

Università degli Studi di Padova

---

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA "GALILEO GALILEI"  
CORSO DI LAUREA IN FISICA

**Meccanica quantistica supersimmetrica  
e sue applicazioni**

Relatore:  
**Prof. Roberto Volpato**

Laureando:  
**Chiara Veronese**

---

Anno Accademico 2016-2017



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>1 Proprietà dell'algebra supersimmetrica</b>	<b>9</b>
<b>2 Formulazione Hamiltoniana della MQ supersimmetrica</b>	<b>13</b>
2.1 Relazione tra autostati di $H_1$ e $H_2$ . . . . .	15
2.2 Esempio: oscillatore armonico 1D . . . . .	18
<b>3 Rottura di Supersimmetria</b>	<b>19</b>
<b>4 Fattorizzazione e gerarchia degli Hamiltoniani</b>	<b>21</b>
<b>5 Invarianza in forma e potenziali risolvibili</b>	<b>25</b>
5.1 Esempio applicativo . . . . .	27
5.1.1 Oscillatore armonico 3D . . . . .	27
5.1.2 Atomo di idrogeno . . . . .	32
<b>Conclusione</b>	<b>35</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>38</b>



# Introduzione

La simmetria è un concetto portante della fisica teorica. Soltanto agli inizi del novecento, assunse un rigoroso formalismo matematico, quando il teorema di Noether [1] mise in luce il legame esistente tra simmetrie in un sistema fisico e quantità conservate.

Le teorie moderne, comprese le teorie di campo quantistiche, si sono sviluppate anche sulla base della ricerca di queste simmetrie.

Esse possono essere distinte in due grandi classi: le simmetrie spazio-temporali, o esterne, e le simmetrie interne. Le prime coinvolgono cambiamenti delle coordinate dello spazio di Minkowski; si riconducono al gruppo di trasformazioni di Poincaré, che si suddivide in simmetrie continue (trasformazioni del gruppo ristretto di Lorentz) e discrete, le rimanenti. Le simmetrie interne vanno invece ad agire nello spazio dei campi. Esse si distinguono a loro volta in globali e locali, o di gauge.

Le simmetrie di gauge sono state fondamentali per la costruzione delle teorie alla base delle interazioni fondamentali. L'invarianza delle leggi fisiche sotto trasformazioni di gauge comporta la comparsa, nella Lagrangiana, dei campi di gauge dell'interazione, rappresentabili attraverso bosoni mediatori.

L'ipotesi che tutte le simmetrie, comprese quelle spazio-temporali, rendessero invarianti le Lagrangiane associate alle interazioni fondamentali venne presto negata dai dati sperimentali<sup>1</sup>, conducendo alla costruzione dell'attuale Modello Standard.

La supersimmetria, come simmetria tra particelle bosoniche e fermioniche, fu introdotta nei primi anni '70 da Golfand e Liktman [2], e rielaborata nei lavori di diversi gruppi di teoria delle stringhe.

Venne ampiamente riconosciuta quando fu generalizzata in un modello a quattro dimensioni da Wess e Zumino [3].

La formulazione supersimmetrica si inserisce in un contesto di ricerca di estensione massimale del gruppo di simmetria di una teoria di campo, ovvero l'insieme di trasformazioni che rende invariante la Lagrangiana associata alla teoria in analisi.

L'interrogativo che ci si pone è relativo all'esistenza di un gruppo esteso che comprenda gruppi di simmetria esterni, e interni.

A tal proposito entra in gioco il teorema di Coleman e Mandula [4]. Nell'articolo citato si afferma l'impossibilità di trovare un gruppo esteso che coniughi simmetrie interne e spazio-temporali. E tuttavia la supersimmetria fornisce la risposta alla ricerca di un tale gruppo, aggirando questo teorema grazie ad un'algebra di anticommutatori anziché di

---

<sup>1</sup>Si prenda come esempio la violazione della parità, esperimento di Wu del 1957

commutatori.

È questa proprietà di combinare le due tipologie di simmetrie che la rende interessante nell'intento di unificare particelle elementari e forze che occorrono tra esse, rivelando una simmetria tra bosoni e fermioni.

La supersimmetria si propone, dunque, come teoria naturale volta alla costruzione di uno schema unificatore, in grado di fornire delle risposte a questioni lasciate aperte da altri modelli.

La teoria supersimmetrica porta in sé risultati di importanza fondamentale. Le correzioni apportate dalla supersimmetria portano, infatti, a una migliore convergenza ad alte energie delle costanti di accoppiamento del modello standard.

In teorie di campo viene, perciò, subito ritenuta chiave fondamentale nel percorso che coinvolge l'unificazione della gravità con le altre forze fondamentali. I modelli corrispondenti prendono il nome di supergravità, e si caratterizzano come estensioni della relatività generale.

Ovviamente questi risultati possono essere convalidati solo alla luce del dato sperimentale che tutt'ora non è stato evidenziato.

La supersimmetria dovrebbe infatti tradursi nell'osservazione dei partner supersimmetrici, bosonici o fermionici, delle particelle coinvolte nell'attuale modello. L'assenza di osservazioni, fino alle scale energetiche dei pochi Tev, di particelle supersimmetriche porta ad affermare che questa non sia una simmetria reale della natura.

L'ipotesi prevede, dunque, che la supersimmetria esista come simmetria rotta spontaneamente, non immediatamente osservabile.

La proposta supersimmetrica produce importanti risultati in problemi di meccanica quantistica non relativistica.

L'applicazione del modello supersimmetrico in ambito quantistico è finalizzato alla comprensione più accurata dei meccanismi che comportano la rottura di supersimmetria. I risultati sono poi fondamentali per una trasposizione nello spettro più ampio della teoria quantistica dei campi. Tuttavia si rivela immediatamente interessante come studio in sé. L'introduzione dell'algebra supersimmetrica in MQ è volta alla comprensione dei metodi di risoluzione analitica del problema agli autovalori per sistemi Hamiltoniani. Nella trattazione supersimmetrica vengono infatti ripresi i metodi di fattorizzazione già precedentemente studiati da Schrödinger [5, 6, 7] negli anni '40, o da Infeld e Hull [8] negli anni '50.

Con l'introduzione nel 1983, da parte di Gendenshtein [9], del concetto di potenziali invarianti in forma, la risoluzione di problemi esatti in ambito quantistico diventa quasi immediata.

Ne deriva una proficua stagione di studio, ad oggi in corso d'opera. Questa ha permesso di capire più approfonditamente il motivo per cui equazioni agli autovalori siano analiticamente risolvibili per Hamiltoniani con determinati potenziali. Ha condotto alla scoperta di nuovi potenziali esattamente risolvibili, oltre che suggerire la trattazione di problemi non esattamente risolubili, con l'utilizzo di efficaci metodi di approssimazione che implementano il metodo WKB.

Lo studio supersimmetrico si è, inoltre, rivolto alla ricerca di una possibile classificazione dei potenziali e delle classi invarianti in forma. Si è giunti quindi ad una suddivisione secondo trasformazioni che coinvolgono la traslazione o il riscaldamento dei parametri coinvolti nei potenziali.

È comunque ad oggi irrisolta una classificazione completa del problema.

Entriamo, dunque, nel merito dello sviluppo della tesi.

Lo scopo di questa è descrivere una risoluzione di problemi di equazioni agli autovalori, con potenziali esatti, attraverso l'analisi di concetti basati sulla meccanica quantistica supersimmetrica: potenziali partner, condizioni di invarianza in forma e trasformazioni tramite operatori.

Il primo capitolo contiene un'introduzione all'algebra supersimmetrica e a quelle che sono le proprietà fondamentali che la caratterizzano sia in ambito puramente quantistico e sia, con accenni non rigorosi, in teoria di campo. In particolare saranno introdotti gli operatori caratteristici di questa simmetria, con le opportune regole di commutazione e anticommutazione.

È importante considerare come la simmetria tra bosoni e fermioni sia prerogativa della supersimmetria nell'ambito delle teorie di campo. L'analogo formale in meccanica quantistica non-relativistica di tale suddivisione si rispecchia nella decomposizione dello spazio di Hilbert in due sottospazi, i cui rispettivi stati sono mappati l'uno nell'altro dagli operatori supercariche.

Molte delle proprietà che si possono trarre dal problema supersimmetrico sono le medesime assunte in teoria di campo, nonostante ovviamente le conclusioni e gli ambiti di studio conseguenti siano profondamente diversi.

L'algebra appena introdotta, in un secondo capitolo, viene applicata nell'ambito della meccanica quantistica non relativistica, ponendo attenzione al processo di fattorizzazione di un problema a potenziale unidimensionale.

L'approccio generale ci permette di affrontare i casi specifici e più particolari che seguono nei capitoli successivi. La ricerca di un Hamiltoniano partner, che andremo poi a definire, permette di trovare quelle che sono le relazioni fondamentali che caratterizzano l'algebra supersimmetrica. Sviluppiamo, quindi, il metodo nel semplice esempio dell'oscillatore armonico unidimensionale.

Procediamo spiegando cosa implichi, a livello di autostato fondamentale, la rottura di supersimmetria.

Nel quarto capitolo giungiamo nel pieno della trattazione della fattorizzazione, è qui centrale la costruzione di una gerarchia di Hamiltoniani per l'introduzione del capitolo chiave riguardante i potenziali invarianti in forma.

Infine applichiamo quanto studiato all'esempio dell'oscillatore armonico 3D e dell'atomo di idrogeno, le cui soluzioni sono derivate esclusivamente tramite semplici operazioni algebriche.





# Capitolo 1

## Proprietà dell'algebra supersimmetrica

Una teoria supersimmetrica è una teoria in cui è definita una simmetria tra bosoni e fermioni. In essa si introducono degli operatori  $Q_i$  con  $i = 1, \dots, N$ , generatori della simmetria, che mappano le particelle fermioniche in quelle bosoniche e viceversa. Nelle seguenti relazioni si identifica quindi la proprietà principale della supersimmetria nell'ambito della teoria dei campi:

$$Q_i |fermione\rangle = |bosone\rangle \quad Q_i |bosone\rangle = |fermione\rangle. \quad (1.1)$$

Presentiamo ora una serie di proprietà che accomunano tutti i modelli supersimmetrici. Dal momento che  $Q_i$  sono i generatori di simmetria, essi commutano con l'operatore Hamiltoniano. Più in generale sono invarianti sotto traslazioni, commutando anche con l'operatore momento

$$[Q_i, H] = 0. \quad (1.2)$$

L'algebra supersimmetrica rispetta, poi, una seconda condizione. Infatti, si richiede che  $Q_i^2$  sia una combinazione lineare dell'operatore Hamiltoniano e del momento:

$$Q_i^2 = \alpha H + \vec{\beta} \cdot \vec{P} \quad \forall i \text{ e opportuni coefficienti } \alpha, \vec{\beta}. \quad (1.3)$$

Inoltre sommando su tutti gli operatori supercarica, con cui è possibile definire un particolare sistema, si ottiene che il termine dovuto all'operatore momento si elimina e

$$\sum_{i=1}^N Q_i^2 \propto H. \quad (1.4)$$

Tali espressioni valgono in una teoria relativistica, che sia invariante sotto trasformazioni di Lorentz. Le analoghe relazioni in MQ diventano le seguenti:

$$Q_i^2 = H, \quad \forall i, \quad (1.5)$$

mentre

$$\{Q_i, Q_j\} = 0, \quad i \neq j. \quad (1.6)$$

In un sistema quantistico non-relativistico, il formalismo supersimmetrico si traduce nell'esistenza di operatori  $Q_i$ , come in 1.2, che soddisfino le relazioni di anticommutazione 1.5-1.6. Il formalismo della MQ supersimmetrica è utile nella ricostruzione di autovalori e autostati di un problema agli autovalori, per un determinato potenziale. La costruzione del problema supersimmetrico, oltre che la ricerca dell'autostato fondamentale sono affrontate nel capitolo successivo.

In meccanica quantistica, come in teorie di campo, è interessante comprendere se esista o meno nello spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ , uno stato  $|\Omega\rangle$  che sia annichilito dai generatori  $Q_i$ .

Più in generale un generatore  $A$  di una determinata simmetria agisce su uno stato di modo che  $A|\Omega\rangle \propto |\Omega\rangle$  e dunque riferendoci all'operatore unitario, associato ad  $A$ , si ha che  $e^{i\alpha A}|\Omega\rangle \propto |\Omega\rangle$ . Nel particolare caso della supersimmetria dove il generatore  $Q_i$  è hermitiano, lo stato invariante è annichilito,  $Q_i|\Omega\rangle = 0$ .

Dato 1.5, un tale stato deve avere energia pari a zero.

Infatti, sia  $\psi$  un generico autostato dell'Hamiltoniano  $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$  con  $H = Q_i^2$  e  $Q_i^\dagger = Q_i$ . Si ha:

$$\begin{aligned} \langle\psi|H|\psi\rangle &= E\langle\psi|\psi\rangle = E\|\psi\|^2 \\ &= \langle\psi|Q_i^2|\psi\rangle = \langle\psi|Q_iQ_i|\psi\rangle = \langle\psi|Q_i^\dagger Q_i|\psi\rangle = \|Q_i\psi\|^2. \end{aligned} \quad (1.7)$$

In tal modo si dimostra che, essendo entrambe le due riscritture nulle o positive, allora  $E \geq 0$  e l'uguaglianza a zero è vera se e solo se  $Q_i|\psi\rangle = 0$ .

Un  $|\Omega\rangle$  che rispetti le caratteristiche sopra definite è necessariamente uno stato di minima energia o fondamentale.

Tutto ciò è analogo a quanto si può osservare in teorie di campo.

Lo stato che, a seguito dell'applicazione dei generatori della simmetria, annichilisce o rimane proporzionale a sé stesso è detto stato di vuoto. Condizione necessaria e sufficiente perché lo stato di vuoto sia invariante sotto supersimmetria è che il generatore di simmetria  $Q_i$  annichilisce il vuoto.

Se la supersimmetria fosse una simmetria esatta della natura dovremmo avere particelle bosoniche o fermioniche della stessa massa e con proprietà simili.

Il fatto che tale dato non sia osservato in natura implica che la supersimmetria, se esiste, è in qualche modo rotta.

Uno dei meccanismi possibili è la rottura spontanea di supersimmetria, che prevede l'esistenza di uno stato di vuoto che tuttavia possiede un'energia positiva e conseguentemente non può essere annichilito dagli operatori supercarica  $Q_i$ .

Ciò implica che le simmetrie, pur presenti, non si manifestano in modo palese.

La supersimmetria rimane "nascosta". Essa non è osservabile a basse energie, ma solo ad energie sufficientemente elevate.

In una teoria supersimmetrica, lo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  può essere considerato somma diretta di una parte bosonica  $\mathcal{H}^+$  ed una fermionica  $\mathcal{H}^-$ .

Questa distinzione, di natura fisica in teoria quantistica di campo, permane nella nomenclatura usata in MQ supersimmetrica. Essa permette di distinguere i due sottospazi dello spazio coinvolto nel sistema quantistico in analisi.

È possibile, poi, definire un operatore  $(-1)^F$  che permetta di distinguere  $\mathcal{H}^+$  da  $\mathcal{H}^-$ . Si definisce  $(-1)^F \psi = \psi$  per  $\psi \in \mathcal{H}^+$  e  $(-1)^F \chi = -\chi$  per  $\chi \in \mathcal{H}^-$ . La condizione che gli operatori supercarica devono rispettare è

$$\{(-1)^F, Q_i\} = 0. \quad (1.8)$$

La precedente è ovvia sulla base delle definizioni appena fornite.

In generale gli operatori che generano la supersimmetria possono essere molteplici. Tuttavia nella seguente trattazione ci riduciamo al caso di due generatori, corrispondente a una supersimmetria con  $N = 2$ .

In particolare riorganizziamo gli operatori nel seguente modo:

$$Q = \frac{Q_1 + iQ_2}{\sqrt{2}}, \quad Q^\dagger = \frac{Q_1 - iQ_2}{\sqrt{2}}. \quad (1.9)$$

È possibile riformulare, in questo modo, le condizioni che rispettino l'algebra supersimmetrica

$$\{Q, Q\} = \{Q^\dagger, Q^\dagger\} = 0, \quad (1.10)$$

$$\{Q, Q^\dagger\} = H, \quad (1.11)$$

$$[H, Q] = [H, Q^\dagger] = 0. \quad (1.12)$$

Come abbiamo affermato nel paragrafo precedente, lo spazio di Hilbert può essere decomposto. Usando la seguente decomposizione  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-$ , è possibile esplicitare la forma matriciale dei vari operatori che rientrano nella formulazione sopra

$$H = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix} \quad Q^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.13)$$

È immediato verificare come le matrici appena definite soddisfino le relazioni di commutazione e anticommutazione proprie dell'algebra supersimmetrica.

In particolare notiamo come l'Hamiltoniano supersimmetrico sia formato da  $H_1 = A^\dagger A \in \mathcal{H}^+$  e  $H_2 = AA^\dagger \in \mathcal{H}^-$ , con fattorizzazione inversa.

Il fatto che l'Hamiltoniano supersimmetrico commuti con i due operatori è responsabile per la degenerazione che troveremo, in seguito, negli autovalori dei due Hamiltoniani che lo compongono.



## Capitolo 2

# Formulazione Hamiltoniana della MQ supersimmetrica

La meccanica quantistica supersimmetrica è utile nello studio degli autovalori e autostati, soluzioni di equazioni agli autovalori, dato un determinato potenziale.

Consideriamo il caso di un Hamiltoniano in un sistema unidimensionale

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x). \quad (2.1)$$

Innanzitutto assumiamo che esista un autostato dell'Hamiltoniano, privo di nodi e normalizzabile. Ammettiamo che tale stato sia quello fondamentale, con autovalore energetico nullo.

Il vincolo di autovalore pari a 0 può essere imposto senza perdere generalità, dal momento che una traslazione del potenziale per un valore costante non comporta alcuna modifica degli autostati associati al corrispondente Hamiltoniano.

L'equazione di Schrödinger per lo stato fondamentale  $\psi_0^{(1)}(x)$ , sopra definito, conduce a

$$H_1 \psi_0^{(1)}(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_0^{(1)}(x)}{dx^2} + V_1(x) \psi_0^{(1)}(x) = 0. \quad (2.2)$$

Tale equazione permette di ricostruire il potenziale  $V_1$  a meno di una costante

$$V_1(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\psi_0''^{(1)}(x)}{\psi_0^{(1)}(x)}. \quad (2.3)$$

$H_1$  può essere fattorizzato nel prodotto di due operatori

$$H_1 = A^\dagger A, \quad (2.4)$$

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x), \quad A^\dagger = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x), \quad (2.5)$$

dove  $W(x)$  è denominato superpotenziale.

Indichiamo con  $|\psi_n^{(1)}\rangle$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  gli autostati di  $H_1$ .

Per la definizione dello stato  $|\psi_0^{(1)}\rangle$  e di operatore aggiunto, possiamo scrivere la seguente relazione

$$\langle \psi_n^{(1)} | H_1 \psi_0^{(1)} \rangle = \langle \psi_n^{(1)} | A^\dagger A \psi_0^{(1)} \rangle = \langle A \psi_n^{(1)} | A \psi_0^{(1)} \rangle = 0. \quad (2.6)$$

Ciò deve valere per ogni  $\psi_n^{(1)}$  ed in particolare per  $\psi_0^{(1)}$  medesimo.

In tal caso  $\|A\psi_0^{(1)}\|^2 = 0$ , da cui  $A\psi_0^{(1)} = 0$ . Dunque, conoscendo  $A$  e  $\psi_0^{(1)}$ , deduciamo la seguente forma per il superpotenziale

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\psi_0'^{(1)}(x)}{\psi_0^{(1)}(x)}. \quad (2.7)$$

D'altra parte possiamo ottenere  $V_1$  in termini di  $W(x)$ , a partire dalla fattorizzazione sopra descritta;

$$\begin{aligned} H_1 &= \left( -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \right) \left( \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \right) \psi^{(1)}(x) = \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi^{(1)}(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} [W'(x)\psi^{(1)}(x) + W(x)\psi'^{(1)}(x)] + \\ &+ W(x) \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \psi'^{(1)}(x) + W^2(x)\psi^{(1)}(x) = \\ &= \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) + W^2(x) \right] \psi^{(1)}(x). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Quindi

$$V_1(x) = W(x)^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x). \quad [\text{equazione di Riccati}] \quad (2.9)$$

Parimenti, nulla impedisce di seguire un processo inverso: da  $V_1$  tramite 2.9 si ricava  $W$ , dai cui si esplicita l'autostato fondamentale dell'Hamiltoniano di partenza  $H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x)$ .

Più in generale, una volta nota la forma del superpotenziale  $W(x)$ , si ottiene la fattorizzazione dell'Hamiltoniano nel prodotto dei due operatori  $A$  e  $A^\dagger$ , come in 2.5 ( $H_1 = A^\dagger A$ ), e dunque l'autostato fondamentale. Esso si ricava nel seguente modo

$$\begin{aligned} A\psi_0^{(1)} = 0 &\implies \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} \psi_0^{(1)} + W(x)\psi_0^{(1)} = 0, \\ \psi_0^{(1)} &= N \exp\left( -\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int^x W(y) dy \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Il risultato ottenuto è estremamente importante e porta ad una semplificazione notevole: noto il superpotenziale, per conoscere l'autostato fondamentale, è sufficiente risolvere un'equazione differenziale del primo ordine.

Data la fattorizzazione 2.4 dell'Hamiltoniano  $H_1$ , è possibile introdurre un nuovo Hamiltoniano  $H_2$ . Esso si ottiene invertendo l'ordine degli operatori  $A, A^\dagger$  ed ha la seguente forma:

$$H_2 = AA^\dagger. \quad (2.11)$$

Dal momento che i due fattori sono i medesimi definiti in 2.5 possiamo esplicitare il potenziale supersimmetrico, con analoghi calcoli fatti in 2.8. Si ottiene

$$V_2(x) = W(x)^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}W'(x) \quad (2.12)$$

I due potenziali supersimmetrici differiscono per la seguente quantità

$$V_2(x) - V_1(x) = 2\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}W'(x) \quad (2.13)$$

La relazione che lega i due potenziali si manifesta nel fatto che i due corrispondenti operatori Hamiltoniani sono partner supersimmetrici.

Ciò implica, come vedremo nelle successive sezioni, che i rispettivi autostati e autovalori sono strettamente collegati.

Tale relazione è, infatti, dovuta alla possibile riscrittura del problema coinvolgente  $H_1$  e  $H_2$  in un unico sistema quantistico supersimmetrico di Hamiltoniano  $H$ , con generatori  $Q, Q^\dagger$  soddisfacenti alle relazioni in 1.13.

I due operatori Hamiltoniani appena considerati hanno autostati che appartengono a due spazi distinti, rispettivamente a  $\mathcal{H}^+ = L^2(\mathbb{R})$  e  $\mathcal{H}^- = L^2(\mathbb{R})$ ; è dunque possibile costruire uno spazio somma diretta degli spazi appena descritti  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-$ , cui appartengono gli autostati del nuovo  $H^1$  che soddisfa le relazioni in 1.10-1.13.

## 2.1 Relazione tra autostati di $H_1$ e $H_2$

Andiamo ad analizzare i due spettri energetici per i diversi Hamiltoniani.

$\psi_n^{(1)}(x)$  e  $\psi_n^{(2)}(x)$  sono rispettivamente gli autostati normalizzati di  $H_1$  e  $H_2$ . Si ha quindi

$$H_1\psi_n^{(1)}(x) = A^\dagger A\psi_n^{(1)}(x) = E_n^{(1)}\psi_n^{(1)}(x). \quad (2.14)$$

Per  $H_2 = AA^\dagger$  prendiamo la  $m$ -esima autofunzione<sup>2</sup>  $\psi_m^{(2)}(x) = cA\psi_n^{(1)}(x)$ , con  $n > 0$ : ovvero  $E_n^{(1)} > 0$  (assicura che  $A\psi_n^{(1)} \neq 0$ ); questa è autostato di  $H_2$ , infatti

$$H_2(cA\psi_n^{(1)}(x)) = cAA^\dagger A\psi_n^{(1)}(x) = E_n^{(1)}(cA\psi_n^{(1)}(x)). \quad (2.15)$$

Viceversa si ottiene:

$$H_2\psi_m^{(2)}(x) = AA^\dagger\psi_m^{(2)}(x) = E_m^{(2)}\psi_m^{(2)}(x), \quad (2.16)$$

<sup>1</sup>autostati che comprendono le soluzioni dei due partner supersimmetrici

<sup>2</sup> $c$  è un fattore di normalizzazione

$$H_1(bA^\dagger\psi_m^{(2)}(x)) = bA^\dagger AA^\dagger\psi_m^{(2)}(x) = E_m^{(2)}(bA^\dagger\psi_m^{(1)}(x)). \quad (2.17)$$

Dunque, la funzione ottenuta applicando l'operatore  $A$  a tutti gli autostati del primo Hamiltoniano, è autofunzione per il secondo. Ricordiamo ovviamente che  $A\psi_0^{(1)} = 0$  ( $E_0^{(1)} = 0$ ), le relazioni, così trovate, non valgono per l'autostato fondamentale  $\psi_0^{(1)}(x)$ . Analogamente la funzione ottenuta applicando l'operatore  $A^\dagger$  a tutti gli autostati del secondo Hamiltoniano, con autovalore  $E_n^{(2)} \neq 0$ , è autofunzione per il primo, con autovalore corrispondente a quello del partner.

Data la simmetria del problema è naturale chiederci se tale costruzione valga anche per gli stati fondamentali. Tratteremo in seguito la questione.

Schematizziamo quanto appena trovato:

$$H\psi = E\psi.$$

$H$	$\psi$	$E$
$H_1$	$\psi_n^{(1)}$	$E_n^{(1)}$
	$bA^\dagger\psi_m^{(2)}$	$E_m^{(2)}$
$H_2$	$\psi_m^{(2)}$	$E_m^{(2)}$
	$cA\psi_n^{(1)}$	$E_n^{(1)}$

Risulta, così, semplice vedere come i due Hamiltoniani partner abbiano il medesimo spettro energetico. Lasciando da parte il caso particolare di autostati con autovalore nullo, autovalori e autofunzioni di  $H_1$  e  $H_2$  sono strettamente collegate.

Guardando alle autofunzioni e imponendo la condizione di normalizzazione, si ottiene:

$$1 = \int \psi_m^{*(2)}\psi_m^{(2)} = c^2 \int \psi_n^{*(1)}A^\dagger A\psi_n^{(1)} = c^2 E_n^{(1)} \int \psi_n^{*(1)}\psi_n^{(1)}, \quad (2.18)$$

$$1 = \int \psi_m^{*(1)}\psi_m^{(1)} = b^2 \int \psi_n^{*(2)}AA^\dagger\psi_n^{(2)} = b^2 E_n^{(2)} \int \psi_n^{*(2)}\psi_n^{(2)}, \quad (2.19)$$

dove  $c, b$  sono fattori di normalizzazione, dunque

$$\psi_m^{(2)} = (E_n^{(1)})^{-\frac{1}{2}} A\psi_n^{(1)}, \quad (2.20)$$

$$\psi_n^{(1)} = (E_m^{(2)})^{-\frac{1}{2}} A^\dagger\psi_m^{(2)}. \quad (2.21)$$

Dal momento che  $A\psi_0^{(1)} = 0$ , le considerazioni sopra suggeriscono l'assenza di uno stato fondamentale di autovalore energetico nullo per il secondo Hamiltoniano.

In effetti, se esistesse una autofunzione di  $H_2$  con autovalore nullo, per le medesime considerazioni fatte in 2.6 si avrebbe:

$$A^\dagger\psi_0^{(2)} = 0,$$



$$A^\dagger \psi_0^{(2)} = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} \psi_0 + W(x) \psi_0 = 0 \implies \quad (2.22)$$

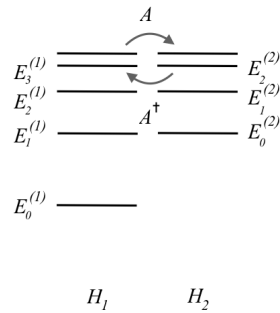
$$\implies \psi_0^{(2)}(x) = N \exp\left(\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int^x W(y) dy\right). \quad (2.23)$$

La soluzione non è normalizzabile se  $\psi_0^{(1)}$  è normalizzabile.

Le equazioni sopra, congiuntamente a quanto appena affermato, portano all'identificazione  $m = n - 1$ . Riassumiamo di seguito le relazioni tra autostati e autovalori di  $H_1$  e  $H_2$

$$\begin{aligned} E_{n-1}^{(2)} &= E_n^{(1)}, & E_0^{(1)} &= 0, \\ \psi_{n-1}^{(2)} &= (E_n^{(1)})^{-\frac{1}{2}} A \psi_n^{(1)}, \\ \psi_n^{(1)} &= (E_{n-1}^{(2)})^{-\frac{1}{2}} A^\dagger \psi_{n-1}^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Figura 2.1: spettro energetico dei due Hamiltoniani partner



Riconosciamo come i due operatori mappino un autostato relativo al primo Hamiltoniano a quello del partner simmetrico alla stessa energia. In tale processo si riconosce un'evidente analogia con gli operatori di innalzamento e abbassamento che si trovano nella risoluzione algebrica dell'oscillatore armonico quantistico. La non trascurabile differenza risiede nel fatto che gli operatori  $A$  e  $A^\dagger$  cambino lo spazio in cui è definito l'autostato del sistema.

## 2.2 Esempio: oscillatore armonico 1D

Elaboriamo quanto appreso riferendoci, appunto, al semplice esempio dell'oscillatore armonico quantistico.

L'Hamiltoniano di un oscillatore armonico è:

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2.$$

Possiamo risolvere il problema in maniera algebrica andando a definire due nuovi operatori  $a$  e  $a^\dagger$ .

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\frac{m}{\omega\hbar}} X + i\sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}} P \right),$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\frac{m}{\omega\hbar}} X - i\sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}} P \right).$$

Si trova che  $H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$ , ove definiamo  $N = a^\dagger a$  l'operatore numerico che conta il numero di particelle nella funzione d'onda.

Conseguentemente l'autostato fondamentale ha energia di punto zero  $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$ .

Definiamo dunque  $H_1 = H - E_0 = \hbar\omega a^\dagger a$ .

Dalle definizioni sopra si trova che in particolare è soddisfatta la seguente relazione:  $[a, a^\dagger] = 1$ .

Quindi dal momento che la fattorizzazione del sistema è  $H_1 = A^\dagger A$ , allora  $[A, A^\dagger] = \hbar\omega$ .

L'Hamiltoniano simmetrico si può trovare semplicemente scambiando gli operatori. Si ottiene, perciò, che  $H_2 = AA^\dagger = A^\dagger A + \hbar\omega = H + E_0$ .

Conseguentemente

$$H = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\sigma_3\hbar\omega.$$

Rispettando quanto affermato nella sezione precedente, gli autostati per i due Hamiltoniani sono i medesimi traslati in energia di un'unità. Solo il primo Hamiltoniano ha stato fondamentale che annichilisce.

## Capitolo 3

# Rottura di Supersimmetria

Quello che abbiamo visto nei paragrafi precedenti consiste sostanzialmente nell'ipotizzare per  $H_1$  uno stato fondamentale, privo di nodi, e di autovalore energetico nullo; da lì è possibile riconoscere il potenziale e costruire tramite fattorizzazione dell'Hamiltoniano un potenziale supersimmetrico, da cui possiamo trovare il secondo Hamiltoniano, partner del primo, che presenta determinate condizioni per lo spettro energetico e le autofunzioni corrispondenti.

D'altra parte una volta conosciuto un superpotenziale  $W(x)$  abbiamo due possibilità: lo stato fondamentale invariante sotto supersimmetria può essere autostato del primo o del secondo Hamiltoniano. Otteniamo così:

$$A\psi_0^{(1)} = 0, \quad \psi_0^{(1)}(x) = N \exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int^x W(y) dy\right) \in \mathcal{H}^+; \quad (3.1)$$

$$A^\dagger\psi_0^{(2)} = 0, \quad \psi_0^{(2)}(x) = N \exp\left(\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int^x W(y) dy\right) \in \mathcal{H}^-. \quad (3.2)$$

Se uno dei due autostati in questione esiste, normalizzabile, l'altro necessariamente non può esserlo. In tal caso diciamo che la supersimmetria non è rotta spontaneamente. La convenzione stabilisce che l'autostato fondamentale normalizzabile sia quello riferito al primo Hamiltoniano, l'altro autostato è posto identicamente nullo. Dunque il superpotenziale da scegliere per affrontare il problema supersimmetrico deve rispettare questa condizione.

Sia quindi,  $|0\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-$  lo stato fondamentale dell'Hamiltoniano supersimmetrico

$$|0\rangle = |\psi_0\rangle = \begin{pmatrix} \psi_0^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove  $\psi_0^{(1)}$  è la funzione sopra definita.

La supersimmetria non spontaneamente rotta assicura che i generatori della simmetria annichiscano tale stato di minimo energetico:  $Q|0\rangle = Q^\dagger|0\rangle = 0$ .

In particolare questo si verifica quando  $E_0 = 0$ , dunque  $(QQ^\dagger + Q^\dagger Q)|0\rangle = 0$  e di conseguenza  $Q^\dagger|0\rangle = 0$  e  $Q|0\rangle = 0$ .

In generale se consideriamo superpotenziali per cui né  $Q$  né  $Q^\dagger$  annichiscono lo stato fondamentale, allora la supersimmetria è rotta e i potenziali simmetrici hanno energie dello stato fondamentale degeneri.

Nel caso di rottura di simmetria gli operatori  $A$  e  $A^\dagger$  non cambiano più il numero di nodi e c'è una simmetria uno a uno di tutti gli autostati dei due Hamiltoniani.

In tal caso lo stato fondamentale ( $|GS\rangle$ ) ha energia diversa da 0.

Proponiamo un esempio di superpotenziale che comporta la rottura spontanea di supersimmetria. Per semplicità poniamo  $\hbar = 2m = 1$ . Scegliamo dunque  $W(x) = gx^n$  con  $n \in \mathbb{N}$ . Scelto tale superpotenziale abbiamo due possibilità: che  $n$  sia pari  $n = 2m$  o dispari  $n = 2m + 1$  con  $m \in \mathbb{N}$ .

Un superpotenziale che sia un polinomio di grado dispari comporta un sistema quantistico con supersimmetria non rotta spontaneamente. I due potenziali partner sono infatti pari:

$$\begin{aligned} V^{(1)}(x) &= g^2 x^{(4m+2)} - (2m+1)gx^{(2m)}, \\ V^{(2)}(x) &= g^2 x^{(4m+2)} + (2m+1)gx^{(2m)}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Se  $g > 0$  allora si rispetta la condizione per cui lo stato fondamentale annichito è quello appartenente ad  $H_1$ . Nel caso contrario per mantenere la stessa condizione basta prendere  $-W(x)$  come superpotenziale. Con  $n = 1$  si ritorna al caso dell'oscillatore armonico, precedentemente trattato.

Se trattiamo il caso in cui il polinomio  $W(x)$  ha grado pari, il risultato è che il sistema presenta rottura spontanea di supersimmetria.

Ciò è dovuto al fatto che la derivata di  $W(x)$  è dispari, dunque i due potenziali partner sono correlati da una riflessione attorno all'asse  $y$ ,  $V_1(-x) = W(-x)^2 - W'(-x) = W(x)^2 + W'(x) = V_2(x)$ . Questo produce un identico spettro energetico per i due Hamiltoniani partner e la simmetria uno a uno tra i rispettivi autostati.

## Capitolo 4

# Fattorizzazione e gerarchia degli Hamiltoniani

Vediamo nel seguito un processo costruttivo che permette di semplificare, in alcuni casi particolari<sup>1</sup>, la ricerca di autostati e autovalori di un Hamiltoniano di partenza.

Come visto nelle sezioni precedenti a partire dall'autostato fondamentale di  $H_1$  è possibile risalire alla forma del superpotenziale e conseguentemente a quella della fattorizzazione. Invertendo gli operatori di fattorizzazione, definiti in 2.5, è possibile costruire un secondo Hamiltoniano  $H_2$ , il cui autostato fondamentale si trova mediante l'applicazione dell'operatore  $A$  al primo eccitato di  $H_1$ , mantenendo inalterato l'autovalore energetico.

Una volta noto lo stato fondamentale per il secondo Hamiltoniano, è possibile, attuando una semplice traslazione costante del potenziale, reiterare nuovamente il processo.

In questo modo possiamo trovare un nuovo superpotenziale  $W_2$  e, di conseguenza, una nuova fattorizzazione che coinvolga il secondo Hamiltoniano.

La procedura sopra descritta può essere iterata fintanto che esistono stati legati, in generale, trovando via via diverse fattorizzazioni.

Un modus operandi che può risultare utile, è quello di trovare la gerarchia di Hamiltoniani appena descritta, e per ciascun Hamiltoniano lo stato fondamentale.

Fatto ciò è possibile risalire, tramite gli operatori  $A_i^\dagger$ , all'autostato relativo all'operatore Hamiltoniano di partenza.

Vediamo il processo appena descritto più in dettaglio.

Dal momento che un qualsiasi Hamiltoniano, generalmente non ha autovalore fondamentale nullo  $E_0^{(1)} \neq 0$ , riscriviamolo nel seguente modo

$$H_1 = A_1^\dagger A_1 + E_0^{(1)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \quad (4.1)$$

dove

$$A_1 = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W_1(x), \quad A_1^\dagger = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W_1(x), \quad W_1 = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} \ln \psi_0^{(1)}(x). \quad (4.2)$$

---

<sup>1</sup>si vedano i potenziali invarianti in forma

Il partner simmetrico può essere scritto

$$H_2 = A_1 A_1^\dagger + E_0^{(1)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_2(x) \quad (4.3)$$

il cui potenziale in termini del superpotenziale è

$$\begin{aligned} V_2(x) &= W_1^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W_1'(x) + E_0^{(1)} = \\ &= V_1(x) - 2 \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W_1'(x) = \\ &= V_1(x) - 2 \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d^2}{dx^2} \ln \psi_0^{(1)}(x). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Fin qui, abbiamo sostanzialmente ripetuto quanto fatto nei paragrafi precedenti, tuttavia possiamo continuare a costruire nuovi Hamiltoniani.

Per quanto detto il secondo Hamiltoniano ha autovalore per l'autostato fondamentale pari a  $E_1^{(1)}$ : è possibile trovare una seconda fattorizzazione, con un'opportuna traslazione

$$H_2 = A_1 A_1^\dagger + E_0^{(1)} = A_2^\dagger A_2 + E_1^{(1)}. \quad (4.5)$$

Procedendo in maniera analoga a prima, si trova un terzo Hamiltoniano riscritto in termini della fattorizzazione appena trovata

$$H_3 = A_2 A_2^\dagger + E_1^{(1)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_3(x); \quad (4.6)$$

in modo simile si ha

$$\begin{aligned} V_3(x) &= W_2^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W_2'(x) + E_1^{(1)} = \\ &= V_2(x) - \frac{2\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d^2}{dx^2} \ln \psi_0^{(2)}(x) = \\ &= V_1(x) - 2 \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d^2}{dx^2} \ln(\psi_0^{(1)} \psi_0^{(2)})(x). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Essendo che  $V_2$  e  $V_3$  sono costruiti come partner supersimmetrici, le relazioni che li legano sono le medesime valide per  $V_1$  e  $V_2$ . Si giunge, quindi, alle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} E_n^{(3)} &= E_{n+1}^{(2)} = E_{n+2}^{(1)}, \\ \psi_n^{(3)} &= (E_{n+1}^{(2)} - E_0^{(2)})^{-\frac{1}{2}} A_2 \psi_{n+1}^{(2)} = \\ &= (E_{n+2}^{(1)} - E_1^{(1)})^{-\frac{1}{2}} (E_{n+2}^{(1)} - E_0^{(1)})^{-\frac{1}{2}} A_2 A_1 \psi_{n+2}^{(1)}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} A_2^\dagger \psi_n^{(3)} &= (E_{n+1}^{(2)} - E_0^{(2)})^{-\frac{1}{2}} A_2^\dagger A_2 \psi_{n+1}^{(2)} = \\ &= (E_{n+1}^{(2)} - E_0^{(2)})^{\frac{1}{2}} \psi_{n+1}^{(2)}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Quindi

$$\left. \begin{aligned} \psi_{n+2}^{(1)} &= (E_{n+1}^{(2)} - E_0^{(1)})^{-\frac{1}{2}} A_1^\dagger \psi_{n+1}^{(2)} \\ \psi_{n+1}^{(2)} &= (E_n^{(3)} - E_0^{(2)})^{-\frac{1}{2}} A_2^\dagger \psi_n^{(3)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_{n+2}^{(1)} = (E_{n+2}^{(1)} - E_1^{(1)})^{-\frac{1}{2}} (E_{n+2}^{(1)} - E_0^{(1)})^{-\frac{1}{2}} A_1^\dagger A_2^\dagger \psi_n^{(3)}. \quad (4.10)$$

Si delinea una stretta connessione tra l'Hamiltoniano di partenza e quelli che vengono generati.

Sia  $p$  il numero di stati legati associabili ad  $H_1$ . Notiamo che il numero di Hamiltoniani che, mediante fattorizzazioni successive, è possibile costruire è  $p - 1$ . Gli Hamiltoniani  $H_1, H_2, \dots, H_p$  sono, infatti, in numero, pari a quello degli autostati normalizzabili del primo Hamiltoniano della gerarchia.

L' $m$ -esimo Hamiltoniano ( $H_m$ ) ha, inoltre, il medesimo spettro energetico di  $H_1$  eccezion fatta per i primi  $m - 1$  autovalori.

In particolare possiamo sempre scrivere

$$H_m = A_m^\dagger A_m + E_{m-1}^{(1)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_m(x) \quad (4.11)$$

dove

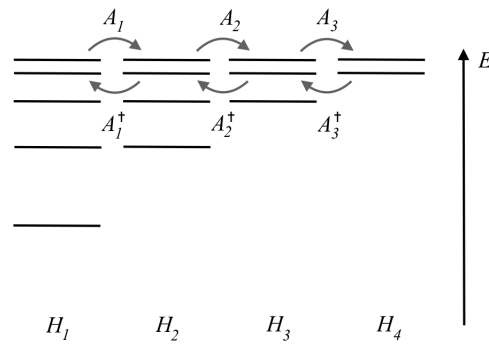
$$A_m = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W_m(x), \quad W_m = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} \ln \psi_0^{(m)}(x). \quad (4.12)$$

Si ha che

$$\begin{aligned} E_n^{(m)} &= E_{n+1}^{(m-1)} = \dots = E_{n+m-1}^{(1)}, \\ \psi_n^{(m)} &= (E_{n+m-1}^{(1)} - E_{m-2}^{(1)})^{-\frac{1}{2}} \dots (E_{n+m-1}^{(1)} - E_0^{(1)})^{-\frac{1}{2}} A_{m-1} \dots A_1 \psi_{n+m-1}^{(1)}, \\ V_m(x) &= V_1(x) - 2 \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d^2}{dx^2} \ln(\psi_0^{(1)} \dots \psi_0^{(m-1)})(x). \end{aligned} \quad (4.13)$$

È intuitivo, allora, osservare come conoscendo autovalori e autofunzioni dell'Hamiltoniano  $H_1$  è possibile sapere immediatamente le soluzioni della gerarchia dei  $p - 1$  Hamiltoniani e viceversa.

Figura 4.1: spettro energetico della gerarchia di Hamiltoniani







## Capitolo 5

# Invarianza in forma e potenziali risolvibili

Sviluppando le idee della meccanica quantistica supersimmetrica, introdotte precedentemente, unitamente alla condizione di invarianza in forma, è possibile risolvere in modo semplice tutta una classe di potenziali.

Tale metodo produce tutti gli autostati e autovalori dell'Hamiltoniano in analisi.

Introduciamo, dunque, la condizione di invarianza in forma: questa più semplicemente si riduce alla seguente relazione tra la coppia di potenziali supersimmetrici

$$V_2(x, a_1) = V_1(x, a_2) + R(a_1) \quad (5.1)$$

dove  $a_1$  e  $a_2$  sono due insiemi di parametri, di cui il secondo è funzione del primo,  $R(a_1)$  è indipendente dalla variabile  $x$ .

Due potenziali sono invarianti in forma se sono uguali a meno di un cambio di parametri ed una traslazione costante. Nel caso di supersimmetria non rotta, è immediata la ricerca degli operatori che fattorizzano i diversi Hamiltoniani, costruiti al fine di stabilire gli autostati di  $H_1$ .

Se procediamo come fatto nella sezione precedente, troviamo che la condizione di invarianza in forma conduce ad una rilevante semplificazione della fattorizzazione e costruzione della gerarchia di Hamiltoniani.

Partiamo dunque dall'Hamiltoniano di cui vogliamo conoscere autovalori e autovettori. Ci poniamo nel caso in cui la supersimmetria non sia rotta. Con opportune traslazioni del potenziale, si trova che, per un generico Hamiltoniano  $H_1$ :

$$E_0^{(1)}(a_1) = 0, \quad \psi_0^{(1)}(x, a_1) = N \exp \left[ -\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int^x W_1(y, a_1) dy \right] \quad (5.2)$$

dove  $W_1$  è il superpotenziale associato alla prima fattorizzazione; esso avrà dipendenza dal parametro  $a_1$  così come la fattorizzazione a cui, dunque, conduce.

Esso si trova in modo analitico risolvendo l'equazione di Riccati e più semplicemente tramite ipotesi ragionevoli sulla forma di quest'ultimo a partire dalle conoscenze del potenziale  $V_1$ .

In modo analogo a quanto fatto nella sezione precedente costruiamo l'Hamiltoniano di fattorizzazione inversa:

$$H_2 = A_1(x, a_1)A_1^\dagger(x, a_1) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_2(x, a_1). \quad (5.3)$$

Se il secondo potenziale, così trovato, rispetta la relazione 5.1 definita come condizione di invarianza in forma,  $H_2$  può essere riscritto nel seguente modo

$$H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x, a_2) + R(a_1). \quad (5.4)$$

Evidenziamo l'ultimo termine a secondo membro come una semplice traslazione costante. Analizziamo dunque

$$\tilde{H}_2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x, a_2). \quad (5.5)$$

Tale operatore, con autovalore fondamentale nullo, può essere fattorizzato come prodotto di  $A_2(x, a_1)$  e l'hermitiano coniugato  $A_2^\dagger(x, a_1)$ , ovvero  $H_2 = A_2^\dagger(x, a_1)A_2(x, a_1)$ .

Tuttavia la forma in 5.5 del tutto simile, a meno del parametro, ad  $H_1$ , suggerisce di prendere  $A_2(x, a_1) = A_1(x, a_2)$ . La nuova fattorizzazione è nota a meno del cambio di parametro. Tale variabile mostra un'ovvia dipendenza da quella di partenza che è possibile identificare tramite la condizione di invarianza in forma.

Dunque riconducendoci ad  $H_2$

$$E_0^{(2)}(a_2) = R(a_1), \quad \psi_0^{(2)}(x, a_2) = N \exp \left[ -\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int^x W_1(y, a_2) dy \right]. \quad (5.6)$$

Possiamo iterare il processo e riconoscere i medesimi potenziali a meno di un incremento del parametro ogni volta che la procedura viene ripetuta [ $a_n = f(a_{n-1}) = f^n(a_1)$ ].

Perciò

$$H_m = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x, a_m) + \sum_{l=1}^{m-1} R(a_l) \quad (5.7)$$

$$\text{con } E_0^{(m)} = \sum_{l=1}^{m-1} R(a_l), \quad \psi_0^{(m)}(x, a_m) = N \exp \left[ -\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int^x W_1(y, a_m) dy \right]. \quad (5.8)$$

Dunque per ritrovare i corrispondenti autostati relativi al primo Hamiltoniano in analisi è opportuno applicare gli specifici operatori.

Per semplicità vediamo la procedura per l'autostato fondamentale dell'Hamiltoniano del terzo ordine.

Si riporta quindi la procedura generale senza specificare la normalizzazione:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{n+2}^{(1)} &= (E_{n+1}^{(2)} - E_0^{(1)})^{-\frac{1}{2}} A_1^\dagger \psi_{n+1}^{(2)} \\ \psi_{n+1}^{(2)} &= (E_n^{(3)} - E_0^{(2)})^{-\frac{1}{2}} A_2^\dagger \psi_n^{(3)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_{n+2}^{(1)} = (E_{n+2}^{(1)} - E_1^{(1)})^{-\frac{1}{2}} (E_{n+2}^{(1)} - E_0^{(1)})^{-\frac{1}{2}} A_1^\dagger A_2^\dagger \psi_n^{(3)}. \quad (5.9)$$

Riconoscendo che  $A_n(x, a_1) = A_1(x, a_n)$ , per quanto affermato prima.

$$\psi_{n+2}^{(1)} = (E_{n+2}^{(1)} - E_1^{(1)})^{-\frac{1}{2}} (E_{n+2}^{(1)} - E_0^{(1)})^{-\frac{1}{2}} A_1^\dagger(x, a_1) A_1^\dagger(x, a_2) \psi_n^{(3)} \quad (5.10)$$

e in generale

$$\psi_{n+m}^{(1)} \propto A_1^\dagger(x, a_1) A_1^\dagger(x, a_2) \dots A_1^\dagger(x, a_m) \psi_n^{(m+1)}. \quad (5.11)$$

## 5.1 Esempio applicativo

### 5.1.1 Oscillatore armonico 3D

Presentiamo anzitutto la forma dell'oscillatore armonico tridimensionale

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \vec{X}^2. \quad (5.12)$$

Il potenziale che compare nell'equazione immediatamente sopra è un potenziale centrale. La soluzione dell'equazione agli autovalori dell'Hamiltoniano esiste in uno spazio  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ . Tuttavia la simmetria sferica riduce la trattazione ad un più semplice problema unidimensionale.

Passiamo quindi a descrivere tale Hamiltoniano in coordinate sferiche. Dal momento che la forma di  $\vec{P}^2$  è quella di un Laplaciano, ovvero  $\nabla^2$ , riscriviamo tale operatore differenziale del secondo ordine nelle opportune coordinate. L'Hamiltoniano diventa quindi:

$$H = \frac{\hbar^2}{2m} \left[ -\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(r) - \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[ \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right] \right] + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2. \quad (5.13)$$

Si cerca dunque una soluzione a variabili separate  $\psi(r, \theta, \phi) = \mathcal{R}(r)Y(\theta, \phi)$ , che sostituita nell'equazione agli autovalori porge:

$$-\frac{r}{\mathcal{R}} \frac{d^2}{dr^2}(r\mathcal{R}) - \frac{1}{Y \sin\theta} \left[ \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right] Y = \frac{2m}{\hbar^2} r^2 [E - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2]. \quad (5.14)$$

Si definisce l'operatore di Casimir che rappresenta il quadrato del momento angolare  $\Omega = L^2/\hbar^2$

$$\Omega = -\frac{1}{\sin\theta} \left[ \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right]. \quad (5.15)$$

$Y = Y_l^m(\theta, \phi)$  sono le armoniche sferiche, l'equazione porge la seguente soluzione  $L^2 Y = \hbar^2 l(l+1)Y$ . Sostituendo le armoniche sferiche, l'equazione a variabili separate si riduce ad un'equazione agli autovalori per la parte radiale. Riscriviamo dunque l'Hamiltoniano tenendo conto della sola coordinata  $r$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2. \quad (5.16)$$

Cerchiamo dunque  $H\mathcal{R}(r) = E\mathcal{R}(r)$ ; se riscriviamo la funzione come  $\mathcal{R} = u(r)/r$  si vede facilmente che:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \right] u(r) = E u(r). \quad (5.17)$$

Come è ben noto andando ad analizzare l'oscillatore armonico 1D, ed estendendolo al caso 3D tramite fattorizzazione, si ha che il primo autovalore disponibile è  $E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega$ . Il potenziale  $V_1$  che ci interessa analizzare è quindi quello sopra scritto a meno della traslazione per il primo autovalore  $E_0$ . Come vedremo tale autovalore minimo mostra un'evidente dipendenza da  $l$

$$V_1 = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 - E_0. \quad (5.18)$$

Cerchiamo dunque un superpotenziale che ci permetta di attuare le successive fattorizzazioni. Da queste risaliremo alla successione di corrispondenti autovalori e autovettori che caratterizzano l'Hamiltoniano.

L'equazione che dovremmo risolvere analiticamente è quella non banale di Riccati. Scegliamo quindi di trovare la forma del superpotenziale tramite l'utilizzo di ipotesi ragionevoli che conducano al risultato richiesto.

Dal momento che l'equazione di Riccati coinvolge il quadrato del superpotenziale e la sua derivata, una possibile forma è la seguente

$$W(r) = Ar + B\frac{1}{r}. \quad (5.19)$$

Verifichiamo la bontà di tale ipotesi, andando a caratterizzare i coefficienti A e B.

$$\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 - \frac{3}{2}\hbar\omega = A^2 r^2 + B^2 \frac{1}{r^2} + 2AB - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}A + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}B \frac{1}{r^2} \quad (5.20)$$

$$\begin{cases} A^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 \rightarrow A = \sqrt{\frac{m}{2}}\omega \\ B^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}B = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m} \rightarrow B = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}(l+1) \\ 2AB - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}A = -E_0 \rightarrow E_0 = \hbar\omega(l + \frac{3}{2}) \end{cases} \quad (5.21)$$

La condizione rilevabile per l'energia di punto zero è corretta: infatti per  $l = 0$  si riduce all'ipotesi di partenza  $E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega$ .

Inoltre

$$W(r, l) = \sqrt{\frac{m}{2}}\omega r - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}(l+1)\frac{1}{r}, \quad (5.22)$$

da cui si ricava l'autostato fondamentale:

$$\begin{aligned} u_0^{(1)}(r, l) &= N_1 \exp\left[-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int^r W(y, l) dy\right] = \\ &= N_1 \exp\left[-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int^r \left(\sqrt{\frac{m}{2}}\omega y - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}(l+1)\frac{1}{y}\right) dy\right] = \\ &= N_1 \exp\left[-\frac{m\omega r^2}{2\hbar} + (l+1)\ln(r)\right] = \\ &= N_1 r^{l+1} \exp\left[-\frac{m\omega r^2}{2\hbar}\right]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\mathcal{R}_0^{(1)}(r, l) = \frac{u_0^{(1)}(r, l)}{r} = N_1 r^l \exp\left[-\frac{m\omega r^2}{2\hbar}\right]. \quad (5.24)$$

Stabiliamo infine la normalizzazione

$$1 = \int_0^\infty r^2 \mathcal{R}_0^{(1)*}(r, l) \mathcal{R}_0^{(1)}(r, l) dr = \int_0^\infty N_1^2 r^{2(l+1)} \exp\left[-\frac{m\omega r^2}{\hbar}\right] dr, \quad (5.25)$$

nominiamo  $\alpha = \frac{m\omega}{\hbar}$  e  $(l+1) = b$ , notiamo il seguente fatto:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty N_1^2 r^{2b} \exp[-\alpha r^2] dr &= \frac{(-1)^b}{2} N_1^2 \frac{\partial^b}{\partial \alpha^b} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\alpha r^2] dr = \\ &= \frac{(-1)^b}{2} N_1^2 \frac{\partial^b}{\partial \alpha^b} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = N_1^2 \frac{(2b+1)!! \sqrt{\pi}}{2^{b+1} (\alpha)^{b+\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Perciò<sup>1</sup>

$$N_1 = \sqrt{\frac{2^{b+1} (\alpha)^{b+\frac{1}{2}}}{(2b+1)!! \sqrt{\pi}}}.$$

Troviamo poi la forma esplicita di  $V_2 = W(r)^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(r)$

$$V_2(r, l) = \frac{\hbar^2 (l+1)(l+2)}{2mr^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 - \hbar\omega \left(l + \frac{1}{2}\right). \quad (5.27)$$

Vediamo come le due forme per  $V_1$  e  $V_2$  si assomigliano e verifichiamo che esse soddisfano la condizione di potenziali invarianti in forma

$$V_2(r, l) = V_1(r, l_2) + R(l), \quad (5.28)$$

infatti andando ad esplicitare e ipotizzando che  $l_2 = l+1$  si ottiene:

$$\begin{aligned} &\frac{\hbar^2 (l+1)(l+2)}{2mr^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 - \hbar\omega \left(l + \frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{\hbar^2 l_2(l_2+1)}{2mr^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 - \hbar\omega \left(l_2 + \frac{3}{2}\right) + R(l) \\ &\rightarrow R(l) = 2\hbar\omega. \end{aligned} \quad (5.29)$$

In questo modo, riconoscendo l'invarianza in forma dei potenziali, la fattorizzazione risulta semplice:

$$\begin{aligned} H_2 &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} r + V_2(r, l) = A_2^\dagger(r, l) A_2(r, l) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} r + V_1(r, l_2) + R(l) = A_1(r, l_2) A_1^\dagger(r, l_2) + R(l). \end{aligned} \quad (5.30)$$

---

<sup>1</sup> $(2b+1)!! = (2b+1)(2b-1)(2b-3)\dots 1$

La traslazione costante dovuta a  $R(l)$  non comporta alcuna modifica degli autostati interessanti, ma solo una traslazione degli autovalori.

Dunque possiamo ricavare gli autostati procedendo iterativamente come fatto per  $V_2$

$$\mathcal{R}_0^{(n)}(r, l_n) = N_n r^{l_n} \exp\left[-\frac{m\omega r^2}{2\hbar}\right] \quad (5.31)$$

con autovalore corrispondente, pari a

$$E_0^{(n)}(l) = E_0 + 2\hbar\omega n = \hbar\omega\left(2n + l + \frac{3}{2}\right). \quad (5.32)$$

Se poniamo  $\tilde{n} = 2n + l$  si trova che

$$E_0^{(n)}(l) = E_{n-1}^{(1)}(l) = \hbar\omega\left(\tilde{n} + \frac{3}{2}\right). \quad (5.33)$$

In questo modo  $\tilde{n}$  è il numero quantico associato al livello energetico reale ed ha a sua volta una dipendenza dal momento angolare  $l$ ; ovviamente dalla forma  $\tilde{n} = 2n + l$  desumiamo che per uno stesso autovalore sono molteplici gli autostati possibili.

La singola gerarchia è identificata dal parametro  $l$ . Dunque autofunzioni con medesimo autovalore appartengono a gerarchie di Hamiltoniani diverse.

Il seguente schema mostra, per ogni gerarchia di Hamiltoniani fattorizzati, i diversi autovalori ottenibili. La singola riga rappresenta una gerarchia di Hamiltoniani; come già accennato essa dipende dal valore di  $l$  fissato, le colonne rappresentano gli autovalori relativi all'autostato fondamentale di  $H_n(l)$  della gerarchia. Per ogni gerarchia è possibile ricavare autovalori e autostati relativi al potenziale dell'oscillatore armonico 3D, tramite l'applicazione di opportuni operatori.

$l$	$E_0(l)$	$E_1(l)$	...	$E_n(l)$
0	$\frac{3}{2}\hbar\omega$	$\frac{7}{2}\hbar\omega$	...	$\frac{4n+3}{2}\hbar\omega$
1	$\frac{5}{2}\hbar\omega$	$\frac{9}{2}\hbar\omega$	...	$\frac{4n+5}{2}\hbar\omega$
2	$\frac{7}{2}\hbar\omega$	$\frac{11}{2}\hbar\omega$	...	$\frac{4n+7}{2}\hbar\omega$
...	...	...	...	...
m	$\frac{2m+3}{2}\hbar\omega$	$\frac{2m+7}{2}\hbar\omega$	...	$\frac{2m+4n+3}{2}\hbar\omega$

Dal momento che  $\mathcal{R}_0^{(n)}(r, l_n)$  è un autostato di  $H_n = A_1(r, l_{n-1})A_1^\dagger(r, l_{n-1})$ , è possibile risalire ai funzionali dell'Hamiltoniano di partenza, applicando gli operatori  $A_i^\dagger$  agli autostati appena trovati. Perciò

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1^{(n-1)}(r, l_{n-1}) \propto A_1^\dagger(r, l_{n-1})\mathcal{R}_0^{(n)}(r, l_n) &= -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dr} \mathcal{R}_0^{(n)}(r, l_n) + W(r, l_{n-1})\mathcal{R}_0^{(n)}(r, l_n) \Rightarrow \\ \mathcal{R}_{n-1}^{(1)}(r, l_1) \propto A_1^\dagger(r, l_1) \dots A_1^\dagger(r, l_{n-1})\mathcal{R}_0^{(n)}(r, l_n). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Calcoliamo dunque il secondo autostato

$$\mathcal{R}_0^{(2)}(r, l_n) = N_2 r^{l+1} \exp\left[-\frac{m\omega r^2}{2\hbar}\right], \quad (5.35)$$

$$\mathcal{R}_1^{(1)}(r, l) = N_2 \left[ \sqrt{2m\omega} r^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}(2l+3) \right] r^l \exp\left[-\frac{m\omega r^2}{2\hbar}\right]. \quad (5.36)$$

La normalizzazione si calcola in modo analogo a quanto fatto prima considerando il nuovo termine a fattore. Un calcolo analogo suggerisce la forma analitica del secondo stato eccitato

$$\mathcal{R}_0^{(3)}(r, l_n) = N_3 r^{l+2} \exp\left[-\frac{m\omega r^2}{2\hbar}\right]; \quad (5.37)$$

applicando  $A_1^\dagger(r, l_2 = l+2)$

$$\mathcal{R}_1^{(2)}(r, l_2) = \left[ \sqrt{2m\omega} r^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}(2l+5) \right] r^{l+1} \exp\left[-\frac{m\omega r^2}{2\hbar}\right], \quad (5.38)$$

e applicando nuovamente  $A_1^\dagger(r, l_1 = l+1)$

$$\mathcal{R}_2^{(1)}(r, l_2) = \left\{ \left[ \sqrt{2m\omega} r^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}(2l+5) \right] \left[ \sqrt{2m\omega} r^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}(2l+3) \right] - 2\hbar\omega r^2 \right\} r^l \exp\left[-\frac{m\omega r^2}{2\hbar}\right]. \quad (5.39)$$

Ovviamente per entrambi va stabilita poi la normalizzazione, basandosi sul conto fatto prima. Riportiamo di seguito una tabella contenente i primi autovalori e autostati dell'oscillatore armonico tridimensionale per l' $l$ -esima gerarchia calcolata.

$E$	<i>autostato</i>
$\frac{2l+3}{2}\hbar\omega$	$N_1 r^l \exp\left[-\frac{m\omega r^2}{2\hbar}\right]$
$\frac{2l+7}{2}\hbar\omega$	$N_2 r^l \left[ \sqrt{2m\omega} r^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}(2l+3) \right] \exp\left[-\frac{m\omega r^2}{2\hbar}\right]$
$\frac{2l+11}{2}\hbar\omega$	$N_3 r^l \left\{ \left[ \sqrt{2m\omega} r^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}(2l+5) \right] \left[ \sqrt{2m\omega} r^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}(2l+3) \right] - 2\hbar\omega r^2 \right\} \exp\left[-\frac{m\omega r^2}{2\hbar}\right]$

### 5.1.2 Atomo di idrogeno

Allo stesso modo, con piccole differenze, si pone l'esempio dell'atomo di idrogeno

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (5.40)$$

In modo analogo a quanto fatto prima

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}; \quad (5.41)$$

cerchiamo dunque  $\mathcal{R}(r) = u(r)/r$  tale che

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] u(r) = E u(r). \quad (5.42)$$

Il potenziale  $V_1$  che ci interessa analizzare è quindi quello sopra scritto a meno della traslazione per il primo autovalore  $E_0$ . E, quindi,

$$V_1 = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} - E_0. \quad (5.43)$$

Ipotizziamo poi che:

$$W(r) = C + D \frac{1}{r}. \quad (5.44)$$

Verifichiamo la bontà di tale ipotesi, andando a caratterizzare i coefficienti C e D.

$$\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} - E_0 = C^2 + D^2 \frac{1}{r^2} + 2CD \frac{1}{r} + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} D \frac{1}{r^2} \quad (5.45)$$

$$\begin{cases} C^2 = -E_0 \rightarrow E_0 = -\frac{2m}{\hbar^2} \left[ \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0(l+1)} \right]^2 \\ D^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} D = \frac{\hbar^2}{2m} l(l+1) \rightarrow D = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} (l+1) \\ 2CD = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow C = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0(l+1)} \end{cases} \quad (5.46)$$

Da un semplice calcolo troviamo l'energia del primo livello dell'atomo di idrogeno: per  $l=0$

$$E_0 = -\frac{2m}{\hbar^2} \left[ \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \right]^2 = -13.6 \text{ eV}.$$

A partire da 5.46 si ottiene

$$W(r, l) = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0(l+1)} - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} (l+1) \frac{1}{r}, \quad (5.47)$$



per cui è possibile ricavare l'autostato fondamentale:

$$u_0^{(1)}(r, l) = N_1 r^{l+1} \exp \left[ -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0(l+1)} r \right]. \quad (5.48)$$

Il raggio di Bohr è definito come segue

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}.$$

Quindi

$$\mathcal{R}_0^{(1)}(r, l) = N_1 r^l \exp \left[ -\frac{r}{a_0(l+1)} \right]. \quad (5.49)$$

Troviamo poi la forma esplicita di  $V_2 = W(r)^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(r)$

$$V_2(r, l) = \frac{\hbar^2(l+1)(l+2)}{2mr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[ \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0(l+1)} \right]^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (5.50)$$

Anche questi due potenziali rispettano la condizione di invarianza in forma

$$V_2(r, l) = V_1(r, l_2) + R(l). \quad (5.51)$$

Ipotizzando che  $l_2 = l + 1$  si ottiene:

$$R(l) = \frac{2m}{\hbar^2} \left[ \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \right]^2 \left[ \frac{1}{(l+1)^2} - \frac{1}{(l+2)^2} \right], \quad (5.52)$$

e dunque

$$\begin{aligned} E_n &= -\frac{\hbar^2}{2ma_0^2(l+1)^2} + \sum_{i=1}^n \frac{\hbar^2}{2ma_0^2} \left[ \frac{1}{(l+i)^2} - \frac{1}{(l+i+1)^2} \right] = \\ &= -\frac{\hbar^2}{2ma_0^2(n+l+1)^2}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Per  $l = 0$  ricaviamo la nota formula

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2ma_0^2(n+1)^2}. \quad (5.54)$$

Se attuiamo la sostituzione  $\tilde{n} = n + l + 1$ , sapendo che  $l = 0, 1, \dots$  e anche  $n \in \mathbb{N}$ , allora  $n > l$  ed in particolare deriviamo che  $l$  assume al massimo il valore  $l = \tilde{n} - 1$ , ove  $\tilde{n}$  rappresenta, dunque, il numero quantico principale.

Per ogni valore di  $l$  otteniamo un Hamiltoniano di partenza  $H_1$  della gerarchia, l'autostato fondamentale ad esso relativo, secondo la nuova notazione introdotta sarà  $\mathcal{R}_{\tilde{n}, l} = \mathcal{R}_0^{(1)}(r, l)$  con  $\tilde{n} = l + 1$ . Le successive autofunzioni della gerarchia secondo la medesima notazione

saranno  $\mathcal{R}_{\tilde{n}+n,l}$  con  $l$  fissato e  $n$  indice di incremento. La seguente tabella esemplifica il processo costruttivo della gerarchia ed esplicita le autofunzioni che è possibile trovare a partire dall' $n$ -esima fattorizzazione, mediante l'applicazione dell'operatore  $A^\dagger$ .

$l$	$E_0(l)$	$E_1(l)$	...	$E_n(l)$
0	$\mathcal{R}_{10}$	$\mathcal{R}_{20}$	...	$\mathcal{R}_{n+1,0}$
1	$\mathcal{R}_{21}$	$\mathcal{R}_{31}$	...	$\mathcal{R}_{n+2,1}$
2	$\mathcal{R}_{32}$	$\mathcal{R}_{42}$	...	$\mathcal{R}_{n+3,2}$
...	...	...	...	...
$m$	$\mathcal{R}_{m+1,m}$	$\mathcal{R}_{m+2,m}$	...	$\mathcal{R}_{m+n+1,m}$

Analogamente a quanto fatto nel paragrafo precedente troviamo gli autostati relativi alla gerarchia trovata a  $l$  fissato

$$u_0^{(2)}(r, l_2) = N_2 r^{l+2} \exp\left[-\frac{r}{a_0(l+2)}\right], \quad (5.55)$$

$$\begin{aligned} u_1^{(1)}(r, l) &= A^\dagger(r, l) u_0^{(2)}(r, l_2) = \left[-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dr} + W(r, l)\right] u_0^{(2)}(r, l_2) = \\ &= N_2 r^{l+1} \left[1 - \frac{r}{a_0(l+1)(l+2)}\right] \exp\left[-\frac{r}{a_0(l+2)}\right], \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$\mathcal{R}_1^{(1)}(r, l) = N_2 r^l \left[1 + \frac{r}{a_0(l+1)(l+2)}\right] \exp\left[-\frac{r}{a_0(l+2)}\right]. \quad (5.57)$$

Tale autostato si riferisce all'autovalore

$$E_1^{(1)}(l) = -\frac{\hbar^2}{2ma_0^2(l+2)^2}. \quad (5.58)$$

Riportiamo di seguito una tabella contenente i primi autovalori e autostati dell'atomo di idrogeno per l' $l$ -esima gerarchia calcolata.

$E$	autostato
$-\frac{\hbar^2}{2ma_0^2(l+1)^2}$	$\mathcal{R}_{l+1,l} = N_1 r^l \exp\left[-\frac{r}{a_0(l+1)}\right]$
$-\frac{\hbar^2}{2ma_0^2(l+2)^2}$	$\mathcal{R}_{l+2,l} = N_2 r^l \left[1 + \frac{r}{a_0(l+1)(l+2)}\right] \exp\left[-\frac{r}{a_0(l+2)}\right]$

Iterando il processo è ovviamente possibile ricavare in modo semplice tutti gli altri autostati dell'atomo di idrogeno.

# Conclusione

Lo scopo principale di questa tesi è quello di fornire un'introduzione ai metodi della meccanica quantistica supersimmetrica e alle sue applicazioni.

Nonostante la supersimmetria abbia un'immediata applicazione in teorie di campo quantistico essa presenta risultati importanti senza il bisogno di approfondite conoscenze nell'ambito della QFT. La sua applicazione in meccanica quantistica produce, infatti, metodi per risolvere problemi di MQ differenti dagli approcci classici.

Partendo dalla fattorizzazione degli Hamiltoniani, tali metodi permettono di determinare lo spettro e le autofunzioni di un certo Hamiltoniano. L'utilizzo di questi metodi permette, inoltre, di determinare analiticamente autovalori e autofunzioni per un'ampia classe di Hamiltoniani: con potenziali a forma invariante, nella specifica trattazione.

Il formalismo supersimmetrico in MQ permette in casi specifici di ovviare alla risoluzione dell'equazione di Schrödinger: grazie al processo di fattorizzazione, il problema di un'equazione differenziale del secondo ordine si riduce ad una del primo.

Come si è visto, questo metodo, sebbene già utilizzato da tempo ad esempio per risolvere il problema dell'oscillatore armonico quantistico, può essere utile per un ampio range di potenziali.



# Bibliografia

- [1] E. Noether. “Invariante Variationsprobleme”. ger. In: *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* 1918 (1918), pp. 235–257. URL: <http://eudml.org/doc/59024>.
- [2] Yu A Gol’Fand e EP Likhtman. “Extension of the algebra of Poincaré group generators and violation of p invariance”. In: *Supergravities in diverse dimensions. Volume 1*. 1989.
- [3] J. Wess e B. Zumino. “Supergauge Transformations in Four-Dimensions”. In: *Nucl. Phys.* B70 (1974), pp. 39–50. DOI: 10.1016/0550-3213(74)90355-1.
- [4] Sidney Coleman e Jeffrey Mandula. “All Possible Symmetries of the  $S$  Matrix”. In: *Phys. Rev.* 159 (5 lug. 1967), pp. 1251–1256. DOI: 10.1103/PhysRev.159.1251. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.159.1251>.
- [5] E. Schrödinger. “A Method of Determining Quantum-Mechanical Eigenvalues and Eigenfunctions”. In: *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences* 46 (1940), pp. 9–16. ISSN: 00358975. URL: <http://www.jstor.org/stable/20490744>.
- [6] E. Schrödinger. “Further Studies on Solving Eigenvalue Problems by Factorization”. In: *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences* 46 (1940), pp. 183–206. ISSN: 00358975. URL: <http://www.jstor.org/stable/20490756>.
- [7] E. Schroedinger. “The factorization of the hypergeometric equation”. In: *ArXiv Physics e-prints* (ott. 1999). eprint: [physics/9910003](https://arxiv.org/abs/physics/9910003).
- [8] L. Infeld e T. E. Hull. “The Factorization Method”. In: *Reviews of Modern Physics* 23 (gen. 1951), pp. 21–68. DOI: 10.1103/RevModPhys.23.21.
- [9] L. E. Gendenshtein. “Derivation of Exact Spectra of the Schrodinger Equation by Means of Supersymmetry”. In: *JETP Lett.* 38 (1983). [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.38,299(1983)], pp. 356–359.
- [10] Ranabir Dutt, Avinash Khare e Uday P. Sukhatme. “Supersymmetry, shape invariance, and exactly solvable potentials”. In: *American Journal of Physics* 56.2 (1988), pp. 163–168. DOI: 10.1119/1.15697. eprint: <http://dx.doi.org/10.1119/1.15697>. URL: <http://dx.doi.org/10.1119/1.15697>.

- [11] M. F. Sohnius. “Introducing Supersymmetry”. In: *Phys. Rept.* 128 (1985), pp. 39–204. DOI: 10.1016/0370-1573(85)90023-7.
- [12] F. Cooper, A. Khare e U. Sukhatme. “Supersymmetry and quantum mechanics”. In: *Physics Report* 251 (gen. 1995), pp. 267–385. DOI: 10.1016/0370-1573(94)00080-M. eprint: [hep-th/9405029](https://arxiv.org/abs/hep-th/9405029).