tiene dos lados iguales, cuando lo que se le preguntaba era que analizara si todo cuadrilátero tiene por lo menos un par de lados opuestos paralelos.

4.3.2.9. Análisis Y Comentarios A La Pregunta Número 9

Para hacer el análisis a este ítem veamos el siguiente enunciado (Ver Anexo A): *“Dados los segmentos AC y BD, los cuales se interceptan en N. Si AN = BN y CN = DN, ¿Qué tipo de cuadrilátero es ABCD? Explique su respuesta” (p. 123)*

Esta pregunta es de *deducción informal* y busca según la descripción de la prueba realizar demostraciones sencillas, a partir de los datos explícitos que proporciona el problema, justificando los argumentos de sus demostraciones, en base a las propiedades implícitas presentes en el problema como son los cortes de las diagonales de un paralelogramo.

Esta pregunta no fue resuelta por el 100% de los estudiantes porque argumentaban no entenderla. Queda demostrado que un estudiante de un nivel no se puede entender geométricamente hablando con otro de un nivel de pensamiento diferente.

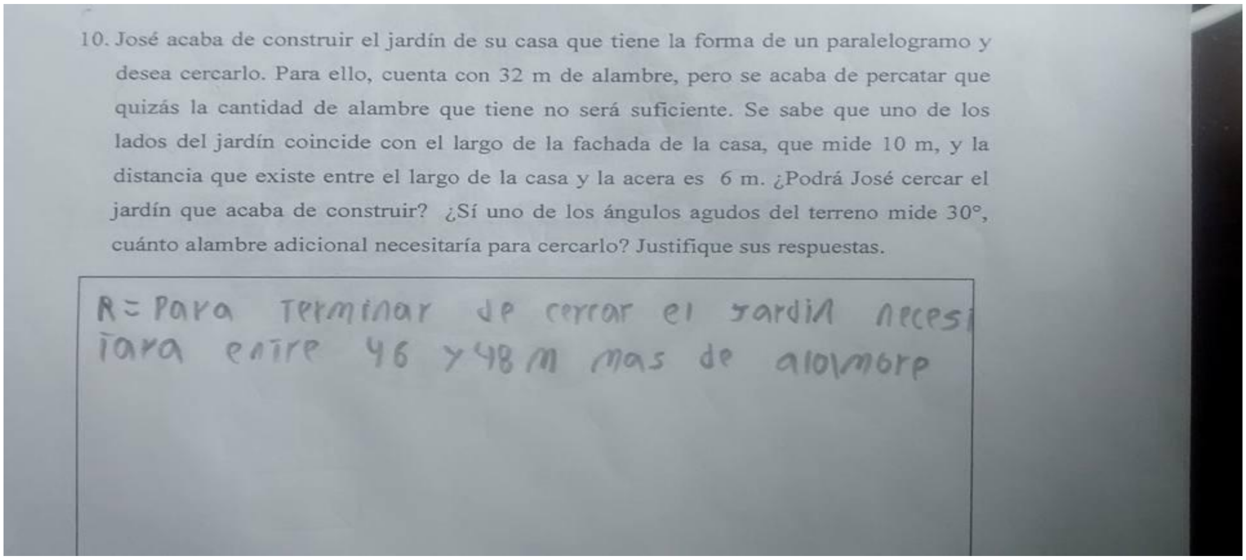
4.3.2.10. Análisis Y Comentarios A La Pregunta Número 10

Para el análisis a la pregunta No. 10 veamos el enunciado (Ver Anexo A)

> *"José acaba de construir el jardín de su casa que tiene la forma de un paralelogramo y desea cercarlo. Para ello, cuenta con 32 m de alambre, pero se acaba de percatar que quizás la cantidad de alambre que tiene no será suficiente. Se sabe que uno de los lados del jardín coincide con el largo de la fachada de la casa, que mide 10 m, y la distancia que existe entre el largo de la casa y la acera es 6 m. ¿Podrá José cercar el jardín que acaba de construir?" (p. 123)*

Esta pregunta busca mirar en los estudiantes qué estrategias utilizan para resolver problemas en contexto, haciendo uso en la solución de un lenguaje matemático adecuado y aplicando las propiedades de los paralelogramos.

La ilustración No. 33 corresponde a la única respuesta dada por el estudiante (E21) de la muestra:



10. José acaba de construir el jardín de su casa que tiene la forma de un paralelogramo y desea cercarlo. Para ello, cuenta con 32 m de alambre, pero se acaba de percatar que quizás la cantidad de alambre que tiene no será suficiente. Se sabe que uno de los lados del jardín coincide con el largo de la fachada de la casa, que mide 10 m, y la distancia que existe entre el largo de la casa y la acera es 6 m. ¿Podrá José cercar el jardín que acaba de construir? ¿Sí uno de los ángulos agudos del terreno mide 30°, cuánto alambre adicional necesitaría para cercarlo? Justifique sus respuestas.

R= Para terminar de cercar el jardin necesi
tara entre 46 y 48 m mas de alambre

Ilustración No. 33: Única respuesta obtenida a la pregunta No. 10

Fuente: Producción Propia

Asimismo, 29 estudiantes (96.66%) no contestaron a la pregunta y sólo un estudiante contestó que *"para terminar de cercar el jardín necesitaría entre 46 y 48m más de alambre"* pero no justificó el porqué de su razonamiento.

En las hojas de respuesta no se vieron gráficas hechas por los estudiantes que les sirviera de apoyo para encontrar una solución ante esta pregunta, por ende, no existe por ellos el uso de estrategias para resolver problemas o modelación de situaciones.

En síntesis a los resultado obtenidos con la aplicación de la prueba diagnóstica o Test se puede concluir que el 99% de los estudiantes de grado séptimo de las Instituciones Educativas de la Virginia se encuentran en el primer nivel de desarrollo geométrico según el *Modelo de Van Hiele*, pero que de éstos un 6.6% hacen un acercamiento muy mínimo al nivel de análisis.

Esta inferencia se percibió en las primeras 4 preguntas y se comprobó con las 6 preguntas restantes, ya que tenían una mayor complejidad en análisis y los ítems que corresponden a la etapa de *deducción informal* no fueron contestados correctamente por ningún estudiante.

Esta conclusión también se fundamenta en las características del *Modelo de Van Hiele*, como son la secuencialidad de los niveles y su lenguaje específico, además el hecho que los niveles de desarrollo geométrico son independientes de la edad y el grado de escolaridad, es decir, que no pueden pasar del nivel 1 al nivel 3 y si hubiesen estudiantes por encima del nivel 1 habrían contestado a las preguntas desde su saber en el nivel superior que se encuentren.

4.4. DISEÑO DE GUÍA DE ENSEÑANZA FUNDAMENTADA EN LAS SITUACIONES PROBLEMA

Habiendo hecho un análisis a los resultados que mostraron los estudiantes luego de aplicar el test o prueba diagnóstica determinando que los estudiantes de grado séptimo se encuentran en los dos primeros niveles de desarrollo de pensamiento espacial según del *Modelo de Van Hiele* (visualización y análisis), de hecho más el primer nivel que en el segundo, se diseña la siguiente guía fundamentada en las *Secuencias Didácticas* como ruta de enseñanza y en la teoría de las situaciones problemas como estrategia para abordar los objetos matemáticos.

Cabe anotar que al hacer una lectura detenida de las fases de aprendizaje del *Modelo de Van Hiele* se puede apreciar que este propone una estrategia para abordar los objetos geométricos que parte de los pre saberes de los estudiantes y los lleva a proponer estrategias de solución ante un "problema" específico del tema, tal como se describe en el marco teórico de esta investigación, dando una idea de cómo estructurar una secuencia didáctica:

> *En este sentido, las fases presentan una organización de las actividades que se desarrollan en el aula de clase y son implementadas para lograr el avance en el razonamiento geométrico de los estudiantes en cada uno de los niveles descritos por la teoría de los Van Hiele, además, permiten potenciar los errores y dificultades encontrados durante la fase de diagnóstico. (p. 131)*

Para la creación de esta *Secuencia Didáctica* se toma como objeto matemático *"el rectángulo: características, perímetro y área"* que aparece en los temas que tienen las Instituciones Educativas de La Virginia en sus planes de estudio. Con base en este objeto matemático se diseña la situación problema de tal manera que cumpla con las características propuestas por Moreno y Waldegg (2002) y Obando y Munera (2003):

Tabla 22: Análisis de la situación problema

Situación problema:	**Características que debe cumplir:**
Con el fin de llevar una reparación al salón de clases, el colegio al que perteneces necesita tu ayuda que consiste en poner en juego tus saberes geométricos. Para ello, debes colaborar calculando el perímetro y el área del piso de tu salón; además se quiere innovar en el diseño del piso y para ello se desea poner baldosas de forma de cuadrilátero. ¿Cómo calcularías el perímetro y área del salón, además, qué diseño propondrías para el embaldosado?	***Involucra implícitamente los conceptos que se van a aprender:*** *perímetro y área del cuadrilátero.* ***Representa un verdadero problema para el estudiante, pero a la vez, es accesible a él:*** *es un problema porque el estudiante debe utilizar y crear nuevas estructuras conceptuales para resolverlo.* ***Permite al alumno utilizar conocimientos anteriores:*** *como son características y clasificaciones de los cuadriláteros.*
Red conceptual	

Se entiende por red conceptual una especie de malla donde los nudos son el centro de las distintas relaciones existentes entre los conceptos asociados a los conocimientos que la situación permite trabajar.	***La red conceptual se teje entorno a los conceptos de perímetro y área del rectángulo***. *Acá van apareciendo "nudos" conceptuales como clasificación de los cuadriláteros, paralelogramo, trapecios, ángulos rectos, rectas paralelas y perpendiculares entre otros*
Motivo, medios y mediadores. *Para que los saberes matemáticos ingresen a la escuela deben sufrir una re-elaboración didáctica, que los recontextualiza, los repersonaliza y los retemporaliza. Esto es necesario, pues no debe olvidarse que el aprendizaje es el resultado de la actividad matemática del alumno, mediada por las situaciones problema a través de las cuales toman sentido y significado los conceptos matemáticos.*	*La situación problema planteada permite recontextualizar el saber matemático ya que utiliza el salón de clases para definir y deducir las características de los rectángulos y para hallar perímetros y áreas. Se utilizan elementos como palillos, guía de trabajo, fichas de cartulina entre otras. El docente se convierte en mediador.*
Actividades: *Las tareas que conforman la situación problema son su parte visible. A través de ellas el alumno desarrolla su actividad y, por ende, realiza las elaboraciones conceptuales relativas a los problemas que enfrenta. En las actividades se cristalizan los análisis realizados por el maestro sobre la red conceptual, los medios y los mediadores, y se plasman en un diseño que, al ser vivido por el alumno, le permiten la construcción del conocimiento*	*Las actividades se fundamentan en las fases de aprendizaje del modelo de Van hiele (ver tabla 22 y Anexo B) y estas permiten las elaboraciones conceptuales para que el estudiante redescubra su saber. La situación problema genera actividades de lectura, selección, clasificación, trabajo en grupo, formulación de hipótesis entre otras por parte de los estudiantes.*
Validación: *le permiten al alumno determinar el grado de certeza de sus acciones y, por tanto, desarrollar los cambios de estrategia que sean necesarios*	*Esta situación problema permite que el estudiante verifique las características y propiedades del objeto geométrico abordado*
Evaluación: *La evaluación dentro de una situación problema respeta los ritmos de aprendizaje y canaliza los errores presentes en las respuestas como agentes mediadores para provocar cambios conceptuales en los alumnos*	*Al encontrarle la solución a la situación se observa que cada estudiante utiliza estrategias y tiempos diferentes, además las respuestas van desde las más mínimas hasta algunas matemáticamente mejor elaboradas*
Institucionalización: *En la institucionalización el profesor organiza, sistematiza, da cuerpo y estructura a los objetos matemáticos que se quería fueran objeto de aprendizaje en los alumnos a través de las situaciones problema*	*Finalizando la guía fundamentada en las situaciones problemas existe una actividad que se relaciona directamente con el modelo de Van Hiele y es la fase de integración donde el profesor retoma los saberes descubiertos*

	por los estudiantes y elabora un mapa conceptual

Fuente: Documento adaptado por el autor de este trabajo de los autores Obando y Múnera (2003) y Moreno y Waldegg (2002)

Además, al hacer la interpretación de la prueba diagnóstica y ver que los estudiantes poseen altas falencias en la identificación de los cuadriláteros, se acompaña la situación problema con la teoría de los cuadriláteros para afianzar su apropiación y para que los estudiantes saquen de la información que se les presenta de los cuadriláteros los datos que necesitan. A continuación se presenta la estructura curricular de la *Secuencia Didáctica* y la descripción de las actividades a partir del *Modelo de Van Hiele*. La guía de enseñanza se encuentra en el Anexo B.

4.4.1. Estructura Curricular De La Secuencia Didáctica

Esta estructura curricular está basada, adaptada y mejorada de acuerdo a los modelos para secuencia didáctica planteados en el marco teórico:

Tabla No. 23: Estructura Curricular de la Secuencia Didáctica

Secuencia didáctica #1 Matemáticas Grado Séptimo	
Identificación de la secuencia	**Situación problema**
Grado: *séptimo.* ***Objeto matemático***: *perímetro y área del rectángulo.* ***Pensamiento***: *espacial y sistemas geométricos.*	*Con el fin de llevar una reparación al salón de clases, el colegio al que perteneces necesita tu ayuda que consiste en poner en juego tus saberes geométricos. Para ello, debes colaborar calculando el perímetro y el área del piso de tu salón; además se quiere innovar en el diseño del piso y para ello se desea poner baldosas de forma de*

<table>
<tr><td colspan="2">*Competencias*
***Sabe**r: diferencia las características de los diferentes tipos de cuadriláteros.*
***Hacer**: resuelve asertivamente las actividades planteadas para solucionar la situación problema*.
***Ser:** sabe trabajar en equipo con responsabilidad y sentidos de escucha y respeto*</td><td colspan="3">*cuadrilátero. ¿Cómo calcularías el perímetro y área del salón, además, qué diseño propondrías para el embaldosado?*</td></tr>
<tr><td colspan="5">***Estándar de calidad:***
- *Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos.*
- *Clasifico polígonos en relación con sus propiedades.*

Derecho básico de aprendizaje
- *Soluciona problemas en contextos geométricos que involucran calcular datos en un triángulo o cuadrilátero.*</td></tr>
<tr><td colspan="5">**FASES**</td></tr>
<tr><td>**Información**</td><td>**Orientación dirigida**</td><td>**Explicitación**</td><td>**Orientación libre**</td><td>**Integración**</td></tr>
<tr><td>Dar a conocer la situación problema.
Diálogo sobre saberes previos: paralelogramos, cuadriláteros, perímetro y area</td><td>Lectura y análisis de la síntesis conceptual sobre los cuadriláteros.
Medición con regla de algunos cuadriláteros.
Toma de datos</td><td>Diálogo sobre cómo llegaron los estudiantes a calcular los perímetros y áreas anotando las conclusiones en el tablero.
Orientación del docente hacia el uso adecuado del lenguaje matemático</td><td>Solución de la situación problema.
Solución de otros ejercicios más complejos sobre área y perímetro del rectángulo.</td><td>Respuesta a la situación problema planteada.
Síntesis de lo aprendido</td></tr>
</table>

Fuente: producción propia

4.4.2. Descripción De Las Actividades De La Secuencia Didáctica A Partir Del Modelo De Van Hiele

Para la descripción de estas actividades se utiliza el referente que se hace de las fases y niveles del *Modelo de Van Hiele*, la estructura planteada de la secuencia didáctica y la propuesta que hace Maguiña (2013: pp. 45-46).

Tabla No. 24: Descripción de las Actividades a partir del Modelo de Van Hiele

Niveles	Fases	Objetivo	Tiempo
Visualización o reconocimiento	*Información o discernimiento*	*Reconocer un cuadrilátero por su forma global*	*40 min*
	Orientación dirigida	*Reconocer que las propiedades de un cuadrilátero se mantienen aunque cambie su posición en el plano*	*80 min*
	Explicitación	*Mostrar que la construcción de una figura responde a propiedades matemáticas.*	*40 min*
	Orientación libre	*Reconocer y nombrar diversos tipos de cuadriláteros por su forma global en una situación práctica, deduciendo las características del rectángulo y de cómo calcular su perímetro y área*	*60 min*
	Integración	*Establecer una visión global de la clasificación de los cuadriláteros.*	*40 min*
Análisis	*Información o discernimiento*	*Promover la lectura y el uso adecuado de símbolos o notación matemática*	*40 min*
	Orientación dirigida	*Plantear diferencias entre el rectángulo y otros cuadriláteros.*	*80 min*
	Explicitación	*Justificar, explicar o parafrasear las principales propiedades de los cuadriláteros.*	*40 min*
	Orientación libre	*Deducir propiedades implícitas de los cuadriláteros a partir de propiedades explícitas.*	*60 min*
	Integración	*Establecer y definir elementos y principales propiedades de los diferentes tipos de cuadriláteros*	*40 min*

Fuente: Maguiña (2013: pp. 45-46)

4.5. APLICACIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

Ilustración No. 34: Estudiantes construyendo los cuadriláteros con regletas y palillos

Fuente: producción propia

4.6. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS CON LA APLICACIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

Para la realización de este análisis se toma en cuenta la descripción de las actividades que se hace anteriormente, la teoría conocida sobre las situaciones problema y las secuencias didácticas. Aquí el énfasis será mirar cómo la situación problema incide el desarrollo del nivel de visualización o reconocimiento y probablemente del nivel de análisis en los estudiantes, es decir, determinar qué condiciones debe cumplir ésta para que mejore los procesos de enseñanza y aprendizaje del pensamiento espacial y sistemas geométricos en estudiantes de grado séptimo.

4.6.1. Análisis Y Comentarios A La Fase 1: Discernimiento O Información.

Se le entrega a cada estudiante una copia donde aparece la situación problema. Se les pide que la lean mentalmente y luego en plenaria un estudiante lee la situación para todo el grupo. Se pregunta a los estudiantes qué deben saber para resolver este problema, y las respuestas fueron: *"profesor debemos saber medir con el metro" (E12 – E17), "debemos saber el largo y el ancho" (E4 – E17 – E23), "debemos conocer las figuras geométricas" (E10 - E17 –E28).*

La valoración de los saberes previos consistía en que cada estudiante respondia sobre el significado de los siguientes conceptos: ángulo , lado, perímetro, área paralelogramo, trapecio, rombo, cuadrado y rectángulo, (ver anexo A)

Los tipos de respuestas escritas para los saberes previos fueron los siguientes:

Tabla 25: Tipos de respuestas a Saberes Previos

Tipo de respuesta	Cantidad
1. Responde a los conceptos geométricos haciendo un símil con algo conocido.	2
2. Responde con un dibujo del concepto	14
3. Responde haciendo uso de definiciones matemáticas	2
4. Responde con algunas definiciones matemáticas y apoyándose de un dibujo	12

Fuente: producción propia

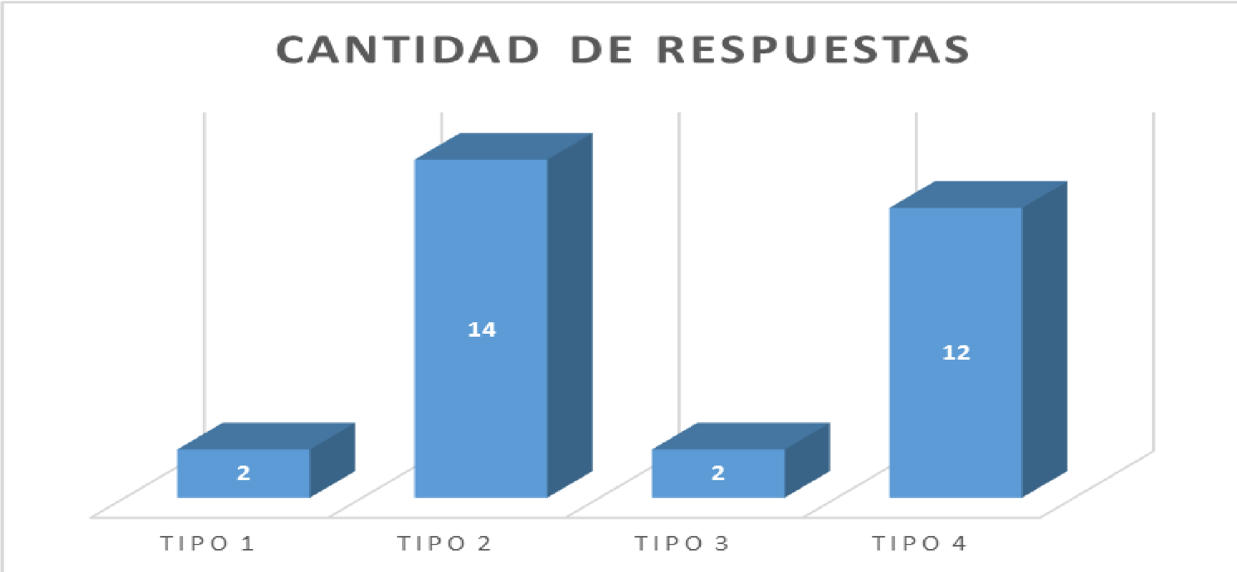


Ilustración No. 35: Cantidad por tipo de respuestas a Saberes Previos

Fuente: producción propia

Se observa que el 99.9 % de los estudiantes responde a los saberes previos desde sus concepciones, y como están en el nivel de visualización sus respuestas concuerdan con este, ya que tienden a responder desde la observación y la intuición, que desde las propiedades de las figuras.

Luego de indagar sobre los conceptos se hace una socialización y se relacionan las palabras con su concepto correspondiente.

4.6.2. Análisis Y Comentarios A La Fase 2: Orientación Dirigida

Los estudiantes organizados en grupos de cinco forman y nombran diferentes tipos de cuadriláteros, pero aún no conocen la diferencia entre paralelogramos, trapecios y trapezoides. Algunas creaciones de cuadriláteros fueron las siguientes:

El grupo 1 construye 4 cuadriláteros paralelogramos (romboide, rectángulo, cuadrado, y rombo), pero no manifiestan la diferencia entre el rombo y el romboide:

Ilustración 36: Creación Cuadriláteros Grupo 1

Fuente: producción propia

El grupo número 2 identifica en sus cuadriláteros el cuadrado, el rectángulo, el rombo, pero no sabe qué nombre darle al cuarto cuadrilátero.

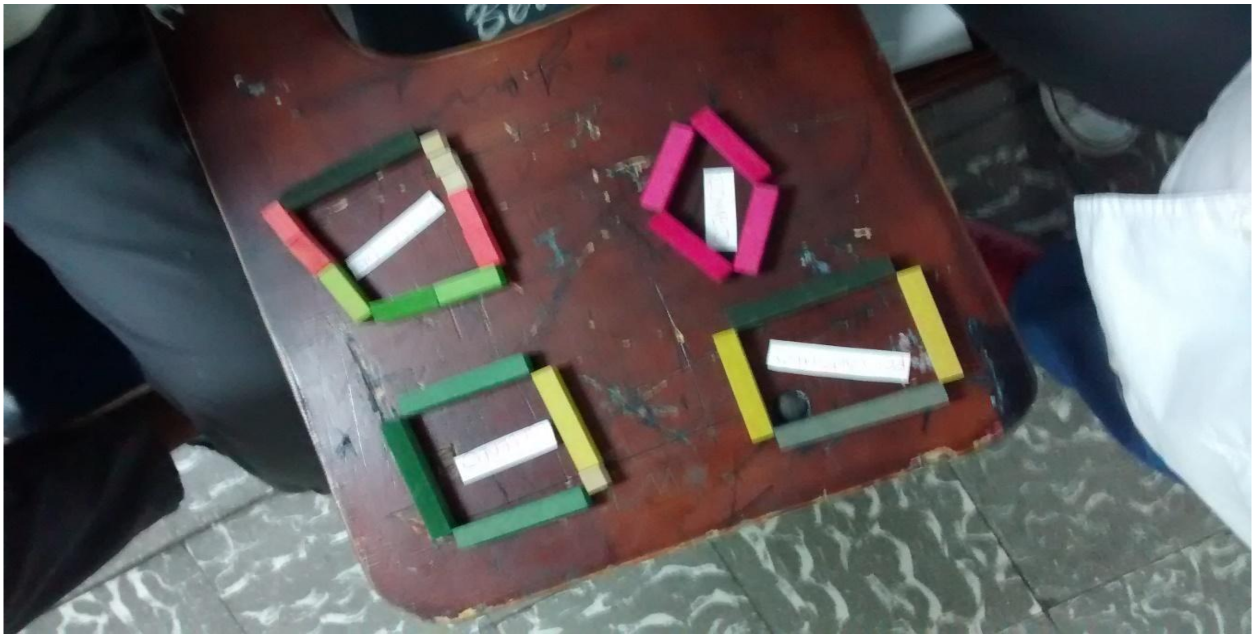


Ilustración No. 37: Creación Cuadriláteros Grupo 2

Fuente: producción propia

El grupo número 3 alcanza a realizar tres cuadriláteros: en la siguiente ilustración se ve que escogen palillos iguales para luego formar un cuadrado, forman un rectángulo y un trapecio isósceles (dicen que se parece al techo de una casa)

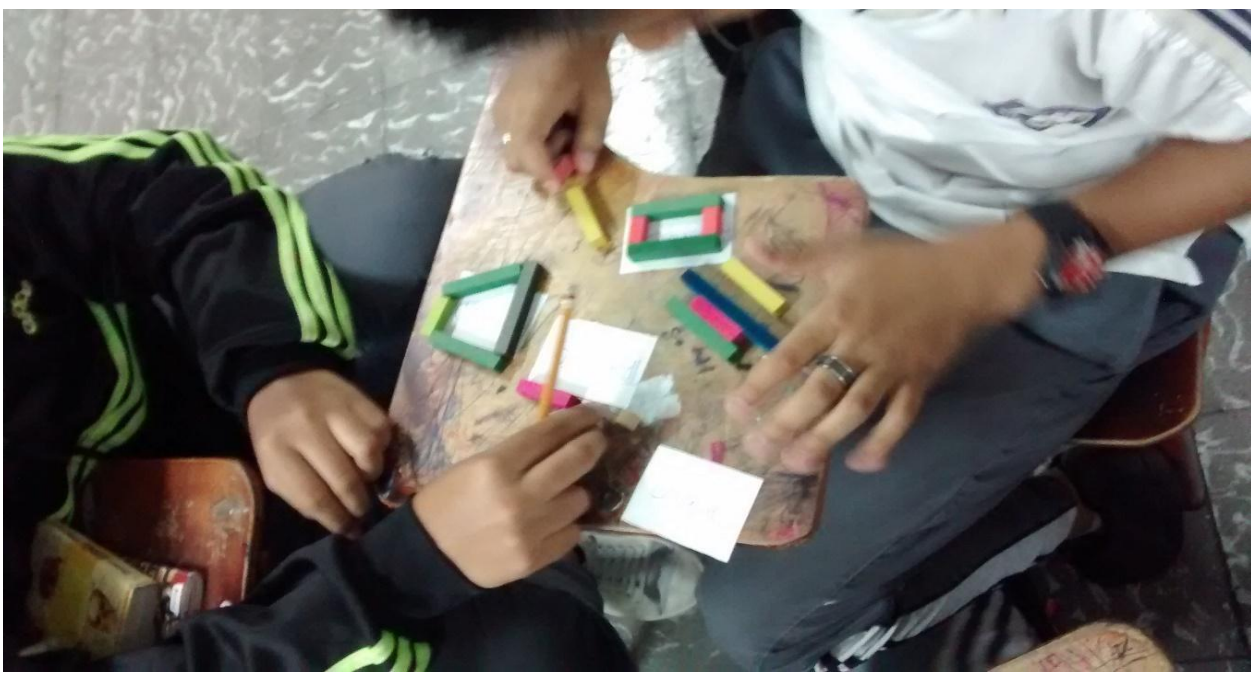


Ilustración No. 38: Creación Cuadriláteros Grupo 3

Fuente: producción propia

Los cuadriláteros formados por los grupos 4, 5 y 6 fueron muy similares a los anteriores, por lo cual se centró más la atención en sus justificaciones como se verá más adelante.

Se hicieron preguntas sobre la construcción de cuadriláteros y las respuestas textualmente fueron las siguientes:

Tabla No 26: Respuestas sobre la Creación de Cuadriláteros

Pregunta	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6
¿En qué se diferencia un cuadrado de un rectángulo?	*Se diferencian en que el cuadrado tiene los 4 lados iguales y el rectángulo tiene solo dos lados iguales entre si*	*El cuadrado tiene todos sus lados iguales, el rectángulo tiene sus lados opuestos iguales*	*El cuadrado es igual por donde se mire.*	*El cuadrado tiene sus lados iguales, el rectángulo no, aunque es cuadradito como el cuadrado*	*El rectángulo es más largo que el cuadrado, y el cuadrado tiene sus lados iguales*	*El cuadrado y el rectángulo son cuadriláteros, pero el cuadrado tiene todos sus cuatro lados iguales, el rectángulo no*
¿En qué se diferencia un cuadrado de un rombo?	*El cuadrado tiene 4 ángulos iguales, el rombo sus lados son iguales pero tiene un par de ángulos mas puntudos*	*En que el rombo tiene los lados iguales pero los ángulos son diferentes a 90 grados*	*Si el cuadrado se gira es un rombo que se parece a una cometa*	*El rombo tiene los lados iguales pero los ángulos son dos más abiertos y dos más cerrados*	*El cuadrado tiene todos sus ángulos de 90 grados, mientras que el rombo tiene dos ángulos agudos iguales y dos ángulos obtusos iguales*	*Ambos tienen todos sus lados iguales, sólo que en el rombo los ángulos opuestos son iguales*
¿Qué es un trapecio?	*Un trapecio es una figura de 4 lados donde dos tienen la misma dirección y los otros dos no*	*Este tiene dos lados paralelos y dos lados no paralelos*	*Es una figura geométrica de 4 lados que se parece al techo de una casa*	*Un trapecio tiene dos lados paralelos y los otros dos no lo son*	*Tiene dos bases desiguales unidas por dos líneas*	*Un trapecio tiene sus cuatro lados desiguales*

Fuente: producción propia

Luego de hacer el ejercicio sobre la socialización de saberes previos y que en grupos construyeran los cuadriláteros, se observa en las respuestas que los estudiantes utilizan su nivel de visualización, pero que además se esfuerzan por hacer uso de un lenguaje matemático que no se veía en las respuestas del Pre-Test, es decir, que ya tratan de definir haciendo uso de las características y diferencias visibles entre las figuras geométricas. Sin embargo se aprecia que el grupo tres sigue con una tendencia muy marcada a definir las figuras geométricas desde su percepción visual haciendo comparaciones con objetos conocidos.

Antes de leer y discutir la síntesis conceptual, se repasan conceptos abordados en el grado anterior (Sexto) para así lograr mejor apropiación de los objetos matemáticos; estos conceptos son: paralelo, perpendicular, ángulo agudo, recto y obtuso. También se hace énfasis en el problema planteado en la fase inicial recordándoles a los estudiantes que el fin principal de la guía de enseñanza es resolver el problema en las condiciones que se pide. Se entrega por dos estudiantes una síntesis conceptual sobre los cuadriláteros, la cual aparece en el Anexo B para que la lean, la discutan y manifiesten las dudas respectivas.

Los estudiantes hacen un resumen de la teoría expuesta, haciendo uso de regla, transportador, colores entre otros, y se observó lo siguiente:

Ilustración No. 39: Estudiantes Grupo 4 Resumiendo la Síntesis conceptual

Fuente: producción propia

- Se presentan dificultades en 19 de los estudiantes en cuanto al manejo del transportador para medir ángulos.
- 12 de los estudiantes preguntan varias veces si con la regla se empieza a medir desde el cero o desde el uno, y cuando deben medir una unidad con milímetros, por ejemplo, para medir 4,7 preguntan que cómo grafican esta medida, o hasta qué punto de la regla.
- 15 estudiantes muestran altibajos para graficar los cuadriláteros en sus cuadernos bien sea por ampliarlos, reducirlos o cambiarlos de posición.
- 17 estudiantes manifiestan no saber operar con números decimales, ni de identificar relaciones de orden entre estos.

Tabla No. 27: Síntesis de dificultades halladas en la fase de orientación dirigida

Dificultad	Cantidad	Porcentaje	Observación
Manejo del transportador	19	63.33	Estos porcentajes están indicando que estos elementos propios del saber geométrico no son trabajados muy a menudo en las clases, dejando muchas veces el desarrollo del pensamiento espacial para momentos muy cortos o para el final del año académico. Aquí radica una de las principales dificultades de la enseñanza de la geometría y es el tenerla aislada del saber matemático, además de no transversalizarla con una situación problema que haga explícito su aprendizaje. En cuanto a las operaciones con números decimales que son propias del pensamiento numérico y métrico, ocurre lo mismo.
Uso de la regla	12	40	
Graficación (ampliación reducción)	15	50	
Operaciones con números decimales.	17	56.66	

Fuente: producción propia

Para contrarrestar estas dificultades lo que se hace es que se les va indicando a los estudiantes el manejo de la regla, del transportador, y de las operaciones con decimales apoyándose de los estudiantes que si manejan estos elementos para que ayuden como monitores y se facilite el diálogo, el trabajo en equipo, la discusión entre pares que son características implícitas del modelo Van Hiele y de las situaciones problema.

4.6.3. Análisis Y Comentarios A La Fase 3: Explicitación

Los estudiantes hacen los ajustes necesarios a los cuadriláteros que habían formado con los palitos y regletas, llegando a la conclusión en un 99 % que para resolver el problema del salón de clases, requerían conocer el área y perímetro del rectángulo, pero que era importante saber sobre los otros cuadriláteros para el diseño del embaldosado. Ante las preguntas orientadoras: ¿En qué se diferencia un cuadrado de un rombo? ¿Qué tipo de trapecios existen? ¿Cómo calculo el área y perímetro de un rectángulo? se nota un avance muy significativo en las respuestas ya que los estudiantes organizados en grupos analizan sus concepciones antes de responder.

En el ejercicio que hacen los estudiantes de analizar sus respuestas antes de responder, aun cuando las respuestas no sean en un 100% correctas se puede intuir los primeros inicios del desarrollo del pensamiento espacial a través de la aplicación de la situación problema ya que los estudiantes recrean formas, establecen conjeturas y relacionar conceptos. Esta idea la plantea Arboleda (2011) cuando afirma que el desarrollo del pensamiento espacial se logra a través de la percepción, permitiendo que las actividades lo conlleven a visualizar, razonar y construir la identificación de estructuras y configuraciones de los diferentes procesos y relaciones de los conceptos matemáticos ligados a la geometría (p.40-43)

4.6.4. Análisis Y Comentarios A La Fase 4: Orientación Libre

En el cálculo del perímetro y área del salón de clases se encontraron las siguientes respuestas:

Tabla No. 28: Respuestas obtenidas en cálculo de área y perímetro del salón de clases

Tipo De Respuesta	Cantidad
1. No calcula el área y el perímetro del salón de clases	1
2. Calcula incorrectamente el área o el perímetro del salón de clases	1
3. Calcula correctamente el área y perímetro del salón de clases pero no especifica su respuesta no justifica su proceso	12
4. Calcula correctamente el área y perímetro del salón de clases especificando su respuesta y justificando su proceso	16
Total	**30**

La Tabla No. 28 muestra que 16 de 30 estudiantes calculan correctamente el área y el perímetro del salón de clases logrando una muy buena apropiación de estos conceptos. También es de notar el trabajo de 12 estudiantes que hacen los cálculos correctos aunque no justifican sus respuestas. La siguiente distribución de frecuencias muestra en términos de porcentaje el valor de cada tipo de respuesta para la solución de la situación problema (calcular el área y perímetro del salón de clases)

Tabla No. 29: Distribución de Frecuencias para respuestas a la situación problema

Variable (tipo de respuesta)	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
Tipo 1	1	1	0.033	0.033
Tipo 2	1	2	0.033	0.066
Tipo 3	12	14	0.4	0.466
Tipo 4	16	30	0.533	0.999
Total	**30**		**0.999**	

Fuente: producción propia

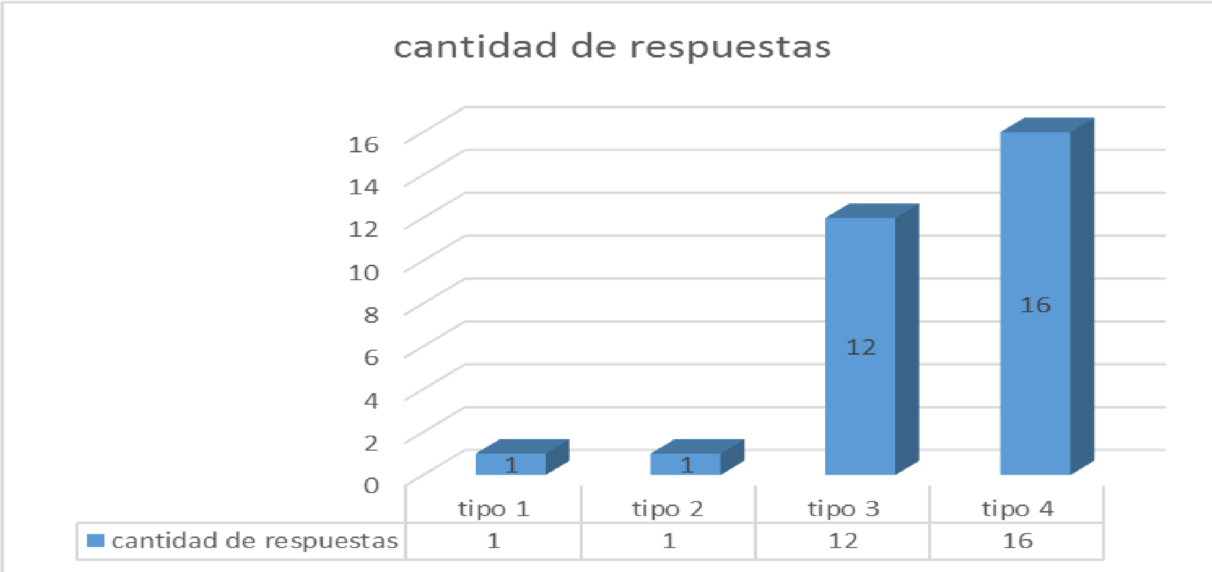


Ilustración No. 40: Cantidad por Tipo de Respuestas a situación problema

Fuente: producción propia

En la Ilustración No. 40 se aprecia que aproximadamente un 94% de los estudiantes se apropiaron del concepto de área y perímetro del rectángulo, que manejan bien el procedimiento y la forma para calcularlo, además entre un 53% y 54% al especificar su respuesta y justificar su proceso están dejando ver en claro que ya diferencian entre las características del rectángulo a las de los demás cuadriláteros.

En el caso de la respuesta incorrecta, es decir el 3.3%, se debió al mal manejo del algoritmo de la multiplicación y porque confundió la forma de calcular el perímetro con la forma de calcular el área.

El estudiante que no contestó a la pregunta manifestó no haber entendido el problema, y que por ello no sabía cómo solucionarlo, pero que al socializar con un compañero que le explicó *"que el perímetro era todo lo que media el borde del rectángulo y que el área era todo lo que había allí dentro" (E7)* le había quedado claro.

Este estudiante deja entrever que es posible que le haya entendido a un compañero que maneja su propio lenguaje, es decir, la propiedad del modelo que habla de lo específico del lenguaje en dos estudiantes que estén en el mismo nivel.

Para la estrategia del embaldosado que es la segunda parte de la situación problema se obtuvieron los siguientes tipos de respuestas y se consolidó la información de la siguiente manera:

- **Diseño tipo 1**: son diseños que no se terminaron porque los estudiantes argumentaron falta de tiempo.

Ilustración No. 41: Diseño embaldosado Tipo 1

Fuente: producción propia

- **Diseño tipo 2:** fueron estudiantes que utilizaron para su diseño cuadrados o rectángulos porque manifestaron que era más fácil embaldosar de esta manera y que no había que hacer muchas mediciones, ni buscar mucho las baldosas en el mercado.

-

Ilustración No. 42: Diseño embaldosado Tipo 2

Fuente: producción propia

- **Diseño tipo 3:** fueron estudiantes que utilizaron diversos tipos de cuadriláteros en su diseño indicando que tipo de cuadriláteros utilizarían

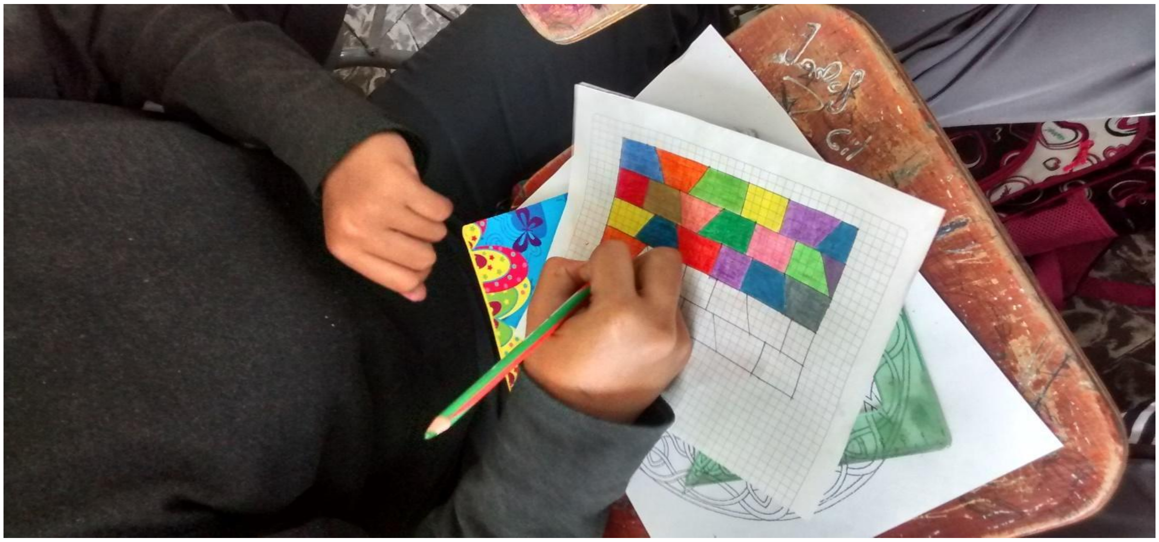


Ilustración No. 43: Diseño embaldosado Tipo 3

Fuente: producción propia

- **Diseño tipo 4:** fueron diseños donde los estudiantes decían que se embaldosaba el piso con baldosas cuadradas, pero que sobre éstas se pintaban todos los cuadriláteros que se querían, porque así era más fácil, además de identificar qué tipo de cuadrilátero utilizarían.

Ilustración No. 44: Diseño embaldosado Tipo 4

Fuente: producción propia

Tabla No. 30: Distribución de Frecuencia para Respuestas

Tipo de diseño	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
Tipo1	2	2	0.066	0.066
Tipo 2	13	15	0.433	0.5
Tipo 3	1	29	0.466	0.966
Tipo 4	1	30	0.033	0.999
Total	**30**		**0.99**	

Fuente: producción propia

La tabla No. 30 deja claro que el 93.3% de la muestra hizo uso creativo del conocimiento adquirido para construir sus diseños de embaldosado que era la otra parte de la situación problema, dando razones que justificaban su diseño. El 6.6% restante no culminó esta parte de la actividad porque gastaron más tiempo calculando el área y el perímetro del salón.

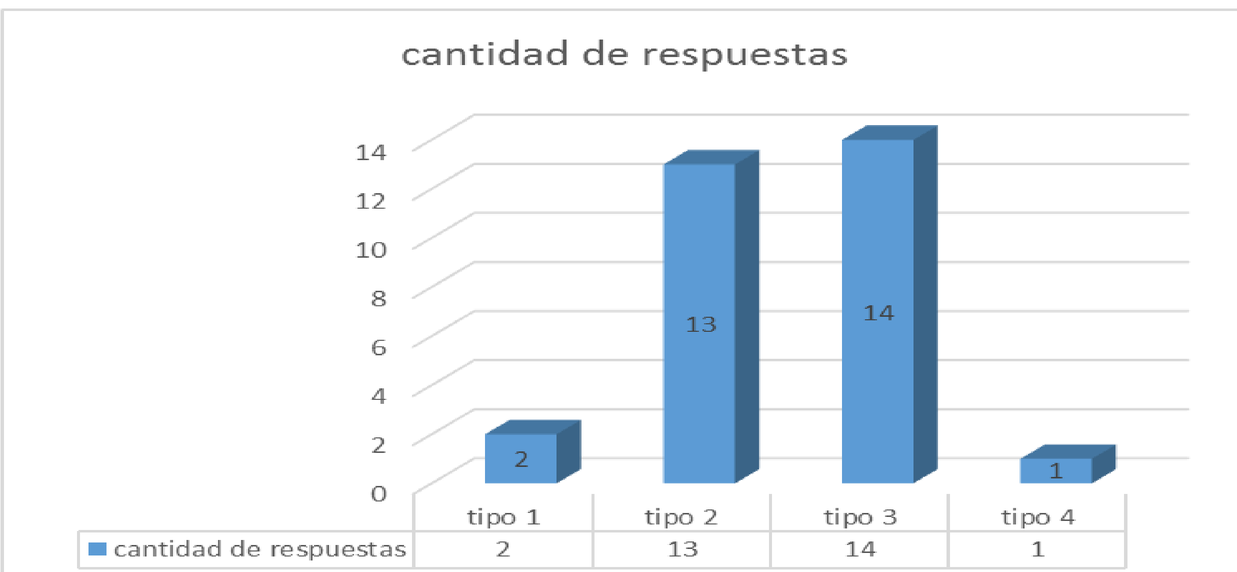


Ilustración No. 45: Cantidad por Tipo de Diseños de embaldosado

Fuente: producción Propia

De la solución que dieron los estudiantes a la situación problema, la cual consistia en calcular el área y perímetro del salón de clases, además de proponer un diseño para el embaldosado se puede concluir que 28 estudiantes calcularon el área y el perímetro del salón e hicieron el diseño del embaldosado utilizando cuadriláteros, es decir, que para esta fase de orientación libre, la situación problema fue resuelta por un 93.3% de los estudiantes, además que 16 estudiantes justificaron correctamente el proceso del cálculo de área y perímetro y 15 justificaron convenientemente el diseño del embaldosado, así se obtiene un promedio de 51.66% de la muestra que justifica sus procesos de manera apropiada.

En la solución de otros problemas se obtuvieron los siguientes resultados:

a. La identificación de cuadriláteros en los diseños se hizo de manera individual a manera de entrevista para apreciar de forma verbal los argumentos de los estudiantes. Se les pidió que diferenciaran entre cuadrados, rombos, rectángulos y romboides, además que identificaran todos los tipos de trapecios en los diseños argumentando sus respuestas. Se obtuvieron los siguientes resultados:

Tabla No. 31: Resultados para identificación de Cuadriláteros (Orientación libre)

Tipo De Respuesta	Cantidad
1. No identifica los cuadriláteros ni los agrupa por su forma y características (no responde a la pregunta	0
2. Identifica algunos cuadriláteros pero no los agrupa	2
3. Identifica y agrupa los cuadriláteros por sus formas y características, pero no argumenta la diferencia entre los paralelogramos y entre trapecios	15
4. Identifica y agrupa todos los cuadriláteros por sus formas y	13

características, argumentado diferencias entre estos	
Total	**30**

Fuente: producción propia

La posición que ocupa cada tipo de respuestas para la identificación de cuadriláteros propuesta para la fase de orientación libre se hace más explícita en la siguiente tabla:

Tabla No. 32: Distribución de Frecuencias para identificación de Cuadriláteros (Orientación Libre)

Tipo de respuesta	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
Tipo 1	0	0	0	0
Tipo 2	2	2	0.066	0.066
Tipo 3	15	17	0.5	0.566
Tipo 4	13	30	0.433	0.99
Total	**30**		**0.99**	

Luego de aplicar las primeras 4 partes de la guía de enseñanza fundamentada en las fases de aprendizaje del *Modelo de Van Hiele* se obtiene como resultado un 43.3% de la muestra (13 estudiantes) que identifica todos los cuadriláteros y los agrupa por sus formas y características, además de nombrar diferencias entre éstos. Otra inferencia es que el 99% demostró al menos un aprendizaje sobre el objeto de estudio.

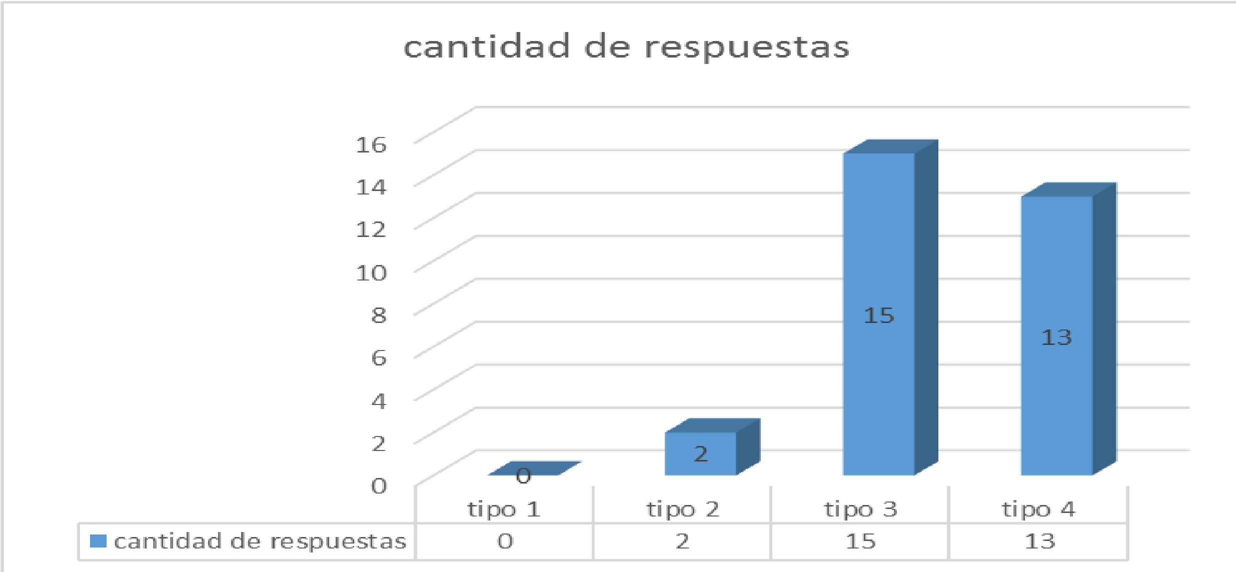


Ilustración No 46: Cantidad por Tipo de Respuestas a identificación de Cuadriláteros

Fuente: producción propia

Asimismo, sí se hace un comparativo de los resultados obtenidos en el Test de la pregunta número 2 que tiene que ver con la identificación de cuadriláteros en el nivel de visualización y la actividad de la guía de enseñanza planteada para orientación libre se obtienen las siguientes diferencias, tanto en número de estudiantes como en porcentajes.

Tabla No 33: Cuadro comparativo para resultados de identificación de cuadriláteros

Tipo de pregunta	**Pregunta 2 del test (nivel de visualización)**		**Identificación de cuadriláteros en fase de orientación libre**		**Diferencia**	
	estudiante	**%**	**estudiante**	**%**	**estudiante**	**%**
1. No identifica los cuadriláteros ni los agrupa por su forma y características (no responde a la pregunta)	1	3.33	0	0	1	3.33
2. Identifica algunos	12	40	2	6.66	10	33.33

cuadriláteros pero no los agrupa						
3. Identifica y agrupa algunos cuadriláteros por sus formas y características	15	50	15	50	0	
4. Identifica y agrupa todos los cuadriláteros por sus formas y características	2	6.66	13	43.33	11	36.66
Total	**30**					

Fuente: producción propia

Se nota que a medida que se va desarrollando la secuencia didáctica se va dando un aumento del pensamiento espacial en los estudiantes de grado séptimo. Si bien en la prueba de entrada en la fase 1 sólo habían 2 estudiantes (6.66%) que identificaban y agrupaban todos los cuadriláteros por sus formas.

En la tabla No. 33 resultan 13 estudiantes (43.33%) que después de haber construido y reconstruido los cuadriláteros con material manipulable, tener una síntesis conceptual clara y de haber socializado sus características, los identifican y agrupan por sus formas.

También se nota un buen avance al detectar que antes de la aplicación de la guía con la situación problema existían estudiantes que no reconocían ningún cuadrilátero o no los reconocían todos, y después de aplicar la guía hasta este momento el estudiante que mínimamente está en el nivel de visualización identifica algunos cuadriláteros aunque no los agrupe por sus formas (6.6%), En el cálculo de otras áreas, perímetros y construcción de rectángulos se obtuvieron los siguientes resultados:

Tabla 34: Resultados para cálculo de área y perímetro de otros rectángulos

Tipo De Respuesta	Cantidad
1. No calcula el área, perímetro y grafica de los rectángulos	*0*
2. Calcula el área, perímetro y grafica de los rectángulos con errores en procesos del manejo de decimales	*13*
3. Calcula el área, perímetro y grafica del rectángulo sin errores	*17*
Total	***30***

Fuente: producción propia

La tabla anterior muestra como 17 de 30 estudiantes demuestran saber el proceso para calcular áreas y perímetros de otros rectángulos, diferentes al de la situación problema, sin errores y que 13 de 30 estudiantes, aunque diferencian entre área y perímetro poseen errores de algoritmos con números decimales.

Tabla No. 35: Distribución de Frecuencias para cálculo de áreas y perímetros de rectángulos

Tipo de respuesta	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
Tipo 1	0	0	0	0
Tipo 2	13	13	0.433	0.433
Tipo 3	17	30	0.566	0.99
Total	**30**		**0.99**	

Fuente: producción propia

En la siguiente Ilustración se da una idea global de cómo es el comportamiento de la muestra en esta actividad de la fase de orientación libre:

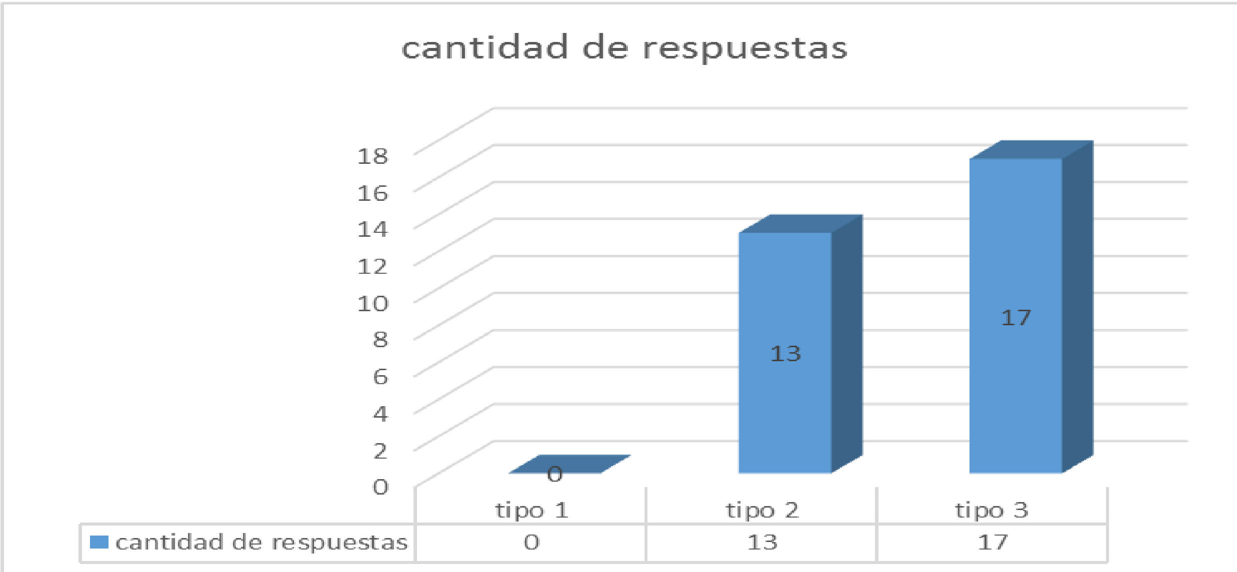


Ilustración No. 47: Cantidad de Respuestas para cálculo de área y perímetro de rectángulos

Fuente: producción propia

Es evidente que de un lado hay una aprehensión del concepto de área y perímetro por parte del 99% de los estudiantes, pero aún persiste la dificultad en cuanto a los algoritmos con números decimales. Uno de los fines de la situación problema que se cumplió fue que los estudiantes se apropiaran de los conceptos pertinentes, para que ésta fuera resuelta (cuadrilátero, rectángulo, área y perímetro del rectángulo); las falencias que se presentaron se deben a procesos de pensamiento numérico que probablemente no sean trabajados con mucha frecuencia dentro de las actividades académicas cotidianas.

De esta fase (orientación libre) se evidencia un desarrollo un poco más avanzado del pensamiento espacial ya que los estudiantes se han apropiado del concepto de área y perímetro del rectángulo, es decir, han desarrollado actividades y justificaciones que evidencian el concepto, tal como lo afirma Camargo y Leguizamón (2003): *"Una de las actividades más frecuentes en* *matemáticas es la construcción de conceptos. Los conceptos geométricos, tanto de objetos como de relaciones, son el fundamento para el desarrollo del conocimiento geométrico, sobre el que descansa el sentido espacial" (p.8)*

4.6.5. Análisis Y Comentarios A La Fase De Integración

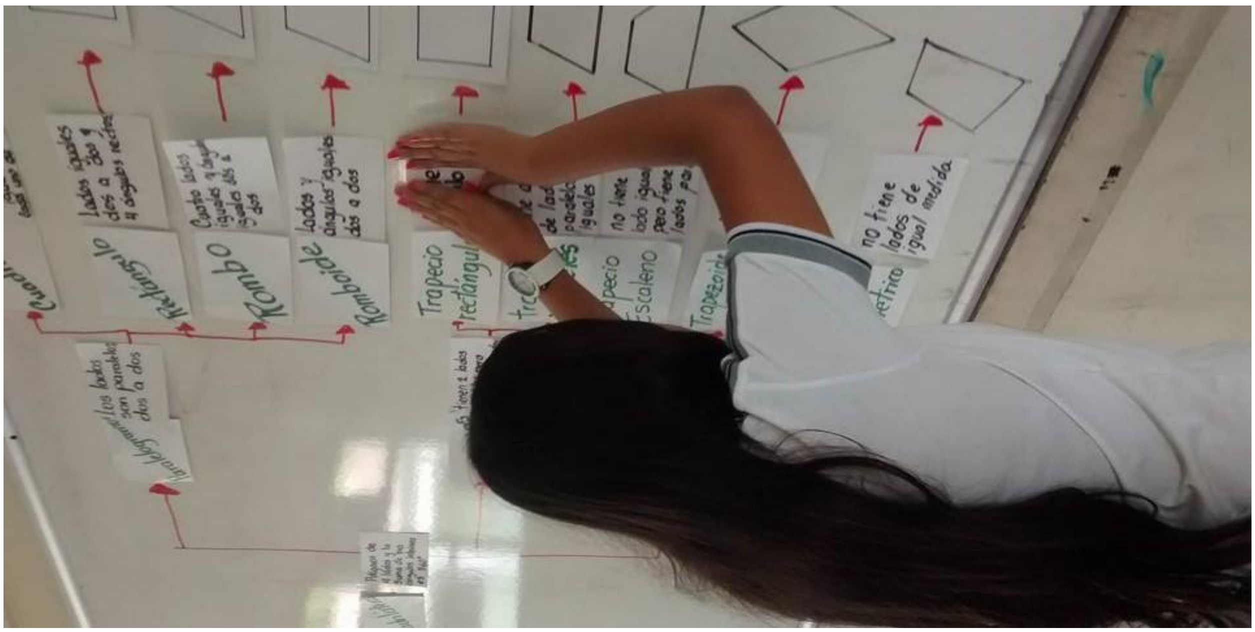


Ilustración No. 48: Estudiante Terminando el Mapa Conceptual

Fuente: producción propia

Esta actividad de realizar y completar un mapa conceptual, si bien hace parte de la fase de visualización, también es una especie de preámbulo para el nivel de análisis, ya que además de buscar establecer una visión global de la clasificación de los cuadriláteros, también pretende que los estudiantes definan y apliquen los elementos y principales propiedades que los diferencian.

Antes de iniciar esta parte se hacen preguntas orientadoras e integradoras sobre todo el tema visto. Luego se pide que individualmente hagan el mapa conceptual en sus cuadernos, para después socializar y hacer la construcción.

Cuando se procede a hacer la socialización se les pide a los estudiantes que guarden todos sus apuntes, y mediante un diálogo intencionado por parte del docente investigador se va haciendo la construcción del mapa conceptual. Al final queda socializado la diferencia entre los paralelogramos, trapecios y trapezoides, así como los conceptos de área y perímetro del rectángulo.

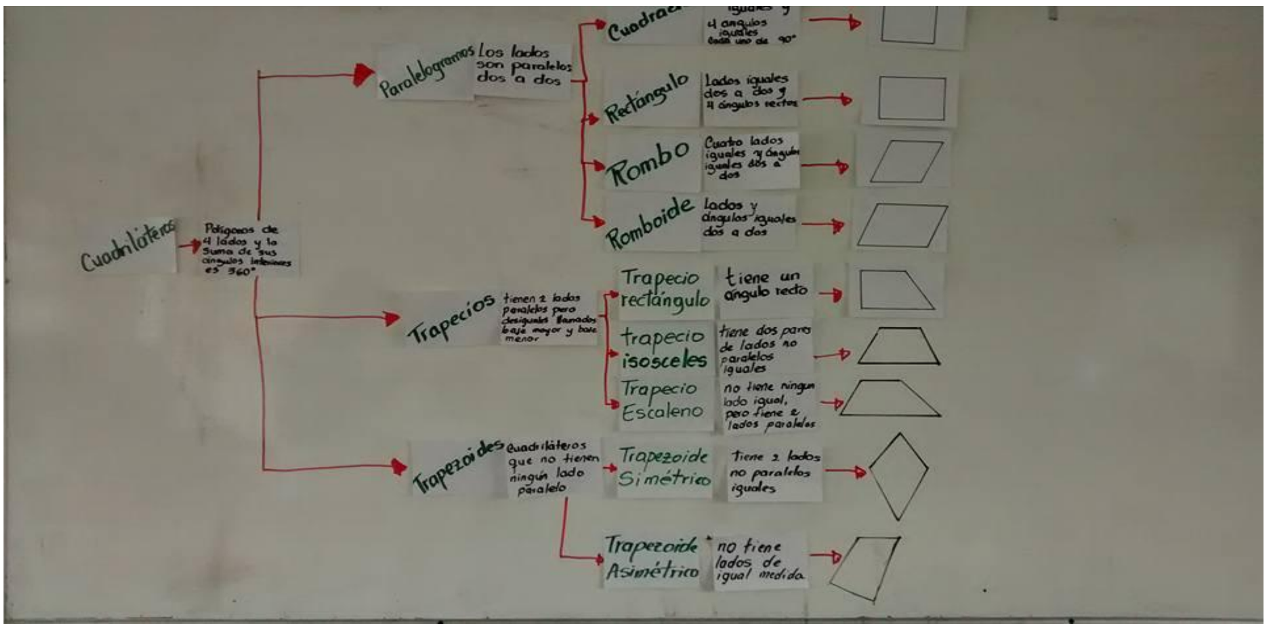


Ilustración No. 49: Mapa Conceptual sobre Cuadriláteros

Fuente: producción propia

Hasta esta parte de la secuencia didáctica basada en la situación problema se puede decir que hay un desarrollo del pensamiento espacial ya que los estudiantes manifiestan en cierto grado los dos tipos de competencias fundamentales para su construcción y desarrollo: la orientación y visualización. Tal como lo manifiesta Gutierrez y Bulla (2003), las competencias mencionadas implican la comprensión y funcionamiento de las relaciones entre posiciones en el espacio en donde se identifica el tamaño y forma de objetos a través de la manipulación activa del entorno, esto visto desde la orientación espacial, por su parte, la visualización espacial compromete habilidades de procesar y producir creaciones, interpretaciones, uso y reflexión de imágenes, dibujos y diagramas mentales en papel o en herramientas tecnológicas, con el proceso de comunicar información sobre el pensamiento y el desarrollo de ideas adquiridas con anterioridad (p.22).

Al momento de hacer la socialización se detecta en 6 estudiantes específicamente que la calidad de sus respuestas es mucho mejor que en el resto del grupo, por lo cual se les llama aparte y mediante una entrevista espontánea utilizando láminas sobre las características, diferencias y propiedades de los cuadriláteros se obtuvieron respuestas textuales como las siguientes por parte de ellos:

"Un rectángulo es un paralelogramo con lados iguales dos a dos y cuatro ángulos rectos, porque con un ángulo que se reduzca cambian los otros tres y se forma un romboide, o sea profesor que si aplasto un poquito un rectángulo se vuelve un romboide" (E4 – E14)

- *"Todos los trapecios tienen dos bases paralelas pero de distinto tamaño, eso es lo que al unirlos con los lados que no son paralelos hace que se parezcan a los techos de una casa" (E13 – E14 – E19 y E28)*
- *"Yo creía que si volteaba un cuadrado se volvía un rombo, por eso saqué mal la respuesta del primer cuestionario de geometría que me puso. Son parecidos porque mientras el cuadrado y el rombo tiene los lados iguales, pero el rombo tiene los ángulos iguales dos a dos" (E12 –E26)*

En estas respuestas se aprecia cómo los estudiantes, ya no solo describen las figuras por sus formas, o porque se asemejan con algo conocido, sino que describen los objetos a partir de sus propiedades, intentan utilizar más las definiciones matemáticas (paralelo, dos a dos), aunque también se ve algo de informalidad en los argumentos ("*yo creí que si se volteaba un cuadrado se volvía un rombo*" (E12), Estos argumentos dan pie para decir que estos estudiantes están entre el nivel de visualización y el de análisis o clasificación y desde las características de este segundo nivel respondieron, tal como lo define Caldera & Vargas (2016):

> *Es un nivel donde el estudiante relaciona los elementos básicos con una serie de propiedades del objeto geométrico que le permite realizar un análisis de lo que se está haciendo, los estudiantes analizan las partes o elementos que componen una figura geométrica y sus propiedades, por la observación de esas partes, puede deducir otras propiedades de las figuras, generalizándolas a las figuras de una determinada clase, y las deducciones y extensión de propiedades tienen un carácter informal. (p. 23)*

Esta parte de la entrevista no estaba contemplada en la guía de enseñanza, pero permitió determinar una de las conclusiones principales de esta investigación y es que después de aplicar una guía de enseñanza fundamentada en una situación problema, que parte de un diagnóstico, y está estructurada secuencialmente bajo un modelo adecuado, el resultado es que de los 30 estudiantes el 80% progresaron en el nivel de visualización y el 20% restante avanzaron al nivel de análisis del pensamiento geométrico.

Sin embargo, es importante tener en cuenta según las investigaciones de Leonor Camargo (Grupo de investigación de la universidad Pedagógica Nacional), Jaime y Gutiérrez (grupo de investigación en educación matemática de la universidad de Valencia) y Obando y Munera (Universidad de Antioquia) concluyen que el desarrollo del pensamiento espacial es de evolución lenta desde las formas intuitivas iniciales hasta las formas deductivas finales, y que este se evidencia en la formación de conceptos y de nuevas redes conceptuales asociándolas a la interpretación del mundo físico y a la solución de problemas. Por lo tanto aunque se mostró un desarrollo del pensamiento espacial en los estudiantes de grado séptimo, este requiere de un trabajo constante fundamentado en un modelo de enseñanza como el de Van Hiele que es, según los citados autores, el mejor referente para describir y trabajar el razonamiento geométrico sobre el cual descansa el pensamiento espacial.

CAPÍTULO 5

5.1. CONCLUSIONES

Al culminar este proceso investigativo se hallaron conclusiones valiosas para el desarrollo del pensamiento espacial. Estas se van a desglosar desde tres aspectos: el primero es definir las causas por las cuales los estudiantes de grado séptimo no se han acercado asertivamente al saber geométrico, el segundo es el estado real de los estudiantes frente al pensamiento espacial analizado bajo el referente teórico como es el *Modelo de Van Hiele y sus niveles de razonamiento*, y el tercero es la incidencia de las situaciones problema en su desarrollo:

a. **Causas por las que los estudiantes no han tenido un desarrollo óptimo del pensamiento espacial o saber geométrico.**

El desarrollo del pensamiento espacial cobra sentido cuando el saber geométrico se constituye en una herramienta para transformar e interpretar un mundo y un contexto que es eminentemente geométrico. La geometría ha sido considerada como uno de los pilares de formación académica y cultural del hombre, dada su aplicación en diversos contextos y su capacidad formadora del razonamiento lógico que contribuye a desarrollar en los estudiantes habilidades para visualizar, pensar críticamente, intuir, resolver problemas, conjeturar, razonar deductivamente, argumentar de manera lógica en procesos de prueba o demostración (Gamboa, 2009).

Desde el análisis del plan de estudios de las instituciones educativas del municipio de La Virginia se ve que poseen unos planes de área que están enfocados en el desarrollo de contenidos dejando de lado aspectos inherentes al quehacer matemático como son los procesos tanto de pensamiento como de actividad matemática, los niveles de desarrollo geométrico y las secuencias de aprendizaje para que los objetos matemáticos sean aprehensibles.

Así la aprehensión del saber geométrico y por consiguiente del desarrollo del pensamiento espacial se ve limitado a la exposición de una fórmula o un cálculo sin sentido, lo que trae consigo un aprendizaje momentáneo y que tiende a dejar a los estudiantes en su nivel más bajo Asimismo cuando se utilizan las situaciones problema para la enseñanza de la geometría se entendió que estas son sacadas "textualmente" de los textos de referencia, obviando los presaberes de los estudiantes, sus intereses y necesidades y el contexto tanto inmediato como social. Cuando una situación problema no se convierte en un detonador cognitivo, es decir que no involucra los conceptos a aprender, no representa un reto para el estudiante y no le permite utilizar sus conocimientos anteriores, no será de utilidad para abordar un objeto geométrico y por ende no desarrollará pensamiento espacial

b. Estado real de los estudiantes frente al pensamiento espacial.

La prueba de entrada o Test permitió determinar con certeza que el 99% de los estudiantes de grado séptimo de La Virginia se encuentran en el nivel de visualización o reconocimiento, según el *Modelo de Van Hiele* y solamente existe un 6.6% que "intentaban" hacer un acercamiento muy mínimo al nivel de análisis. Tanto Camargo (2003) como Jaime & Gutiérrez (1991) afirman que según el primer nivel de razonamiento geométrico éste se centra en consideraciones visuales de carácter estático y los objetos sobre los cuales se razona están referidos a conceptos básicos. Las figuras se agrupan porque tienen la misma forma pues se piensa sobre formas geométricas basándose en su apariencia, sin llegar a encontrar o ligar propiedades de éstas. Cabe decir que estas características se observaron explicitas en los estudiantes desde el análisis de los resultados de la prueba de entrada.

Este diagnóstico no es hecho por la mayoría de los docentes de las instituciones educativas de la Virginia, y si se tiene en cuenta que las características de los niveles de desarrollo geométrico son la secuencialidad y la especificidad del lenguaje, esto origina que sencillamente si el docente no conoce el estado en el cual se encuentran los estudiantes lo que hará es hablarles en un lenguaje que ellos no comprenden y que si las estrategias y recursos que utiliza no están correlacionados con el nivel de razonamiento de los estudiantes, no se dará un avance significativo en el aprendizaje de los objetos geométricos abordados y por ende del pensamiento espacial que se desarrolla a través de la creación de nuevas redes conceptuales.

De ahí las quejas de muchos estudiantes, que no entienden a sus maestros de matemáticas y menos a los libros de texto, ya que la mayoría de sus actividades vienen para los niveles de análisis y deducción.

c. Incidencia de las situaciones problema en el desarrollo del pensamiento espacial

Cuando se diseñó la secuencia didáctica fundamentada en la situación problema y el *Modelo de Van Hiele* lo que se hizo fue partir de los resultados que arrojó la prueba de entrada. Se creó una guía de actividades que partió de un problema que involucraba el contexto, el objeto de aprendizaje y a su vez vinculaba los presaberes de los estudiantes y su estado frente al nivel de desarrollo geométrico, utilizando un material que se pudiera manipular como son regletas y palillos de colores, fichas con imágenes, guías de trabajo con información precisa.

Esta guía fue planeada, desarrollada y analizada según las fases de aprendizaje propuestas y el resultado cualitativamente hablando fue una muy buena aprehensión del objeto geométrico "rectángulo, perímetro y área" así como de la clasificación de los cuadriláteros, observando en los estudiantes una mejor calidad en sus respuestas y argumentos, la descripción y agrupación de las figuras por sus formas y algunas propiedades, y el inicio a utilizar un lenguaje matemático.

Se pasó de tener estudiantes que concebían los triángulos y círculos como cuadriláteros a que ellos mismos propusieran diseños utilizando y diferenciando paralelogramos, trapecios y trapezoides.

Si se habla cuantitativamente se puede decir que de la muestra que era equivalente a 30 estudiantes seleccionados aleatoriamente de los grados séptimos de las instituciones educativas de La Virginia y que representan el total de la población, luego de pasar por el proceso descrito en la guía de enseñanza, se obtuvo que un 99% tuvieron progresos dentro de su nivel de pensamiento geométrico, representado en un 79.99 % que mejoraron en su nivel de visualización y un 20% que pasaron al nivel de análisis.

Ante la pregunta que orientó esta investigación sobre Cómo las situaciones problematizadoras contribuyen en el desarrollo del pensamiento espacial en los estudiantes de grado séptimo del municipio de la Virginia, se puede afirmar que en la medida que esta permita interactuar a los estudiantes y sus presaberes con el objeto matemático mediado por el docente desde el contexto, se generan procesos como la exploración activa, la observación participativa y el trabajo en equipo que conducen a la aparición de nuevos conocimientos. Así como lo afirma Moreno & Waldegg (2002) y Obando y Munera (2003) la situación problema se vuelve un detonador de la actividad cognitiva desplegando los procesos asociados a la matemática convirtiéndose en una vía para fundamental para formación de conceptos. Cuando una nueva red conceptual aparece se dice que hay un desarrollo del pensamiento espacial.

5.2. RECOMENDACIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

A continuación se presentan algunas recomendaciones que con base en esta experiencia investigativa, pueden ser de utilidad para los docentes en los centros educativos como medios para conducir al razonamiento geométrico:

- Iniciar con el diagnóstico del nivel de pensamiento espacial que tienen los estudiantes. Para ello se elige un objeto matemático del cual los estudiantes tengan saberes previos, que se necesite trabajar y se elabora una prueba o cuestionario basado en varios niveles de razonamiento geométrico y pensamiento espacial, donde las respuestas indiquen en qué estado se hallan.

- Con base en los resultados del diagnóstico se planea una secuencia didáctica fundamentada en las fases de aprendizaje del *Modelo Van Hiele*. Esta secuencia debe partir de una situación problema que involucre el objeto matemático a trabajar, sea contextualizada, pertinente y disponga de un material didáctico que se pueda manipular y así se llegue a la construcción del concepto. Ya se ha mencionado la influencia del lenguaje y la secuencialidad de los niveles de desarrollo geométrico por lo cual es de suma importancia estructurar una secuencia que tenga en cuenta los aspectos anteriormente descritos.
- Hay que generar estrategias que faciliten el trabajo en equipo, el diálogo entre pares, la búsqueda común a la solución del problema planteado. Durante el desarrollo de la guía deben existir actividades que entrelacen los saberes matemáticos como lo son los mapas conceptuales, ítems de relación, identificación y clasificación.
- Se debe estar muy pendiente del diálogo, actuaciones y apreciaciones de los estudiantes, éstos permiten replantear actividades y dan luces sobre su progreso.

Existen varios estudios en educación matemática, en enseñanza y aprendizaje de la geometría y en desarrollo del pensamiento espacial y dado que esta investigación partió de la observación del desempeño de los estudiantes, queda abierta la discusión y reflexión para buscar nuevas alternativas que faciliten no solo su enseñanza y aprendizaje sino también el desarrollo del pensamiento espacial mediante otras situaciones problema teniendo en cuenta las condiciones del contexto. De otro lado se pueden aprovechar los resultados para que un futuro investigador profundice en la influencia del discurso que utiliza el docente en el desarrollo del pensamiento espacial, o bien, cómo una estrategia fundamentada en las situaciones problema y el *Modelo de Van Hiele* puede ayudar a niños con necesidades educativas especiales dentro del municipio de La Virginia.

Este estudio sobre la mediación de las situaciones problemas se puede utilizar para hacer análisis sobre cómo estas inciden en el pensamiento matemático en general, es decir, se pueda detectar como se desarrolla pensamiento variaciones, aleatorio y métrico que son en muchas ocasiones los más relegados de la actividad matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARBOLEDA, A. (2011). Desarrollo del pensamiento espacial y sistema geométrico en el aprendizaje de los sólidos regulares mediante del modelo del Van Hiele, con los estudiantes de sexto grado del Colegio San José de la comunidad marista. 12 Encuentro colombiano de matemática educativa. Universidad del Quindío pp.40-47

ASOCOLME (2003). Tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la geometría. Asociación colombiana de matemática educativa p.9

BARRANTES, M, BALLETBO, I y FERNÁNDEZ, M (2014). Enseñar geometría en secundaria. Congreso Iberoamericano de ciencia, tecnología, innovación y educación. Buenos Aires, noviembre del 2014

BEDOYA,J y ESTEBAN, P (2007). Fases de d aprendizaje del modelo educativo de van Hiele y su aplicación al concepto de aproximación local. Lecturas matemáticas volumen 28. pp. 77- 95. Universidad de Antioquia

CALDERA, Y y VARGAS, J. (2016): Comprensión de los cuadriláteros con apoyo del software geogebra en el marco del modelo de Van Hiele en el grado séptimo. Medellín, Universidad de Antioquia.

CAMARGO, L. (2002): La construcción de conceptos: una actividad importante para desarrollar razonamiento en geometría. Revista EMA vol.7. pp. 293-309

CAMARGO, L y SAMPER, C. (2003). Desarrollo del razonamiento deductivo a través de la geometría euclidiana. Universidad Pedagógica Nacional pp.1-10.

FOLGUEIRAS, P. (2013). Metodología de la investigación p. 43

GARCIA, M; FRANCO, F y GARZON, D. (2006). Didáctica de la geometría euclidiana: conceptos básicos para el desarrollo del pensamiento espacial. Cooperativa Editorial Magisterio. Bogotá

GODINO, J. d.; BATANERO, C; FONT, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. Granada, universidad de Granada.

GUTIÉRREZ, A (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. Revista EMA vol.3 pp.193-220.

GUTIÉRREZ, R y BULLA, J. (2013). Desarrollo del pensamiento espacial: una propuesta de aula en el campo de la geometría descriptiva. Universidad distrital Francisco José de Caldas.

GUZMÁN, M. (2007): Enseñanza de las ciencias y la matemática. Revista Iberoamericana de Educación, n.º 43, pp. 19-58, Madrid. Recuperado de http://www.rieoei.org/rie43a02.htm

JAIME, A. (1993). Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento. Tesis doctoral. Universidad de Valencia

JAIME, A y GUTIERREZ, Á (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el Modelo de Van Hiele en secundaria. pp. 2 - 87.

JAIME, A y GUTIERREZ, Á (1991). El modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la geometría. Un ejemplo: los giros. Revista Educación matemática vol.3. p.50

JAIME, A y GUTIERREZ, Á (2011). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. Universidad de Valencia.

JOYA, A. (2007): Nuevas matemáticas 7 edición para el docente. Editorial Santillana. Pp. 6-48, 143-184.

MAGUIÑA, A. (2013): Una propuesta didáctica para la enseñanza de los cuadriláteros basada en el modelo Van Hiele. Pontificia Universidad Católica del Perú.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN DE EL SALVADOR (2013). Matemática sexto grado de educación básica, versión preliminar. pp. 22-25. Recuperado de https://sites.google.com/site/autoformaciondocente2013/materiales-de-autoformacion-e-innovacion-docente

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. [MEN] (1998). Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas. Serie Lineamientos. Áreas Obligatorias y Fundamentales. Bogotá: Creamos Alternativas.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. [MEN] (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas ciencias y ciudadanas. Enlace Editores Ltda: Bogotá.

MORALES, C y MAJE, R (2011): Competencia matemática y desarrollo del pensamiento espacial. Una aproximación desde la enseñanza de los cuadriláteros. Universidad de la Amazonia.

MORENO, L y WALDEGG, G. (2002). Fundamentación cognitiva del currículo en matemáticas. México: Seminario nacional de formación de docentes pp. 40-66.

OBANDO, G y MÚNERA, J. (2003). Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática. Revista Educación y pedagogía. Medellín, Universidad de Antioquia vol. XV pp.185-199.

PIEDRAHITA, W y LONDOÑO, J (2009): la enseñanza de la geometría con fundamento en la solución de problemas cotidianos, una propuesta metodológica orientada por el modelo de Van Hiele aplicada a estudiantes de la I.E Rafael J. Mejia del municipio de Sabaneta Antioquia. Universidad de Manizales

RICO, L (1990): Didáctica de la matemática y la investigación. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/510/1/RicoL00-138.

VARGAS Vargas, Gilberto (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. UNICIENCIA Vol. 27, No. 1, [74-94]. Recuperado de http://www.revistas.una.ac.cr/uniciencia.

VILCHEZ, N. (2007). Enseñanza de la geometría con utilización de recursos multimedia. Aplicación a la primera etapa de educación básica. Tesis doctoral. Universidad pública de Tarragona España.

ANEXOS

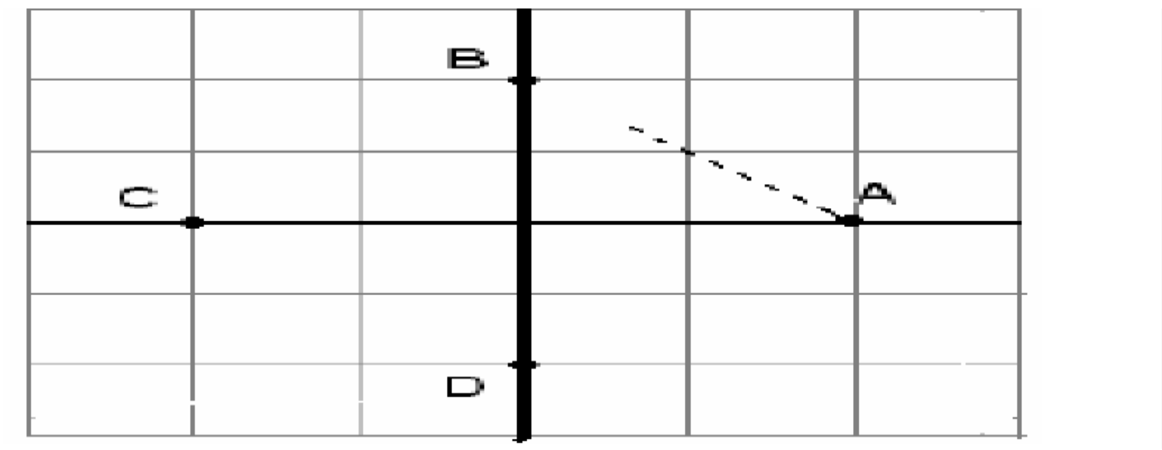
ANEXO A: ***Test Para Determinar El Nivel Geométrico.***

Grado séptimo, municipio de la Virginia.
Nombre completo____
Institución Educativa____

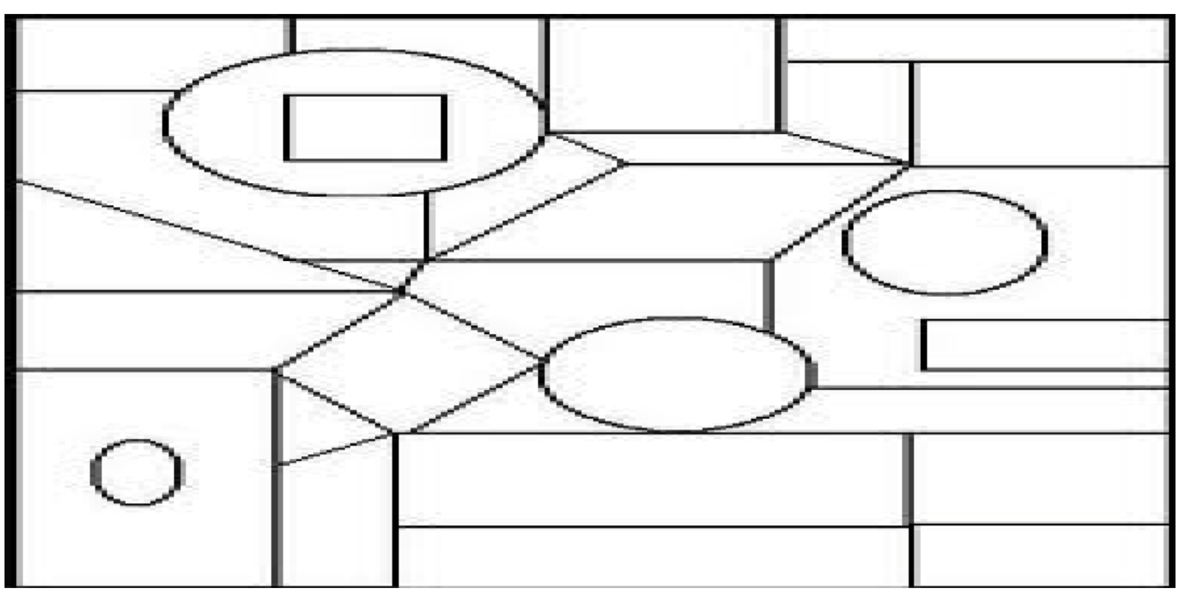
Instrucciones:

Lea con mucha atención antes de responder cada pregunta. Para resolver esta prueba usted debe recurrir a sus saberes previos de geometría que posee.

1. Al unir en forma consecutiva con una línea recta los puntos A, B, C, D y A. ¿Qué tipo de cuadrilátero se forma? Justifique su respuesta.



2. En la figura que se muestra a continuación encontrará 16 cuadriláteros. Asígnele un número diferente a cada una de ellas y luego agrupe estos números según el tipo de cuadrilátero al que pertenezca.

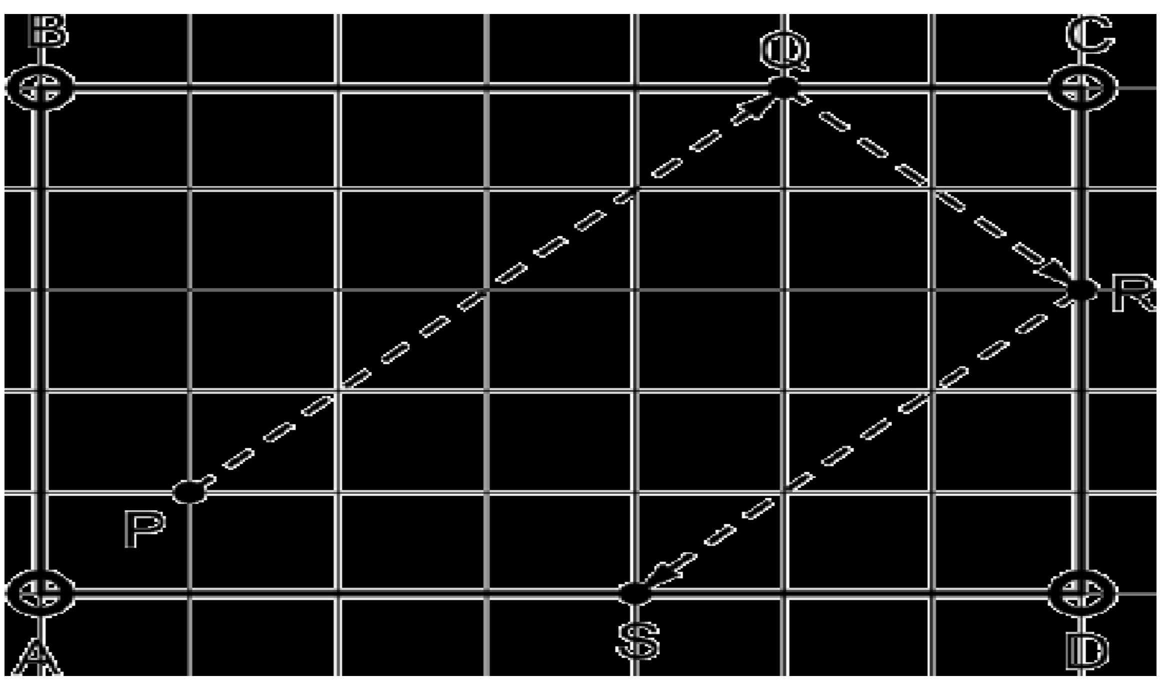


3. Tomás dice: *"Tengo un cuadrilátero que tiene cuatro ángulos rectos y sus lados opuestos de igual medida".* ¿Qué tipo de cuadrilátero tiene Tomás? Justifique su respuesta.

4. Matilde debe elegir cuatro palitos para construir un paralelogramo. ¿Cuáles son los palos que debe elegir Matilde para formar el paralelogramo? Justifique su respuesta.

5. Si ABCD es un rombo, y M, N, P y Q son los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente, ¿qué tipo de cuadrilátero es MNPQ? Justifique su respuesta.

6. Observe la mesa de billar que se muestra a continuación. Se sabe que el recorrido de la bola es a través de las diagonales de los cuadrados. La bola se encuentra, inicialmente, en el punto P y al golpearla se dirige hacia el punto Q, este rebota sobre la banda BC y se dirige hacia el punto R, y así sucesivamente, hasta llegar al agujero ubicado en C.



a. ¿Qué tipo de cuadrilátero se forma al unir en forma consecutiva el punto de partida, el primer, segundo y tercer punto donde ocurre el rebote? Justifique su respuesta.

b. ¿El cuadrilátero que se forma al unir en forma consecutiva los puntos donde ocurren el segundo, cuarto, sexto y octavo rebote es un trapecio isósceles? Justifique su respuesta.

c. ¿Qué tipo de cuadrilátero se forma al unir en forma consecutiva los puntos donde ocurren el cuarto, octavo, séptimo y tercer rebote? Justifique su respuesta.

7. En un trapecio isósceles ABCD, con AB = CD, se ubican los puntos M, N, P y Q, que son los puntos medios de los lados AB, BC, CD y AD , respectivamente. ¿Qué figura se forma al unir en forma consecutiva los puntos M, N, P y Q?

8. Analice el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Si es verdadera, presente una prueba y si es falsa, muestre un contraejemplo.

   a. Si un paralelogramo tiene un ángulo recto, es un cuadrado.

   b. Todo cuadrilátero tiene por lo menos un par de lados opuestos paralelos.

9. Dados los segmentos AC y BD, los cuales se interceptan en N. Si AN = BN y CN = DN , ¿qué tipo de cuadrilátero es ABCD? Explique su respuesta.

10. José acaba de construir el jardín de su casa que tiene la forma de un paralelogramo y desea cercarlo. Para ello, cuenta con 32 m de alambre, pero se acaba de percatar que quizás la cantidad de alambre que tiene no será suficiente. Se sabe que uno de los lados del jardín coincide con el largo de la fachada de la casa, que mide 10 m, y la distancia que existe entre el largo de la casa y la acera es 6 m. ¿Podrá José cercar el jardín que acaba de construir?

ANEXO B: Guía De Enseñanza Número 1

Grado séptimo (*dirigida a todas las instituciones que ofrecen grado séptimo)*

Tema: rectángulos: perímetro y área

Fase 1: discernimiento o información.

Situación problema: Reparación del salón de clases.

Con el fin de llevar una reparación al salón de clases, el colegio al que perteneces necesita tu ayuda que consiste en poner en juego tus saberes geométricos. Para ello, debes calcular el perímetro y el área del piso de tu salón para luego calcular qué cantidad de materia se requiere para su reestructuración. Además se quiere innovar en el diseño del piso y para ello se desea poner baldosas de forma de cuadrilátero. ¿Cómo calcularías el perímetro y área del salón, además, qué diseño propondrías para el embaldosado?

Saberes previos:

El docente mediante un diálogo llevará a los estudiantes a que comenten sobre que saberes previos tienen sobre el tema, qué forma tiene el salón de clases, y luego preguntará concepciones sobre los siguientes conceptos:

Angulo

Lado

Perímetro

Área

Paralelogramo

Trapecio

Rombo

Cuadrado

Rectángulo

Cada estudiante anotará en su cuaderno de apuntes sus definiciones sobre los conceptos anteriores.

Luego se realizará un juego de palabras donde se relacionará el objeto matemático con su respectiva definición.

Fase 2: Orientación dirigida

Creación de cuadriláteros:

Previamente se alistará un material que consiste en regletas y palitos de colores para que en grupos de cinco estudiantes ordenen las regletas y palitos con el fin de formar distintos tipos de cuadriláteros. Cada cuadrilátero formado debe llevar el nombre adecuado, según crean los estudiantes, haciendo inferencias en qué se diferencia cada cuadrilátero de los demás. Este trabajo se dejará ordenado en una mesa o escritorio(es decir no se desbaratará) para luego comparar y hacer adecuaciones al leer la síntesis conceptual.

Lectura de la síntesis conceptual

¿Qué son los cuadriláteros?

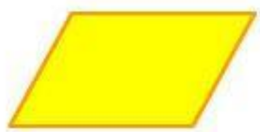
Los cuadriláteros son polígonos de cuatro lados y la suma de sus ángulos interiores es igual a 360°.

Clasificación de cuadriláteros

Los cuadriláteros tienen tres clasificaciones principales: paralelogramos, trapecios y trapezoides.

Paralelogramos

Son los cuadriláteros que tienen los lados paralelos dos a dos. Se clasifican en:

	Paralelogramos	
	Figura	Descripción
Cuadrado		Tiene los 4 lados iguales y los 4 ángulos rectos.
Rectángulo		Tiene lados iguales dos a dos y los 4 ángulos rectos.
Rombo		Tiene los cuatro lados iguales.
Romboide		Tiene lados iguales dos a dos.

Trapecios
Cuadriláteros que tienen dos lados paralelos, llamados base mayor y base menor. Se clasifican en:

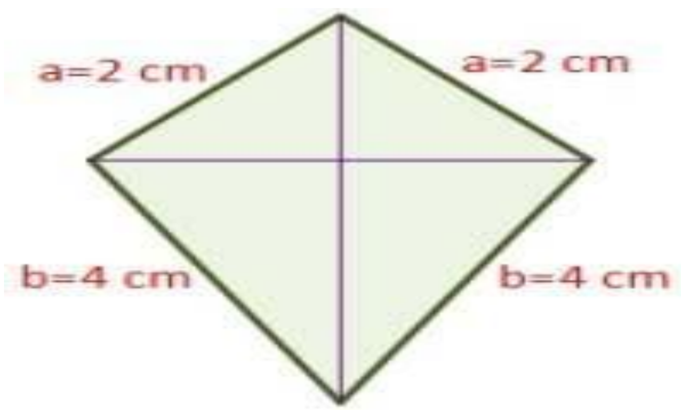
	Trapecios	
	Figura	Descripción
Trapecio rectángulo		Tiene un ángulo recto.
Trapecio isósceles		Tiene dos lados no paralelos iguales.
Trapecio escaleno		No tiene ningún lado igual ni ángulo recto.

Trapezoides

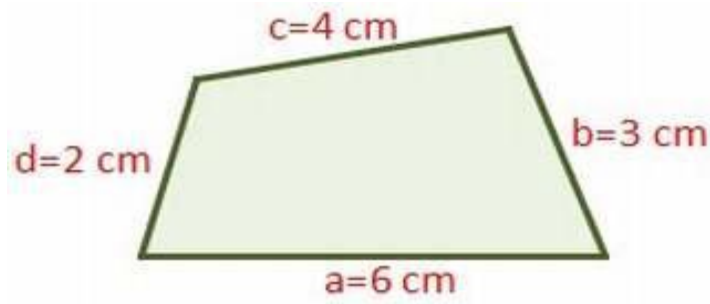
Son cuadriláteros que no tienen ningún lado paralelo.

Existen dos tipos de trapezoides:

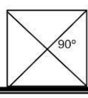
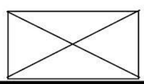
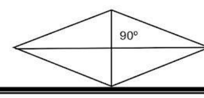
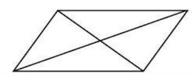
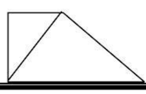
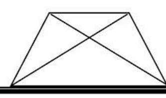
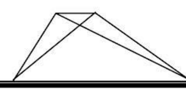
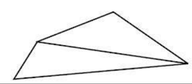
- **Trapezoide simétrico**: tiene dos pares de lados de igual medida.



- **Trapezoide asimétrico**: no tiene lados de igual medida.



A continuación encontrarás un cuadro que resume las principales características de los cuadriláteros

CUADRILÁTEROS: Polígonos de 4 lados y 4 vértices cuyos ángulos suman 360º.			
PARALELOGRAMOS: Lados paralelos dos a dos (2 pares de lados paralelos).			
CUADRADO	**RECTÁNGULO**	**ROMBO**	**ROMBOIDE**
▪ 4 lados iguales. ▪ 4 ángulos de 90º. ▪ Diagonales: – Iguales – Perpendiculares – Se bisecan	▪ Lados iguales 2 a 2. ▪ 4 ángulos de 90º. ▪ Diagonales: – Iguales – Oblicuas – Se bisecan	▪ 4 lados iguales. ▪ 4 ángulos distintos de 90º. ▪ Diagonales: – Desiguales – Perpendiculares – Se bisecan	▪ Lados iguales 2 a 2. ▪ Ángulos iguales 2 a 2. ▪ Diagonales: – Desiguales – Oblicuas – Se bisecan
			
TRAPECIOS: Dos lados paralelos (Un par de lados paralelos).			**TRAPEZOIDES:** No tiene lados paralelos.
TRAPECIOS RECTÁNGULOS	**TRAPECIOS ISÓSCELES**	**TRAPECIOS ESCALENOS**	
▪ 2 lados paralelos. ▪ 2 ángulos de 90º. ▪ Diagonales: – Desiguales – Oblicuas – No se bisecan	▪ 2 lados paralelos. ▪ Áng. iguales 2 a 2. ▪ Diagonales: – Iguales – Oblicuas – No se bisecan	▪ 2 lados paralelos. ▪ 4 ángulos desiguales. ▪ Diagonales: – Desiguales – Oblicuas – No se bisecan	▪ Ningún lado paralelo. ▪ 4 ángulos desiguales. ▪ Diagonales: – Desiguales – Oblicuas – No se bisecan
			

El perímetro de un cuadrilátero

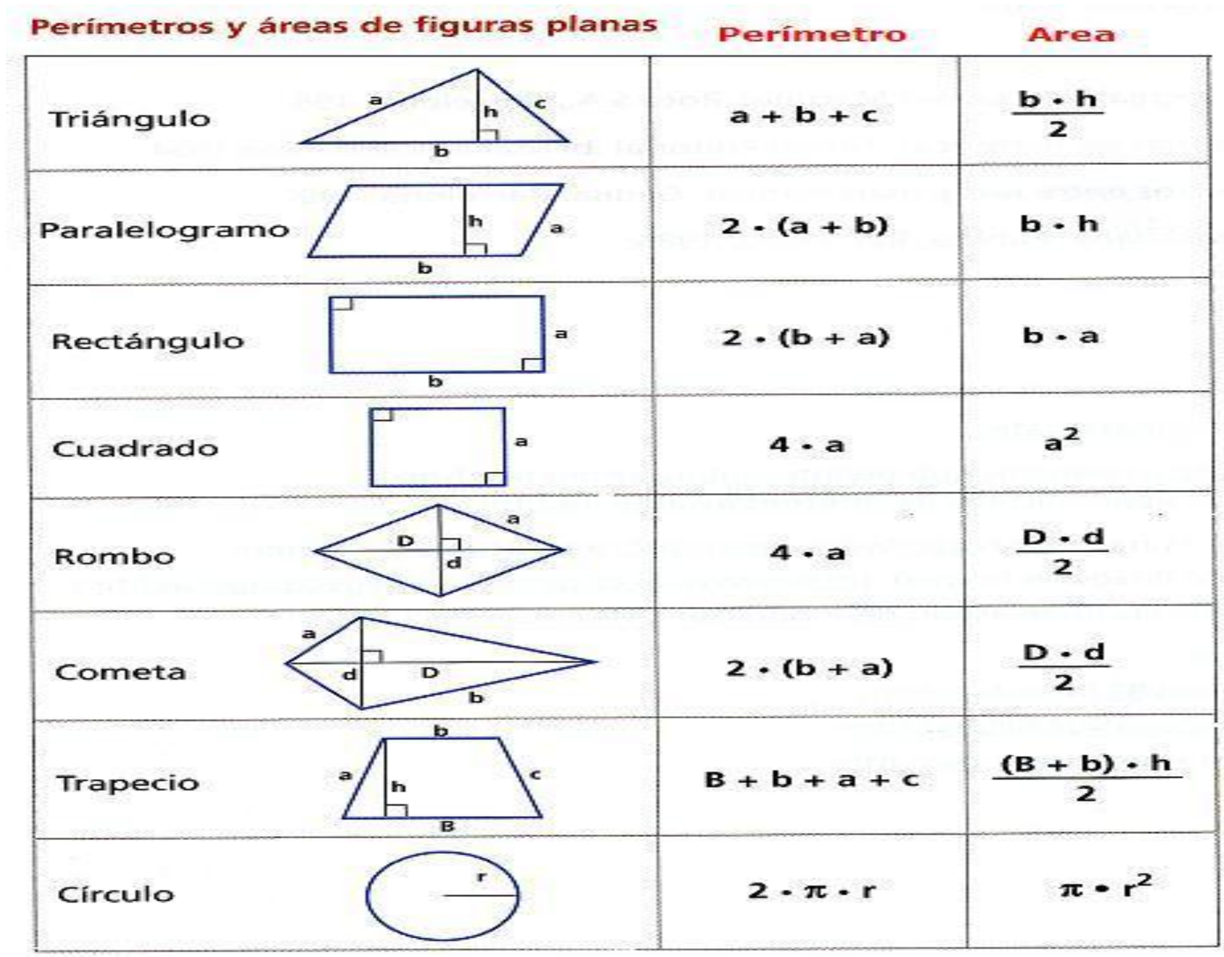
El perímetro de un cuadrilátero es la longitud de la línea cerrada que lo bordea, es decir, la suma de las longitudes de sus cuatro lados.

El área de un cuadrilátero

A la medida de la extensión de la superficie de un cuadrilátero, es decir, de la porción del plano limitada por la línea cerrada que lo determina se llama área del cuadrilátero. Las unidades de superficie del sistema métrico decimal es el **metro cuadrado** (m^2) y sus **múltiplos**: decámetro cuadrado (Dm^2), hectómetro cuadrado (hm^2) y kilómetro cuadrado (km^2) y **submúltiplos**:

decímetro cuadrado (dm^2), centímetro cuadrado (cm^2) y milímetro cuadrado (mm^2), según el tamaño del cuadrilátero que queramos medir.

Para calcular el área y el perímetro de los cuadriláteros solo basta con recordar las características de cada uno de ellos, además nos podemos apoyar en el uso del siguiente cuadro sinóptico que recoge las fórmulas y perímetros de algunas regiones planas



Perímetros y áreas de figuras planas	Perímetro	Area
Triángulo	$a + b + c$	$\frac{b \cdot h}{2}$
Paralelogramo	$2 \cdot (a + b)$	$b \cdot h$
Rectángulo	$2 \cdot (b + a)$	$b \cdot a$
Cuadrado	$4 \cdot a$	a^2
Rombo	$4 \cdot a$	$\frac{D \cdot d}{2}$
Cometa	$2 \cdot (b + a)$	$\frac{D \cdot d}{2}$
Trapecio	$B + b + a + c$	$\frac{(B + b) \cdot h}{2}$
Círculo	$2 \cdot \pi \cdot r$	$\pi \cdot r^2$

Fase 3: explicitación

Cada grupo de cinco estudiantes revisará el trabajo que realizó con las regletas y palillos haciendo las adaptaciones necesarias. Luego se socializarán las características y clasificaciones de los diferentes cuadriláteros, haciendo énfasis en el rectángulo, donde cada grupo de estudiantes dará sus aportes. El docente orientará el proceso haciendo un ejercicio de transposición didáctica y teniendo cuidado en el uso del lenguaje, dando una segunda leída si es necesario a la síntesis conceptual y haciendo preguntas orientadoras por ejemplo: ¿En qué se diferencia un cuadrado de un rombo? ¿Qué tipo de trapecios existen? ¿Cómo calcular el área y perímetro de un rectángulo?

Con la información obtenida cada grupo elegirá qué cuadrilátero necesita para calcular el área y perímetro del piso del salón de clases.

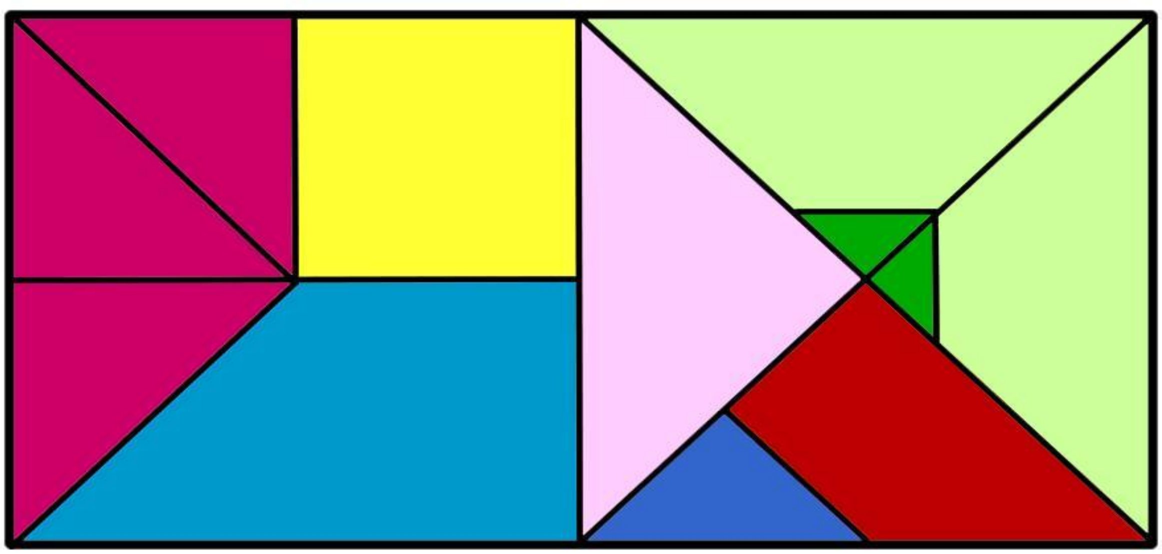
Fase 4: orientación libre

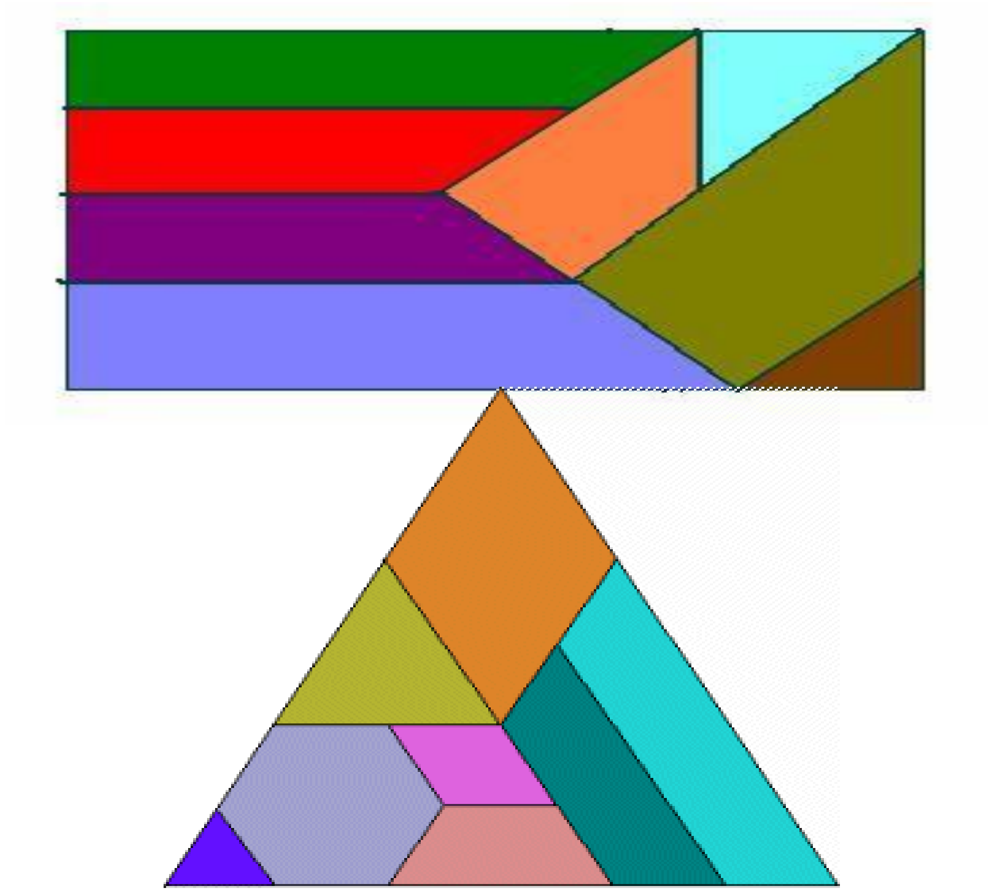
Cada estudiante resuelve el problema del perímetro y área del salón de clases, luego se reúnen los mismos grupos de 5 estudiantes para socializar la respuesta el problema planteado inicialmente:" ¿Cómo calcularías el perímetro y área del salón, además, qué diseño propondrías para el embaldosado?".(Se sabe de antemano que el piso del salón tiene unas dimensiones de 6m de largo por 4m de ancho).

Luego de terminada la actividad cada grupo socializará la manera de cómo calculó el perímetro y el área del piso del salón además de dar justificaciones del diseño que utilizó para embaldosarlo. Para ello recreará el diseño del embaldosado con un gráfico.

Solución de otros problemas

Identificar en los siguientes diseños todos los cuadriláteros utilizando códigos como números y colores





Calcular el área y el perímetro de los siguientes rectángulos. Para ello debes apoyarte de un gráfico de medidas reales.

- Base: 4.5 cm ; altura: 7.2cm
- Base :9cm ; altura : las dos terceras partes de la base
- Base:tres cuartas partes de la altura; altura: 8cm
- Base: 7.9 cm ; altura: 9.6cm

Fase 5: Integración

Los estudiantes repasarán y sintetizarán lo aprendido con el objeto de unificar e interiorizar las nuevas redes de objetos y relaciones. Se tratará de que los estudiantes hagan inferencias sobre cómo se calcula el área y el perímetro de otros cuadriláteros diferentes al rectángulo que era el objeto de aprendizaje de esta guía de enseñanza. Para sintetizar lo aprendido se construirá un mapa conceptual como el siguiente en el tablero