

Diese Arbeit wurde vorgelegt am

Institut für fluidtechnische Antriebe und Steuerungen
der RWTH Aachen

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Hubertus Murrenhoff

Masterarbeit

Erstellung eines Simulationsmodells für pneumatische Lamellenmotoren

Bearbeiter:	Joan Vidal Mas
Betreuender wiss. Mitarbeiter:	Stephan Merkelbach, M. Sc.
Fachgebiet:	Simulation, Pneumatik, Lamellenmotor

Aachen, im Januar 2017

Die Arbeit ist nur für den internen Gebrauch bestimmt. Alle Urheberrechte liegen beim IFAS.
Für den Inhalt wird keine Gewähr übernommen.

Aufgabenstellung

Zur Wandlung pneumatischer in mechanische Energie kommen Druckluftmotoren zum Einsatz. Es existieren verschiedene Bauformen wie z.B. Lamellenmotoren und Radialkolbenmotoren. Im Vergleich zu Elektromotoren haben die Luftmotoren ein höheres spezifisches Drehmoment. Sie sind robuster als andere Arten von Motoren und brauchen weniger Wartung. Die Möglichkeit, das Drehmoment und die Drehzahl nur mit dem Eingangsdruck und dem Abluftmassenstrom zu regeln, ist ein weiterer Vorteil. Die verschiedenen Bauformen unterscheiden sich insbesondere durch ihr maximales Drehmoment wobei die Kolbenmotoren das höchste spezifische Drehmoment liefern.

Ziel der Arbeit ist die Erstellung eines Lamellenmotormodells in Matlab/Simulink. Es wird ein mathematisches Modell für einen Motor mit einer veränderlichen Anzahl von Lamellen implementiert. Außerdem werden die Reibung und auch die Leckage berücksichtigt. Es soll ein Modell entwickelt werden, das die Variation von Parametern wie der Anzahl von Lamellen, des Eingangsdruck sowie des Ausgangsdrucks ermöglicht. Berechnet werden die Leistung, das Drehmoment und die Drehzahl des Lamellenmotors. Die Erstellung des Modells erfolgt in Matlab/Simulink. Vor den entsprechenden mathematischen Analysen und der Implementierung wird eine Literaturrecherche über den Stand der Technik von Lamellenmotoren und bisherige Simulationsansätze durchgeführt.

Um die Überprüfung des Modells durchzuführen, wird das Drehmoment eines Lamellenmotors an einem Prüfstand in Abhängigkeit vom Versorgungsdruck und dem zugeführten Luftmassenstrom gemessen. Auf Basis der experimentellen Daten kann das erstellte Modell validiert werden.

Eidesstattliche Versicherung

Name, Vorname

Matrikelnummer

Ich versichere hiermit an Eides Statt, dass ich die vorliegende Masterarbeit mit dem Titel

Erstellung eines Simulationsmodells für pneumatische Lamellenmotoren

selbständig und ohne unzulässige fremde Hilfe erbracht habe. Ich habe keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt. Für den Fall, dass die Arbeit zusätzlich auf einem Datenträger eingereicht wird, erkläre ich, dass die schriftliche und die elektronische Form vollständig übereinstimmen. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Ort, Datum

Unterschrift

Belehrung:**§ 156 StGB: Falsche Versicherung an Eides Statt**

Wer vor einer zur Abnahme einer Versicherung an Eides Statt zuständigen Behörde eine solche Versicherung falsch abgibt oder unter Berufung auf eine solche Versicherung falsch aussagt, wird mit Freiheitsstrafe bis zu drei Jahren oder mit Geldstrafe bestraft.

§ 161 StGB: Fahrlässiger Falscheid; fahrlässige falsche Versicherung an Eides Statt

(1) Wenn eine der in den §§ 154 bis 156 bezeichneten Handlungen aus Fahrlässigkeit begangen worden ist, so tritt Freiheitsstrafe bis zu einem Jahr oder Geldstrafe ein.

(2) Strafflosigkeit tritt ein, wenn der Täter die falsche Angabe rechtzeitig berichtigt. Die Vorschriften des § 158 Abs. 2 und 3 gelten entsprechend.

Die vorstehende Belehrung habe ich zur Kenntnis genommen:

Ort, Datum

Unterschrift

Inhaltsverzeichnis

I	Formelzeichen	5
1	Einleitung.....	9
2	Stand der Technik.....	11
2.1	Geometriemodell.....	12
2.2	Druckverlauf	12
2.3	Dynamik des Systems	12
2.4	Leckage	13
3	Mathematisches Modell.....	14
3.1	Geometriemodell.....	15
3.2	Druckverlauf	23
3.2.1	Berechnung des Wärmeübergangskoeffizienten	26
3.2.2	Rechnung der Fläche „ A_{senk} “	27
3.3	Drehmoment.....	29
3.4	Reibung	30
3.4.1	Berechnung der F_R , F_{R1} und F_{R2} Kräfte.....	30
3.4.2	Dynamik des Systems.....	35
3.5	Leckage	41
3.5.1	Leckage durch den Spalt zwischen Rotor und Endplatten	42
3.5.2	Leckage wegen eines Kontaktverlusts zwischen der Lamelle und dem Stator	52
3.5.3	Leckage durch den Spalt zwischen den Lamellenseiten und den Endplatten	54
3.5.4	Leckage durch den radialen Freiraum zwischen dem Rotor und dem Stator	56
4	Modell in Matlab/Simulink.....	57
4.1	Startpunkt	58
4.2	Lamellenmotor	59
4.2.1	Geometriemodell	59
4.2.2	Leckage.....	60
4.2.3	Druckverlauf.....	64
4.2.4	Druckdifferenz der Lamellen.....	69
4.2.5	Drehmoment	69
4.3	Reibung	70
4.4	Systemdynamik	74
4.4.1	Trägheit.....	74
4.4.2	Dynamik	75
4.4.3	Start-Block.....	75
5	Überprüfung des Modells.....	76
5.1	Druckverlauf einer Kammer	76
5.2	Überprüfung des gesamten Modells.....	77

6	Zusammenfassung und Ausblick.....	82
I.	Literaturverzeichnis	84
II	Abbildungsverzeichnis	86
III	Tabellenverzeichnis	89
IV	Anhang.....	90

I Formelzeichen

R_v	Abstand zwischen dem Mittelpunkt des Rotors und dem Stator	[m]
p_2	Auslassdruck	[Pa]
a	Breite der Lamelle	[m]
M_R	Drehmoment aufgrund der Reibung zwischen Lamellen und Rotor	[N·m]
M	Drehmoment der Druckdifferenz an den Lamellen	[N·m]
p_{0_i}	Druck der Kammer „ i “ einen „ <i>Time-step</i> “ vorher	[Pa]
p	Druck in der Kammer	[Pa]
p_1	Eingangsdruck	[Pa]
Eu	Euler-Zahl	[–]
e	Exzentrizität des Rotors mit dem Stator	[m]
F_s	Federkraft	[N]
A_{vane}	Flächeninhalt der Lamelle	[m ²]
A_r	Flächeninhalt des Rotors	[m ²]
R	Gaskonstante	[J/(K·mol)]

$M_{R_{RS}}$	Geschwindigkeitsabhängiges Reibmoment	[N·m]
V	Kammervolumen	[m ³]
x	Koordinate in der radialen Richtung	[m]
b	Länge der Lamelle	[m]
L	Länge des Rotors	[m]
\dot{m}_{ab}	Leckagemassenstrom ab der Kammer	[-]
\dot{m}_{zu}	Leckagemassenstrom zu der Kammer	[-]
m_l	Masse der Lamelle	[kg]
F_{R1}	Normalkraft wegen des Kontaktpunkts Lamelle-Rotor	[N]
F_{R2}	Normalkraft wegen des Kontaktpunkts Lamelle-Rotor	[N]
F_R	Normalkraft wegen des Kontaktpunkts Lamelle-Stator	[N]
Nu	Nußelt-Zahl	[-]
k	Polytrophenexponent	[-]
Pr	Prandtl-Zahl	[-]
a_n	Radialbeschleunigung	[m/s ²]
R_r	Radius des Rotors	[m]

R_s	Radius des Stators	[m]
μ_R	Reibkoeffizient zwischen der Lamelle und dem Rotor	[-]
μ_S	Reibkoeffizient zwischen der Lamelle und dem Stator	[-]
Re	Reynolds-Zahl	[-]
ε_3	Spalt zwischen den Lamellenseiten und den Endplatten	[m]
ε_2	Spalt zwischen der Lamelle und dem Stator	[m]
ε_1	Spalt zwischen Rotor und Endplatten	[m]
vm	Spezifisches Volumen	[m ³ /kg]
a_t	Tangentialbeschleunigung	[m/s ²]
T_{0_i}	Temperatur der Kammer „ i “ einen „ <i>Time-step</i> “ vorher	[K]
T_w	Temperatur der Wandung	[K]
T_{ab}	Temperatur des Leckagemassenstroms ab der Kammer	[K]
T_{zu}	Temperatur des Leckagemassenstroms zu der Kammer	[K]
T	Temperatur in der Kammer	[K]
J_l	Trägheit der Lamellen	[kg·m ²]
J	Trägheit des Lamellenmotors	[kg·m ²]

J_r	Trägheit des Rotors	$[\text{kg}\cdot\text{m}^2]$
S	Verhältnis zwischen Spalthöhe und Rotorradius	$[-]$
t_{t-1}	Vorheriger Zeitschritt	$[\text{s}]$
λ_1	Wärmeleitfähigkeit	$\text{W}/(\text{m K})$
α	Wärmeübergangskoeffizient	$[-]$
φ_{11}	Winkel des Anfangs des Einlassbereiches	$[\text{°}]$
φ_{01}	Winkel des Anfangs des ersten Auslassbereiches	$[\text{°}]$
φ_{21}	Winkel des Anfangs des zweiten Auslassbereiches	$[\text{°}]$
φ_{12}	Winkel des Endes des Einlassbereiches	$[\text{°}]$
φ_{02}	Winkel des Endes des ersten Auslassbereiches	$[\text{°}]$
φ_{22}	Winkel des Endes des zweiten Auslassbereiches	$[\text{°}]$
φ	Winkelposition der Lamelle	$[\text{°}]$
t_t	Zeitschritt	$[\text{s}]$

1 Einleitung

Obwohl die Verwendung verdichteter Druck als Energie schon bei den Ägyptern benutzt wurde, begann der Einsatz von Druckluft als Werkzeugantriebsmedium erst vor zwei Jahrhunderten. Die erste Anwendung eines Luftmotors fand bei der Konstruktion des Mont-Cenis-Tunnels im Jahr 1857 statt. Eine andere interessante Anwendung geschah 1931, als ein Auto, das in **Bild 1-1** zu sehen ist, durch einen Luftmotor angetrieben wurde. /Rup03/ /Aut14/



Bild 1-1: Erstes mit Pneumatikmotoren angetriebenes Auto /Aut14/

Dank der Erfindung des Lamellenmotors stand ein kleinerer und leichter Antriebsmotor als der Kolbenmotor zur Verfügung. Dies erlaubte es, nicht nur große Maschinen durch Luftmotoren anzutreiben, sondern auch kleinere. Eine der ersten Anwendungen eines Lamellenmotors, kann im Jahr 1952 gefunden werden. J. D. Neuhaus baute das erste Hebezeug, das durch einen Lamellenmotor angetrieben wurde. Wiederholen

Nach mehr als 100 Jahren Entwicklung stehen Lamellenmotoren als unentbehrlicher Antriebstechnologie da. Die einfache Bauweise und der große Drehzahlbereich sichern dem Lamellenmotor viele Einsatzfelder, zum Beispiel in der Lebensmittelindustrie, Papierindustrie und Medizintechnik. /Dep10/

Die wichtigsten Bauteile eines Lamellenmotors sind in **Bild 1-2** dargestellt. Die Lamellen, die um Leckage zu vermeiden durch eine Kraft (Luftdruck oder Feder) gegen den Stator gedrückt werden, teilen das ganze Volumen in Arbeitsräume. Wie in **Bild 1-2** zu sehen ist, ist der Rotor exzentrisch zum Stator angeordnet. Diese Geometrie erlaubt eine Volumenänderung der Kammern durch die Umdrehung des Rotors. Somit kann, nachdem die Kammer vom Einlass abgesperrt wird, ein Expansionsprozess durchgeführt werden. Dieser erzeugt eine Druckdifferenz und damit eine Kraft an der Lamelle. Die Summe der Einzelkräfte jeder Lamelle erzeugt ein Drehmoment in der Drehrichtung des Lamellenmotors. Nach dem Entspannungsprozess wird

die Luft aus der Kammer in die Umgebung abgeführt. Der ganze Prozess ist in **Bild 1-2** dargestellt. /Rup03/

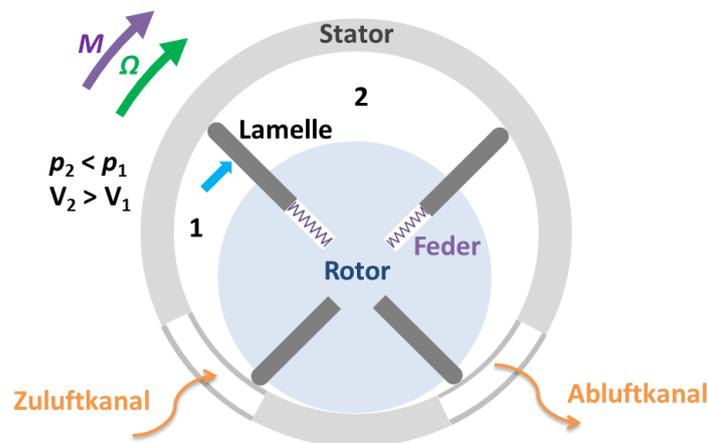


Bild 1-2: Aufbau eines Lamellenmotors

Erwähnenswert ist der negative Einfluss der Leckage und der Reibung in den Lamellenmotoren. Eines der größten Probleme beim Lamellenmotoren ist die kleine Leistung aufgrund der großen Energieverluste durch die Reibung und die innere Leckage des Motors.

In dieser Arbeit wird eine mathematische Modellierung des Lamellenmotors erstellt und eine Übersicht über die Implementierung des mathematischen Modells in Matlab/Simulink gegeben.

2 Stand der Technik

Wie in der Einleitung schon erwähnt wurde, haben Lamellenmotoren Vorteile im Vergleich zu anderen Luftmotoren. Daher wurden diese schon vor vielen Jahren und bis heute weiterentwickelt. Heutzutage werden drei verschiedene Geometrien des Lamellenmotors eingesetzt, die sich in der Anzahl der Anschlüsse und der Symmetrie des Motors unterscheiden (siehe **Bild 2-1**).

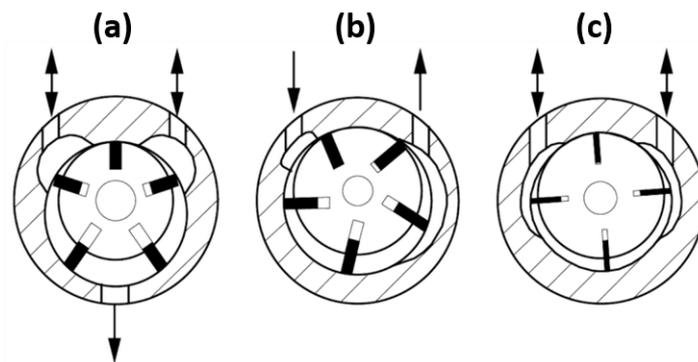


Bild 2-1: Verschiedene Bauformen von Lamellenmotoren /Bea07/

Damit ein Lamellenmotor umkehrbar ist, muss dieser symmetrisch sein ((a) und (c) in **Bild 2-1**). Bauform (b) ist aufgrund der fehlenden Symmetrie nicht umkehrbar. Der Einsatz eines dritten Anschlusses erlaubt die Nutzung der Expansionsenergie des Fluids. Da der in Bild gezeichnete Lamellenmotor mit 3 Anschlussbogen symmetrisch ist, ist dieser umkehrbar. /Bea07/

Auch wenn die Existenz eines Lamellenmotors schon am 1909 gefunden werden kann, wurden die ersten mathematischen Modelle erst ab 1985 erstellt. Obwohl kein generelles Modell des gesamten Motors in der Literatur zu finden ist, sind folgende Modelle von Teilen des Lamellenmotors erstellt worden: /Spi08/

- Geometriemodell
- Druckverlauf
- Dynamik System
- Leckage

2.1 Geometriemodell

Da die Geometrie der Kammern des Lamellenmotors komplex zu beschreiben ist, existiert eine Vielzahl von Artikeln, in denen dieses Thema behandelt wird. Erwähnenswert sind die zwei Methoden die am häufigsten eingesetzt werden. Einerseits kann das Volumen jeder Kammer durch die Integration des Abstands zwischen Rotor und Stator erfolgen. Diese Methode kommt in der vorliegenden Arbeit zum Einsatz. Andererseits gibt es die Möglichkeit das Volumen durch Fourierreihen anzunähern. /Cha10/ /Xin08/

2.2 Druckverlauf

Der Druckverlauf ist stark von der Leckage abhängig. In der Literatur wird der Druckverlauf in den Kammern meist unter Vernachlässigung der Leckage durch Verwendung der Polytropengleichungen abgeschätzt. /Cha10/

Zur Berechnung des Druckes in den Kammern eines Lamellenmotors unter Betrachtung der Leckage ist keine Literatur zu finden. Die Berechnung des Druckverlaufs mit Leckage erfolgt nach /Mur14/.

Wie beim Geometriemodell gibt es zur Berechnung des Kammerdrucks ohne Betrachtung der Leckage die Möglichkeit einer Näherung durch Fourierreihen. /Xin08/

2.3 Dynamik des Systems

Eine Studie zur Berechnung der Reibung im Lamellenmotor wurde in /Man01/ durchgeführt. In diesem Artikel werden acht mögliche Weisen des Verkippens der Lamelle beschrieben und wie die sich ergebenden Normalkräfte aufgrund des Kontaktes zwischen der Lamelle und dem Rotor/Stator berechnet werden können. Erwähnenswert ist, dass dieses Modell nur einen Freiheitsgrad betrachtet, während die Lamelle in der realen Anwendung zwei Freiheitsgrade aufweist.

Einen Überblick über die Dynamik des Systems kann in /Cha10/ gefunden werden. Dort wird der Drallsatz eingesetzt, um die Beschleunigung des Motors zu berechnen. Da es ein vereinfachtes Modell ist, werden die Reibkräfte zwischen Rotor und Lamellen, das Verkippen der Lamellen und die Trägheit vernachlässigt. Außerdem wird die Dynamik des Systems mit nur einem Freiheitsgrad definiert, was wie schon erwähnt wurde, nicht der Realität entspricht

Das Drehmoment wird in der ganzen Literatur mit der Druckdifferenz an den Lamellen modelliert /Ioa87/. Es gibt aber eine Ausnahme, wo es durch Fourierreihen angenähert wird. /Xin08/

2.4 Leakage

Mit dem größten Einfluss auf die Leistung des Lamellenmotors haben Leckageverluste. Allerdings finden sich hierzu nur wenige Studien in der Literatur. Das detaillierteste mathematische Modell wurde von O. Badr erstellt. In diesem werden vier Leckagepfade betrachtet. Teile dieses Modells werden in dieser Arbeit benutzt. Viele der Gleichungen des Modells sind nicht für beliebige Lamellenmotoren extrapolierbar, da die Leckagemassenströme mit Parametern definiert wurden, die abhängig vom untersuchten Fluid und der Geometrie des Lamellenmotors sind. Daher kann dieses Modell nicht vollständig in der Arbeit eingesetzt werden. /Bad85/

3 Mathematisches Modell

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Modell in Matlab/Simulink um die Leistung, Drehzahl und Drehmoment für einen N-Lamellenmotor zu berechnen aufgebaut. Dieses Modell ist in den folgenden Subsystemen aufgeteilt:

- Geometriemodell (Kammervolumina)
- Druckverlauf
- Drehmoment
- Systemdynamik
- Reibung
- Leckage

Diese Subsysteme wurden erst mathematisch modelliert und später in Simulink implementiert. In **Bild 3-1** ist ein Flussdiagramm des Modells dargestellt. Als Eingangswerte dienen die Winkelpositionen der n Lamellen an. Daraus werden durch das Geometriemodell die Volumina der Kammern berechnet. Aus dem Kammervolumen und dem Leckagemassenstrom kann der Kammerdruck berechnet werden. Damit kann ein ideales Moment berechnet werden, das schon die Leckage aber keine Reibung betrachtet. Deswegen muss auch die Reibung durch mechanische Ansätze definiert werden, um das reale Drehmoment, das Leckage und Reibung betrachtet, zu berechnen. Zum Ende wird eine neue Winkelbeschleunigung berechnet.

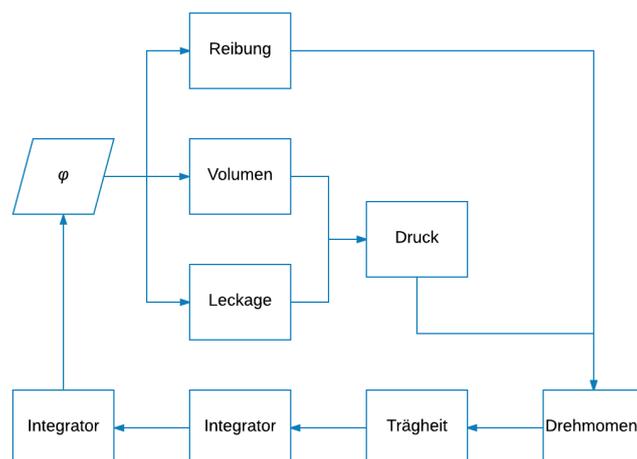


Bild 3-1: Flussplan durch alle Subsysteme des mathematischen Modells

In den nächsten Unterkapiteln wird die mathematische Modellierung der ganzen Teile beschrieben.

3.1 Geometriemodell

Im Geometriemodell wird das Volumen der Kammer für beliebige Winkelpositionen der Lamelle berechnet.

Die Berechnung der Fläche einer Kurve in Polarkoordinaten wird nach /Sev10/ durch **Gl. 3-1** definiert. /Sev10/

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r(\theta)^2 d\theta \quad \text{Gl. 3-1}$$

Zunächst Als erstens werden die Radien R_{v1} , R_{v2} , R_{v3} und R_{v4} (siehe **Bild 3-2**), folgendermaßen berechnet (**Gl. 3-2** bis **Gl. 3-4**):

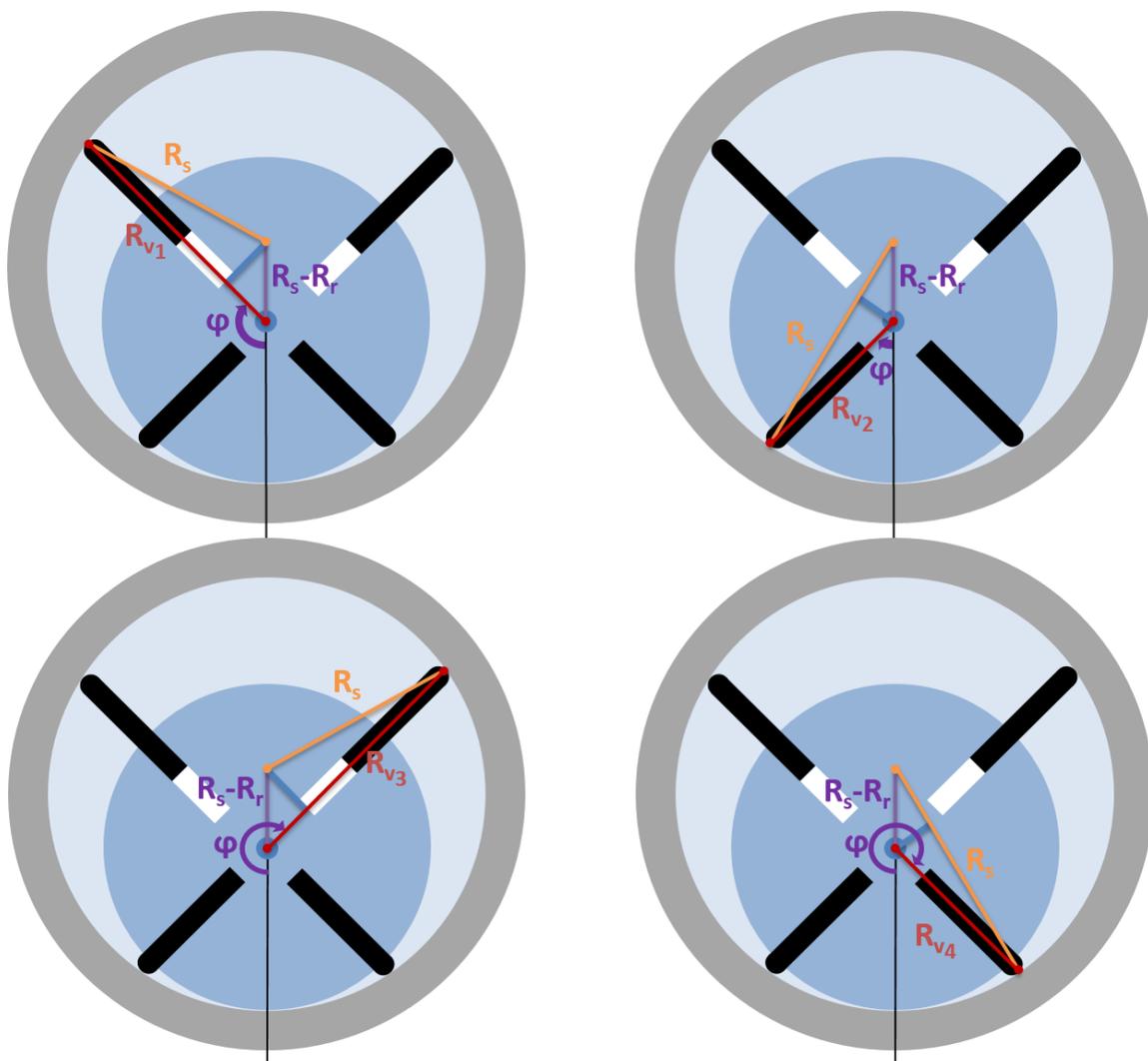


Bild 3-2: Darstellung des Radius jeden Quadranten des Motors

$$R_{v_1}(\varphi) = e \cdot \cos(180 - \varphi) + \sqrt{R_s^2 - (e \cdot \sin(180 - \varphi))^2} =$$

$$-e \cdot \cos(\varphi) + \sqrt{R_s^2 - (e \cdot \sin(\varphi))^2} \quad \text{Gl. 3-2}$$

$$R_{v_2}(\varphi) = -e \cdot \cos(\varphi) + \sqrt{R_s^2 - (e \cdot \sin(\varphi))^2} \quad \text{Gl. 3-3}$$

$$R_{v_3}(\varphi) = e \cdot \cos(\varphi - 180) + \sqrt{R_s^2 - (e \cdot \sin(\varphi - 180))^2} =$$

$$-e \cdot \cos(\varphi) + \sqrt{R_s^2 - (-e \cdot \sin(\varphi))^2} =$$

$$-e \cdot \cos(\varphi) + \sqrt{R_s^2 - (e \cdot \sin(\varphi))^2} \quad \text{Gl. 3-4}$$

$$R_{v_4} = -e \cdot \cos(360 - \varphi) + \sqrt{R_s^2 - (e \cdot \sin(360 - \varphi))^2}$$

$$-e \cdot \cos(\varphi) + \sqrt{R_s^2 - (-e \cdot \sin(\varphi))^2} =$$

$$-e \cdot \cos(\varphi) + \sqrt{R_s^2 - (e \cdot \sin(\varphi))^2} \quad \text{Gl. 3-5}$$

Wie in **Bild 3-2** und den Gleichungen **Gl. 3-2** bis **Gl. 3-4** zu erkennen, wird der Radius für jeden Quadranten gleich definiert.

Folglich wird der Flächeninhalt mit **Gl. 3-1** berechnet, die aufgrund des Wurzelterms zwei verschiedene Lösungen hat. In **Bild 3-3** ist dargestellt, welche Lösung für die jeweiligen Quadranten angewendet wird.

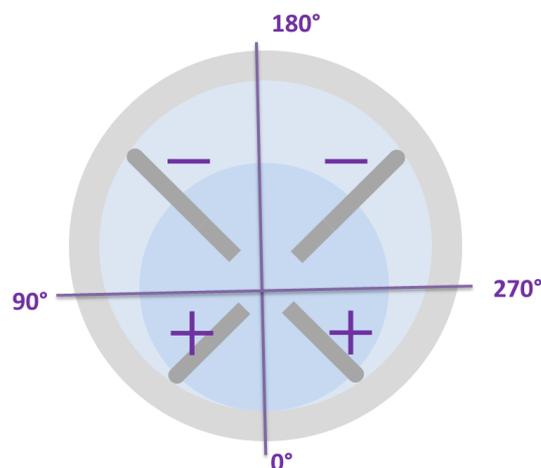


Bild 3-3: Angewendete Lösung für den Wurzelterm in jedem Quadranten

Die Berechnung der Fläche mit der positiven Lösung der Quadratwurzel ist in **Gl. 3-6** dargestellt.

$$\begin{aligned}
 A_+ &= \frac{1}{2} \int_{\varphi-2\cdot\pi/N}^{\varphi} R_v(\varphi)^2 d\varphi = \\
 &\frac{1}{2} \int_{\varphi-2\cdot\pi/N}^{\varphi} \left(d \cdot \cos(\varphi) + \sqrt{R_s^2 - (e \cdot \sin(\varphi))^2} \right)^2 d\varphi = \\
 &\frac{1}{2} \int_{\varphi-2\cdot\pi/N}^{\varphi} \left((e \cdot \cos(\varphi))^2 + R_s^2 - (e \cdot \sin(\varphi))^2 + 2 \cdot e \cdot \cos(\varphi) \cdot \right. \\
 &\quad \left. \sqrt{R_s^2 - (e \cdot \sin(\varphi))^2} \right) d\varphi = \\
 &\frac{1}{2} \int_{\varphi-2\cdot\pi/N}^{\varphi} \left(e^2 \cdot (\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)) + R_s^2 + 2 \cdot d \cdot \cos(\varphi) \cdot \right. \\
 &\quad \left. \sqrt{R_s^2 - (e \cdot \sin(\varphi))^2} \right) d\varphi = \\
 &\frac{1}{2} \int_{\varphi-2\cdot\pi/N}^{\varphi} \left(e^2 \cdot \cos(2 \cdot \varphi) + R_s^2 + 2 \cdot e \cdot \right. \\
 &\quad \left. \sqrt{R_s^2 \cdot \cos^2(\varphi) - (d \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi))^2} \right) d\varphi = \\
 &\frac{1}{2} \int_{\varphi-2\cdot\pi/N}^{\varphi} \left(e^2 \cdot \cos(2 \cdot \theta) + R_s^2 + 2 \cdot e \cdot \right. \\
 &\quad \left. \sqrt{R_s^2 \cdot \cos^2(\varphi) - e^2 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{\cos(4 \cdot \varphi)}{8} \right)} \right) d\varphi = \\
 &\frac{1}{2} \int_{\varphi-2\cdot\pi/N}^{\varphi} \left(e^2 \cdot \cos(2 \cdot \varphi) + R_s^2 + 2 \cdot e \cdot \right. \\
 &\quad \left. \sqrt{R_s^2 \cdot \left(\frac{1+\cos(2 \cdot \varphi)}{2} \right) - e^2 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{\cos(4 \cdot \varphi)}{8} \right)} \right) d\varphi
 \end{aligned}$$

Gl. 3-6

Analog erfolgt die Berechnung der „negativen Lösung“ mit **Gl. 3-7**.

$$\begin{aligned}
 A_- &= \frac{1}{2} \int_{\varphi-2\cdot\pi/N}^{\varphi} R_v(\varphi)^2 d\varphi = \\
 &\frac{1}{2} \int_{\varphi-2\cdot\pi/N}^{\varphi} \left(e \cdot \cos(\varphi) - \sqrt{R_s^2 - (e \cdot \sin(\varphi))^2} \right)^2 d\varphi = \dots = \\
 &\frac{1}{2} \int_{\varphi-2\cdot\pi/N}^{\varphi} \left(e^2 \cdot \cos(2 \cdot \varphi) + R_s^2 - 2 \cdot e \cdot \right. \\
 &\quad \left. \sqrt{R_s^2 \cdot \left(\frac{1+\cos(2 \cdot \varphi)}{2} \right) - e^2 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{\cos(4 \cdot \varphi)}{8} \right)} \right) d\varphi
 \end{aligned}$$

Gl. 3-7

Im Fall, dass das Kammervolumen sich nicht nur in einem Quadranten befindet, muss die Fläche mit zwei Teilintegralen berechnet werden. **Bild 3-4** zeigt die vier möglichen Fälle, in denen das Kammervolumen eine Quadratengrenze einschließt. Der Fall, dass das Volumen drei Quadranten einschließt, ist nicht betrachtet, da es sich in diesem um einen Motor mit nur einer Lamelle handeln würde.

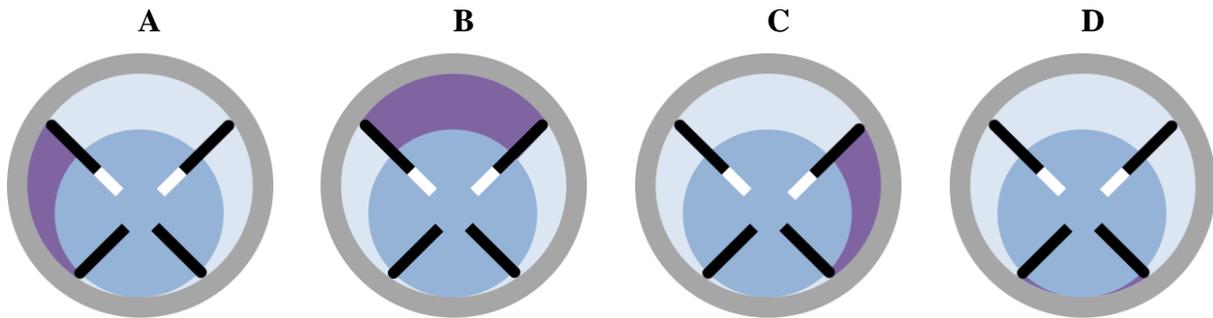


Bild 3-4: Fälle in denen die Kammer zwei Quadranten einschließt.

Tabelle 3-1 zeigt, wie die Berechnung des Flächeninhalts für die Fälle A-D erfolgt:

Tabelle 3-1: Definition des Flächeninhalts für jeden Fall. Das Zeichnen unter den Komponenten hinweist auf die angewendete Lösung des Wurzelterms

FALL	RECHNUNG DER FLÄCHE
A	$A = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\varphi-2\pi/N}^{\pi/2} R_v(\varphi)^2 d\varphi}_{+} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\varphi} R_v(\varphi)^2 d\varphi}_{-}$
B	$A = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\varphi-2\pi/N}^{\varphi} R_v(\varphi)^2 d\varphi}_{-}$
C	$A = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\varphi-2\pi/N}^{3\pi/2} R_v(\varphi)^2 d\varphi}_{-} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{3\pi/2}^{\varphi} R_v(\varphi)^2 d\varphi}_{+}$
D	$A = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\varphi-2\pi/N}^{\varphi} R_v(\varphi)^2 d\varphi}_{+}$

Wie zuvor erläutert, wird mit **Gl. 3-1** nicht der reale Flächeninhalt der Kammern sondern die in **Bild 3-5** dargestellte Fläche berechnet. Die „reale Fläche“, die am Ende des Geometriemodells ermittelt werden soll, ist in der rechten Seite des **Bild 3-5** zu sehen.



Bild 3-5: Darstellung des berechneten Flächeninhalts mit **Gl. 3-1** und die „reale Fläche“ der Kammer

Daher wird zunächst die Rotorfläche mit **Gl. 3-8** subtrahiert.

$$A_r = A - \pi \cdot R_r^2 \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{N}\right) \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \pi}\right) = A - \frac{\pi \cdot R_r^2}{N} \quad \text{Gl. 3-8}$$

Damit ergibt sich die im **Bild 3-6** gezeichnete Fläche.

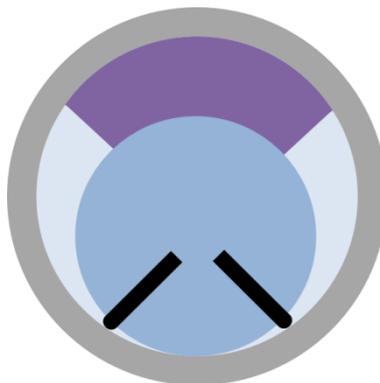


Bild 3-6: Berechnetes Flächeninhalt mit der Betrachtung des Rotors

Als letztes werden die Hälfte der Flächen von den angrenzenden Lamellen, die in **Bild 3-7** orange gezeichnet sind, berechnet und von A_r subtrahiert.

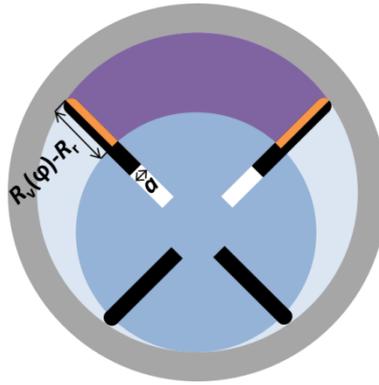


Bild 3-7: Zeichnung der für die Berechnung der Querschnittsfläche der Kammer notwendigen Flächen

Um die Lamellenfläche zu ermitteln, wird es als ein Rechteck mit der Addierung eines vierteln Kreises berechnet (siehe **Gl. 3-9**).

$$A_{\text{vane}_i}(\varphi) = \left(R_v(\varphi) - R_r - \frac{a}{2} \right) \cdot \frac{a}{2} + \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{a}{2} \right)^2 \tag{Gl. 3-9}$$

Wenn es aber der Fall ist, dass nur der abgerundete Teil der Lamelle zwischen den Kammern liegt, wird die Berechnung der Fläche nach **Gl. 3-10** näherungsweise als Rechteckfläche erfolgt.

$$A_{\text{vane}_i}(\varphi) = \frac{(R_v(\varphi) - R_r) \cdot a}{2} \tag{Gl. 3-10}$$

Die beiden Fälle um die Fläche der Lamelle zu berechnen, sind mit den entsprechenden mathematischen Bedingungen in **Bild 3-8** zu sehen. Erwähnenswert ist, dass $R_v(\varphi) - R_r$ der Abstand zwischen dem Rotor und Stator definiert und der Endradius, der Radius vom abgerundeten Teil der Lamelle ist.

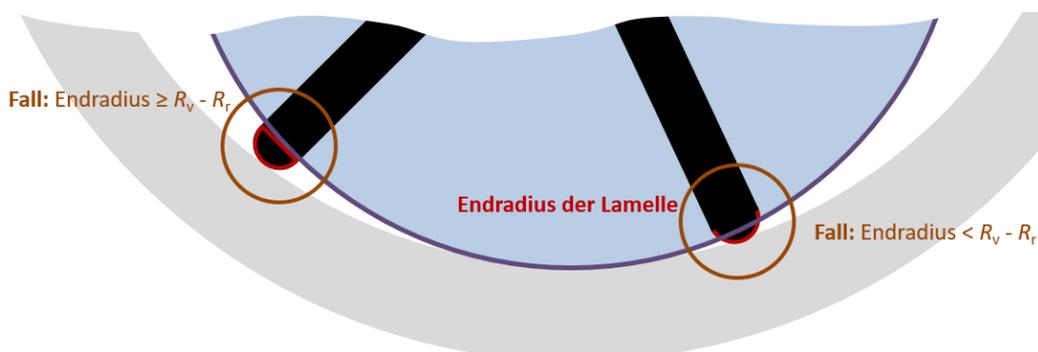


Bild 3-8: Zwei mögliche Fälle um die Lamellenfläche zu berechnen

Um die „reale Fläche“ des **Bild 3-5** zu ermitteln, müssen, wie in **Gl. 3-11** dargestellt ist, zwei Lamellenflächen berechnet werden.

$$A_{\text{vane}} = A_{\text{vane}_i}(\varphi) + A_{\text{vane}_i}\left(\varphi - \frac{2\pi}{N}\right) \quad \text{Gl. 3-11}$$

Zur Berechnung des Kammervolumens wird zuletzt die Querschnittsfläche mit der Länge des Stators multipliziert.

In diesem Zusammenhang ist zu beachten, dass der Flächeninhalt mit der Hypothese, dass der Kontakt der Lamelle mit dem Stator genau in der Mitte der Lamelle stattfindet, definiert wurde. Wie in **Bild 3-9** zu sehen ist, ist diese Vereinfachung nur für $\varphi=180^\circ$ richtig. Da der Fehler sehr klein ist, kann diese Vereinfachung getroffen werden, um das Modell zu vereinfachen, und die Rechenzeit des Modells nicht zu erhöhen.

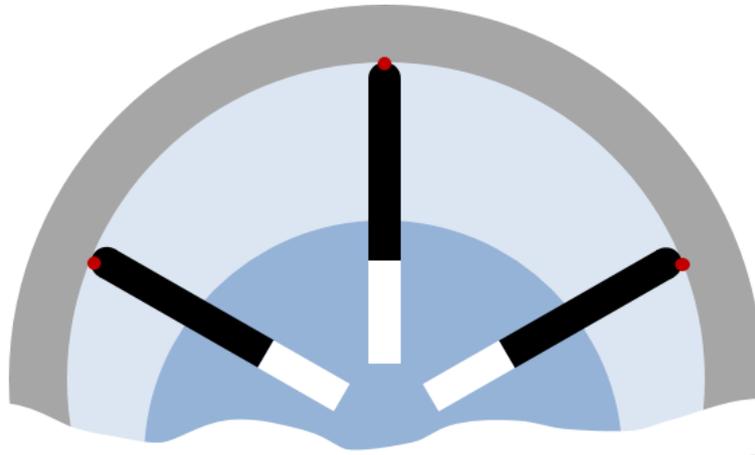


Bild 3-9: Kontaktpunkte der Lamellen mit dem Stator

Mit diesem Geometriemodell ergibt sich der in **Bild 3-10** dargestellte Verlauf des Kammervolumens über die Drehung:

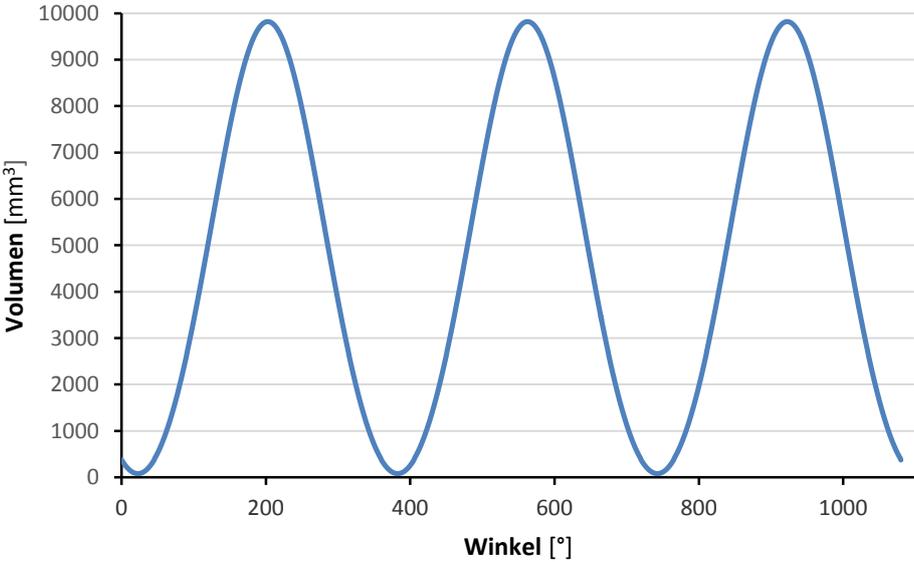


Bild 3-10: Verlauf des Kammervolumens für den 8-Lamellenmotor des Prüftands

3.2 Druckverlauf

Um den Druckverlauf zu berechnen, sind die sechs in **Bild 3-11** dargestellten kritischen Fälle zu betrachten.

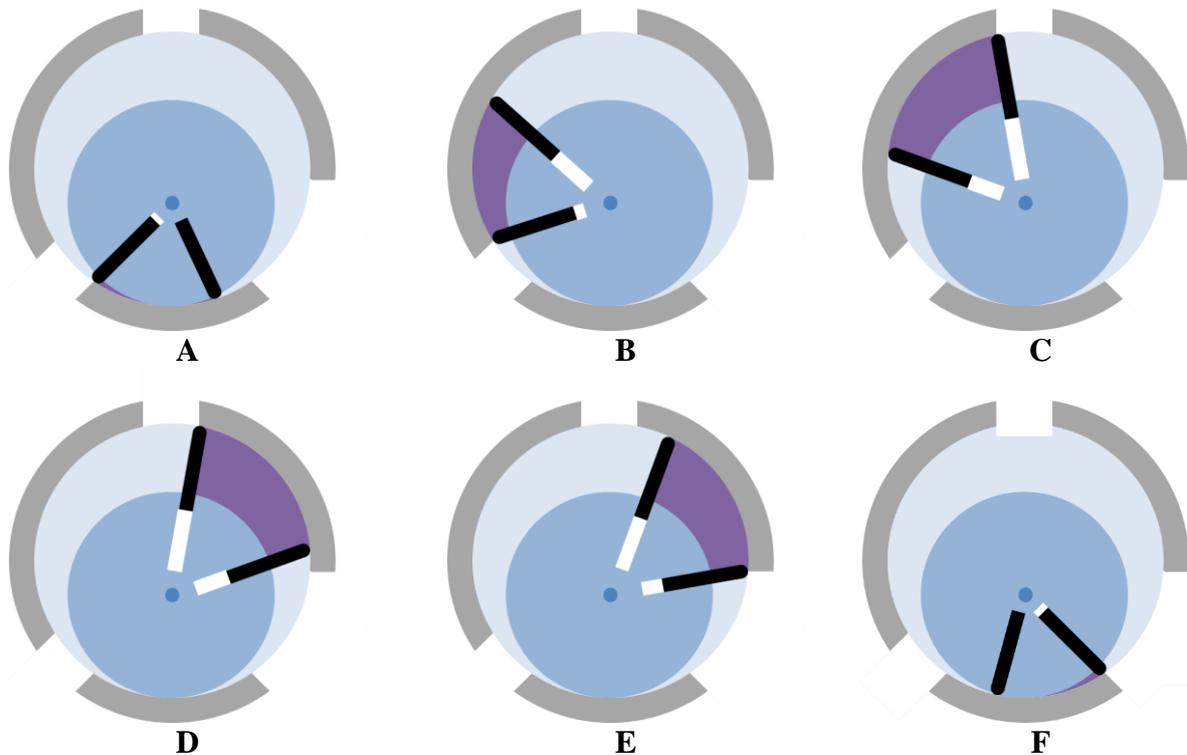


Bild 3-11: Darstellung der betrachteten Fälle

Zwischen A und B wird die Kammer mit Druckluft befüllt. In diesem Teil ist der Druck in der Kammer bekannt und hat den gleichen Wert wie der Versorgungsdruck. Nachdem die Position B erreicht ist, muss der Druck berechnet werden. Ab C ist der Druck wieder konstant. Ein Kompressionsprozess folgt D bis E. In diesem Fall ist auch der Druck unbekannt und muss wieder berechnet werden. Ein konstanter Druckprozess folgt E bis F. Als allerletztes kann sich auch wieder einen Kompressionsprozess ergeben, wo der Druck wieder unbekannt ist, und berechnet werden soll. Wenn die Führungslamelle wieder A erreicht, fängt der Prozess neu an. Im **Bild 3-12** kann das ganze Prozess synthetisiert gefunden werden. /Bea07/

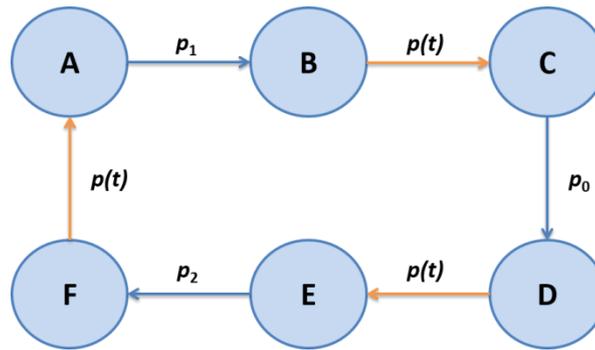
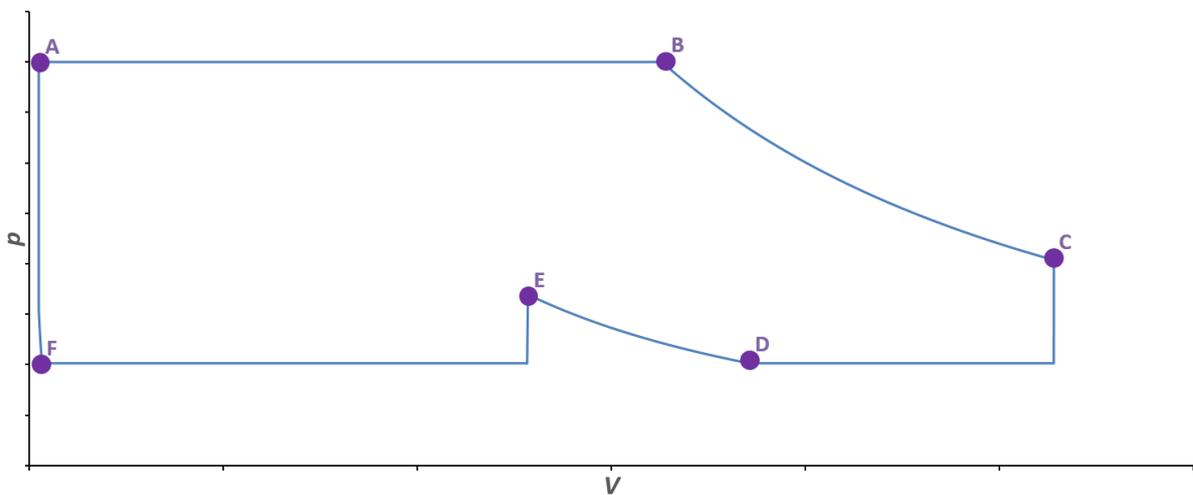


Bild 3-12: Flussdiagramm des Druckverlaufs

Mit diesem Druckverlauf entsteht das folgende qualitative p - V -Diagramm für einen Lamellenmotor.

Bild 3-13: p - V -Diagramm eines Lamellenmotors

Zur Berechnung der Druckverläufe B-C, D-E und F-A können die Isentropengleichungen in diesem Fall nicht verwendet werden, da die Masse im Kontrollvolumen wegen der Leckage nicht konstant ist. Deswegen werden der 1. Hauptsatz der Thermodynamik für offene Systeme und die ideale Gasgleichung herangezogen. Die Druckänderung kann mit drei additiven Anteilen beschrieben werden. /Mur14/

$$\dot{p} = \dot{p}_m + \dot{p}_{WÜ} + \dot{p}_V$$

Gl. 3-12

Die erste Variable „ \dot{p}_m “ definiert die Drückänderung, der durch die Massenströme bzw. wegen der Leckage erfolgt. „ \dot{p}_m “ wird nach **Gl. 3-13** berechnet.

$$\dot{p}_m = \frac{k-1}{V} \cdot R \cdot [\sum(\dot{m}_{zu} \cdot T_{zu}) + \sum(\dot{m}_{ab} \cdot T_{ab})] \quad \text{Gl. 3-13}$$

Den Energieaustausch in Form von Wärme zwischen den Lamellenmotor und die Umgebung wird mit dem zweiten Term beschrieben. (Die Rechnung der α befindet sich auf Seite 26 und der Fläche „ A_{senk} “ auf Seite 27).

$$\dot{p}_{W\ddot{U}} = \frac{k-1}{V} [\alpha \cdot (T_w - T) \cdot A_{senk}] \quad \text{Gl. 3-14}$$

An letzter Stelle wird die Volumenänderungsarbeit mit **Gl. 3-15** definiert:

$$\dot{p}_V = -\frac{k}{V} \cdot p \cdot \dot{V} \quad \text{Gl. 3-15}$$

Nachdem der Druck bekannt ist, kann die Temperatur mit der idealen Gasgleichung berechnet werden. Hierfür wird die ideale Gasgleichung nach der Temperatur aufgelöst und partiell nach allen zeitabhängigen Variablen abgeleitet

$$\dot{T} = \frac{\dot{p}}{p} \cdot T + \frac{\dot{V}}{V} \cdot T - \dot{m} \cdot \frac{R \cdot T^2}{p \cdot V} \quad \text{Gl. 3-16}$$

Die Implementierung der Differentialgleichungen im Model ist nicht trivial. Die Druckänderung ist abhängig vom Druck aber auch von der Temperatur. Außerdem, wie im **Absatz 3.5** beschrieben, ist die Änderung des Massenstroms in einer Kammer abhängig vom Druck und Temperatur in den angrenzenden Kammern (siehe **Bild 3-14**).

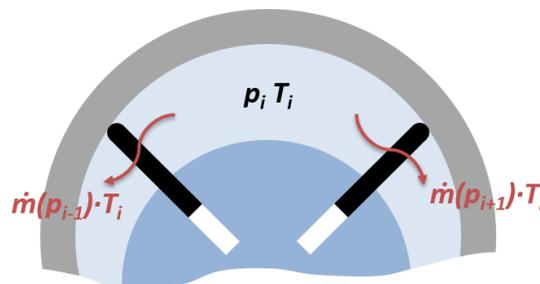


Bild 3-14: Beispiel der Abhängigkeit einer Kammer mit den Beiderseitigen.

Deswegen kann nicht jede Kammer mit einer einzigen Differentialgleichung gelöst werden, da der Druck in der Kammer „ i “, abhängig vom Druck und Temperatur der Kammern „ $i+1$ “ und „ $i-1$ “ ist. Um die Komplexität und die Rechenzeiten zu reduzieren, ist eine Vereinfachung notwendig. Es wird angenommen, dass der Differenzdruck zwischen $p(t=t_i)$ und $p(t=t_i + t_{\text{time-step}})$ vernachlässigbar ist. Damit kann jeder Kammerdruck mit einer Differentialgleichung berechnet werden, ohne ein Differentialsystem zu lösen. Die Gleichungen für die Berechnung des Drucks und Temperatur in einer Kammer ergeben sich zu **Gl. 3-18** und **Gl. 3-19**:

$$\dot{p}_i = \dot{p}_{m_i} + \frac{k-1}{V_i} [\alpha_i \cdot (T_w - T_{0_i}) \cdot A_i] - \frac{k}{V_i} \cdot p_i \cdot \dot{V}_i \quad p_i(t_0) = p_{0_i} \quad \text{Gl. 3-17}$$

$$\dot{T}_i = \frac{\dot{p}_i}{p_i} \cdot T_i + \frac{\dot{V}_i}{V_i} \cdot T_i - \dot{m}_i \cdot \frac{R \cdot T_i^2}{p_i \cdot V_i} \quad T_i(t_0) = T_{0_i} \quad \text{Gl. 3-18}$$

Von diesen Gleichungen sind alle Variablen bekannt, außer \dot{m}_{zu} , \dot{m}_{ab} , α und A . Die Berechnung der Massenströme wird im **Absatz 3.5** beschrieben.

3.2.1 Berechnung des Wärmeübergangskoeffizienten

Der Wärmeübergangskoeffizient kann aus der Nußelt-Zahl ermittelt werden. Die Nußelt-Zahl ist eine dimensionslose Kennzahl aus der Ähnlichkeitstheorie der Wärmeübertragung, die zur Beschreibung des konvektiven Wärmeübergangs zwischen einer festen Oberfläche und einem strömenden Fluid dient. Die Nußelt-Zahl berechnet sich nach Gl. 3-19: /Fis13/

$$Nu = \alpha \cdot \frac{L}{\lambda_1} \quad \text{Gl. 3-19}$$

Gelingt es, die Nußelt-Zahl zu ermitteln, so kann der Wärmeübergangskoeffizient α berechnet werden. Da die Nußelt-Zahl eine Funktion der Reynolds-Zahl und der Prandtl-Zahl ist (siehe **Gl. 3-20**), kann diese berechnet werden, und damit dem Wärmeübergangskoeffizient ermitteln.

$$Nu = C \cdot Re^m \cdot Pr^n \quad \text{Gl. 3-20}$$

Im vorliegenden Modell wird die Dittus-Boelter Gleichung eingesetzt. /Sha02/

$$Nu = 0.023 \cdot Re^{0.8} \cdot Pr^{0.3} \quad \text{Gl. 3-21}$$

Um die Dittus-Boelter Gleichungen einsetzen zu können sind folgende Bedingungen notwendig: Glatte Fläche und turbulente Strömung. Da der Lamellenmotor in großen Drehzahlen arbeitet und die Fläche des Stators eine gute Fertigung der Oberfläche hat, sind die beiden Bedingungen in diesem Fall erfüllt und damit können die Dittus-Boelter Gleichungen eingesetzt werden.

3.2.2 Rechnung der Fläche „ A_{senk} “

Da der Umfang einer Kammer des Lamellenmotors vom Winkel abhängig ist (siehe **Bild 3-15**), muss die Fläche „ A_{senk} “ nach **Gl. 3-31** berechnet werden:

$$A_{\text{senk}} = U(\varphi) \cdot L = \left(\int_{\varphi-2\pi/N}^{\varphi} \sqrt{R_v(\varphi) + \dot{R}_v(\varphi)} d\varphi \right) \cdot L \quad \text{Gl. 3-22}$$

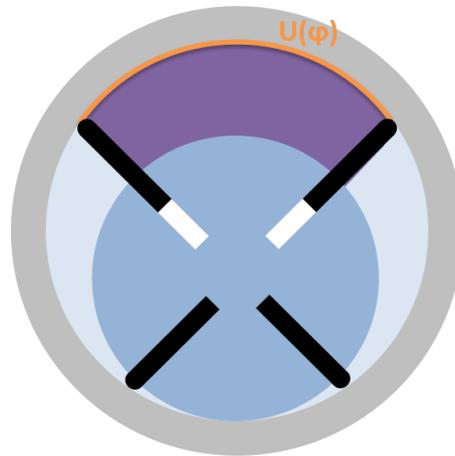


Bild 3-15: Geometriemodell des Motors

Da so einer Operation einen sehr kleinen Einfluss an der Rechenzeit des Modells hat, wird die Berechnung des Umfangs vereinfacht. Anstatt die Fläche „ A_{senk} “ mit dem Umfang der Kammer zu berechnen, wird es mit dem Umfang eines Kreises, dessen Radius das Mittelwertsatz des Radius des Rotors und Stators ist, ermittelt. So kann die Fläche näherungsweise nach **Gl. 3-23** berechnet werden.

$$A_{\text{senk}} = \left(\frac{2\pi}{N} \cdot \frac{R_s + R_r}{2} \right) \cdot L \quad \text{Gl. 3-23}$$

Mit dem vorgestellten mathematischen Modell ergeben sich folgende Druckverläufe:

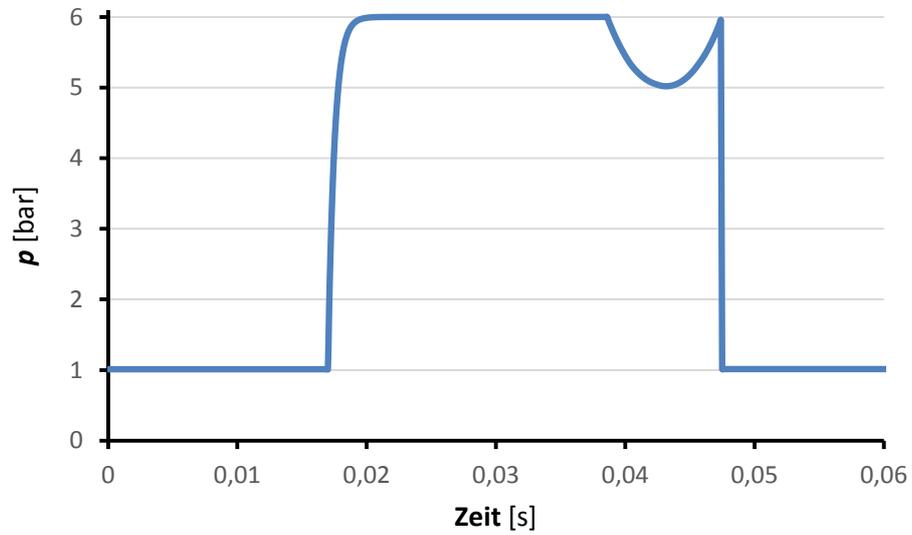


Bild 3-16: Druckverlaufs einer Kammer für einen 8-Lamellenmotor mit der gleichen Geometrie des Motors am Prüfstand

3.3 Drehmoment

Nachdem der Druck in den Kammern bekannt ist, kann das vom Rotor abgegebene Drehmoment berechnet werden. Dieses setzt sich aus den Einzelmomenten, die durch Druckdifferenzen über die Lamellen erzeugt werden, zusammen. Die Rechnung der Einzelmomente erfolgt mit **Gl. 3-24**:

$$M_i = \Delta p_i \cdot A_i \cdot d_i = (p_i - p_{i+1}) \cdot A_i \cdot d_i = F_i \cdot d_i \quad \text{Gl. 3-24}$$

Die Parameter der Gleichung sind in **Bild 3-17** dargestellt.

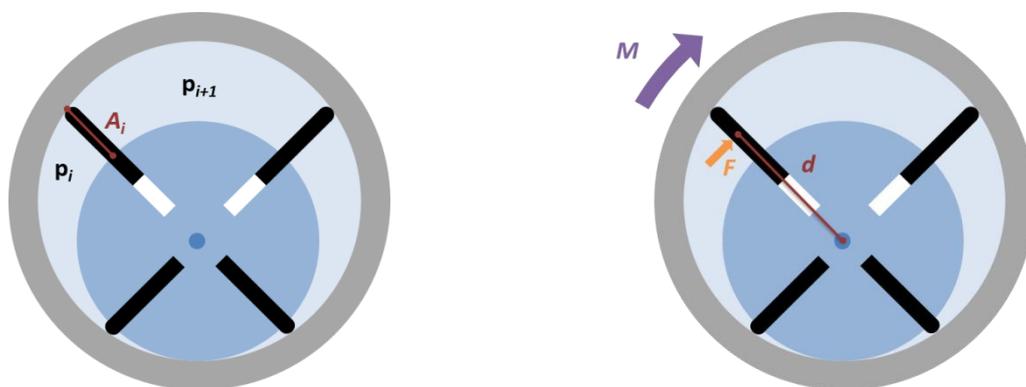


Bild 3-17: Parameter für die Berechnung des Drehmoments

Die wirksame Lamellenfläche und die Länge in Abhängigkeit vom Winkel können geometrisch nach **Gl. 3-25** und **Gl. 3-26** berechnet werden.

$$d_i(\varphi) = \frac{(R_v(\varphi) - R_r)}{2} + R_r = \frac{(R_v(\varphi) + R_r)}{2} = \frac{-e \cdot \cos(\varphi) + \sqrt{R_s^2 - (d \cdot \sin(\varphi))^2} + R_r}{2} \quad \text{Gl. 3-25}$$

$$A_i(\varphi) = (-e \cdot \cos(\varphi) + \sqrt{R_s^2 - (d \cdot \sin(\varphi))^2} - R_r) \cdot L \quad \text{Gl. 3-26}$$

Wie vorher erwähnt wurde, entsteht das vom Rotor abgegebene Moment aus den Einzelmomenten der Lamellen, vergleiche **Gl. 3-28**.

$$M = \sum_{i=1}^N M_i \quad \text{Gl. 3-27}$$

3.4 Reibung

Das in **Kapitel 3.3** errechnete Drehmoment ist ein sehr vereinfachtes Modell der Realität. Jedoch muss an allen Kontaktstellen Reibung berücksichtigt werden. Im Modell werden Die Kontakte zwischen Lamelle-Rotor, Lamelle-Stator und Rotor-Stator betrachtet. Diese sind in **Bild 3-18** gezeigt.

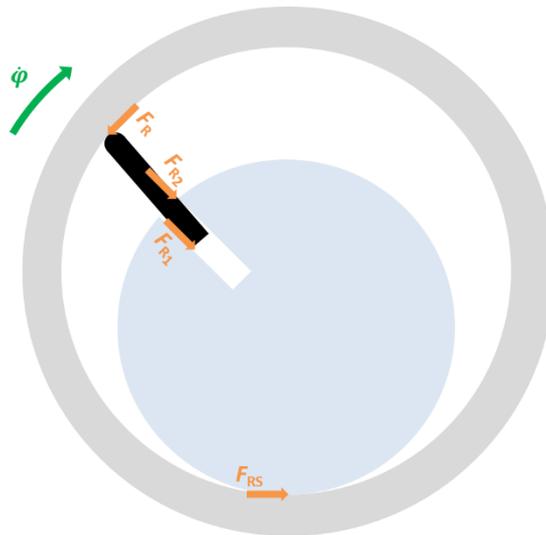


Bild 3-18: Darstellung der Reibkräfte

3.4.1 Berechnung der F_R , F_{R1} und F_{R2} Kräfte

Zunächst werden die Kräfte F_R , F_{R1} und F_{R2} ermittelt. Hierbei werden einige Vereinfachungen vorgenommen. Wegen der Exzentrizität ist der Kontakt zwischen der Lamelle und dem Stator nicht immer in der Spitze. Um das Gleichungssystem zu vereinfachen, wird angenommen, dass dieser Kontakt immer in der Spitze der Lamelle stattfindet. Die zweite Annahme ist, dass die Lamellen starr sind, und der Reibkoeffizient konstant ist. Als letztes, um die Rechnung des Drehmoments zu vereinfachen, wird angenommen, dass der Kontaktpunkt zwischen der Lamelle und dem Stator, der Schwerpunkt der Lamelle und das Zentrum des Rotors auf einer Linie liegen. In **Bild 3-19** wurden die Vereinfachungen dargestellt.

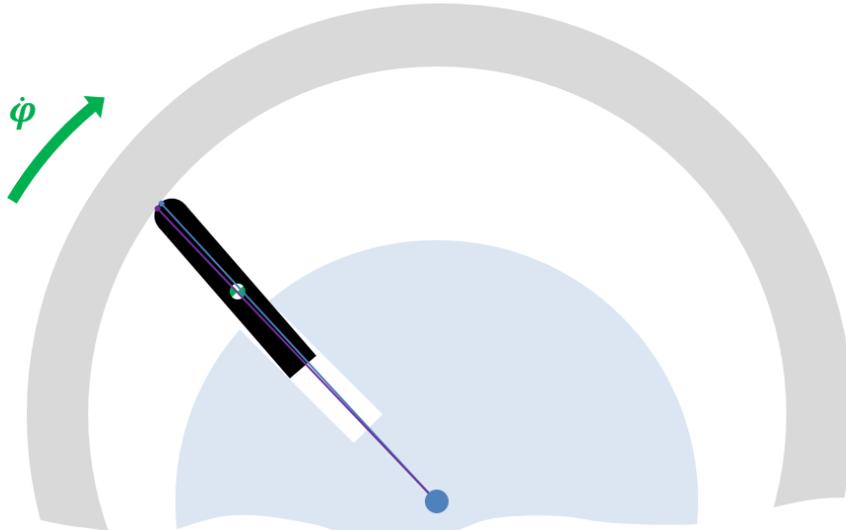


Bild 3-19: Darstellung der Vereinfachung (blau) und der Realität (lila)

Um das mathematische Modell der Reibungen F_R , F_{R1} und F_{R2} zu definieren, werden die Lamellen mechanisch analysiert. Wegen des Drucks in den Kammern entstehen die Kräfte F_1 und F_2 , die den Anwendungspunkt genau in der Mitte des Abstands zwischen Rotor und Stator haben. Außerdem, wo die Lamelle einen Kontakt mit dem Rotor oder Stator hat, muss eine Normalkraft und eine Reibkraft betrachtet werden. In diesem Fall sind drei Normalkräfte (N , N_1 , N_2), und infolgedessen drei Reibkräfte (F_R , F_{R1} , F_{R2}) zu berechnen. Der Kräfteinleitungspunkt wird durch das Umkippen der Lamelle bestimmt. Als letztes ist die Federkraft „ F_s “ zu betrachten. Das Freikörperbild einer Lamelle ist in **Bild 3-20** zu sehen.

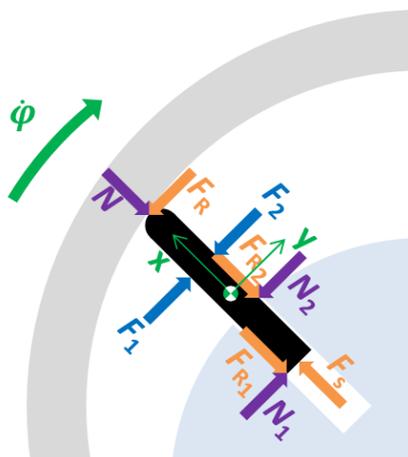


Bild 3-20: Darstellung des Freikörperbilds einer Lamelle

Beschleunigung des Schwerpunkts G der Lamelle

Als erstes muss die Beschleunigung des Lamellenschwerpunkts berechnet werden. Diese entsteht aus zwei Bewegungen. Einerseits wird die Lamelle von der Feder in radialer Richtung beschleunigt. Auf der anderen Seite existieren auch eine tangentiale und normale Beschleunigung, da die Lamelle sich mit dem Rotor dreht (siehe **Bild 3-21**).

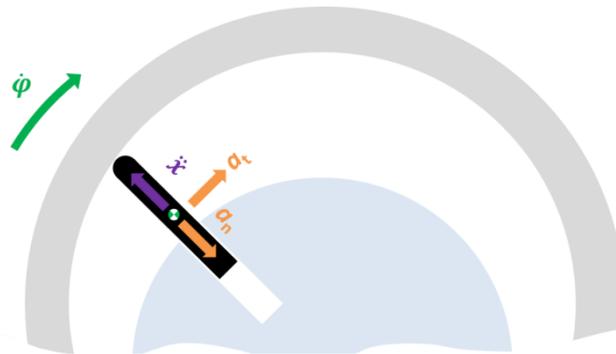


Bild 3-21: Kinematik des Schwerpunktes einer Lamelle

Die Radialbeschleunigung lässt sich durch die Winkelgeschwindigkeit und den Radius ausdrücken: (**Gl. 3-28**)

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r \quad \text{Gl. 3-28}$$

Die Winkelgeschwindigkeit ist eine bekannte Variable. Deswegen muss nur der Radius berechnet werden. Dieser kann aus den geometrischen Verhältnissen des Motors nach **Gl. 3-29** berechnet werden (siehe **Bild 3-22**).

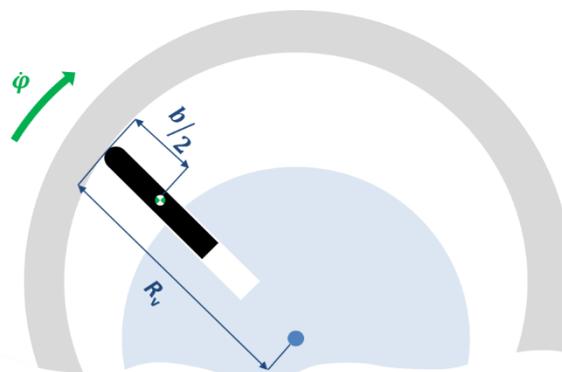


Bild 3-22: Geometrie des Motors

$$r = \frac{2R_v(\varphi) - b}{2} = \frac{2 \cdot \left(-e \cdot \cos(\varphi) + \sqrt{R_s^2 - (d \cdot \sin(\varphi))^2} \right) - b}{2} \quad \text{Gl. 3-29}$$

Die Tangentialbeschleunigung betrachtet die Geschwindigkeitsänderung pro Zeit. Dafür wird erst die Geschwindigkeit im Schwerpunkt berechnet. Wie in **Bild 3-22** dargestellt ist, kann diese mit dem Drehradius und der Winkelgeschwindigkeit berechnet werden. So kann die Geschwindigkeit nach **Gl. 3-30** ermittelt werden.

$$v = \dot{\varphi} \cdot \left(\frac{2R_v(\varphi) - b}{2} \right) \quad \text{Gl. 3-30}$$

mit

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d\left(\dot{\varphi} \cdot \left(\frac{2R_v(\varphi) - b}{2}\right)\right)}{dt} = \ddot{\varphi} \cdot \left(\frac{2R_v(\varphi) - b}{2}\right) + \dot{\varphi} \cdot \dot{R}_v(\varphi) \quad \text{Gl. 3-31}$$

Da das System nur einen Freiheitsgrad hat, müssen x und φ mit einer mathematischen Formel in Verbindung gebracht werden. Wenn x die Bewegung des Schwerpunkts der Lamelle in der radialen Richtung beschreibt (siehe **Bild 3-23**) und für $\varphi=0$ den Wert 0 annimmt, kann x zu **Gl. 3-32** definiert werden:

$$x = R_v(\varphi) - R_r = -e \cdot \cos(\varphi) + \sqrt{R_s^2 - (d \cdot \sin(\varphi))^2} - R_r \quad \text{Gl. 3-32}$$

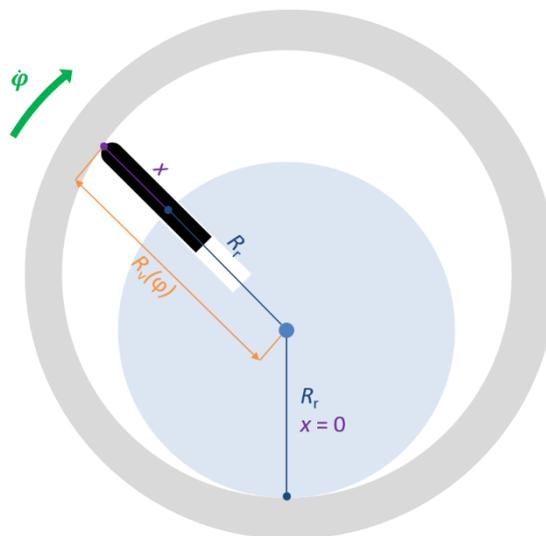


Bild 3-23: Definition der Variable x

Erwähnenswert ist die Berechnung des Radius R_v , der analog zur Berechnung des Radius des Geometriemodells ermittelt wird.

So kann die Beschleunigung des Schwerpunkts nach **Gl. 3-33** ermittelt werden:

$$a(G) = \begin{Bmatrix} \ddot{x} - a_n \\ a_t \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{x} - \dot{\varphi}^2 \cdot \left(\frac{2R_v(\varphi)-b}{2}\right) \\ \ddot{\varphi} \cdot \left(\frac{2R_v(\varphi)-b}{2}\right) + \dot{\varphi} \cdot R_v(\varphi) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{Gl. 3-33}$$

Mit der Bedingung, dass der Lamellenmotor nur einen Freiheitsgrad hat, wird eine Vereinfachung in der Kinematik des Modells durchgeführt. Das bedeutet, dass im Modell die Lamelle niemals den Kontaktpunkt mit dem Stator verlieren kann. Diese Behauptung entspricht nicht immer der Realität, da es Fälle geben kann, wo die Federkraft und die Zentrifugalkraft nicht hoch genug sind, um diesen Kontaktpunkt zu garantieren.

Diese Vereinfachung wurde getroffen, um auf ein komplexes Modell mit zwei Freiheitsgraden (x, φ) ohne eine ausreichende Zahl von Variablen verzichten zu können und so die Erhöhung der Rechenzeit durch die Implementierung eines iterativen Systems zu vermeiden.

Zweites newtonsches Gesetz

Nachdem die Beschleunigung des Schwerpunkts einer Lamelle bekannt ist, wird die „Lex Secunda“ und der Drallsatz formuliert um die Reibkräfte F_R , F_{R1} und F_{R2} zu berechnen. Die Formulierung des newtonschen Gesetzes ergibt **Gl. 3-34**.

$$\begin{aligned} -N - \mu_R \cdot \text{sign}(\dot{x}) \cdot (N_1 + N_2) + F_s &= m \left(\ddot{x} - \dot{\varphi}^2 \cdot \left(\frac{2R_v(\varphi)-b}{2}\right) \right) \\ -\mu \text{sign}(\dot{\varphi})N + F_1 - F_2 + N_1 - N_2 &= m \left(\ddot{\varphi} \cdot \left(\frac{2R_v(\varphi)-b}{2}\right) + \dot{\varphi} \cdot \dot{R}_v(\varphi) \right) \end{aligned} \quad \text{Gl. 3-34}$$

Erwähnenswert ist die Berechnung der Position der Lamelle. Wie in **Bild 3-19** zu sehen ist, ist die Lamelle wegen der Druckdifferenz gekippt. Damit ist die Position der Normalkräfte N_1 und N_2 immer bekannt und somit können die Abstände zwischen den Kontaktpunkte und der Einsatzpunkt des Drallsatzes ermittelt werden. Die Abstände werden später bei der Einsetzung des Drallsatzes benötigt.

Drallsatz im J

Bei der Formulierung des Drallsatzes ist hier darauf zu achten, dass das System nicht inertial ist. Außerdem, wenn dieses auf Punkt J angewendet wird, ergibt sich eine sehr einfache Gleichung im Vergleich zu andern Punkten. Der Drallsatz für ein Nicht-Inertialsystem lautet:
/Car07/

$$\sum M = \dot{L}(G) + JG \times ma(G)$$

mit

- G : Schwerpunkts des Körpers
- J : Punkt wo der Drallsatz eingesetzt wird
- $L(G)$: Drallvektor im Schwerpunkt

Gl. 3-35

Der Drallsatz bezüglich des Kontaktpunktes J kann gemäß **Gl. 3-36** formuliert werden, womit die Normalkräfte berechnet werden können:

$$\begin{aligned} & -\mu_S \cdot b \cdot \text{sign}(\dot{\varphi}) \cdot N - \mu_R \cdot \frac{a}{2} \cdot \text{sign}(\dot{x}) \cdot N_1 + \mu_R \cdot \frac{a}{2} \cdot \text{sign}(\dot{x}) \cdot N_2 - \\ & (b - X(\varphi)) \cdot N_2 - (F_2 - F_1) \left(b - \frac{X(\varphi)}{2} \right) = \frac{1}{12} m \cdot (a^2 + b^2) \cdot \ddot{\varphi} + \\ & \frac{b}{2} m \dot{\varphi} \cdot \dot{R}_v(\varphi) + \frac{b}{2} m \cdot \ddot{\varphi} \cdot \left(\frac{2R_v(\varphi) - b}{2} \right) \end{aligned} \quad \text{Gl. 3-36}$$

Da die Lamelle auf den Stator abgleitet, kann die Reibung als Produkt der Normalkräfte mit den Reibkoeffizienten berechnet werden.

Um dieses Gleichungssystem lösen zu können, wird es mit Matrizen bearbeitet. Das Matrixsystem ist im Anhang zu finden.

3.4.2 Dynamik des Systems

Um die Dynamik des Systems zu beschreiben wurde der Drallsatz im Schwerpunkt des Rotors angewendet, jetzt jedoch im System Rotor-Feder-Lamellen. Die externen Kräfte sind in **Bild 3-24** dargestellt. Der Vorteil dieses Systems ist, dass viele Kräfte, wie zum Beispiel, die Federkraft oder die Reibung zwischen Rotor und Lamelle interne Kräfte sind und deswegen im Drallsatz nicht betrachtet werden.

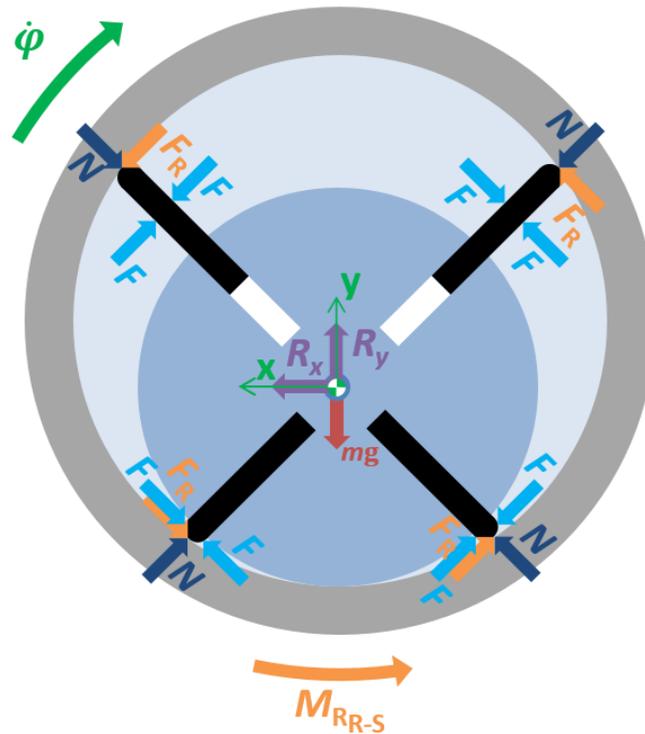


Bild 3-24: Darstellung der externen Kräfte

Wenn die Normalkraft bekannt ist, kann die Winkelbeschleunigung des Systems mit dem Drallsatz im Schwerpunkt nach **Gl. 3-37** berechnet werden:

$$M - M_R - M_{RRS} = J\ddot{\phi} \quad \text{Gl. 3-37}$$

mit:

- M : Drehmoment aufgrund der Druckdifferenz an den Lamellen
- M_R : Drehmoment aufgrund der Reibung zwischen Lamellen und Rotor
- M_{RRS} : Geschwindigkeitsabhängiges Reibmoment, das als Dämpfer modelliert wird.

Die Momente können nach **Gl. 3-38** bzw. **Gl. 3-39** berechnet werden.

$$M_R = \sum_{i=1}^N M_{R_i} = \sum_{i=1}^N \mu_R \cdot N_i \cdot R_v(\varphi) = \sum_{i=1}^N \mu_R \cdot N_i \cdot (-e \cdot \cos(\varphi) + \sqrt{R_s^2 - (e \cdot \sin(\varphi))^2}) \quad \text{Gl. 3-38}$$

$$M_{R_{RS}} = \mu_{RS} \cdot \dot{\varphi} \quad \text{Gl. 3-39}$$

Wie in **Gl. 3-37** zu sehen ist, ist die Trägheit des Systems notwendig um die Beschleunigung des Motors zu berechnen. Diese hat jedoch keinen konstanten Wert, sondern ist vom Winkel abhängig. Die Trägheit kann in zwei Teile geteilt werden, die des Rotors und die der Lamellen. Die Trägheit des Rotors ist sehr einfach zu berechnen, da sie unabhängig vom Winkel ist und außerdem der Drallsatz im Schwerpunkt des Rotors angewendet wird, müssen keine Steineranteile berücksichtigt werden. Die Trägheit eines Kreises kann nach **Gl. 3-40** berechnet werden:

$$J_r = \frac{1}{2} \cdot m_r \cdot R_r^2 \quad \text{Gl. 3-40}$$

Da die Schwerpunkte der Lamellen sich nicht in G befinden, muss ihre Trägheit mit dem Steiner'schen Satz berechnet werden. Es gilt:

$$\sum_{i=1}^N J_{l_i} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{12} m_l (a^2 + b^2) + m_l d_i^2 \right) \quad \text{Gl. 3-41}$$

mit (siehe **Bild 3-25**):

$$d_i = R_{v_i}(\varphi) - \frac{b}{2} = -e \cdot \cos(\varphi) + \sqrt{R_s^2 - (e \cdot \sin(\varphi))^2} - \frac{b}{2} \quad \text{Gl. 3-42}$$

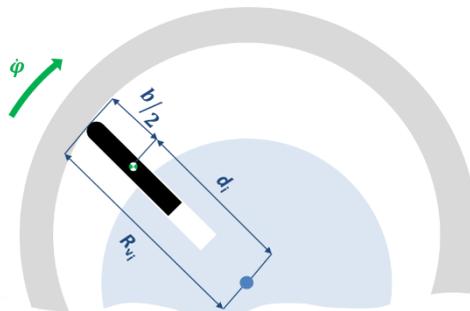


Bild 3-25: Geometrie des Motors

So kann die Trägheit des Systems in Abhängigkeit vom Winkel nach **Gl. 3-43** berechnet werden.

$$J = J_r + \sum J_{l_i}(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot m_r \cdot R_r^2 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{12} m_l (a^2 + b^2) + m_l d_i^2 \right) \quad \text{Gl. 3-43}$$

Erwähnenswert ist, dass wenn das Drehmoment der Reibung zwischen dem Stator und Rotor gemessen werden könnte und zwischen dem Rotor und Stator keinen Spalt gäbe, sondern diese im Kontakt wären, wäre es nicht mehr notwendig diese Reibung mit einem Dämpfer zu modellieren, sondern mit:

$$M_{RRS} = \mu_{RS} \cdot N_r \quad \text{Gl. 3-44}$$

In diesem Fall könnten nach **Gl. 3-45** mit dem zweiten newtonschen Gesetz die Reaktionen des Rotors „ R_x, R_y “ berechnet werden. Die Kräfte, die im ganzen System berücksichtigt werden, sind:

- Normalkräfte wegen der Kontaktpunkten
- Reibkräfte
- Gewicht des Lamellenmotors
- Kräfte wegen des Druckes in den Kammern die an den Lamellen angewendet sind. 22

$$\sum F_x + \sum F_{R_x} + \sum N_x + R_x - F_{R_r-S} = m \cdot a(G) = 0 \quad \text{Gl. 3-45}$$

$$\sum F_y + \sum F_{R_y} + \sum N_y + R_y - mg + N_r = m \cdot a(G) = 0$$

Das Freikörperbild des Systems ist in **Bild 3-26** dargestellt worden.

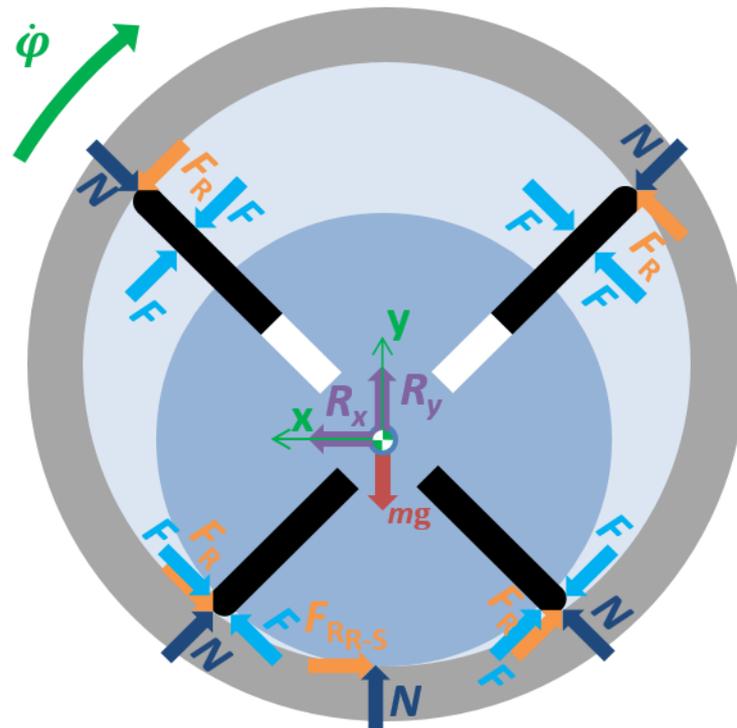


Bild 3-26: Diagramm des Starkkörpers für ein bekanntes Reibmoment und einen Reibkoeffizient zwischen dem Stator und Rotor

Bei der Aufteilung der Kräfte im Koordinatensystem muss beachtet werden, in welchem Quadranten sich die jeweilige Lamelle befindet. In **Gl. 3-29** ist die Aufteilung der Kräfte in das Koordinatensystem für jeden Quadranten zu sehen. Erwähnenswert ist, dass nicht alle Kräfte zu sehen sind, sondern nur eine in jeder Richtung um die Verlegung im Koordinatensystem darzustellen.

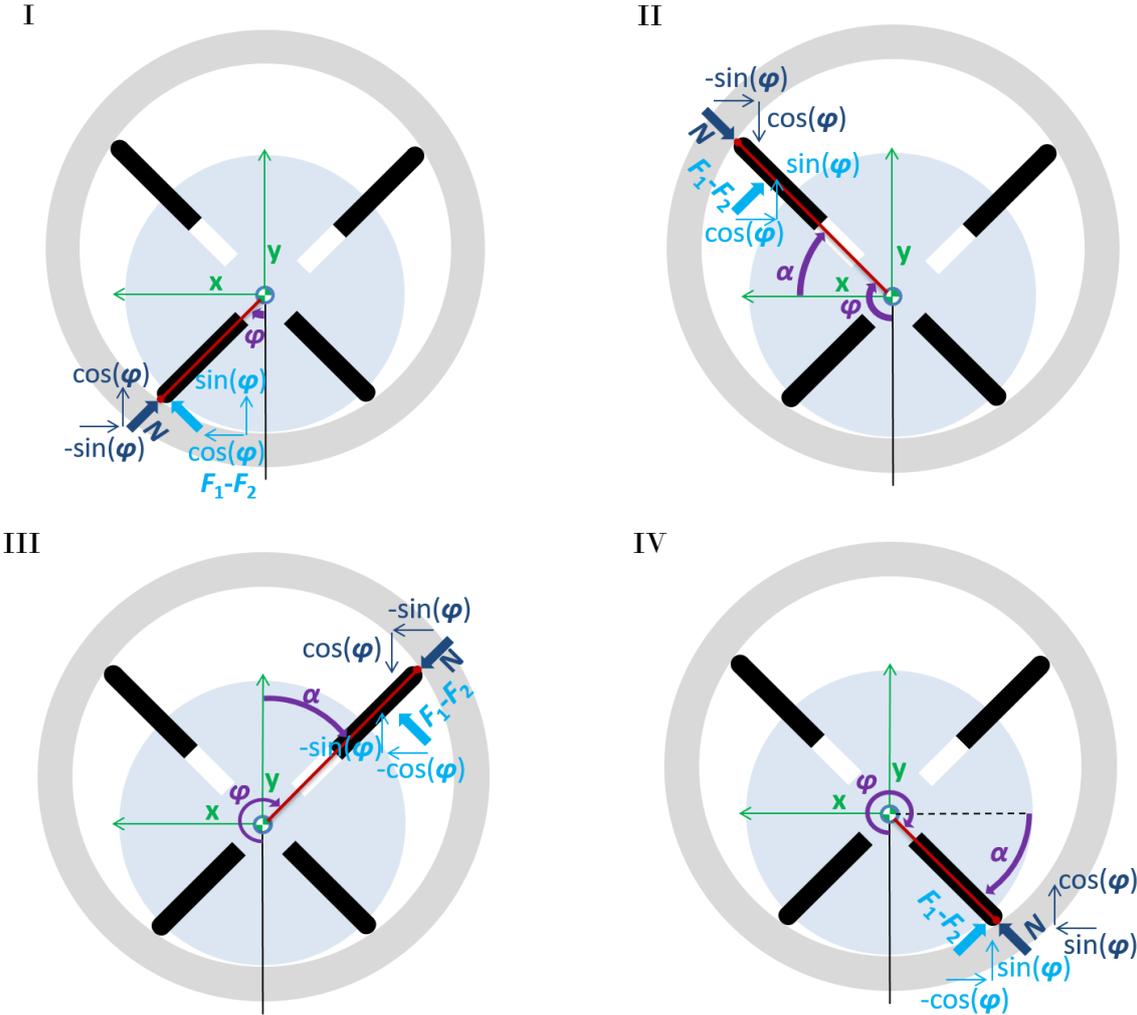


Bild 3-27: Zerlegung der Kräfte

3.5 Leckage

Eins der größten Probleme bei Lamellenmotoren ist die interne Leckage. Diese spielt eine wesentliche Rolle bei der Berechnung des Kammerdrucks, da die Masse in der Kammer nicht mehr konstant bleibt, sondern sich ständig verändert. Außerdem hat sie einen großen Einfluss auf die Leistung des Motors. O. Badr hat die Leckage in Multi-Lamellenmotoren analysiert und beschreibt 4 möglichen Leckagen. (siehe **Bild 3-28**) /Bad85/

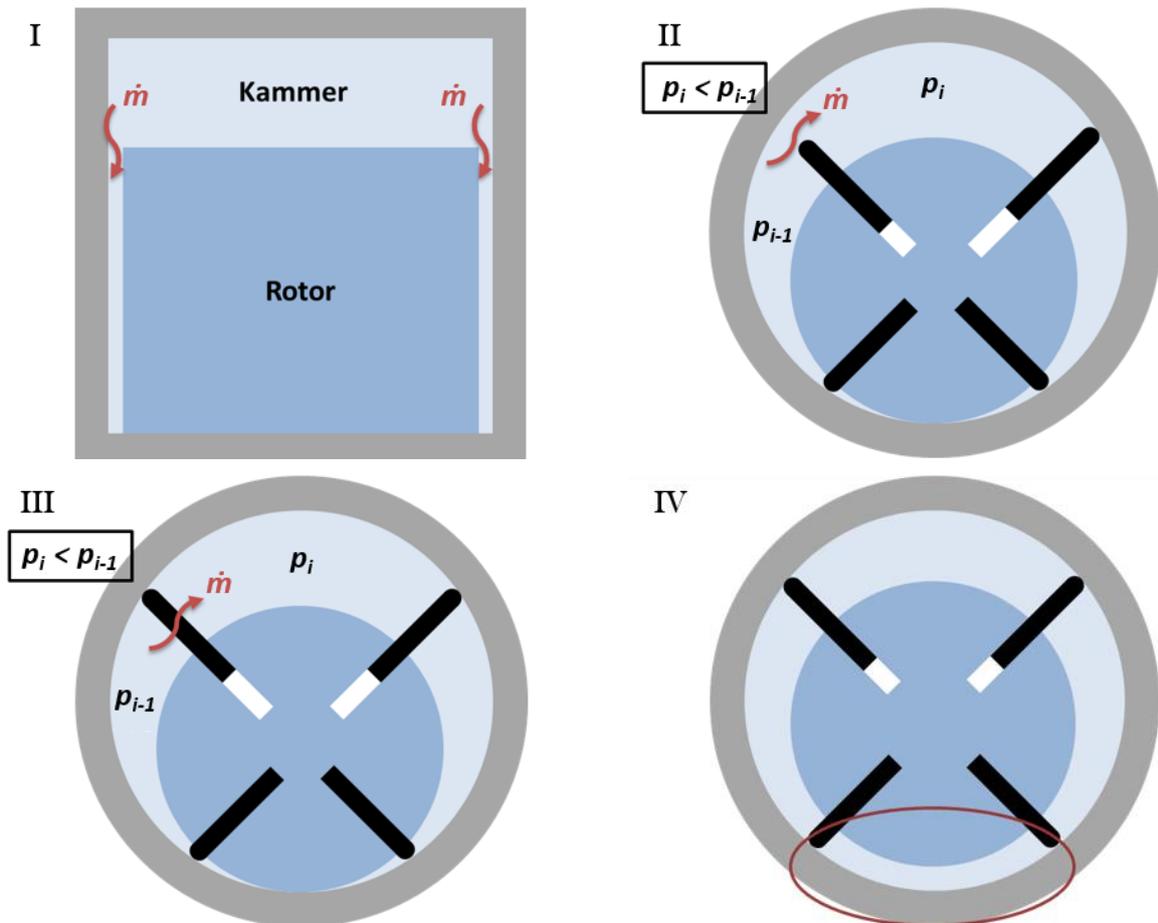


Bild 3-28: Darstellung der möglichen Leckagen

- I. In axialer Richtung durch den Spalt zwischen Rotor und den Endplatten.
- II. Durch Kontaktverlust zwischen einer Lamelle und dem Stator, besonders bei niedrigen Winkelgeschwindigkeiten, und damit kleinen Zentrifugalkräfte.
- III. Durch den Spalt zwischen den Lamellenseiten und den zwei Endplatten.
- IV. Durch den Freiraum zwischen dem Rotor und dem Stator zwischen Luftein- und -auslass.

3.5.1 Leakage durch den Spalt zwischen Rotor und Endplatten

Die Strömung, die zwischen dem Rotor und den zwei Endplatten entsteht, kann durch eine stationären und eine rotierende Scheibe modelliert werden. Um die Leakage des Lamellenmotors so zu berechnen, sind die folgenden Vereinfachungen notwendig: /Bei76/

- Verlässigen des Freiraums zwischen Lamellen und Rotor (siehe **Bild 3-29**)
- Konstante Werte für die Dichte und die dynamische Viskosität
- Inkompressible Strömung
- Isotherme newtonsche Strömung

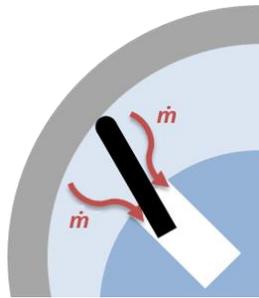


Bild 3-29: Massenströme die in diesem Fall nicht betrachtet werden

Zur Berechnung des Massenstroms zu definieren, ist die Bestimmung der radialen Geschwindigkeit des Rotors notwendig. Damit kann der Massenstrom nach **Gl. 3-46** berechnet werden.

$$\dot{m} = A \cdot u \quad \text{Gl. 3-46}$$

In diesem Fall ist aber die Berechnung der Geschwindigkeit nicht trivial. Um diese zu ermitteln, werden die Navier-Stokes-Gleichungen in der radialen, tangentialen und senkrechten Richtung aufgestellt. Bevor diese aufgestellt werden, muss ein Koordinatensystem definiert werden. Diese ist in **Bild 3-30** dargestellt.

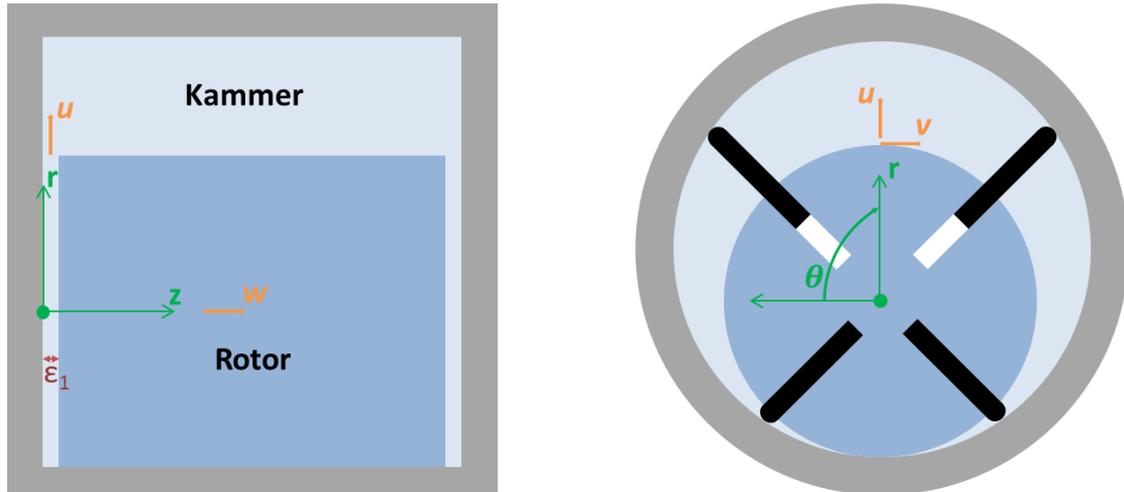


Bild 3-30: Koordinatensystem des Lamellenmotors

Gl. 3-47 zeigt die Navier-Stokes-Gleichungen in Zylinderkoordinaten.

$$\begin{aligned}
 & \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = \\
 & - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) + \rho g_r \\
 \\
 & \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = \\
 & - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right) + \rho g_\theta \\
 \\
 & \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \\
 & - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_z)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z \\
 \\
 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0
 \end{aligned}
 \tag{Gl. 3-47}$$

Um die Navier-Stokes Gleichungen dimensionslos zu umformen werden die folgenden dimensionslosen Variablen definiert: /Bad85/ /She10/

$$\bar{u} = \frac{u}{\dot{\phi} R_r} \quad \bar{v} = \frac{v}{\dot{\phi} R_r} \quad \bar{w} = \frac{w}{\dot{\phi} \varepsilon_1}$$

$$\bar{r} = \frac{r}{R_r} \quad \bar{z} = \frac{z}{\varepsilon_1} \quad \bar{p} = \frac{p-p_2}{p_1-p_2}$$

mit

Gl. 3-48

$$\dot{\phi} R_r \cdot \delta \bar{u} = \delta u \quad \dot{\phi} R_r \cdot \delta \bar{v} = \delta v \quad \dot{\phi} \varepsilon_1 \cdot \delta \bar{w} = \delta w$$

$$R_r \cdot \delta \bar{r} = \delta r \quad \varepsilon_1 \cdot \delta \bar{z} = \delta z \quad (p_1 - p_2) \cdot \delta \bar{p} = \delta p$$

Weiterhin werden die folgenden dimensionslosen Größen zur Charakterisierung des stationären Strömungszustands eingeführt.

- Die Reynolds-Zahl basierend auf der Spalthöhe ε_1 , die nach $Re = \frac{\dot{\phi} \varepsilon_1^2}{\mu_m v_m}$ ermittelt wird. Da ε_1 sehr klein ist, kann angenommen werden, dass immer $Re < 1$ gilt.
- Die Euler-Zahl, die nach $Eu = \frac{v_m(p_1-p_2)}{\dot{\phi}^2 R_r^2}$ berechnet wird.
- Seitenverhältnis der Spalte und des Rotorradius, das nach der Teilung des Radius des Rotors durch die Spalthöhe berechnet wird. Es kann nach $S = \frac{R_r}{\varepsilon_1}$ definiert werden.

Wenn die Strömung stationär ist, die Volumenkräfte vernachlässigt werden und die dimensionslosen Kennzahlen in **Gl. 3-47** eingesetzt werden, kann die Navier-Stokes-Gleichung in radialer Richtung gemäß nach **Gl. 3-49** ausgedrückt werden:

$$\frac{1}{v_m} \cdot \dot{\phi} R_r \cdot \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} - \frac{\bar{v}^2}{\bar{r}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) =$$

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right)$$

Gl. 3-49

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} - \frac{\bar{v}^2}{\bar{r}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} =$$

$$-Eu \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{Re} \left(\frac{1}{S^2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial(\bar{r} \bar{u})}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \theta^2} - \frac{2}{\bar{r}^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right)$$

Durch analoges Umformen aller Navier-Stokes-Gleichungen ergibt sich das Gleichungssystem in **Gl. 3-50**.

$$\begin{aligned}
& \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} - \frac{\bar{v}^2}{\bar{r}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = \\
& -Eu \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{Re} \left(\frac{1}{S^2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial (\bar{r}\bar{u})}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \theta^2} - \frac{2}{\bar{r}^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right) \\
& \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \frac{\bar{u}\bar{v}}{\bar{r}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} = \\
& -Eu \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} + \frac{1}{Re} \left(\frac{1}{S^2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial (\bar{r}\bar{v})}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \theta^2} + \frac{2}{\bar{r}^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} \right) \tag{Gl. 3-50} \\
& \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = \\
& -Eu \cdot S^2 \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{Re} \left(\frac{1}{S^2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial (\bar{r}\bar{v})}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{z}^2} \right) \\
& \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\bar{r}\bar{u}) + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = 0
\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem kann nun weiter vereinfacht werden. Da das Seitenverhältnis „ S “ eine Größenordnung von ca. 10^2 hat, können alle Terme, die durch S^2 geteilt werden, vernachlässigt werden. Mit Multiplikation der Gleichungen mit Re entstehen Ausdrücke wie **Gl. 3-51**.

$$Re \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} - \frac{\bar{v}^2}{\bar{r}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) = -Eu \cdot Re \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} + \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right) \tag{Gl. 3-51}$$

Da die Reynolds-Zahl kleiner als 1 ist, kann die linke Seite der Gleichung vernachlässigt werden. Auf der rechten Seite ist dies nicht erlaubt, da $Eu > \frac{1}{Re}$, weshalb $Eu \cdot Re > \frac{1}{Re} \cdot Re = 1$ ist.

Um diese Vereinfachung durchführen zu können, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$Re < 1, Eu > \frac{1}{Re}, S \gg 1.$$

Werden alle Gleichungen entsprechend umgeformt, vereinfachen sich die Navier-Stokes-Gleichungen zu **Gl. 3-52**:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} = -Eu \cdot Re \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} = -Eu \cdot Re \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{z}^2} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\bar{r} \bar{u}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = 0$$

Gl. 3-52

Da $Re < 1$ ist, kann die Lösung der Navier-Stokes Gleichungen als eine Reynolds Potenzreihe, um $Re = 0$, berechnet werden. (siehe Gl. 3-53)

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + Re \bar{u}_1 + Re^2 \bar{u}_2 + \dots$$

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + Re \bar{v}_1 + Re^2 \bar{v}_2 + \dots$$

$$\bar{w} = \bar{w}_0 + Re \bar{w}_1 + Re^2 \bar{w}_2 + \dots$$

$$\bar{p} = \bar{p}_0 + Re \bar{p}_1 + Re^2 \bar{p}_2 + \dots$$

Gl. 3-53

Durch Einsetzen von **Gl. 3-53** in **Gl. 3-52** ergibt sich **Gl. 3-54**.

$$\frac{\partial^2 (\bar{u}_0 + Re \bar{u}_1 + Re^2 \bar{u}_2 + \dots)}{\partial \bar{z}^2} = -Eu \cdot Re \frac{\partial (\bar{p}_0 + Re \bar{p}_1 + Re^2 \bar{p}_2 + \dots)}{\partial \bar{r}}$$

Gl. 3-54

Um das Modell zu vereinfachen und die Rechenzeit nicht zu stark zu steigern, wird nur die Lösung nullter Ordnung berechnet. Der maximale Fehler durch diese Vereinfachung erzeugte geringer als ein 10%. Wenn das gleiche Verfahren auf die anderen Gleichungen angewendet wird, gilt **Gl. 3-55**: /Bei76/

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_0}{\partial \bar{z}^2} = -Eu \cdot Re \cdot \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{r}}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{v}_0}{\partial \bar{z}^2} = -Eu \cdot Re \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial p_0}{\partial \bar{r}}$$

Gl. 3-55

$$\frac{\partial^2 \bar{p}_0}{\partial \bar{z}^2} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\bar{r} \bar{u}_0) + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{z}} = 0$$

Um die Differentialgleichungen in der radialen und tangentialen Richtung lösen zu können, werden folgende Anfangsbedingungen eingesetzt (siehe **Bild 3-31**):

$$\bar{u}_0(\bar{r}, \theta, 0) = 0$$

$$\bar{v}_0(\bar{r}, \theta, 0) = 0$$

Gl. 3-56

$$\bar{u}_0(\bar{r}, \theta, 1) = \bar{r} \cdot \bar{\varphi} = \bar{r}$$

$$\bar{v}_0(\bar{r}, \theta, 1) = 0$$

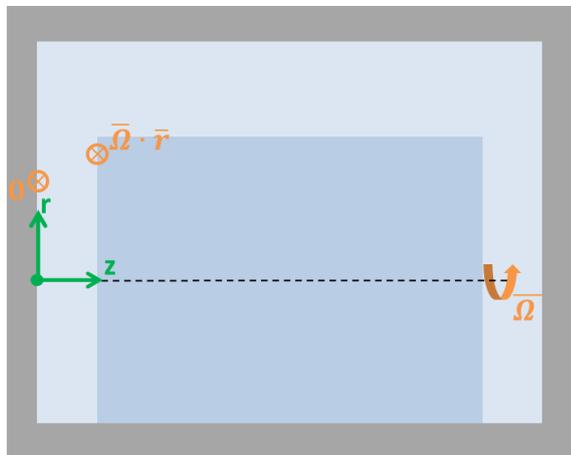


Bild 3-31: Anfangsbedingungen des Lamellenmotors

So lauten die Lösungen der Differentialgleichungen:

$$\bar{u}_0 = \frac{Eu \cdot Re}{2} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial \bar{r}} (\bar{z}^2 - \bar{z}) \quad \text{Gl. 3-57}$$

$$\bar{v}_0 = \frac{Eu \cdot Re}{2} \cdot \frac{1}{\bar{r}} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial \theta} (\bar{z}^2 - \bar{z}) + \bar{r} \bar{z}$$

Wie in **Gl. 3-57** zu sehen, ist die Lösung der radialen Geschwindigkeit abhängig vom Druckgradienten. Deswegen muss dieser berechnet werden. Bei der Umformung der **Gl. 3-55** mit **Gl. 3-57** ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \cdot \frac{Eu \cdot Re}{2} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial \bar{r}} (\bar{z}^2 - \bar{z}) \right) + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{Eu \cdot Re}{2} \cdot \frac{1}{\bar{r}} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial \theta} (\bar{z}^2 - \bar{z}) + \bar{r} \bar{z} \right) + \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{z}} = \\ \frac{Eu \cdot Re}{2} (\bar{z}^2 - \bar{z}) \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\bar{r}} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \right) \right) + \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{z}} = 0 \end{aligned} \quad \text{Gl. 3-58}$$

Die **Gl. 3-58** kann folgendermaßen umgeformt werden:

$$-\partial \bar{w}_0 = \left(\frac{Eu \cdot Re}{2} (\bar{z}^2 - \bar{z}) \Delta \bar{p}_0 \right) \partial \bar{z}$$

mit Gl. 3-59

$$\Delta \bar{p}_0 = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\bar{r}} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \right)$$

Um die Lösung der Differentialgleichung zu finden, wird **Gl. 3-59** integriert:

$$\bar{w}_0 = - \left(\frac{Eu \cdot Re}{2} \left(\frac{\bar{z}^3}{3} - \frac{\bar{z}^2}{2} \right) \Delta \bar{p}_0 \right) + K(\bar{r}, \theta) \quad \text{Gl. 3-60}$$

Im betrachteten Fall ergeben sich folgende Anfangsbedingungen (**Bild 3-31**):

$$\bar{w}_0(\bar{r}, \theta, 0) = 0 \quad \text{Gl. 3-61}$$

$$\bar{w}_0(\bar{r}, \theta, 1) = 0 \quad \text{Gl. 3-62}$$

Mit der ersten Anfangsbedingung kann die Konstante K berechnet werden.

$$\bar{w}_0 = - \left(\frac{Eu \cdot Re}{2} \left(\frac{\bar{0}^3}{3} - \frac{\bar{0}^2}{2} \right) \Delta \bar{p}_0 \right) + K(\bar{r}, \theta) = 0 \Rightarrow K(\bar{r}, \theta) = 0 \quad \text{Gl. 3-63}$$

Durch Einsetzen der zweiten Bedingung ist nun das gesamte Druckprofil bekannt. (siehe **Gl. 3-64**)

$$\begin{aligned} \bar{w}_0 &= -\left(\frac{Eu \cdot Re}{2} \left(\frac{\bar{1}^3}{3} - \frac{\bar{1}^2}{2}\right) \Delta \bar{p}_0\right) = 0 \Rightarrow \Delta \bar{p}_0 = 0 \Rightarrow \\ \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial \bar{r}}\right) + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\bar{r}} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial \theta}\right) &= 0 \end{aligned} \quad \text{Gl. 3-64}$$

Bild 3-32 zeigt das sich ergebende Druckprofil.

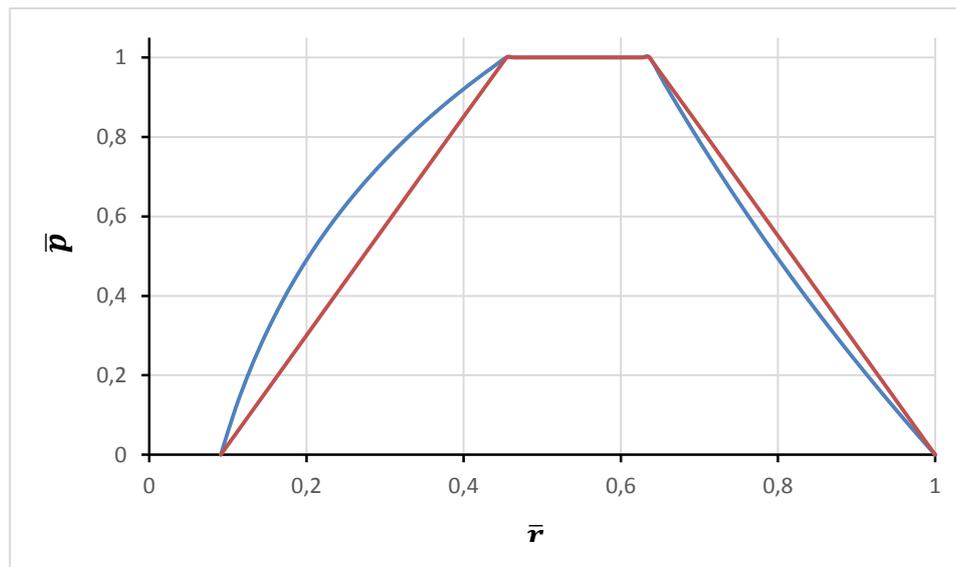


Bild 3-32: Druckprofil der **Gl. 3-64** (blau) und das vereinfachte Druckprofil (rot) für die Berechnung der Fourierkonstanten

Um die Berechnung des Druckgradienten zu vereinfachen, wird das Druckverhältnis linearisiert (siehe **Bild 3-32**). Nach /Bad85/ kann der Druckverlauf, das rote Profil des **Bild 3-32**, in Abhängigkeit vom Winkel für eine solche Strömung gemäß **Gl. 3-65** berechnet werden.

$$\bar{p}_0 = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left((\bar{r}^k + \beta^{2k} \bar{r}^{-k}) (A_k \cdot \cos(k\theta) + B_k \cdot \sin(k\theta)) \right) \quad \text{Gl. 3-65}$$

Wie in der **Gl. 3-65** zu sehen ist, ist dieses Profil mit zwei Fourierkoeffizienten definiert worden. Nach /Bad85/ können diese mit **Gl. 3-66** berechnet werden.

$$A_k = \frac{1}{k^2\pi(1+\beta^{2k})} \left(\frac{1}{\varphi_{\text{out}_1} - \varphi_{\text{in}} - \delta} (\cos(k\varphi_{\text{out}}) - \cos(k(\varphi_{\text{in}} + \delta))) - \frac{1}{2\pi - \varphi_{\text{out}_2}} (1 - \cos(k\varphi_{\text{out}_2})) \right)$$

Gl. 3-66

$$B_k = \frac{1}{k^2\pi(1+\beta^{2k})} \left(\frac{1}{\varphi_{\text{out}_1} - \varphi_{\text{in}} - \delta} (\sin(k\varphi_{\text{out}}) - \sin(k(\varphi_{\text{in}} + \delta))) - \frac{1}{2\pi - \varphi_{\text{out}_2}} \sin(k\varphi_{\text{out}_2}) \right)$$

Die Parameter der **Gl. 3-66** sind in **Bild 3-33** zu sehen.

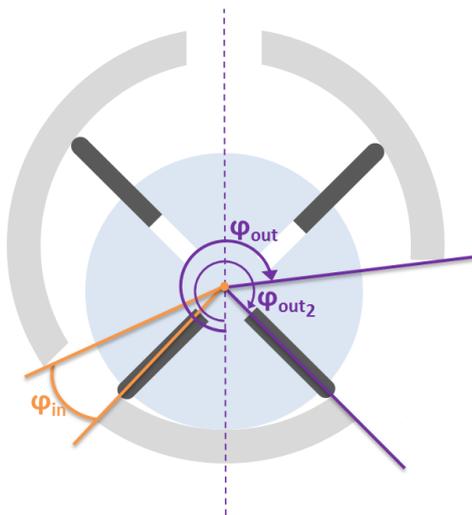


Bild 3-33: Geometrie des Lamellenmotors

So lautet die Bestimmungsgleichung für den Druckgradienten:

$$\frac{\partial \bar{p}_0}{\bar{r}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(k\bar{r}^{k-1} - \frac{k}{\bar{r}^{k-1}} \beta^{2k} \right) (A_k \cdot \cos(k\theta) + B_k \cdot \sin(k\theta)) \right)$$

Gl. 3-67

Jetzt, dass der Druckgradient bekannt ist, kann die radiale Geschwindigkeit mit **Gl. 3-68** berechnet werden.

$$u = \dot{\varphi} \cdot R_r \cdot \bar{u}_0 = \dot{\varphi} \cdot R_r \cdot \frac{Eu \cdot Re}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(k\bar{r}^{k-1} - \frac{k}{\bar{r}^{k-1}} \beta^{2k} \right) (A_k \cdot \cos(k\theta) + B_k \cdot \sin(k\theta)) \right) \cdot (\bar{z}^2 - \bar{z})$$

Gl. 3-68

Um den Leckagemassenstrom aus der radialen Geschwindigkeit zu berechnen, sind folgende Randbedingungen zu beachten:

- Die Geschwindigkeit, die für die Berechnung der Leckage eingesetzt wird, entspricht der Geschwindigkeit am Kontaktpunkt der Kammer und des Rotors. ($\bar{r} = 1$)
- Um die Leckage einer ganzen Kammer zu berechnen, muss die Geschwindigkeit vom Winkel der führenden bis zur hinteren Lamelle integriert werden.
- Da der Massenstrom über den gesamten Spalt berechnet wird, muss die Geschwindigkeit auch von $\bar{z} = 0$ bis $\bar{z} = 1$ integriert werden.

Somit ergibt sich **Gl. 3-69** für den Leckagemassenstrom

$$\dot{m}_{leakage} = 2 \cdot u \cdot A = 2 \cdot u \cdot R_r \cdot \varepsilon_1 = 2 \cdot \dot{\varphi} \cdot R_r^2 \cdot \varepsilon_1 \cdot \frac{Eu \cdot Re}{2} \cdot \int_{\varphi-\delta}^{\varphi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(k(1 - \beta^{2k})(A_k \cdot \cos(k\theta) + B_k \cdot \sin(k\theta)) \right) d\theta \cdot \int_0^1 (\bar{z}^2 - \bar{z}) d\bar{z} \quad \text{Gl. 3-69}$$

Bei der Integrierung der **Gl. 3-69** erfolgt **Gl. 3-70**:

$$\dot{m}_{leakage} = 2 \cdot \dot{\varphi} \cdot R_r^2 \cdot \varepsilon_1 \cdot \frac{Eu \cdot Re}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(k(1 - \beta^{2k})(A_k \cdot (\sin(k\varphi) - \sin(k\varphi - \delta)) + B_k \cdot (\cos(k\varphi) - \cos(k\varphi - \delta))) \right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \quad \text{Gl. 3-70}$$

Als letztes, bei der Einsetzung des dimensionslosen Parametern, kann **Gl. 3-70** als **Gl. 3-71** umgeformt werden.

$$\dot{m}_{leakage} = -\frac{(p_1 - p_2) \cdot \varepsilon_1^3}{6 \cdot v_m} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left((1 - \beta^{2k})(A_k \cdot (\sin(k\varphi) - \sin(k\varphi - \delta)) - B_k \cdot (\cos(k\varphi) - \cos(k\varphi - \delta))) \right) \right) \quad \text{Gl. 3-71}$$

Dafür muss die Geschwindigkeit in der Düse berechnet werden. Zunächst wird in **Gl. 3-73** der erste Hauptsatz der Thermodynamik für einen stationären Flussprozess aufgestellt

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2} = h_2 + \frac{v_2^2}{2} \xrightarrow{\text{ergibt}} \frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2} = h_2 - h_1 = c_p(T_1 - T_2) \quad \text{Gl. 3-73}$$

Mit der Gasgleichung für ideale Gase kann die Temperatur $T_1 = \frac{p_1}{R \cdot \rho}$ berechnet werden. Mit der spezifischen Wärmekapazität $c_p = R \frac{\kappa}{\kappa-1}$ und der Bestimmungsgleichung für eine isentrope

Zustandsänderung $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$ kann die Geschwindigkeit nach **Gl. 3-74** berechnet werden.

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{\kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} \cdot \left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} + v_1^2 \right)} \quad \text{Gl. 3-74}$$

Einsetzen von **Gl. 3-74** und $\frac{V_2}{V_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$ in **Gl. 3-72** ergibt sich **Gl. 3-75**.

$$\begin{aligned} \dot{m} &= v_2 \cdot A_2 \cdot \rho_2 = \sqrt{2 \cdot \frac{\kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} \cdot \left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} + \frac{v_1^2}{2}} \cdot A_2 \cdot \rho_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = \\ &A_2 \sqrt{2 \cdot \frac{\kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{p_1 \rho_1^2}{\rho_1} \cdot \left(\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{\kappa}} \right) + \frac{v_1^2}{2} \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{\kappa}}} = \\ &A_2 \sqrt{2 \cdot \frac{\kappa}{\kappa-1} \cdot p_1 \rho_1 \cdot \left(\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} \right) + \frac{v_1^2}{2} \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{\kappa}}} \end{aligned} \quad \text{Gl. 3-75}$$

Der Vorzeichen des Leckagemassenstroms der Leckage ist positiv falls dieser in die Kammer hineinströmt und negativ falls er die Kammer verlässt.

Zuletzt muss die Fläche A_2 (siehe **Bild 3-34**) berechnet werden. Diese kann mit der Koordinate x der Dynamik des Systems ermittelt werden.

$$A_2 = (R_v(\varphi) - x - R_r) \cdot L \quad \text{Gl. 3-76}$$

Das Modell betrachtet nur einen Freiheitsgrad. **Gl. 3-76** kann nicht implementiert werden, da der Längenterm $R_v(\varphi) - x - R_r$ immer null sein wird. Um diese Leckage im Modell zu repräsentieren, ist einen konstanten Spalt von 0.1 mm definiert worden.

3.5.3 Leckage durch den Spalt zwischen den Lamellenseiten und den Endplatten

In realen Motoren existiert immer ein Spalt zwischen den Seiten der Lamellen und dem Stator (ε_3 in **Bild 3-35**). Der folgende Abschnitt befasst sich mit der Modellierung der Leckage durch diese Spalte aufgrund von Druckdifferenz zwischen den Kammern. Wie Brad beschreibt, kann diese Lücke als der Unterschied zwischen den Längen der Lamellen, dass in **Bild 3-35** als „ L_1 “ definiert worden ist, und des Stators („ L_s “) beschrieben werden, wenn diese unterschiedlichen Temperaturen aufweisen. Die Variablen sind in **Bild 3-35** zu sehen.

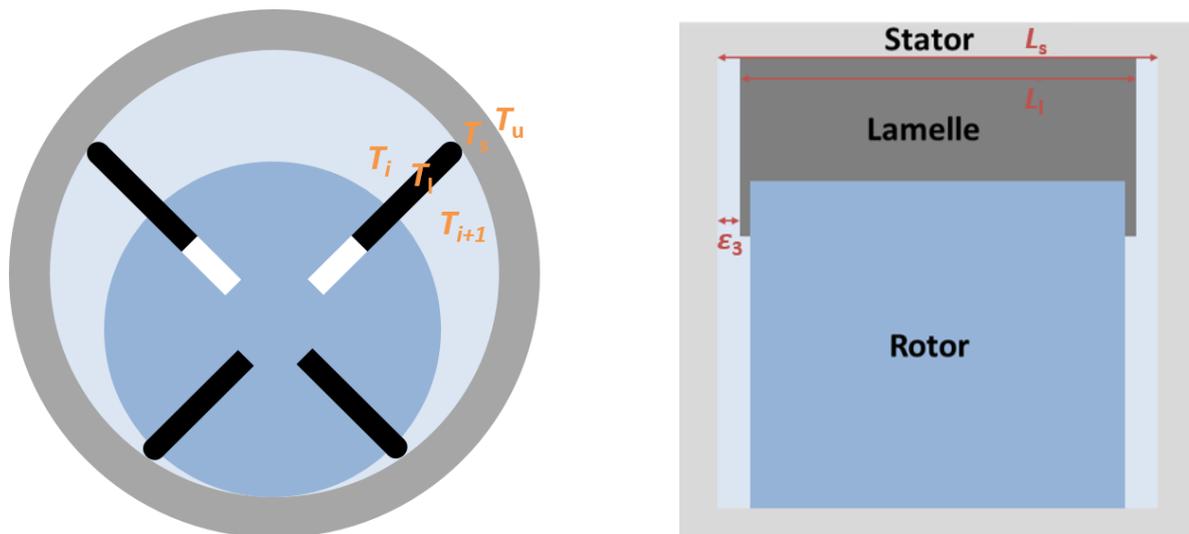


Bild 3-35: Schnittbild des Lamellenmotors

Um die Änderung der Längen wegen des Temperaturgradienten zu berechnen, wird eine lineare Wärmeausdehnung eingesetzt. Die Temperatur der Lamelle wird als Mittelwert der Temperaturen in den benachbarten Kammern ermittelt. Analog erfolgt die Berechnung der Temperatur des Stators als Mittelwert zwischen die Temperatur der Lamelle und der Umgebung. Damit können die Längen in Abhängigkeit der Temperatur nach **Gl. 3-77** berechnet werden.

$$T_1(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot (T_i + T_{i+1})$$

$$T_s(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot (T_1(\varphi) + T_u)$$

Gl. 3-77

$$L_v(\varphi) = L_1(1 + \alpha_v(T_v(\varphi) - T_u))$$

$$L_s(\varphi) = L(1 + \alpha_s(T_s(\varphi) - T_u))$$

Damit kann die Lücke nach **Gl. 3-78** berechnet werden.

$$\varepsilon_3(\varphi) = \frac{1}{2}(L_s(\varphi) - L_v(\varphi))$$

Gl. 3-78

Diese Leckage wurde im Modell vernachlässigt. Dies ist aufgrund der folgenden Punkte zulässig:

- Wie in **Absatz 3.4** dargestellt wurde, wird die ganze Dynamik des Körpers als ein Starrkörper betrachtet. Dies bedeutet, dass die Breite der Lamellen während des ganzen Kreislaufs konstant bleibt.
- Die Komplexität der Berechnung des Massenstroms ist sehr hoch, was auch die Rechenzeit des Modells deutlich erhöhen würde.
- Im Vergleich zu den anderen Leckagemassenströme ist diese deutlich kleiner.

3.5.4 Leckage durch den radialen Freiraum zwischen dem Rotor und dem Stator

Da der Rotor und der Stator in der Realität nicht immer einen Kontaktpunkt haben, entsteht daraus eine Leckage. Falls der Winkel zwischen Lamellen kleiner als der Winkel zwischen dem Schluss des Auslasses und der Öffnung des Einlasses ist, findet diese Leckage nicht statt (siehe **Bild 3-36**).

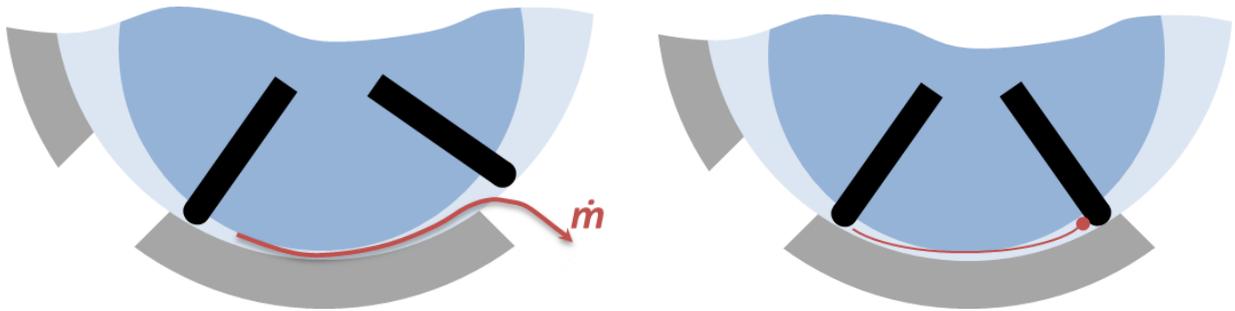


Bild 3-36: Beispiel der Leckage durch den radialen Freiraum zwischen dem Rotor und der Verschließenbogen des Stators.

Auf die Modellierung dieses Leckagepfads wurde aufgrund des vergleichsweise kleinen Leckagemassenstroms verzichtet, um die Komplexität des Modells nicht noch weiter zu steigern.

4 Modell in Matlab/Simulink

Die Implementierung des mathematischen Modells erfolgt in Matlab/Simulink. Das Modell, wie im **Bild 4-1** dargestellt ist, besteht aus drei Subsystemen und zwei Integratorbausteinen.

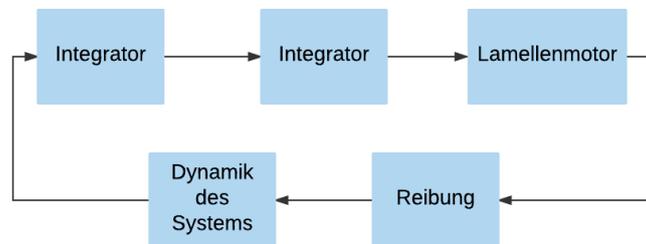


Bild 4-1: Hauptblöcke des Modells in Simulink

Die folgenden Abschnitte beschreiben die ganzen Subsysteme des Modells. Als erstes wird die Startposition des Lamellenmotors beschrieben. Damit ist die Position der Lamellen beim ersten Zeitschritt bekannt. Zunächst wird im Subsystem „Lamellenmotor“ die Berechnung der Kammervolumina, der Leckagemassenströmen, des Druckverlaufes in den Kammern und des Drehmoments implementiert. Da das Drehmoment nur die Leckage betrachtet, wird die Reibung des Lamellenmotors in einem Subsystem modelliert. Als letztes, durch die Implementierung der Dynamik des Systems in Subsystem „Dynamik des Systems“ wird die Winkelbeschleunigung des Lamellenmotors ermittelt. Durch zweifache Integration der Winkelbeschleunigung, können die neuen Winkelpositionen der Lamellen berechnet werden.

4.1 Startpunkt

Der Startpunkt des Modells ist die Position der Lamellen. Die Startposition für einen 4-Lamellenmotor ist in **Bild 4-2** dargestellt. Wie in **Bild 4-2** zu sehen ist, befindet sich die führende Lamelle in der Startposition immer in $\varphi = 0^\circ$.

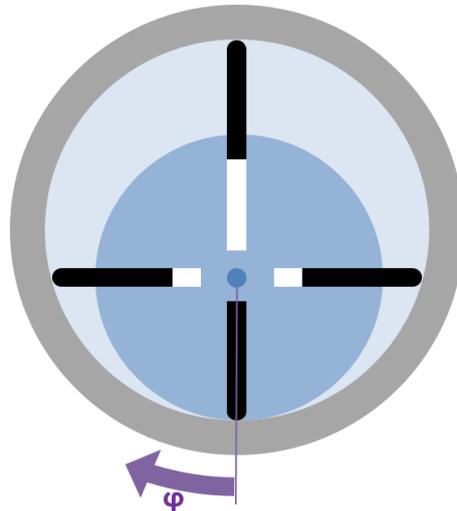


Bild 4-2: Darstellung der Startposition für einen 4-Lamellenmotor

Die Startposition der Lamellen ist der Anfangszustand des zweiten Integrators (siehe **Bild 4-3**), der die Winkelposition der Lamellen aus der Winkelgeschwindigkeit berechnet (siehe **Bild 4-4**).

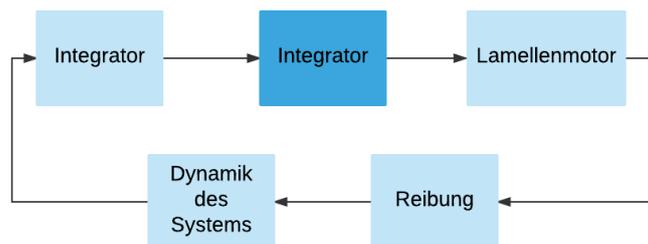


Bild 4-3: Integrator, dass den Anfangszustand betrachtet

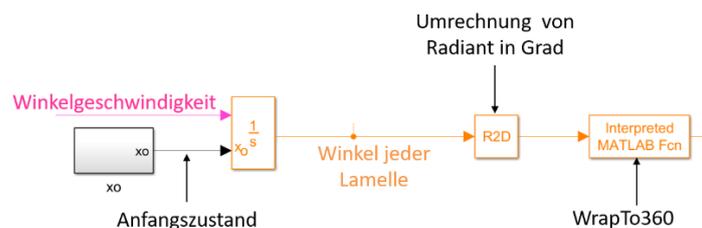


Bild 4-4: Darstellung des Integrators in Simulink

4.2 Lamellenmotor

Als nächstes ergibt sich das sogenannte Lamellenmotorsubsystem (siehe **Bild 4-5**). In diesem werden das Geometriemodell, der Druckverlauf, die Leckage und die Druckdifferenz der Lamellen modelliert.

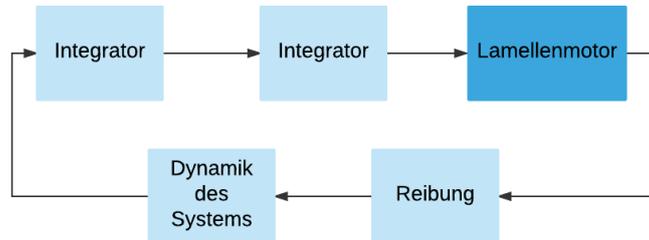


Bild 4-5: Hauptblöcke des Modells in Simulink

Dieses Subsystem entsteht aus verschiedenen Blöcken, die in **Bild 4-6** zu sehen sind.

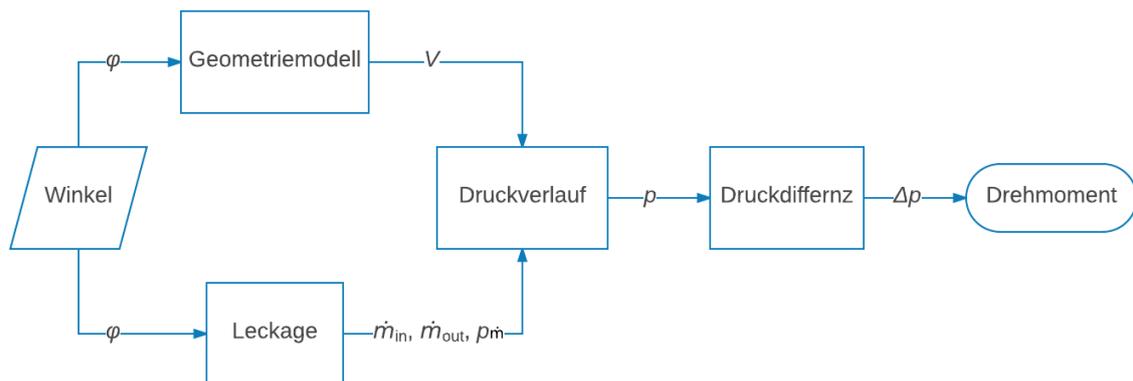


Bild 4-6: Subsysteme des Lamellenmotorblocks mit den benötigten Ein- und Ausgangs

4.2.1 Geometriemodell

Als erstes, wird das Kammervolumen aus der Winkelposition berechnet. Dieses und seine Ableitung werden später für die Berechnung des Druckverlaufes genutzt. Die Berechnung des Kammervolumens wird durch eine „*Interpreted Matlab Fcn*“, die in **Bild 4-7** zu sehen ist, implementiert. In dieser ist das ganze mathematische Modell der Geometrie (siehe **Absatz 3.1**) programmiert.

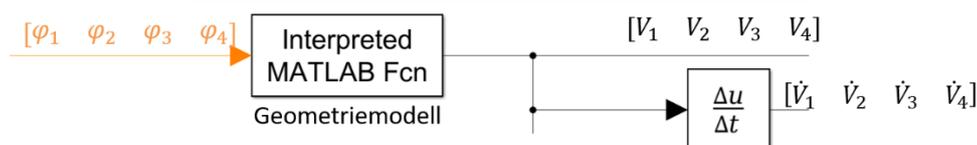


Bild 4-7: Benötigte „inputs“ und „outputs“ des Geometriemodells für einen 4-Lamellenmotor

4.2.2 Leckage

Das mathematische Modell der Leckage wird ebenfalls durch eine „Matlab-Function“ implementiert. Wie im **Absatz 3.2** erläutert, ist die Berechnung der Leckage notwendig, um den Druck in den Kammern zu berechnen.

Als erstes wird im Programm die Leckage wegen eines Kontaktverlustes zwischen der Lamelle und dem Stator berechnet. Da der Massenstrom der Leckage nur von höherem zu niedrigerem Druck fließt, können sich drei Fälle ergeben. Es gibt die Möglichkeit, dass die Kammer der rechten Seite, die linken oder beiderseitigen niedrigeren Druck in der Kammer haben. Weil der Druck für die Bedingungen und auch die Berechnung des Massenstroms benötigt wird, und dieser noch nicht bekannt ist, wird der Druckverlauf des letzten Zeitschrittes „ p_{0_i} “ eingesetzt. Nach der Berechnung der Massenströme wird die Komponente „ p_m “ der Differentialgleichungen (**Seite 23**) ermittelt. Diese Komponente beschreibt die Druckänderung in der Kammer, die durch die zu- und abgeführten Massenströme erfolgt. Da um diese Komponente berechnen zu können, die Temperatur der Kammer benötigt wird und diese noch nicht bekannt ist, wird die Temperatur des letzten Zeitschrittes „ T_{0_i} “ eingesetzt.

Als letztes werden die Leckagemassenströme durch den Spalt zwischen Rotor und Endplatten addiert. Damit sind alle Komponenten der Differentialgleichungen bekannt und der Druckverlauf kann ermittelt werden.

Weil die Leckage durch den Spalt zwischen den Lamellenseiten und den Endplatten und durch den radialen Freiraum zwischen dem Rotor und dem Stator im Modell vernachlässigt wurden, sind diese im Subsystem nicht implementiert worden.

Der Ablauf innerhalb der „Matlab-Function“ ist in **Bild 4-8** als Flussdiagramm dargestellt.

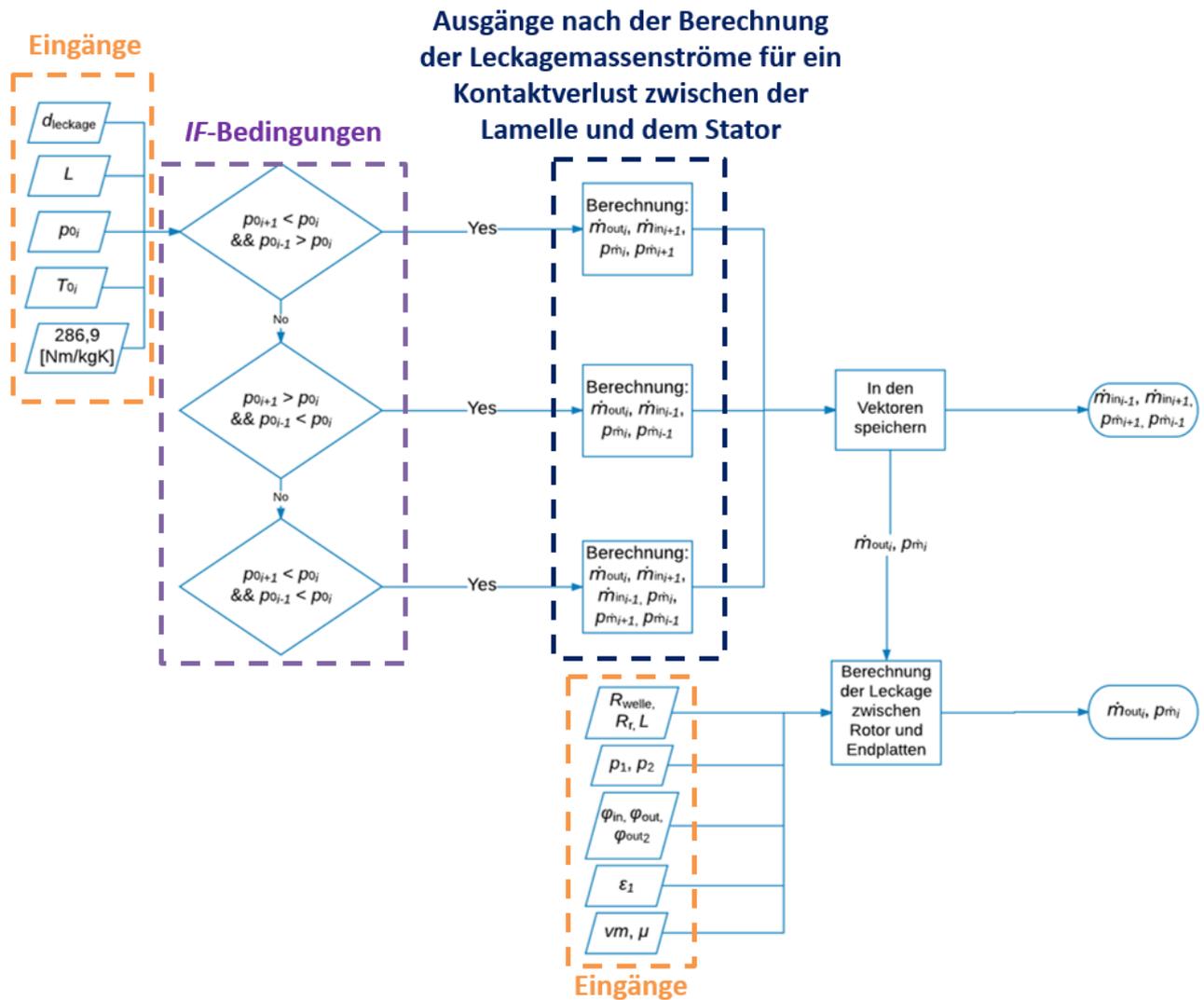


Bild 4-8: Flussdiagramm der Berechnung der Leckage

Als erstes wird im Flussdiagramm durch die Länge der Spalte zwischen der Lamelle und dem Stator „ $d_{leckage}$ “, die Länge des Rotors „ L “ und die Temperatur des vorherigen Zeitschritts „ T_{0i} “ die Berechnung der Leckage wegen eines Kontaktverlustes zwischen der Lamelle und dem Stator durchgeführt. Parallel wird durch den Radius der Welle „ R_{welle} “, den Radius des Rotors „ R_r “, die Länge des Rotors „ L “, den Eingangsdruck „ p_1 “, den Auslassdruck „ p_2 “, das spezifische Volumen „ νm “, die dynamische Viskosität „ μ “ und den Winkeln des Einlassbereiches „ φ_{in} “, des Anfangs des zweiten Auslassbereiches „ φ_{out} “ und der Endung des zweiten Auslassbereiches „ φ_{out2} “ die Leckagemassenströme durch den Spalt zwischen Rotor und Endplatten berechnet. Zuletzt werden die Leckagemassenströme der beiden Fälle addiert, und damit können die Leckagemassenströme der in einer Kammer zuführt „“ und der in einer Kammer abführt, ermittelt werden. Wie in **Bild 4-8** zu sehen ist, sind die drei verschiedenen Fälle der Berech-

nung der Leckagemassenströme wegen des Kontaktverlusts zwischen eine Lamelle und dem Stator mit einer I_f -Funktion implementiert worden.

Die verwendeten Variablen des Flussdiagramms sind in **Bild 4-9** zu sehen.

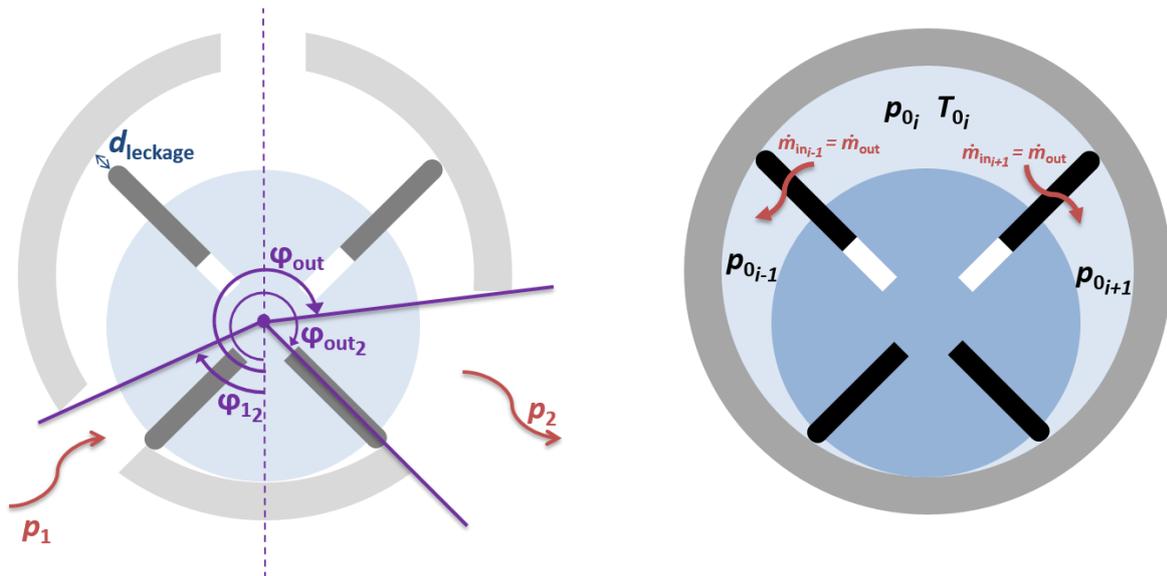


Bild 4-9: Darstellung der Variablen des Flussdiagramms

Da die „*Matlab-Function*“ nur die Leckage einer Kammer berechnet, muss diese für jeden Zeitschritt, so oft wie Kammern der Motor hat, laufen. Daher werden die „*outputs*“ wieder Vektoren sein, wo jede Koordinate zu einer Kammer entspricht. So kann die Differentialgleichung für jede Kammer schnell bearbeitet und gelöst werden. In **Tabelle 4-1** sind die Ein- und Ausgänge der „*Matlab-Function*“ dargestellt worden. Erwähnenswert sind die Vektoren mit nur Eins als Komponente. Da die Erstellung von neuen Variablen in einer „*Matlab-Function*“ zu Fehlern führen kann, werden diese Vektoren genutzt, um die „*outputs*“ hinein zu speichern.

Tabelle 4-1: Komponente der „Matlab-Funktion“

Typ	Komponente	Formelzeichen	Wert
Eingänge	Temperatur in der Kammer des vorherigen Zeitschritts	T_{0i}	–
	Druck in der Kammer des vorherigen Zeitschritts	p_{0i}	–
	Vektoren mit Eins als Komponente		(1 1 ... 1)
	Nummer von Lamellen	N	–
	Länge der Spalt zwischen den Lamellen und den Stator	d_i	–
	Länge des Rotors	L	–
	Gaskonstante	R	286,9 [Nm/kgK]
	Eingangsdruck	p_1	–
	Auslassdruck	p_2	1 [bar]
	Spezifische Volumen	vm	0,991 [m ³ /kg]
	Radius des Rotors	R_r	–
	Spalt zwischen dem Rotor und die Endplatten	ε_i	–
	Kinematische Viskosität	ν	2.05610-5 [m ² /s]
	Winkel des Einlassbereiches	φ_{in}	–
Winkel des Anfangs des Auslassbereiches	φ_{out}	–	
Winkel des Endes des Auslassbereiches	φ_{out2}	–	
Ausgänge	Komponente „ p_m “ der Differentialgleichungen	p_m	–
	Eintretende Leckageströme	\dot{m}_{in}	–
	Austretende Leckageströme	\dot{m}_{out}	–

4.2.3 Druckverlauf

Wie in **Bild 4-6** zu sehen ist, kann der Druckverlauf berechnet werden, nachdem das Kammer-
volumen und die Leckagemassenströme ermittelt sind. Wie im **Absatz 3.2** beschrieben ist, gibt
es Stellen wo der Kammerdruck im Vorhinein bekannt ist, und andere wo er ermittelt werden
muss. Deswegen wird ein „If Block“ verwendet, um den Druckverlauf zu berechnen. Die ver-
schiedenen Fälle hierbei und die Bedingungen sind in **Tabelle 4-2** dargestellt.

Tabelle 4-2: Bedingungen jedes Falls

Fall	Abkürzung	Bedingungen	Druck
Isobarer Prozess, zwischen dem Erreichen des Einlasses durch die vordere Lamelle bis zum Verlassen des Einlasses durch die folgende Lamelle.	A	$\varphi \geq \varphi_{11}$ und $\varphi - 2\pi/N < \varphi_{12}$	p_1
Entspannungsprozess bis die führende Lamelle den Beginn des ersten Auslassbereiches erreicht.	B	$\varphi < \varphi_{01}$ und $\varphi - 2\pi/N \geq \varphi_{12}$	Zu be- rechnen
Isobarer Prozess bis die hintere Lamelle den ersten Auslassbereich verlässt.	C	$\varphi \geq \varphi_{01}$ und $\varphi - 2\pi/N < \varphi_{02}$	p_0
Kompressionsprozess bis die führende Lamelle den Beginn des zweiten Auslassbereiches erreicht	D	$\varphi < \varphi_{21}$ und $\varphi - 2\pi/N \geq \varphi_{02}$	Zu be- rechnen
Isobarer Prozess bis die hintere Lamelle den zweiten Auslassbereich verlässt.	E	$\varphi \geq \varphi_{21}$ und $\varphi - 2\pi/N < \varphi_{22}$	p_2
Kompressionsprozess bis die führende Lamelle den Einlassbereich erreicht	F	$\varphi < \varphi_{11}$ und $\varphi - 2\pi/N \geq \varphi_{22}$	Zu be- rechnen

In **Bild 4-10** sind die Parameter der If-funktion zu sehen.

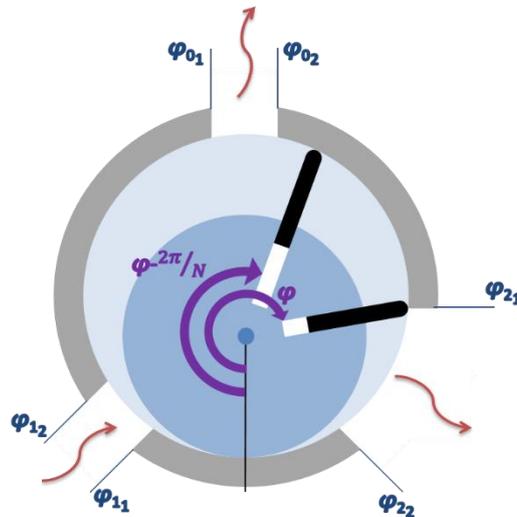


Bild 4-10: Darstellung der Parameter der Bedingungen

Bei der Programmierung der Bedingungen ist darauf zu achten, dass manchmal negative Winkel möglich sind. Daher sind im Simulinkmodell zusätzliche Bedingungen zu finden.

Wo der Druck unbekannt ist, werden die in **Absatz 3.2** beschriebenen Differentialgleichungen verwendet. Die Differentialgleichungen sind durch eine „*Interpreted Matlab Fcn*“ implementiert. Um diese im Modell berechnen zu können, werden die folgenden Informationen benötigt:

- Druck und Temperatur der Kammern des vorherigen „*Time-Step*“. Hierfür werden „*Unit delays*“ verwendet.
- Leckagemassenströme
- Zeit der Simulation und des vorherigen „*Time-Step*“. Um die Zeit zu berechnen, wird eine „*Ramp*“ benutzt und einen „*Unit delay*“ für den vorherigen Zeitschritt (siehe **Bild 4-11**). Das vorherige Zeitschritt ist für die Darstellung der Anfangsbedingungen der Differentialgleichungen notwendig.
- Winkelgeschwindigkeit und Positionen der Lamellen.

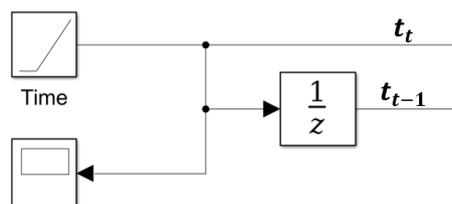


Bild 4-11: Darstellung der Zeit im Simulinkmodell

Da die genannten Werte in Vektoren gespeichert werden, wo jede Komponente des Vektors Information einer Kammer enthält, müssen die Komponente der Vektoren einzeln gelesen werden, um die Differentialgleichungen für eine Kammer lösen zu können. Dafür werden die Simulinkblöcke „*For Iterator Subsystem*“ und „*Index Vector*“ eingesetzt. Der „*Index Vector*“ erlaubt, nur eine Komponente des Vektors zu lesen und das „*For Iterator Subsystem*“ in einem Zeitschritt N -mals (N ist die Anzahl von Lamellen des Motors) die Differentialgleichungen zu lösen. Da die „*Interpreted Matlab Fcn*“ nur einen Eingang erlaubt, muss ein Bus mit der ganzen Information für eine Kammer programmiert werden. In **Bild 4-12** ist jede Komponente des Buses dargestellt.

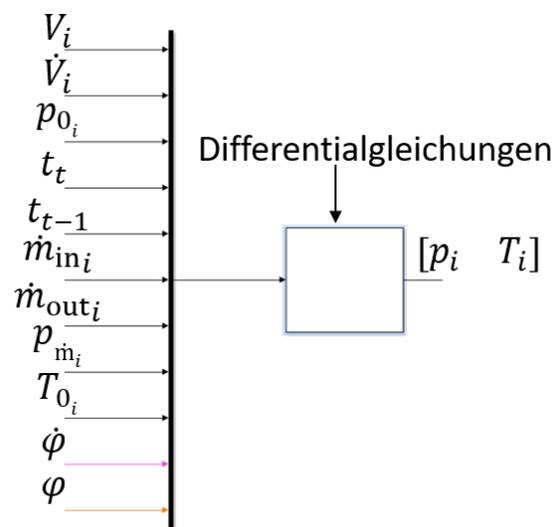


Bild 4-12: Darstellung der Komponenten des Buses

Bild 4-13 zeigt eine Darstellung des Lamellenmotorsubsystems als Flussdiagramm. Als erstes ist eine *If*-Bedingung implementiert worden, um von den dargestellten Fällen in der **Tabelle 4-2**, der Fall wo sich die Kammer befindet zu identifizieren. Wenn der Fall ermittelt worden ist, können sich zwei Möglichkeiten ergeben, dass der Druck schon bekannt ist, oder dass es berechnet werden muss. Wenn der Druck nicht bekannt ist, wird es durch die Differentialgleichungen ermittelt. Dafür werden die berechneten Ausgänge des Subsystems Leckage benötigt. Diese sind im Flussdiagramm mit Orange dargestellt worden.

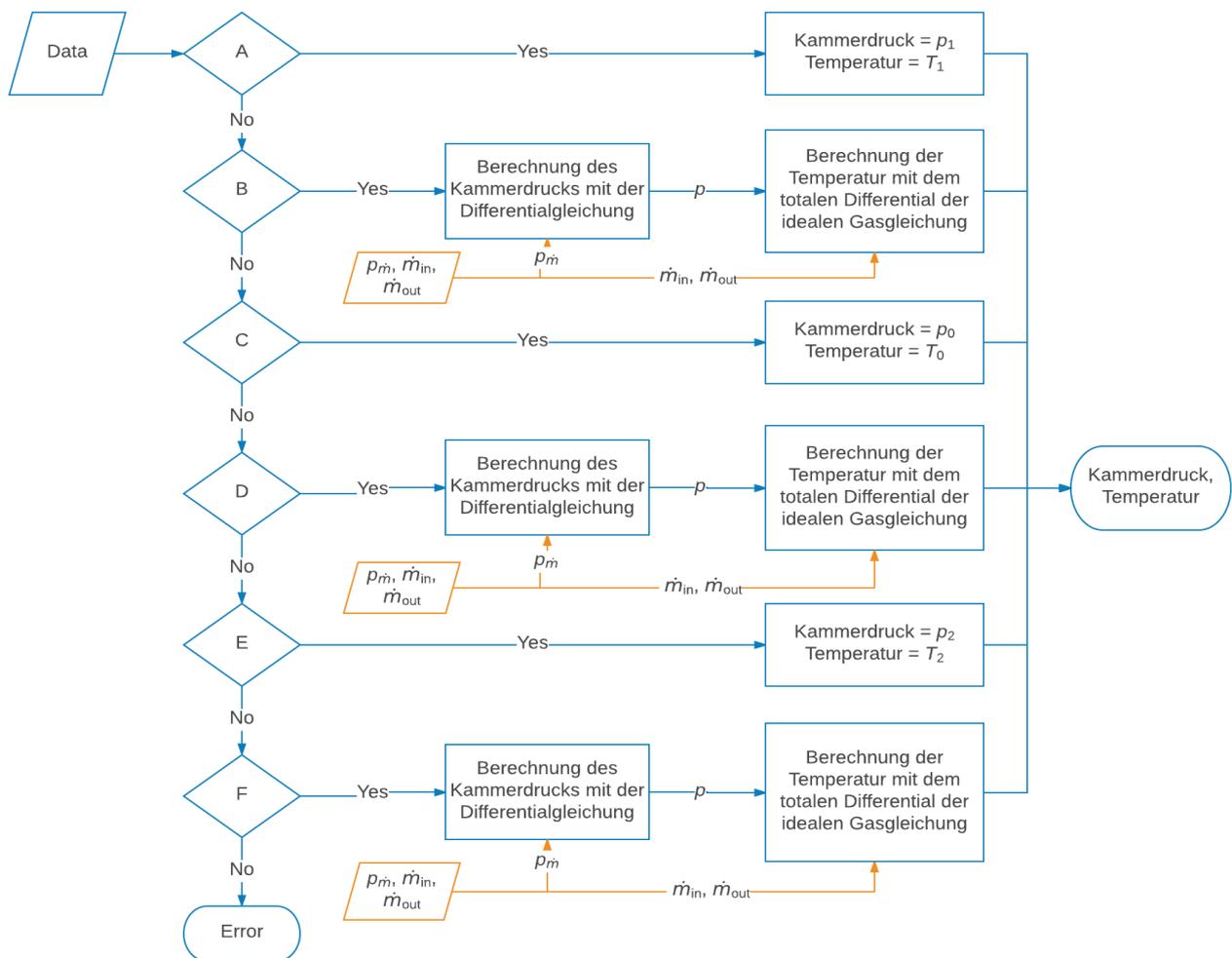


Bild 4-13: Flussdiagramm der Berechnung der Druckkammer und der Temperatur

Zu Beginn des Prozesses herrscht in dem Kammern Umgebungsdruck, bis diese zum ersten Mal den Einlass erreichen. Daher ist ein „Zähler“ Vektor notwendig, damit der Druck zunächst konstant bleibt. Dies ist schematisch in **Bild 4-14** dargestellt.

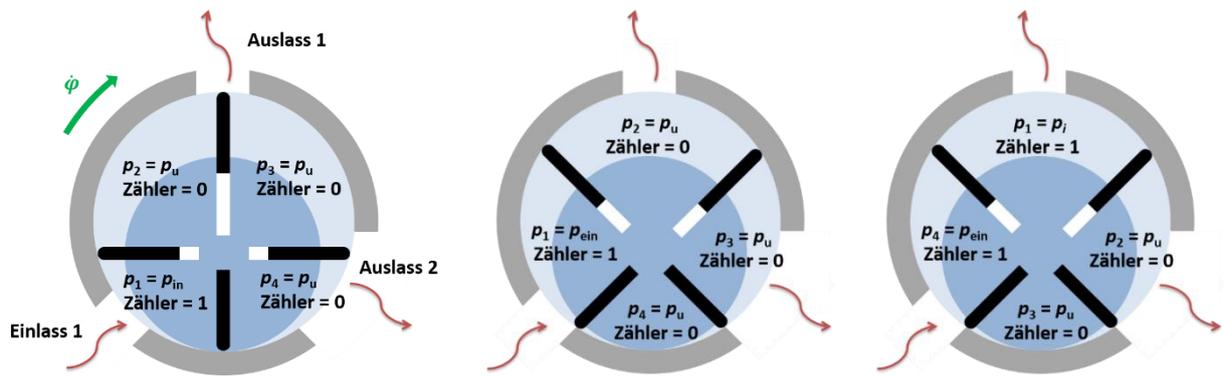


Bild 4-14: Beispiel des Verlaufes des Wertes des Zählers

Erreicht eine Kammer den Einlassbereich, steigt der Druck im realen Motor nicht sprunghaft an, sondern benötigt eine gewisse Zeit um den Versorgungsdruck zu erreichen.

Der Kammerdruck wird daher nach [Ioa87] bei Erreichen des Einlasses über ein PT1-Glied ohne Verstärkung modelliert. (vgl. **Bild 4-15** als Beispiel).

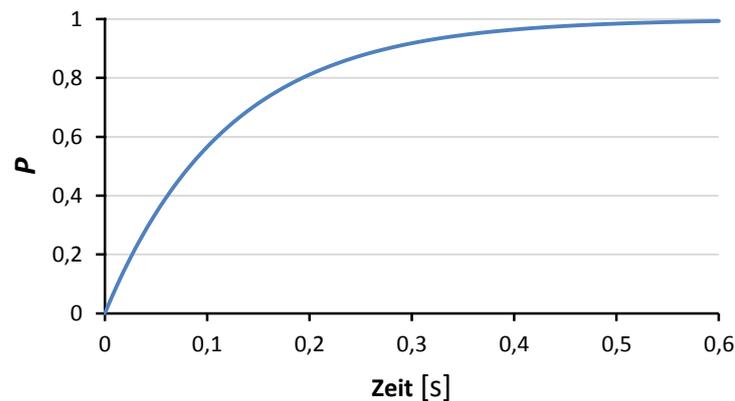


Bild 4-15: Darstellung des normierten Drucks mit einer Zeitkonstante von 0,05

Weil das Modell diskret ist, ist das PT1-Glied abhängig von der Zeit. Deswegen muss dieses jedes Mal, wenn der Zeitschritt der Simulation geändert wird, neu berechnet werden. Dies kann mit Matlab folgendermaßen durchgeführt werden:

```
>> G=tf(1,[tau 1]) %mit tau als Zeitkonstant
>> c2d(G, Zeitschritt)
```

Nach der Berechnung der neuen PT1, muss diese im Simulinkmodell neu eingetragen werden.

4.2.4 Druckdifferenz der Lamellen

Nach der Berechnung des Drucks entsteht ein neuer Informationsvektor, der den Druck in jeder Kammer enthält. Damit werden in einem Subsystem (siehe **Bild 4-6**) die Druckdifferenzen zwischen den Kammern berechnet.

Dieses Subsystem enthält einen „*MATLAB Function*“-Block der aus dem Druckvektor den Druckdifferenzvektor für jede Lamelle berechnet. Die Druckdifferenz über eine Lamelle kann nach **Gl. 4-1** ermittelt werden:

$$\Delta p_i = p_i - p_{i+1} \quad \text{Gl. 4-1}$$

Erwähnenswert ist die Berechnung der letzten Komponente des Druckdifferenzvektors. Wie in **Gl. 4-2** dargestellt ist, muss diese extra definiert werden, da für einen n-Komponentenvektor, die Koordinate „n+1“ nicht existiert.

$$\Delta p_n = p_n - p_1 \quad \text{Gl. 4-2}$$

4.2.5 Drehmoment

Im letzten Subsystem des Blocks „Lamellenmotor“ wird das Drehmoment, der nur Leakage betrachtet, durch die Druckdifferenz berechnet. Die Gleichungen aus **Kapitel 3.3** werden in Simulink in ein Subsystem implementiert, das die notwendigen Flächen und Längen der Lamellen berechnet um das Drehmoment zu ermitteln. Ausschließend werden die Flächen und Radien der mit den Druckdifferenzen der Lamellen multipliziert. Somit ergeben sich die Einzeldrehmomente der Lamellen. Um das Drehmoment des Lamellenmotors zu berechnen, werden die Einzeldrehmomente addiert. In **Bild 4-16** ist die Implementierung des Drehmoments in Simulink zu sehen.

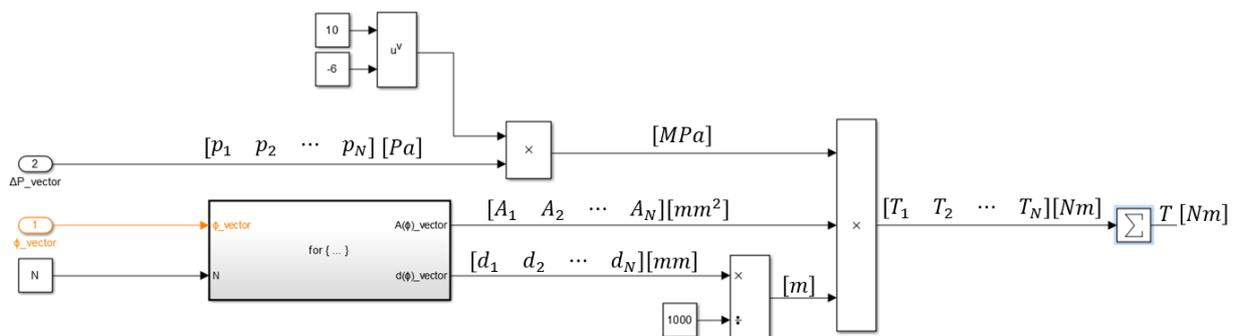


Bild 4-16: Berechnung des Drehmoments im Simulinkmodell

4.3 Reibung

Im folgenden Abschnitt erfolgt die Beschreibung der Berechnung der Reibungsverluste (siehe **Bild 4-17**)

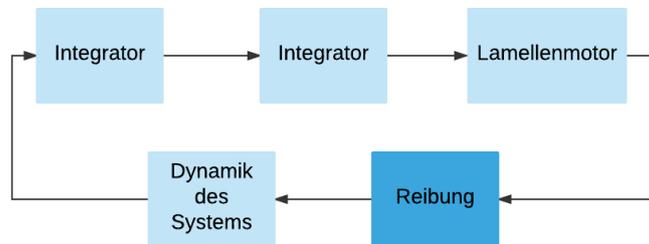


Bild 4-17: Hauptblöcke des Modells in Simulink

Im vorliegenden Modell werden drei Reibkontakte betrachtet:

- Reibung der Lamellen mit dem Stator
- Statische Reibung
- Geschwindigkeitsabhängiges Reibmoment

Reibung der Lamellen mit dem Stator und Rotor

Zur Berechnung des Reibmoments, das durch die Kontakte zwischen den Lamellen und dem Rotor/Stator hervorgerufen wird, wird ein weiteres Subsystem eingefügt.

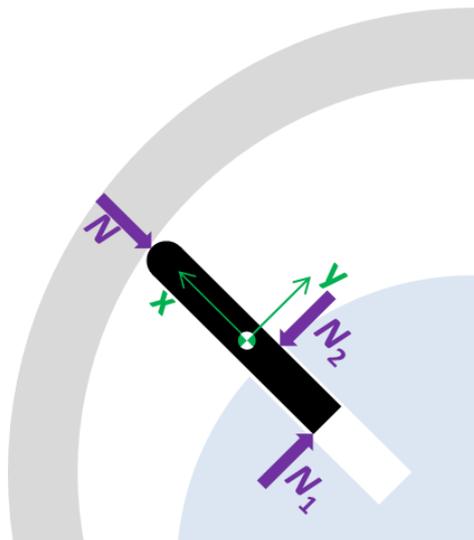


Bild 4-18: Darstellung der Normalkräfte

Dieses berechnet nach den in **Absatz 3.4** beschriebenen Gleichungen die Normalkräfte, die in Bild 4-19 zu sehen und für die zur Berechnung des Reibmoments notwendig sind. Aus diesen kann dann wiederum das Winkel- und Geschwindigkeitsabhängige Reibmoment ermittelt werden.

Statische Reibung

Der Verlauf der statischen Reibung zu Beginn der Bewegung wird nach **Gl. 4-3** berechnet.

$$F_{R\text{statisch}}(t) = F_{R0} \cdot e^{-k \cdot t} \quad \text{mit } k \text{ als Zeitkonstante} \quad \text{Gl. 4-3}$$

Der sich ergebene Verlauf des Reibmoments ist in **Bild 4-19** dargestellt.

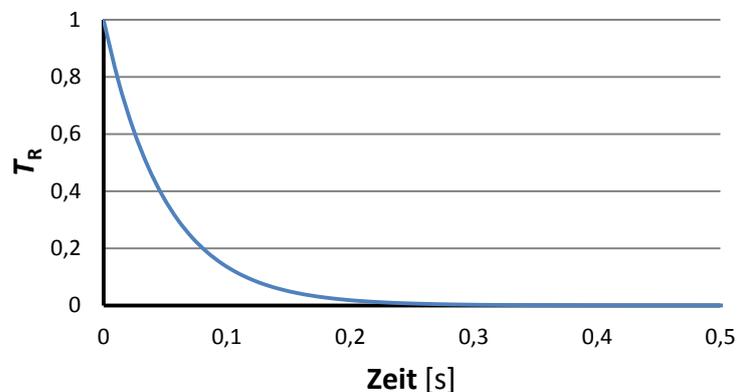


Bild 4-19: Normierter Verlauf des statischen Reibmoments

Das Ziel dieser Reibung ist der statische Widerstand, der die dynamische Reibung nicht betrachtet, zu modellieren.

Geschwindigkeitsabhängiges Reibmoment

Da das geschwindigkeitsabhängige Reibmoment zwischen dem Rotor und Stator nicht bekannt ist, wird dieses nach **Gl. 4-4** abgeschätzt:

$$M_{RRS} = \mu_{RS} \cdot \dot{\varphi} \quad \text{Gl. 4-4}$$

Das Flussdiagramm der Berechnung der Reibung ist in **Bild 4-20** zu sehen.

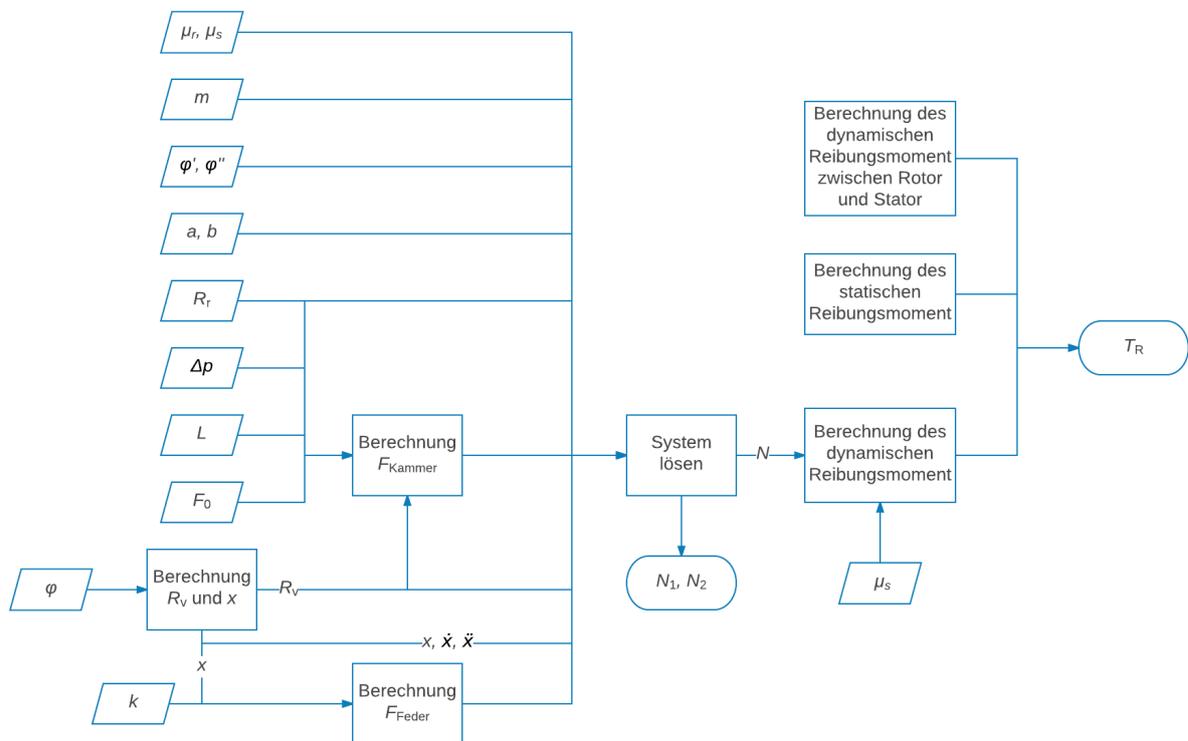
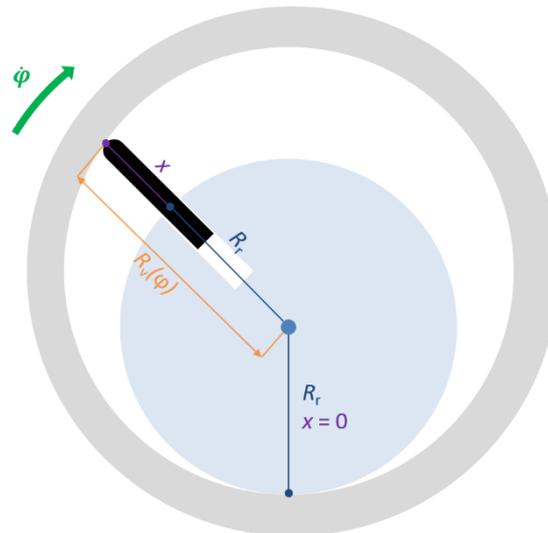


Bild 4-20: Flussdiagramm der Berechnung der Reibung

Da die Dynamik des Lamellenmotors mit nur einem Freiheitsgrad modelliert ist, erfolgt als erstes die Berechnung der Koordinate „ x “ und ihrer Ableitungen „ \dot{x} “ und „ \ddot{x} “ aus dem Drehwinkel „ φ “. Wie in **Bild 4-21** zu sehen ist, beschreibt die Koordinate „ x “ die Bewegung des Schwerpunkts der Lamelle in der radialen Richtung. Folglich sind ihre Ableitungen, die radiale Geschwindigkeit und Beschleunigung der Lamelle.

Bild 4-21: Definition der Variable „ x “

Da die Koordinate „ x “ für $\varphi=0$ den Wert 0 annimmt, kann „ x “ nach **Gl. 4-5** ermittelt werden:

$$x = R_v(\varphi) - R_r = -e \cdot \cos(\varphi) + \sqrt{R_s^2 - (d \cdot \sin(\varphi))^2} - R_r \quad \text{Gl. 4-5}$$

Mit den Koordinaten „ x “ und „ φ “ und ihre Ableitungen, die Reibkoeffizienten zwischen dem Rotor und der Lamelle „ μ_s “ und zwischen der Lamelle und Stator „ μ_r “, die Masse „ m “, die Länge „ b “ und die Breite „ a “ der Lamellen, der Radius des Rotors „ R_r “, die Kräfte die durch die Druckdifferenz an der Lamellen angewendet werden „ F_{Kammer} “ und die Federkräfte „ F_{Feder} “ können die Normalkräfte durch die Matlabfunktion in der die Gleichungssysteme des **Absatzes 3.4** programmiert worden sind, ermittelt werden. Erwähnenswert ist die Berechnung der Federkraft, die nach $F_{\text{Feder}} = F_0 - k \cdot x$ ermittelt wird, wo „ F_0 “ die Anfangsspannung ist.

Durch die Multiplikation der Normalkräfte mit dem Reibkoeffizient entsteht das Reibmoment wegen des Kontaktes zwischen dem Stator und den Lamellen. Zunächst werden das statische Reibmoment und das Geschwindigkeitsabhängiges Reibmoment addiert. Nach der Addierung der drei Reibkontakte ist das gesamte Reibmoment des Lamellenmotors „ T_R “ ermittelt.

Die Reibkräfte zwischen Rotor und Lamellen werden in diesem Fall nicht modelliert, da diese im System „Lamellenmotor“ ausschließlich interne Kräfte darstellen und so keinen direkten Einfluss auf das Reibmoment haben.

4.4 Systemdynamik

Der folgende Abschnitt beschreibt die Modellierung der Systemdynamik. Das dynamische Verhalten des Systems wird, wie in **Abschnitt 3.4.2** beschrieben, über einen Drallsatz für das System „Rotor-Lamellen“ modelliert. Das Subsystem (vgl **Bild 4-22**) setzt sich aus drei Hauptbestandteilen zusammen:

- Einem Start-Block mit den Eingangs- und Startwerten
- Der Ermittlung des Trägheitsmoments
- Der Berechnung der Systemdynamik

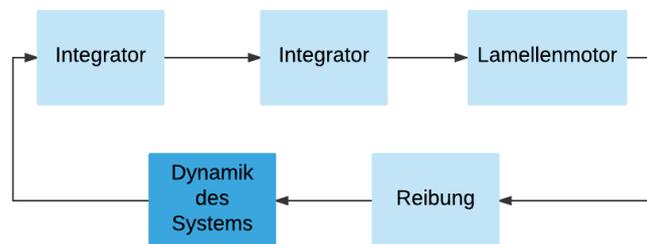


Bild 4-22: Hauptblöcke des Modells in Simulink

Diese werden in den folgenden Absätzen genauer beschrieben.

4.4.1 Trägheit

Die Trägheit des Systems kann für beliebige Winkelpositionen berechnet werden und ist mit einer Matlabfunktion programmiert worden. Die Funktion berechnet zuerst die Trägheit des Rotors, und danach die Trägheit der Lamellen. Dies ist mit einer „*Interpreted MATLAB Fcn*“ in Simulink implementiert worden.

4.4.2 Dynamik

Die Ermittlung der Systemdynamik kann nun aus der berechneten Trägheit, dem Reibmoment sowie dem aus Druckdifferenzen hervorgerufenen Antriebsmoment erfolgen. In letzterem sind die Leckageverluste einbezogen. Nach der Berechnung der Winkelbeschleunigung über den Drallsatz kann durch zweifache Integration die Winkelposition bestimmt werden.

4.4.3 Start-Block

Um das Anlaufverhalten realitätsnah abzubilden, ist ein weiteres Subsystem notwendig. Dieses verhindert ein Loslaufen des Rotors entgegen der vorgesehenen Drehrichtung, wenn zu Beginn das statische Reibmoment das Antriebsmoment übersteigt und es so nach dem Drallsatz zu einer Beschleunigung in negativer Richtung kommen würde. **Bild 4-23** zeigt die Implementierung in Simulink.

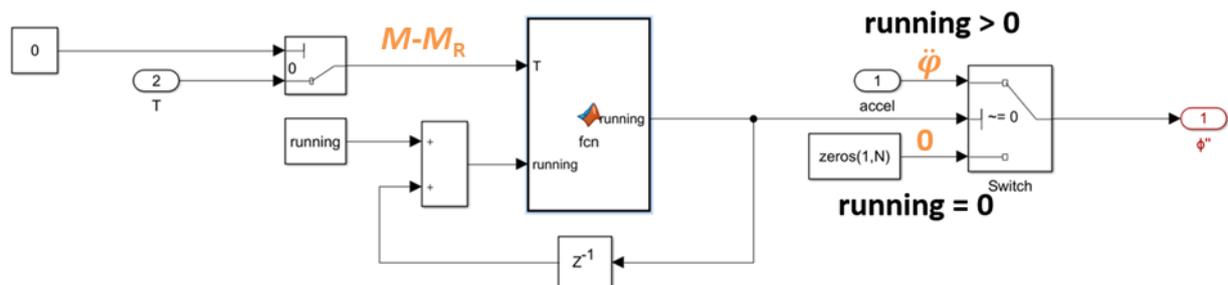


Bild 4-23: Darstellung der Implementierung des Start-Blocks im Simulinkmodell

Es wird die zusätzliche Variable „*running*“ eingeführt. Über diese kann nun eine Fallunterscheidung durchgeführt werden. Beim Anlaufen werden negative Momente zu Null gesetzt. Erst, wenn das Drehmoment positiv ist, wird die Beschleunigung berechnet. Ab diesem Moment wird die Variable „*running*“ auf 1 eingesetzt. Dies bedeutet, dass der Lamellenmotor schon dreht und ab jetzt negative Momenten schon gültig und realistisch sind.

5 Überprüfung des Modells

Um die Genauigkeit des Modells zu wissen, sind einige der Subsysteme des Modells überprüft worden. In den folgenden Abschnitten wird die Abweichung der Drehzahl und des Drehmoments berechnet. Außerdem ist der Druckverlauf einer Kammer dargestellt und analysiert worden.

5.1 Druckverlauf einer Kammer

Da der innere Druck in einer Kammer nicht gemessen wurde, kann das Druckverhältnis nicht validiert werden. In **Bild 5-1** ist das modellierte Druckverhältnis für den gemessenen Lamellenmotor zu sehen.

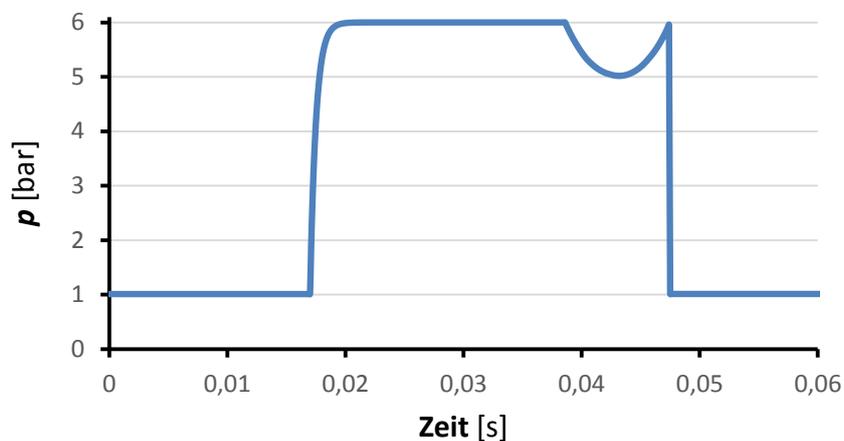


Bild 5-1: Druckverlaufes einer Kammer

In diesem ist zu betrachten, dass die Leckage nicht einen großen Einfluss auf in der Berechnung des Kammerdrucks hat. Dies kann in dem Verdichtungsprozess betrachtet werden, da der Kammerdruck wieder bis 5,95 bar steigt. Dies wäre in einem Modell, wo in dem der Druckverlauf durch die Polytropengleichungen berechnet würde, eine gute Annäherung der Realität, da das Kammervolumen am Anfang des Entspannungsprozesses und am Ende des Dichtungsprozesses den gleichen Wert hat. Da im Modell die Leckage betrachtet wird, sollte der Kammerdruck nach dem Dichtungsprozess wegen der Leckage kleiner sein. Da es so nicht ist, ist der Einfluss der Leckage im Modell nicht hoch genug.

5.2 Überprüfung des gesamten Modells

Um die Überprüfung des Modells zu durchzuführen, ist das Drehmoment und die Drehzahl eines Lamellenmotors in einem Prüfstand gemessen worden. Die Messungen sind mit drei verschiedenen Lastmomenten durchgeführt worden. Somit kann eine Bestätigung des Modells in drei verschiedenen Punkten der Drehmomentkennlinie durchgeführt werden.

Die drei Punkte sind in **Tabelle 5-1** dargestellt worden:

Tabelle 5-1: Gemessene Punkte der Drehmomentkennlinie

M_L [Nm]	n [min^{-1}]
0,92	3091
2,16	
3,35	568

Als erstes ist der kleinste Lastmoment analysiert worden. In **Bild 5-2** ist die gemessene und die vom Modell abgegebene Drehzahl zu sehen.

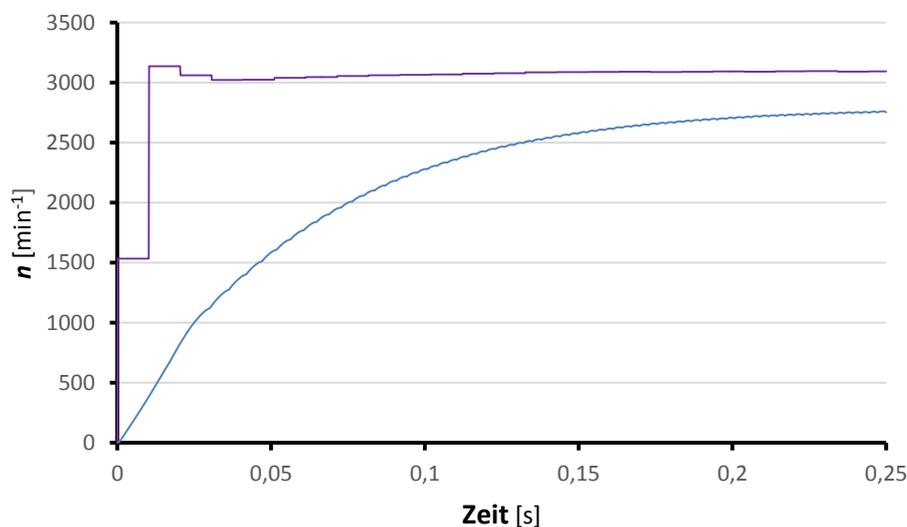


Bild 5-2: Darstellung der gemessenen (lila) und der modellierten Drehzahl (blau)

Obwohl der Mittelwert eine Abweichung von 12% hat, kann in **Bild 5-2** betrachtet werden, dass der transiente Bereich nicht der Realität entspricht. In Modell benötigt der Lamellenmotor 10-mal mehr Zeit um den Stationären Bereich zu erreichen. Im Stationären Bereich annähert sich das modellierte Drehmoment an der Realität an.

Analog ist in **Bild 5-3** dem gemessenen und simulierten Drehmoment des Lamellenmotors dargestellt worden.

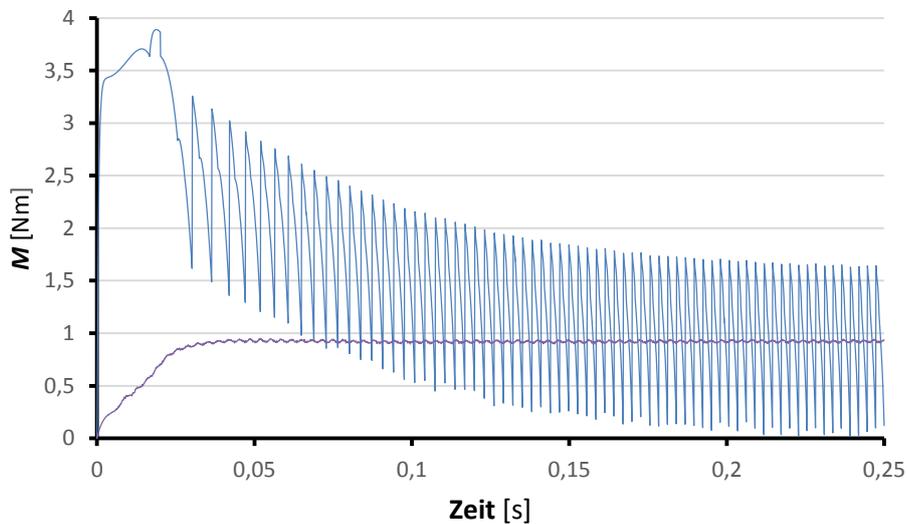


Bild 5-3: Darstellung des gemessenen (lila) und des modellierten Drehmoments (blau)

In diesem Fall hat der Mittelwert des Drehmoments eine Abweichung von 6%. Trotz die kleinen Abweichung des Mittelwerts, annähert sich das Verhältnis des Drehmoments nicht an dem gemessenen Drehmoment an. Ein Grund für die hohe Amplitude der Oszillation des modellierten Drehmoments ist der Druckverlauf. Da der Druck in den Kammern, wenn die führende Lamelle den Auslassbereich erreicht, von 6 zu 1 bar in nur einem einzigen Zeitschritt ändert, entstehen große Unterschiede des Werts des Drehmoments des Lamellenmotors von einem Zeitschritt zu dem nächsten. Deswegen hat das Verhältnis des ergebenen Drehmoments in Simulink eine sehr hohe Amplitude.

Wenn zum Beispiel der Einlassdruck nur 3 bar hätte, wurde die Amplitude des Drehmoments nicht so hoch sein, da der Differenzdruck zwischen einen Zeitschritt zu und den nächsten nicht so groß sein würde. In **Bild 5-4** ist der gleiche Modell nur mit der Änderung des Eingangsdrucks von 3 bar zu sehen. In **Bild 5-4** kann beobachtet werden, wie bei kleineren Differenzdrücken in den Kammern zwischen zwei Zeitschritten die Amplitude ebenfalls kleiner wird.

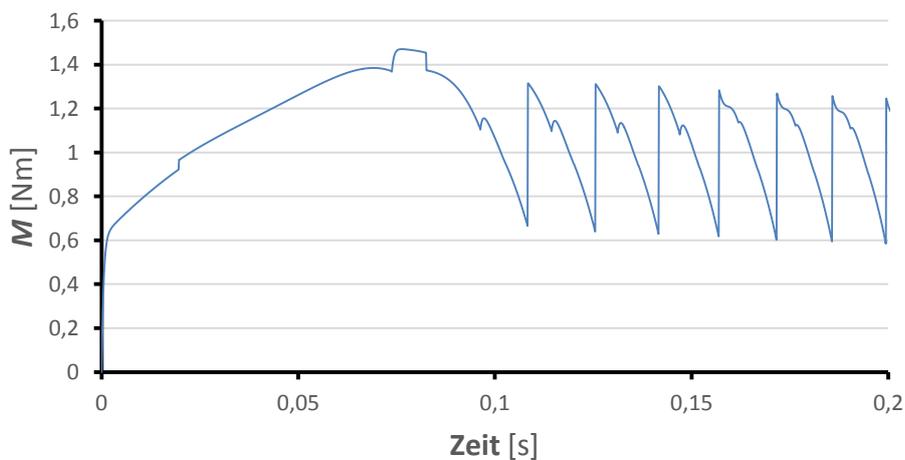


Bild 5-4: Darstellung des modellierten Drehmoments mit einem Einlassdruck von 3 bar

Da die Abweichungen im Toleranzbereich sind, kann das Modell des Lamellenmotors eine Annäherung für die Mittelwerte in hohen Geschwindigkeiten geben, aber nicht das Verhältnis des Drehmoments beschreiben.

In zweitem Fall ist es das Modell für ein mittleres Lastmoment validiert worden. Wie beim ersten Fall, sind in **Bild 5-5** und **Bild 5-6** das berechnete und gemessene Drehmoment und die Winkelgeschwindigkeit dargestellt worden.

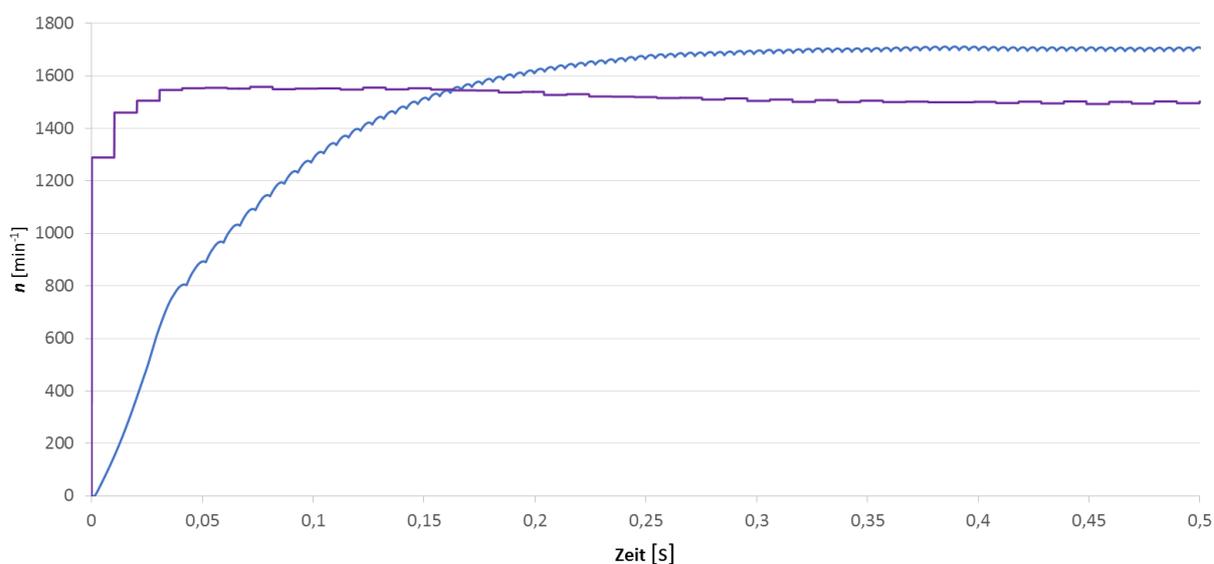


Bild 5-5: Darstellung der gemessenen (lila) und der modellierten Drehzahl (blau)

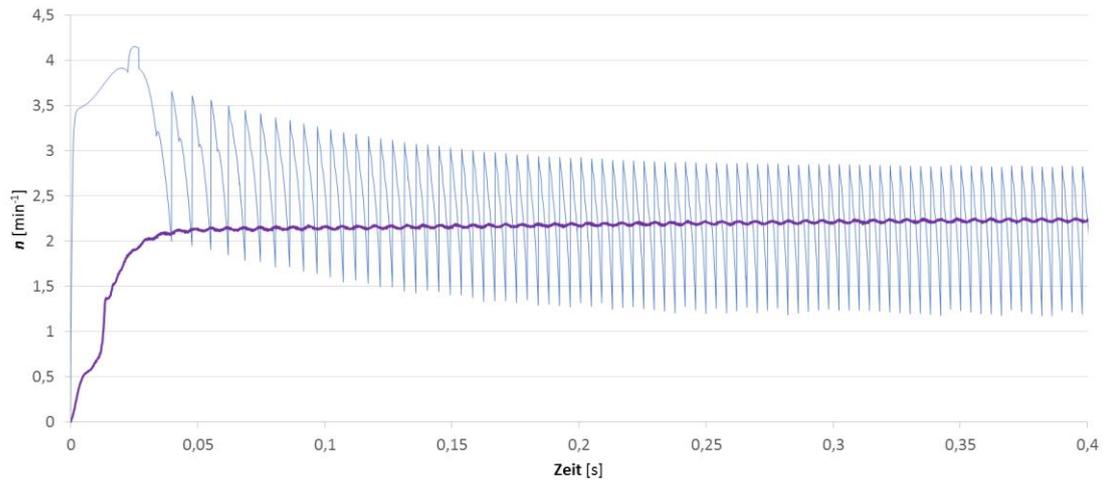


Bild 5-6: Darstellung des gemessenen (lila) und des modellierten Drehmoments (blau)

Da in diesem Fall die Abweichungen des Mittelwerts der Drehzahl 10% und des Drehmoments 8% sind, ist die Annäherung des Mittelwerts im Toleranzbereich. Wie bei einem kleinen Lastmoment, kann der transienten Bereich und das Verhältnis des Drehmoments beim Modell nicht beschrieben werden, da die Abweichungen zu hoch sind.

Als letztes ist das Modell für höhere Drehmomente und kleinere Winkelgeschwindigkeiten überprüft worden.

Da in diesem Fall die Abweichung der Drehzahl höher als 50% ist, kann das Modell für kleinere Winkelgeschwindigkeiten nicht eingesetzt werden, weil es auch nicht für eine Annäherung gültig ist. Wie in **Bild 5-7** zu betrachten ist, ist die Drehzahl des Lamellenmotors höher als die Gemessene.

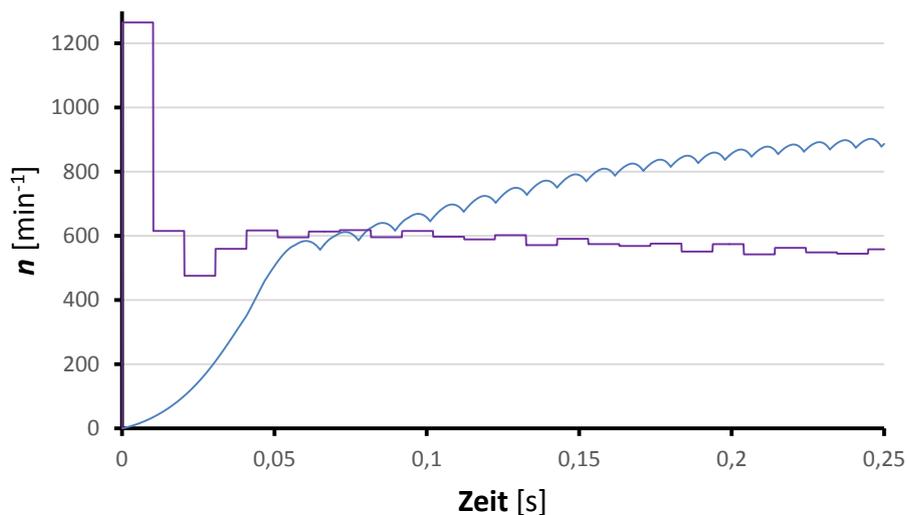


Bild 5-7: Darstellung der gemessenen (lila) und der modellierten Drehzahl (blau)

Die große Abweichung kann erstens wegen eines Fehlers mit der Modellierung der statischen Reibung erklärt werden, da diese den höchsten Einfluss in den Reibkräften am Anfang der Bewegung hat. Außerdem ist bei kleinen Geschwindigkeiten die Leckage wegen eines Kontaktverlusts zwischen den Lamellen und dem Stator am höchsten, da die Zentrifugalkraft am kleinsten ist, und es damit viel einfacher ist, dass die Lamelle den Kontakt mit dem Stator verliert. Da in der mechanischen Modellierung des Lamellenmotors nur ein Freiheitsgrad betrachtet wird, kann die Spalte zwischen dem Stator und einer Lamelle wegen eines Kontaktverlusts nicht berechnet werden. Deswegen ist ein konstanter Wert für die Spalte eingesetzt worden. In diesem Fall ist bewiesen worden, dass diese Vereinfachung sich nicht an der Realität annähert, da für kleinere Drehzahlen die Leckagemassenströme viel größer als bei hohen Drehzahlen sein sollte.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Die Arbeit behandelt die Erstellung eines Simulationsmodells für einen pneumatischen Lamellenmotor. Dafür ist erst eine mathematische Modellierung durchgeführt worden und in Matlab/Simulink implementiert. Als letztes ist das Modell in einem Prüfstand validiert worden.

Das Drehmoment eines Lamellenmotors entsteht durch die Druckdifferenz an den Lamellen. Diese erzeugt eine Kraft an den Lamellen, und durch die Summe der Einzelkräfte entsteht ein Drehmoment in der Drehrichtung des Lamellenmotors. Um die Druckdifferenz an jeder Lamelle zu ermitteln muss erst der Druckverlauf bekannt sein. Im Fall, dass im System keine Leckage betrachtet würde, konnte die Berechnung des Drucks in den Kammern durch die polytropischen Gleichungen durchgeführt werden. Dafür würden nur die Volumina in den Kammern benötigt. Da in diesem Modell die Leckage nicht vernachlässigt wird, kann der Druck in den Kammern nicht mehr durch die polytropischen Gleichungen ermittelt werden. Deswegen wird der Druckverlauf durch die Einsetzung des 1. Hauptsatzes der Thermodynamik berechnet. Dafür sind die Kammervolumina und die Leckagemassenströme der Kammern notwendig. Auf diesem Grund wird im Modell auch die Berechnung des Kammervolumens durch ein Geometriemodell dargestellt und die Ermittlung der Leckagemassenströme, die durch den Spalt zwischen Rotor und Endplatten und wegen eines Kontaktverlusts zwischen der Lamelle und dem Stator durchgeführt. Da nach der Einsetzung des 1. Hauptsatzes der Thermodynamik der Druck schon ermittelt ist, kann die Druckdifferenz an den Lamellen, und folglich die Einzelmomente an den Lamellen berechnet werden. Als letztes werden die ganzen Einzelmomente addiert, und somit kann das Drehmoment des Lamellenmotors zu ermittelt werden. Um die Reibung zu betrachten, wird ein Reibmoment, der die Reibung zwischen Lamelle-Rotor und Lamelle-Stator betrachtet, berechnet und vom berechneten Drehmoment des Lamellenmotors subtrahiert. Mit einer Beschreibung der Dynamik des Systems wird die Winkelbeschleunigung des Motors ermittelt und bei der Integrierung von dieser kann die neue Winkelposition der Lamellen berechnet werden.

Das mathematische Modell ist in Matlab/Simulink implementiert worden. Der Anfangszustand des Modells ist die Winkelposition der Lamellen. Damit wird durch das Subsystem „Lamellenmotor“ die Kammervolumina, Leckagemassenströme, der Druckverlaufes und das Drehmoment wegen der Druckdifferenz berechnet. Folglich wird durch das Subsystem „Reibung“ das Drehmoment wegen der Reibkräfte berechnet und vom Drehmoment wegen der Druckdifferenz subtrahiert. Als letztes wird durch die Berechnung der Trägheit die Winkelbeschleunigung ermittelt und mit zweifacher Integration die neue Winkelposition der Lamellen berechnet.

Als letztes ist eine Validation des Modells durchgeführt worden. Das Geometriemodell ist durch den SolidWorks überprüft worden. Eine Geometrie einer Kammer des Lamellenmotors ist gezeichnet worden und für jede 10° gemessen und mit dem Ergebnis des Modells verglichen worden. Außerdem um die Validation des Modells zu durchführen, ist das Drehmoment und die Drehzahl eines Lamellenmotors in einem Prüfstand gemessen worden um die Validation des Modells zu durchzuführen

Mit der Überprüfung des Modells ist bestätigt worden, dass dieses eine Annäherung des Mittelwerts des Drehmoments und der Drehzahl für kleine und mittlere Lastmomente im Toleranzbereich ergibt. Der transiente Bereich ist nicht erfolgreich modelliert worden. Dies kann sich aufgrund der Modellierung der Leckage und der statischen Reibung ergeben. Da die Leckage nicht von der Winkelgeschwindigkeit im Modell abhängig ist, ist der Einfluss der Leckage für kleine Geschwindigkeiten, beziehungsweise wenn der Motor anfängt zu drehen, nicht hoch genug.

Das Modell kann in hohen Lastmomenten keine Annäherung erfolgen. Da die Abweichung höher als 50% ist, ist das Modell in diesem Fall nicht gültig. Wie bei dem transienten Bereich, wenn die Drehzahl klein ist, haben die Leckage und die statische Reibung einen sehr großen Einfluss. Dies Hinweist darauf hin, dass die Ergebnisse des Modells bei der Modellierung der Dynamik des Systems mit zwei Freiheitsgraden verbessern werden könnten. Damit wäre es möglich die Leckage wegen eines Kontaktverlusts zwischen der Lamelle und dem Stator in Abhängigkeit von der Drehzahl zu modellieren und eine bessere Annäherung an den gemessenen Daten zu erzeugen.

Als letztens ist das Geometriemodell validiert worden. Da die Abweichung des Modells sich im Toleranzbereich sich befindet, ist dieses erfolgreich implementiert worden.

I. Literaturverzeichnis

- /Aut14/ Automostory „First Air Car“, < <http://www.automostory.com/first-air-car.htm> >, besucht am 08.01.2017
- /Bad85/ Badr, O. „Multi-Vane Expanders: Internal-Leakage Losses“, Cranfield Institute of Technology, 1985
- /Bea07/ Beater, P. „Pneumatic Drives“, 2007th Edition, Springer, 2007, S. 151–170
- /Bei76/ Bein, M. „Non-axisymmetric flow in the narrow gap between a rotating and a stationary disk“, Journal of Fluid Engineering, June 1976
- /Car07/ Cardona, S. „Exercici 2 Vibracions Mecàniques“, Departament d'Enginyeria Mecànica, UPC, 2007
- /Cha10/ Chao-Chieh, L. „Modeling and Design of Air Vane Motors for Minimal Torque Ripples“, International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, 2010
- /Dep10/ DEPRAG
SCHULZ
GmbH & Co „Anwendungen Druckluftmotoren“, < <http://www.deprag.com/druckluftmotoren/anwendungen.html> >, besucht am 08.01.2017
- /Fis13/ Fischer, P. Wärmeübergang, <<http://www.chemgapedia.de>>, besucht am 20.11.2016
- /Ioa87/ Ioannidis, I. „Servopneumatische Drehantriebe für Lageregelungen“, 1987
- /Man01/ Manuello Bertetto, A. „A Model of Contact Forces in Pneumatic Motor Vanes“, Meccanica 36, 2001, S. 691-700
- /Mur14/ Murrenhoff, H. „Grundlagen der Fluidtechnik“, 2. Aufl., RWTH Aachen, 2014
- /Rup03/ Ruppelt, E. „Druckluftbetriebene Maschinen“, 4 Aufgabe, Vulkan, 2003, S. 299–315
- /Sev10/ University of Sevilla „Lección 3. Curvas“, Matemáticas II, Dpto. De Matemática aplicada II, 2010
- /Sha02/ Shankar, R. „Heat transfer in Flow Through Conduits“Clarkson“, University, 2002
- /She10/ Sherif, S. „Frictional and Internal Leakage Losses in Rotary-Vane Two-Phase Refrigerating Expanders“, University of Florida, 2010

-
- /Spi08/ SPITZNAS „SPITZNAS Company History “, <
http://www.spitznas.de/en/company.html >, besucht am
08.01.2017
- /Xin08/ Xing, L. „Development of a Mathematical Model for Vane-type Air
Motors with Arbitrary N Vanes“, Proceedings of the World
Congress on Engineering 2008 Vol 1, 2008

II Abbildungsverzeichnis

Bild 1-1:	Erstes mit Pneumatikmotoren angetriebenes Auto /Aut14/	9
Bild 1-2:	Aufbau eines Lamellenmotors	10
Bild 2-1:	Verschiedene Bauformen von Lamellenmotoren /Bea07/.....	11
Bild 3-1:	Flussplan durch alle Subsysteme des mathematischen Modells	14
Bild 3-2:	Darstellung des Radius jeden Quadranten des Motors	15
Bild 3-3:	Angewendete Lösung für den Wurzelterm in jedem Quadranten	16
Bild 3-4:	Fälle in denen die Kammer zwei Quadranten einschließt.	18
Bild 3-5:	Darstellung des berechneten Flächeninhalts mit Gl. 3-1 und die „reale Fläche“ der Kammer	19
Bild 3-6:	Berechnetes Flächeninhalt mit der Betrachtung des Rotors	19
Bild 3-7:	Zeichnung der für die Berechnung der Querschnittsfläche der Kammer notwendigen Flächen	20
Bild 3-8:	Zwei mögliche Fälle um die Lamellenfläche zu berechnen	20
Bild 3-9:	Kontaktpunkte der Lamellen mit dem Stator	21
Bild 3-10:	Verlauf des Kammervolumens für den 8-Lamellenmotor des Prüfstands	22
Bild 3-11:	Darstellung der betrachteten Fälle	23
Bild 3-12:	Flussdiagramm des Druckverlaufs	24
Bild 3-13:	p - V -Diagramm eines Lamellenmotors.....	24
Bild 3-14:	Beispiel der Abhängigkeit einer Kammer mit den Beiderseitigen.	25
Bild 3-15:	Geometriemodell des Motors	27
Bild 3-16:	Druckverlaufs einer Kammer für einen 8-Lamellenmotor mit der gleichen Geometrie des Motors am Prüfstand	28
Bild 3-17:	Parameter für die Berechnung des Drehmoments	29
Bild 3-18:	Darstellung der Reibkräften.....	30
Bild 3-19:	Darstellung der Vereinfachung (blau) und der Realität (lila).....	31
Bild 3-20:	Darstellung des Freikörperbilds einer Lamelle	31
Bild 3-21:	Kinematik des Schwerpunktes einer Lamelle	32
Bild 3-22:	Geometrie des Motors	32
Bild 3-23:	Definition der Variable x	33
Bild 3-24:	Darstellung der externen Kräfte	36
Bild 3-25:	Geometrie des Motors	37
Bild 3-26:	Diagramm des Starkkörpers für ein bekanntes Reibmoment und einen Reibkoeffizient zwischen dem Stator und Rotor	39

Bild 3-27:	Zerlegung der Kräfte	40
Bild 3-28:	Darstellung der möglichen Leckagen	41
Bild 3-29:	Massenströme die in diesem Fall nicht betrachtet werden	42
Bild 3-30:	Koordinatensystem des Lamellenmotors.....	43
Bild 3-31:	Anfangsbedingungen des Lamellenmotors	47
Bild 3-32:	Druckprofil der Gl. 3-64 (blau) und das vereinfachte Druckprofil (rot) für die Berechnung der Fourierkonstanten.....	49
Bild 3-33:	Geometrie des Lamellenmotors.....	50
Bild 3-34:	Ideale Düse des Lamellenmotors.....	52
Bild 3-35:	Schnittbild des Lamellenmotors	54
Bild 3-36:	Beispiel der Leckage durch den radialen Freiraum zwischen dem Rotor und der Verschließenbogen des Stators.....	56
Bild 4-1:	Hauptblöcke des Modells in Simulink.....	57
Bild 4-2:	Darstellung der Startposition für einen 4-Lamellenmotor.....	58
Bild 4-3:	Integrator, dass den Anfangszustand betrachtet	58
Bild 4-4:	Darstellung des Integrators in Simulink	58
Bild 4-5:	Hauptblöcke des Modells in Simulink.....	59
Bild 4-6:	Subsysteme des Lamellenmotorblocks mit den benötigten Ein- und Ausgangs ..	59
Bild 4-7:	Benötigte „inputs“ und „outputs“ des Geometriemodells für einen 4-Lamellenmotor.....	60
Bild 4-8:	Flussdiagramm der Berechnung der Leckage	61
Bild 4-9:	Darstellung der Variablen des Flussdiagramms	62
Bild 4-10:	Darstellung der Parameter der Bedingungen.....	65
Bild 4-11:	Darstellung der Zeit im Simulinkmodell	65
Bild 4-12:	Darstellung der Komponenten des Buses	66
Bild 4-13:	Flussdiagramm der Berechnung der Druckkammer und der Temperatur	67
Bild 4-14:	Beispiel des Verlaufes des Wertes des Zählers	68
Bild 4-15:	Darstellung des normierten Drucks mit einer Zeitkonstante von 0,05	68
Bild 4-16:	Berechnung des Drehmoments im Simulinkmodell	69
Bild 4-17:	Hauptblöcke des Modells in Simulink.....	70
Bild 4-18:	Darstellung der Normalkräfte	70
Bild 4-19:	Normierter Verlauf des statischen Reibmoments	71
Bild 4-20:	Flussdiagramm der Berechnung der Reibung	72
Bild 4-21:	Definition der Variable „x“	73
Bild 4-22:	Hauptblöcke des Modells in Simulink.....	74

Bild 4-23:	Darstellung der Implementierung des Start-Blocks im Simulinkmodell.....	75
Bild 5-3:	Druckverlaufes einer Kammer.....	76
Bild 5-4:	Darstellung der gemessenen (lila) und der modellierten Drehzahl (blau).....	77
Bild 5-5:	Darstellung des gemessenen (lila) und des modellierten Drehmoments (blau) ..	78
Bild 5-6:	Darstellung des modellierten Drehmoments mit einem Einlassdruck von 3 bar	79
Bild 5-7:	Darstellung der gemessenen (lila) und der modellierten Drehzahl (blau).....	79
Bild 5-8:	Darstellung des gemessenen (lila) und des modellierten Drehmoments (blau) ..	80
Bild 5-9:	Darstellung der gemessenen (lila) und der modellierten Drehzahl (blau).....	81

III Tabellenverzeichnis

Tabelle 3-1: Definition des Flächeninhalts für jeden Fall. Das Zeichnen unter den Komponenten hinweist auf die angewendete Lösung des Wurzelterms	18
Tabelle 4-1: Komponente der „ <i>Matlab-Function</i> “	63
Tabelle 4-2: Bedingungen jedes Falls	64
Tabelle 5-1: Gemessene Punkte der Drehmomentkennlinie	77

IV Anhang

Die Normalkräfte wegen des Kontakts der Lamellen mit dem Stator und dem Rotor können mit Matrizen nach **Gl. 6-1** berechnet werden.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -\mu_R \cdot \text{sign}(\dot{x}) & -\mu_R \text{sign}(\dot{x}) \\ -\mu_S \cdot \text{sign}(\dot{\varphi}) & 1 & -1 \\ -\mu_S \cdot b \cdot \text{sign}(\dot{\varphi}) & -\mu_R \frac{a}{2} \text{sign}(\dot{x}) & \mu_R \frac{a}{2} \text{sign}(\dot{x}) - (b - X(\varphi)) \end{pmatrix}$$

$$b =$$

$$\begin{pmatrix} m \left(\ddot{x} - \dot{\varphi}^2 \left(\frac{2R_v(\varphi) - b}{2} \right) \right) - F_s + F_p \\ m \left(\ddot{\varphi} \left(\frac{2R_v(\varphi) - b}{2} \right) + \dot{\varphi} \cdot \dot{R}_v(\varphi) \right) - F_1 + F_2 \\ (F_2 - F_1) \left(b - \frac{X(\varphi)}{2} \right) + \frac{1}{12} m (a^2 + b^2) \ddot{\varphi} + \frac{b}{2} m \dot{\varphi} \dot{R}_v(\varphi) + \frac{b}{2} m \ddot{\varphi} \left(\frac{2R_v(\varphi) - b}{2} \right) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Gl.} \\ 6-1 \end{array}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} N \\ N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = b \xrightarrow{\text{ergibt}} \begin{pmatrix} N \\ N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot b$$