

Corso di Struttura dell'Atmosfera e
dell'Oceano
Versione 9.0

Nadia Pinardi
Dipartimento di Fisica e Astronomia, Universita' di Bologna

12 novembre 2017

Indice

1	Le equazioni del moto dei fluidi	1
1.1	La fluidodinamica geofisica	1
1.2	La derivata lagrangiana	3
1.3	Le equazioni del moto	5
1.4	La forza di gravità	6
1.5	Le forze interne al fluido	7
1.5.1	La pressione	7
1.5.2	Gli sforzi tangenziali	9
1.6	Le equazioni di Navier-Stokes	11
1.7	Trasformazione di coordinate nel sistema terrestre rotante	11
1.7.1	Accelerazione centripeta	16
1.7.2	L'accelerazione di Coriolis	17
1.8	Le equazioni del moto complete nel sistema rotante	17
1.9	Gli sforzi tangenziali riscritti in termini di viscosità	20
1.10	L'equazione di continuità	22
1.11	Appendice: Equazioni per traccianti attivi e passivi nei fluidi	24
1.12	Notazione e cenni di calcolo vettoriale	25
2	La turbolenza nei fluidi geofisici	27
2.1	Teoria di Reynolds della turbolenza	31
2.2	I coefficienti di viscosità turbolenta	35
3	Termodinamica	41
3.1	L'equazione del calore per i fluidi	41
3.2	La diffusività turbolenta	44
3.3	Equazione di stato per l'oceano	45
3.4	Equazione di stato per l'atmosfera secca	50
3.5	Equazione di stato per l'atmosfera umida	53
3.6	Appendice 1 al capitolo 3	55
3.7	Appendice 2 al Capitolo 3	56

4	Sintesi delle equazioni per atmosfera e oceano	57
5	Analisi di scala delle equazioni del moto	61
5.1	Grandezze di scala	61
5.2	Approssimazione di incompressibilita'	64
5.3	Approssimazione idrostatica	65
5.3.1	Soluzioni dell'equazione idrostatica per l'oceano	66
5.3.2	Soluzioni dell'equazione idrostatica per l'atmosfera	66
6	Il moto geostrofico	69
6.1	Equazioni geostrofiche	69
6.2	Relazione di vento termico	72
6.3	Geopotenziale e altezza dinamica	72
6.3.1	Caso oceano	75
6.3.2	Caso atmosfera	77
7	Stratificazione e rimescolamento verticale	79
7.1	La frequenza di Brunt-Vaisala	80

Capitolo 1

Le equazioni del moto dei fluidi

L'atmosfera e l'oceano sono, sotto tutti gli aspetti fisici, dei fluidi ed esistono delle leggi fondamentali che ne spiegano il moto. La fluidodinamica e/o la meccanica dei fluidi è quella sotto-disciplina della fisica all'interno della quale si è sviluppata la teoria del moto dei fluidi. Per l'atmosfera e l'oceano, che sono fluidi terrestri e naturali, si parla di fluidodinamica geofisica.

1.1 La fluidodinamica geofisica

Il sistema ambientale terrestre è un intreccio complicato di processi fisici, biologici, chimici e geologici che producono cambiamenti nel tempo e nello spazio di variabili di 'struttura' del sistema ovvero delle grandezze o variabili di stato del sistema.

L'oceano e l'atmosfera sono descritti come sistemi fluidi, messi in moto dalla radiazione solare e la sua interazione con la materia che costituisce il fluido. La teoria che studia il moto dei fluidi è chiamata fluidodinamica o meccanica dei fluidi a seconda del campo di applicazione, ovvero la fisica o l'ingegneria (vedi anche i filmati <http://web.mit.edu/hml/ncfmf.html>). Il fluido è quel materiale che cambia la posizione dei suoi elementi in maniera non direttamente proporzionale alla forza che tenta di cambiarne la posizione. Un altro modo di definire un fluido è quello di dire che la resistenza offerta dal fluido alla sollecitazione non può essere tale da inibire la sua deformazione. Il fluido quindi ha una infinita capacità di deformarsi al contrario dei solidi che ad un certo punto si rompono. In risposta alla sollecitazione e alla sua capacità di deformazione, il fluido si mette in moto. Determinare lo stato di moto del fluido in risposta alle forze esterne è quindi il problema principale della fluidodinamica.

I fluidi non hanno forma propria e gli elementi molecolari che li costituiscono possono cambiare di posizione senza che la forma esterna del fluido, data dal contenitore, lo metta in evidenza. Nel fluido, le molecole che lo compongono, possono considerarsi a distanza d 'tipica' tra di loro: se la distanza tra le molecole è piu' piccola di 10^{-8} cm, , ovvero 1 \AA , la forza tra queste dipende dallo stato di ionizzazione della molecola. A distanze minori di 1 \AA se le molecole sono ionizzate si potranno creare legami chimici mentre se le molecole sono neutre la forza tra di loro sarà repulsiva. A distanze piu' grandi di quelle repulsive, circa $10^{-7} - 10^{-6}$ cm, le reazioni tra le molecole sono debolmente attrattive e le molecole si attraggono con una forza che decade come d^{-7} o d^{-8} . La forza tra due molecole non reagenti chimicamente è mo-

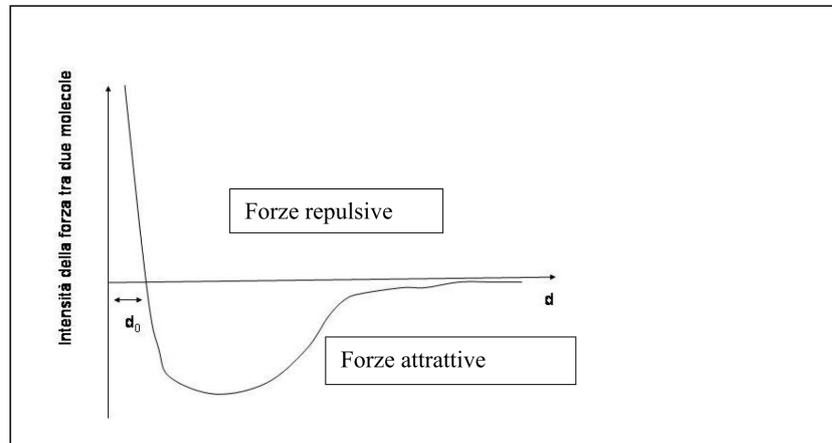


Figura 1.1: Schema dell'intensità della forza tra due molecole non ionizzate in funzione della distanza (d)

strata in Fig. 1.1. La distanza critica o di repulsione è circa $d_0 = 3 - 4 \cdot 10^{-8}$ cm per un grande numero di molecole semplici. Nel caso dei gas a temperature e pressioni normali, le molecole sono spaziate circa $10 d_0$ e quindi sono debolmente attrattive tra di loro, mentre nei liquidi le molecole si trovano ad una distanza reciproca di circa d_0 e quindi le molecole sono così vicine quasi da respingersi.

La fluidodinamica si occupa di spiegare il moto e lo stato termodinamico per le componenti "macroscopiche" dell'insieme di molecole che costituiscono il fluido, ovvero il moto delle singole molecole non viene preso in considerazione. Si suppone che le molecole siano sempre distribuite uniformemente nel volume e non si prendono in considerazione i cambiamenti della densità del fluido dovuti ad una distribuzione non uniforme delle molecole. Questa è anche chiamata l'ipotesi del continuo. Dall'ipotesi del continuo nasce la teoria delle equazioni per i fluidi che illustreremo nel seguito.

La massa di un fluido e' definita:

$$m = \rho V \quad (1.1)$$

dove ρ e' la densita' e V il volume. La densita' e' quella proprieta' di un materiale che, immerso in un fluido, determinera' una specifica forza di Archimede (ovvero uno spostamento del fluido in cui e' immerso il materiale proporzionale alla sua densita'). La densita' e' quindi definita principalmente in maniera fisica. La densita' di un fluido cambia a seconda della temperatura, pressione e in ragione della concentrazione dei materiali disciolti in esso, come vedremo in seguito.

1.2 La derivata lagrangiana

Nella fluidodinamica il tasso di variazione nel tempo di una caratteristica del fluido viene chiamato: derivata materiale o derivata convettiva o derivata totale o derivata lagrangiana o derivata sostanziale. Il fatto che esistano tanti nomi per una stessa proprieta' dei fluidi e' stato storicamente determinato dal fatto che questo formalismo si e' sviluppato in varie discipline (fisica, astronomia, ingegneria e matematica) in maniera indipendente. In queste note useremo per lo piu' la nomenclatura di derivata lagrangiana e/o totale.

Definiamo ora la derivata lagrangiana per una quantita' scalare, da cui seguira', per analogia, la definizione della derivata lagrangiana per una quantita' vettoriale. Tutte le nostre quantita' scalari e vettoriali sono definite nel sistema cartesiano di coordinate di Fig.1.13.

Consideriamo una proprieta' scalare $\gamma(x(t), y(t), z(t), t)$ associata ad una particella di fluido (o punto materiale) che si muove solidale con il fluido stesso, ovvero immersa in un campo di velocita' che varia nello spazio e nel tempo. Al variare della posizione $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ della particella, il tasso di cambiamento nel tempo di γ e' pari a:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial\gamma}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial\gamma}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial\gamma}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial\gamma}{\partial z} = \frac{\partial\gamma}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\gamma \quad (1.2)$$

dove si e' usata la regola di differenziazione delle funzioni implicite e l'uguaglianza $\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. La derivata totale in (1.2) viene indicata con $\frac{D}{Dt}$, ovvero

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \quad (1.3)$$

La parte $\vec{u} \cdot \vec{\nabla}$ e' chiamata avvezione mentre il termine $\frac{\partial}{\partial t}$ e' chiamato tendenza o derivata locale nel tempo.

La derivata Lagrangiana indica il cambiamento della proprietà γ seguendo il moto del punto materiale. Se non si hanno forze esterne che possano modificare il valore di γ , si dice che γ è conservata nel tempo seguendo lo spostamento del punto materiale. Se si considera invece un osservatore fisso nel sistema di riferimento cartesiano, γ si vedrà comunque cambiare nel tempo anche senza forze esterne, come risultato dell'avvezione. Il sistema dell'osservatore fisso si chiama sistema di riferimento Euleriano in contrapposizione a quello Lagrangiano che segue il moto del punto materiale.

Facciamo un esempio: prendiamo γ essere la proprietà 'temperatura' della nostra particella. La temperatura della nostra particella, seguendo il suo moto, potrà essere modificata o dall'interazione con l'atmosfera o per processi dissipativi del calore, ovvero da un termine complessivo che ne denota la perdita o l'acquisto di calore. Tale termine è indicato con Q e si potrà quindi scrivere:

$$\frac{DT}{Dt} = Q \quad (1.4)$$

Se non c'è scambio di calore con l'atmosfera o con il fluido circostante, $Q = 0$, e quindi l'equazione per T è scritta come:

$$\frac{DT}{Dt} = 0$$

Quindi una particella di fluido, qualsiasi sia la sua posizione e la sua velocità, nel formalismo lagrangiano manterrà la temperatura che ha all'inizio. Si dice quindi che T è conservata. Per un osservatore Euleriano, ovvero fisso rispetto al sistema di riferimento nel quale la particella di fluido si muove, la temperatura varia nel tempo tramite la tendenza o tasso locale di cambiamento e quindi, anche senza sorgenti esterne, T cambierà. In altre parole, la temperatura misurata da un termometro fisso nell'acqua, in assenza di sorgenti esterne, cambierà nel tempo nel seguente modo:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \vec{\nabla} T$$

ovvero grazie all'avvezione che trasporterà acqua più fredda o calda sulla posizione del sensore.

La derivata lagrangiana di una quantità vettoriale, quale il campo di velocità \vec{u} , è quindi scritta per analogia al caso scalare sopra descritto come segue:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \quad (1.5)$$

Il secondo termine a destra dell'equazione, ovvero l'avvezione del campo di velocità, è un termine nonlineare in quanto \vec{u} appare al quadrato. E' questo

il termine responsabile dei processi di amplificazione della risposta del fluido alle sollecitazioni esterne, ovvero responsabile del 'caos deterministico' che e' stato studiato negli anni sessanta da Lorenz (Lorenz, Edward N., 1963. "Deterministic non-periodic flow", Journal of the Atmospheric Sciences 20 (2): 130-141). Lorenz parlo' a questo proposito di come il battito delle ali di una farfalla in Brasile poteva modificare un tornado in Texas, mettendo in luce quindi la 'nonlinearita'' della derivata avveviva.

Nonlinearita' in prima istanza significa che la risposta del sistema non e' direttamente proporzionale alla sollecitazione imposta. Nel caso della meccanica di un oggetto macroscopico con massa m , se le forze applicate raddoppiano, allora l'accelerazione raddoppiera' ma nel caso di una particella materiale di fluido questo potrebbe non accadere. Una piccola sollecitazione esterna potrebbe dare luogo ad un movimento accelerato di grande ampiezza e quindi andare a cambiare il campo di velocita' molto lontano, come si diceva fino al Texas partendo da una perturbazione/sollecitazione applicata in Brasile.

1.3 Le equazioni del moto

Le equazioni del moto per i fluidi sono una riscrittura della seconda legge della meccanica di Newton per un elemento infinitesimale di massa di fluido (o particella di fluido). Tale particella di fluido verrà rappresentata con punto materiale di massa $m = \rho \, dx \, dy \, dz$, dove ρ indica la densità e $dx \, dy \, dz$ il volume infinitesimale. Il sistema di riferimento è quello indicato in Fig.(1.2) ovvero un sistema fisso o inerziale di coordinate cartesiane (x, y, z) . La legge di Newton per la particella di fluido con volume infinitesimale si puo' scrivere:

$$\rho \left[\frac{D\vec{u}_I}{Dt} dx dy dz \right]_I = \sum_i \vec{f}_i \rho dx dy dz \quad (1.6)$$

dove \vec{f}_i sono le forze per unità di massa o forze di volume che agiscono sull'elemento di fluido, sia esternamente che internamente al fluido stesso. $\frac{D\vec{u}_I}{Dt} \equiv \vec{a}_I$ è l'accelerazione inerziale e la parentesi quadra con pedice indica che la derivata è calcolata in un sistema inerziale poiche' la legge di Newton vale in tale sistema. La fluidodinamica geofisica si occupa di fluidi in un sistema rotante ovvero non inerziale e quindi l'equazione (1.6) dovra' essere riscritta in tale sistema rotante (vedi sottocapitolo 1.8).

Le forze di volume che si devono considerare sono:

1. le forze esterne come la forza di gravita';

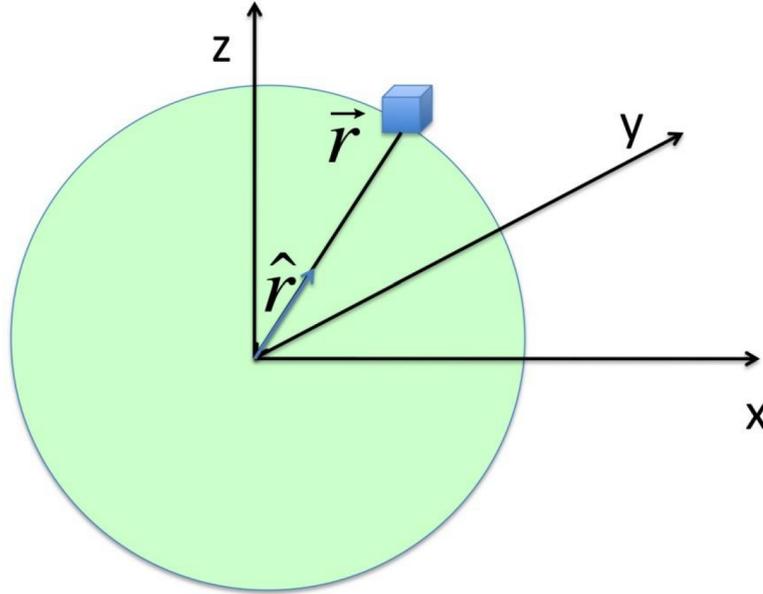


Figura 1.2: Sistema di riferimento cartesiano inerziale: la terra e' fissa e la posizione della particella di fluido e' individuata dal vettore \vec{r}

2. le forze interne al fluido, ovvero gli "sforzi".

Dalla trasformazione della (1.6) in un sistema rotante, appariranno termini come la forza di Coriolis e la forza centripeta che potrebbero essere classificati come forze di volume 'esterne'.

1.4 La forza di gravità

La forza di gravità che agisce su una particella di fluido, di massa $\rho \, dx \, dy \, dz$ nella posizione $\vec{r} = \hat{r}r$ dal centro di massa di una terra sferica e non rotante è:

$$\vec{F}_g = -\hat{r} \frac{Gm_e}{r^2} \rho \, dx \, dy \, dz \quad (1.7)$$

dove G è la costante gravitazionale universale ($G = 6.67 \cdot 10^{-11} \, m^3 \, kg^{-1} \, s^{-2}$), m_e è la massa della terra (pari a $5.97 \cdot 10^{24} \, kg$), $r^2 = |\vec{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$ è il modulo al quadrato del vettore posizione, \hat{r} è il vettore unitario congiungente il centro della terra sferica con la particella supposta essere alla superficie (Fig.1.2). L'accelerazione di gravità è la forza gravitazionale per unità di massa ovvero:

$$\vec{f}_g = \frac{\vec{F}}{\rho \, dx \, dy \, dz} = \vec{g}_0 \quad (m \, s^{-2}) \quad (1.8)$$

che dovrà essere inserita in (1.6) come forza di volume.

Il geopotenziale è definito come la funzione scalare, ϕ_0 , tale che:

$$\vec{g}_0 = -\vec{\nabla}\phi_0 \quad (1.9)$$

Per una terra sferica e con massa uniformemente distribuita, $\vec{\nabla} = \hat{r}(\frac{\partial}{\partial r})$ e quindi integrando (1.7):

$$\phi_0(r) = -\frac{G m_e}{r} \quad (m^2 s^{-2}) \quad (1.10)$$

Il geoide è definito come la superficie di valore costante del geopotenziale: nel caso del sistema non rotante e di massa uniformemente distribuita, il geoide è una superficie sferica. Introducendo la rotazione, l'accelerazione di gravità cambierà in funzione della latitudine in ragione della forza centripeta e questo porterà ad avere un geoide a forma di ellissoide, senza considerare le variazioni di massa locali.

1.5 Le forze interne al fluido

La proprietà caratterizzante un fluido è la sua capacità di deformarsi anche se le forze applicate sono deboli e quindi di mettersi in moto. Il processo che avviene è che la particella materiale di fluido cambia il proprio volume o la sua forma in risposta ad una sollecitazione. Applichiamo questo concetto al volume infinitesimale di fluido di forma sferica che rappresenta la particella materiale, come illustrato in Fig. (1.3).

La sfera si deformerà cambiando il suo volume ad opera delle forze che agiscono sulla sua superficie, i cosiddetti “sforzi” (in inglese stress). Questi ultimi possono essere o uniformemente e isotropicamente distribuiti, come in Fig. (1.3a) o non isotropici e non uniformi, come nel caso di Fig. (1.3b). Nel primo caso si parlerà di pressione mentre nel secondo caso il volumetto infinitesimale potrebbe anche non cambiare volume ma si deforma e si parla quindi di sforzi tangenziali o viscosi. Questi ultimi non sono compatibili con una capacità di deformazione infinita a meno che il volumetto non si metta in moto e quindi gli sforzi tangenziali sono responsabili del moto di un fluido soggetto ad una sollecitazione esterna.

1.5.1 La pressione

La pressione è la forza per unità di superficie dovuta allo sforzo isotropico esercitato dal fluido perpendicolarmente alle facce della particella materiale.

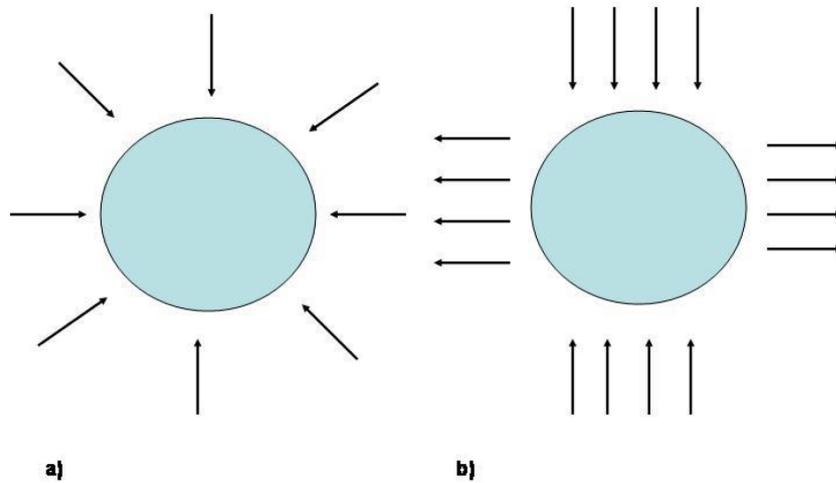


Figura 1.3: a) Forze di compressione isotropiche o pressione; b) Forze di tensione o sforzo tangenziale

Prendiamo ora il volume della particella materiale come rappresentato in Fig.(1.4).

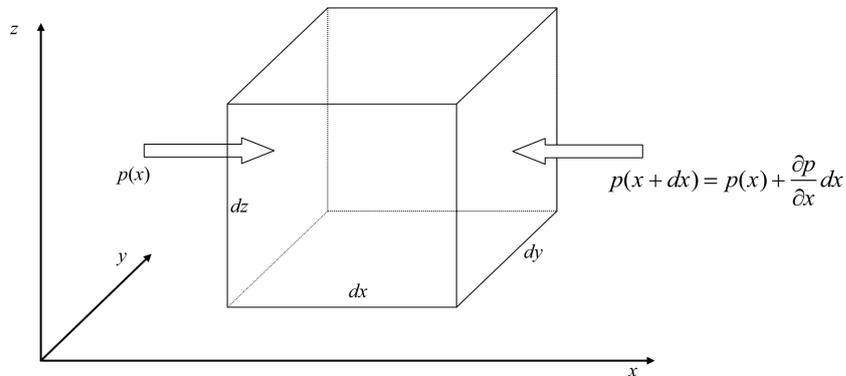


Figura 1.4: Volume infinitesimo di lati dx, dy, dz e forza di pressione sulla faccia $dzdy$

Sulla faccia $dydz$ definiamo la pressione con il simbolo $p(x)$: a distanza dx la pressione $p(x + dx)$ sarà invece:

$$p(x + dx) = p(x) + \frac{\partial p}{\partial x} dx \quad (1.11)$$

usando l'espansione in serie di Taylor attorno ad x e considerando solo il termine lineare dell'espansione. La forza netta nella direzione x è data dalla

somma della pressione a x e $x + dx$, moltiplicata per l'area $dydz$ della faccia. Ne deriva quindi che:

$$F_p^{(x)} = [p(x) - p(x + dx)] dy dz \quad (1.12)$$

Moltiplicando e dividendo e poi prendendo poi il limite per dx che tende a zero, si ottiene:

$$F_p^{(x)} = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz \quad (1.13)$$

Applicando lo stesso ragionamento per le altre facce si ha che la forza di pressione è quindi:

$$\vec{F}_p = -\vec{\nabla} p dx dy dz \quad (1.14)$$

Quindi la forza per unità di massa da inserire nella (1.6) è:

$$\vec{f}_p = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \quad (1.15)$$

1.5.2 Gli sforzi tangenziali

Gli sforzi tangenziali vengono indicati con il simbolo τ e, come per la pressione, sono forze per unità di superficie. Questa volta però gli sforzi non cambiano il volume della particella di fluido ma tendono a deformarlo. Si applicheranno anche qui i concetti di bilancio totale delle forze sul volume infinitesimale della particella materiale. E' evidente ora che nella direzione x esistono tre componenti della forza per unità di superficie, per ciascuna faccia del volumetto, una perpendicolare e due tangenziali, come rappresentato schematicamente in Fig. 1.5.

Seguendo lo stesso ragionamento fatto per la pressione, la componente dello sforzo tangenziale nella direzione x , indicata con $F_\tau^{(x)}$, è quindi:

$$F_\tau^{(x)} = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (1.16)$$

dove si è usata di nuovo l'espansione in serie di Taylor per le tre componenti e il limite che tende a zero per il rapporto incrementale. La corrispondente componente della forza per unità di massa è:

$$f_\tau^{(x)} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \quad (1.17)$$

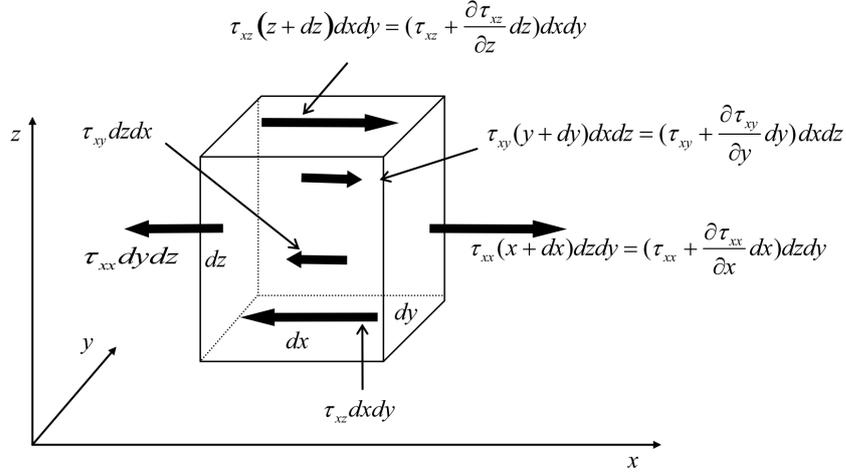


Figura 1.5: Rappresentazione delle varie parti che compongono lo sforzo tangenziale nella direzione x .

Ripetendo il bilancio per tutte le altre direzioni, si potrà scrivere in forma vettoriale:

$$\vec{f}_\tau = \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} \quad (1.18)$$

dove:

$$\vec{\nabla} \cdot \tau = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yx} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

Gli sforzi tangenziali compongono quindi un tensore appunto chiamato tensore degli sforzi.

Questo tensore è simmetrico ovvero $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{zy} = \tau_{yz}$, ma la dimostrazione di questo fatto esula dagli obiettivi del corso e il lettore interessato potrà cercare la dimostrazione su altri testi specializzati (Batchelor, G.K., An introduction to Fluid Dynamics, Cambridge University Press, 1967).

1.6 Le equazioni di Navier-Stokes

Riprendiamo ora il bilancio di forze esterne ed interne per il volumetto infinitesimale di fluido componendo il bilancio finale. Riprendendo la (1.6) e inserendo (1.8), (1.15) e (1.18) si ottiene:

$$\left[\frac{D\vec{u}_I}{Dt} \right]_I = \sum_i \vec{f}_i = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} - \vec{g}_o \quad (1.20)$$

che è l'equazione dei fluidi in presenza di gravità e in un sistema inerziale. Queste equazioni furono scritte e studiate in due tempi molto diversi, distanti tra di loro, dall'ingegnere francese Navier nel 1821-22 e dal matematico inglese Stokes negli anni 1840-1845.

Le equazioni di Navier-Stokes sono predittive, ovvero permettono di *prevedere* l'andamento nel futuro del campo di velocità data una *condizione iniziale*. In termini matematici se si mette in evidenza la derivata temporale nella (1.20) e si scrive:

$$\frac{\partial \vec{u}(x, y, z, t)}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} - \vec{g}_o = \vec{h}(t, x, y, z) \quad (1.21)$$

In questa forma, l'equazione (1.21) si può integrare nel tempo dato il campo di velocità all'istante iniziale t_o . Quindi la *previsione* al tempo t è data da:

$$\vec{u}(t, x, y, z) = \vec{u}(t_o, x, y, z) + \int_{t_o}^t \vec{h}(x, y, z, t') dt' \quad (1.22)$$

Questa equazione è alla base di tutte le applicazioni moderne delle equazioni di Navier-Stokes come ad esempio le previsioni del tempo meteorologico e del tempo del mare, l'aerodinamica e la medicina.

1.7 Trasformazione di coordinate nel sistema terrestre rotante

Come annunciato in precedenza, le equazioni della fluidodinamica geofisica devono essere espresse in un sistema di riferimento rotante quale è la Terra. Un punto fisso sulla superficie terrestre, ad una certa latitudine, ruota con una velocità costante, chiamata *velocità angolare*, attorno all'asse di rotazione terrestre. In generale il modulo della velocità angolare è il tasso di cambiamento nel tempo dello spostamento angolare ϑ , ovvero:

$$\Omega = \frac{d\vartheta}{dt} \quad (1.23)$$

dove ϑ è descritto nella figura 1.6.

Il modulo della velocità angolare è anche esprimibile come:

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (1.24)$$

dove T è il periodo in secondi e le unità sono quindi $rad\ s^{-1}$ o semplicemente s^{-1} .

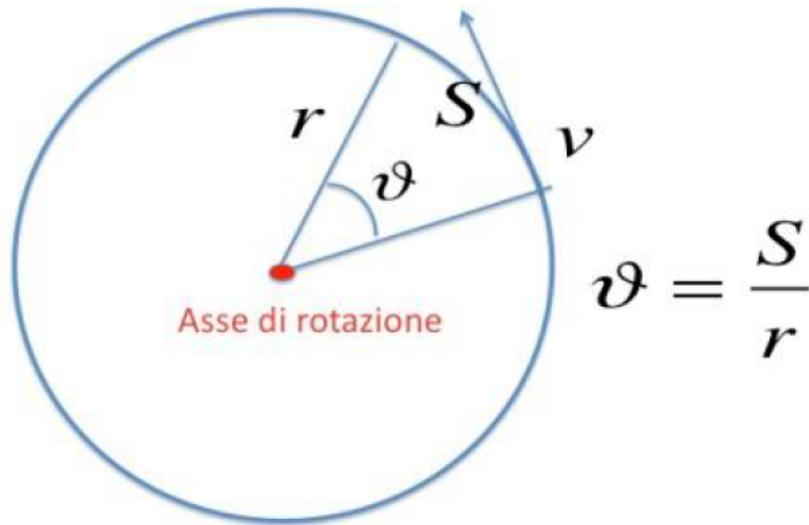


Figura 1.6: Spostamento angolare di un punto su di un disco che ruota attorno all'asse di rotazione in senso antiorario

Per la Terra

$$\Omega = 2\pi/(86400) = 7.292 \cdot 10^{-5} s^{-1} \quad (1.25)$$

Il moto circolare ha anche una direzione ma non è conveniente usare il sistema convenzionale per indicarla poiché cambia continuamente. Nel caso del moto circolare, si fa riferimento solo all'asse di rotazione e si dà questa 'direzione' alla velocità angolare, usando la 'regola della mano destra' (il pollice si allinea alla direzione dell'asse di rotazione e si avvolge la mano destra attorno all'asse dando così il senso della rotazione) per indicare la direzione del moto attorno a questo asse. La velocità angolare della terra si indica quindi come un vettore, $\vec{\Omega}$, di modulo Ω , in direzione dell'asse e indicando la direzione con una freccia circolare, come raffigurato in Fig. 1.7.

Vogliamo ora scrivere la derivata lagrangiana in (1.20) in un sistema di riferimento rotante. Nella Fig. 1.7 il sistema di riferimento inerziale è indicato con le coordinate (x, y, z) e i versori unitari $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$. La direzione \hat{i} sarà chiamata zonale (lungo i paralleli), quella \hat{j} sarà chiamata meridionale

1.7. TRASFORMAZIONE DI COORDINATE NEL SISTEMA TERRESTRE ROTANTE 13

(lungo i meridiani) e la \hat{k} quella verticale. Il sistema di riferimento rotante è invece indicato alle coordinate x', y', z' e vettori $(\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}')$.

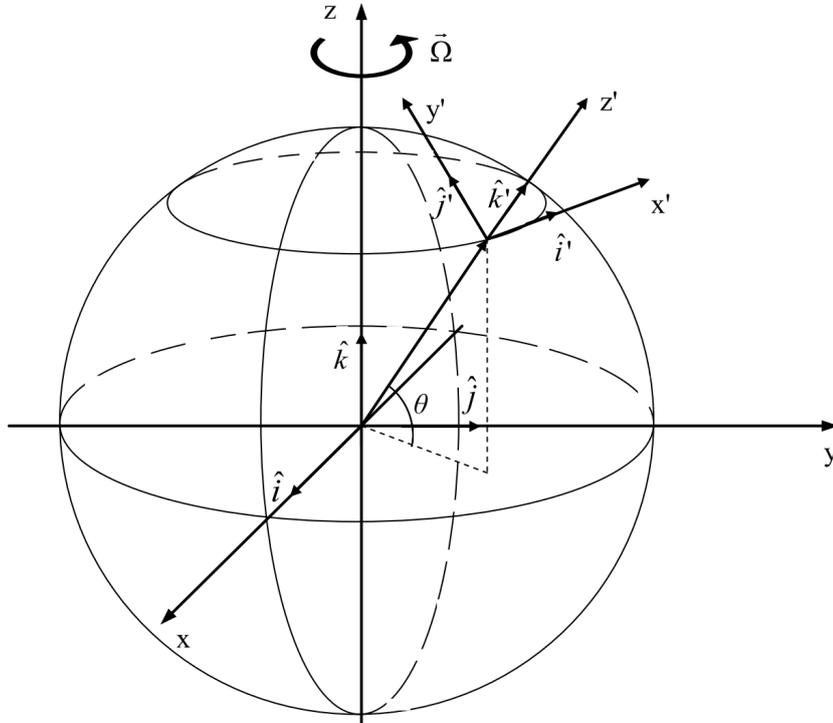


Figura 1.7: Sistema di coordinate cartesiano inerziale e in rotazione rigida con la terra.

Dobbiamo ora esprimere i vettori e le loro derivate nel tempo nel sistema (x', y', z') . E' infatti in tale sistema che noi osserviamo normalmente l'atmosfera e l'oceano e quindi le equazioni devono essere riscritte nel sistema rotante per potere essere verificate e studiate con le misure fatte sulla terra.

Dato \vec{A} un vettore arbitrario con componenti A_x, A_y, A_z nel sistema inerziale, si indichino con A'_x, A'_y, A'_z le sue componenti nel sistema rotante. Nel sistema inerziale è quindi:

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

mentre nel sistema rotante:

$$\vec{A} = A'_x \hat{i}' + A'_y \hat{j}' + A'_z \hat{k}'$$

I due vettori devono risultare equivalenti e quindi anche le loro derivate temporali poiche' la 'fisica' che li ha determinati non puo' cambiare cambiando solo il sistema di riferimento. Per assurdo se cosi' non fosse vorrebbe dire

che le coste dell'Italia cambierebbero di lunghezza e in evoluzione se misurate dallo spazio (sistema inerziale) o sulla Terra. Ne risulta quindi che:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\vec{A}}{dt} \right]_I &= \hat{i} \frac{dA_x}{dt} + \hat{j} \frac{dA_y}{dt} + \hat{k} \frac{dA_z}{dt} \\ &= \hat{i}' \frac{dA'_x}{dt} + \hat{j}' \frac{dA'_y}{dt} + \hat{k}' \frac{dA'_z}{dt} + A'_x \frac{d\hat{i}'}{dt} + A'_y \frac{d\hat{j}'}{dt} + A'_z \frac{d\hat{k}'}{dt} \end{aligned} \quad (1.26)$$

L'equazione (1.26) dice che la derivata temporale di \vec{A} nel sistema inerziale, indicato con il pedice I , è uguale alla somma di due termini nel sistema rotante: il primo è la derivata temporale totale nel sistema rotante, ovvero:

$$\left[\frac{d\vec{A}}{dt} \right]_R = \hat{i}' \frac{dA'_x}{dt} + \hat{j}' \frac{dA'_y}{dt} + \hat{k}' \frac{dA'_z}{dt}$$

mentre il secondo termine ha bisogno di interpretazione. Per fare ciò, isoliamo un solo termine, $\frac{d\hat{i}'}{dt}$, e facendo riferimento alla figura 1.8 e a spostamenti infinitesimali, Δ , si può scrivere:

$$\Delta \hat{i}' = |\hat{i}'| \sin \theta \Delta \varphi \quad (1.27)$$

Per ottenere (1.27) si è fatto uso del teorema della corda ovvero $\Delta \hat{i}' = 2 |\hat{i}'| \sin(\theta) \sin(\frac{\Delta \varphi}{2}) \sim |\hat{i}'| \sin(\theta) \Delta \varphi$. Dividendo per l'intervallo temporale Δt durante il quale si realizza lo spostamento si ha:

$$\frac{\Delta \hat{i}'}{\Delta t} = |\hat{i}'| \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \sin \theta$$

Imponendo ora il limite per Δt che va a zero, si ottiene:

$$\frac{d\hat{i}'}{dt} = |\hat{i}'| |\vec{\Omega}| \sin \theta = \vec{\Omega} \times \hat{i}'$$

dove si è usata la (1.65). In maniera del tutto analoga $\frac{d\hat{j}'}{dt} = \vec{\Omega} \times \hat{j}'$ e $\frac{d\hat{k}'}{dt} = \vec{\Omega} \times \hat{k}'$. Ne deriva quindi che:

$$\left[\frac{d\vec{A}}{dt} \right]_I = \left[\frac{d\vec{A}}{dt} \right]_R + \vec{\Omega} \times \vec{A} \quad (1.28)$$

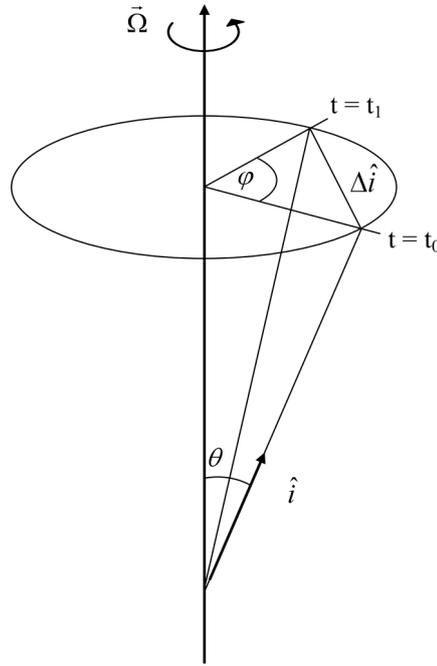


Figura 1.8: Rappresentazione del versore \hat{i}' e suo cambiamento nel tempo.

Se si prende ora $\vec{A} = \vec{r}$, il vettore posizione della particella, si ha che:

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt} \right]_I = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \right]_R + \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

ovvero

$$\vec{u}_I = \vec{u}_R + \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (1.29)$$

Applicando questa regola di trasformazione alla derivata lagrangiana della velocità nel sistema inerziale, si ha:

$$\left(\frac{D\vec{u}_I}{Dt} \right)_I = \left(\frac{D\vec{u}_I}{Dt} \right)_R + \vec{\Omega} \times \vec{u}_I \quad (1.30)$$

Decomponendo ulteriormente tramite la 1.29 si ha che:

$$\begin{aligned} \left(\frac{D\vec{u}_I}{Dt} \right)_I &= \left(\frac{D\vec{u}_R}{Dt} \right)_R + \frac{D\vec{\Omega}}{Dt} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times \left(\frac{D\vec{r}}{Dt} \right)_R + \vec{\Omega} \times \vec{u}_R + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r} \\ &= \left(\frac{D\vec{u}_R}{Dt} \right)_R + 2\vec{\Omega} \times \vec{u}_R + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r} \end{aligned} \quad (1.31)$$

dove si è supposto che $\frac{D\vec{\Omega}}{Dt} \approx 0$. Il secondo termine nel membro destro della (1.31) è chiamato accelerazione di Coriolis e l'ultimo invece accelerazione centripeta.

1.7.1 Accelerazione centripeta

Calcoliamo ora la direzione dell'accelerazione centripeta esplicitando il termine e usando la Figura 1.9 come riferimento.

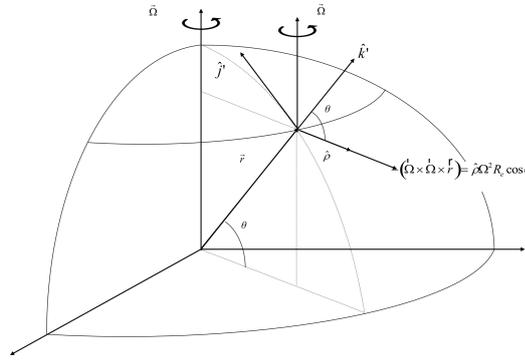


Figura 1.9: Sistema di riferimento solido con la terra per il calcolo della direzione dell'accelerazione centripeta.

Nel punto individuato da $\vec{r} = (0, 0, R_e)$, dove R_e è il raggio terrestre, e il sistema cartesiano e' è posizionato alla latitudine θ , la velocità angolare della terra è data da:

$$\vec{\Omega} = \hat{j}' \Omega \cos \theta + \hat{k}' \Omega \sin \theta \quad (1.32)$$

I prodotti vettoriali sono quindi:

$$\vec{\Omega} \times \vec{r} = \Omega \det \begin{vmatrix} \hat{i}' & \hat{j}' & \hat{k}' \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & R_e \end{vmatrix} = \hat{i}' [R_e \Omega \cos \theta]$$

e

$$\vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r} = \Omega^2 \det \begin{vmatrix} \hat{i}' & \hat{j}' & \hat{k}' \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ R_e \cos \theta & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{j}' [R_e \Omega^2 \sin \theta \cos \theta] - \hat{k}' [R_e \Omega^2 \cos^2 \theta]$$

Se si impone ora $\hat{\rho} = -\hat{j}' \sin \theta + \hat{k}' \cos \theta$ si può riscrivere:

$$\vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r} = -\hat{\rho} \Omega^2 R_e \cos \theta \quad (1.33)$$

1.8. LE EQUAZIONI DEL MOTO COMPLETE NEL SISTEMA ROTANTE 17

ovvero all'equatore l'accelerazione centripeta sara' massima mentre e' zero al Polo. Vedremo che questo cambiera' quindi l'accelerazione di gravita' all'equatore.

1.7.2 L'accelerazione di Coriolis

L'altro termine proveniente dal cambiamento del sistema di riferimento è l'accelerazione di Coriolis, che si scrive:

$$\begin{aligned} 2\vec{\Omega} \times \vec{u} &= 2\Omega \det \begin{vmatrix} \hat{i}' & \hat{j}' & \hat{k}' \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ u & v & w \end{vmatrix} \\ &= 2\Omega \left[\hat{i}' (w \cos \theta - v \sin \theta) + \hat{j}' (u \sin \theta) + \hat{k}' (-u \cos \theta) \right] \end{aligned} \quad (1.34)$$

L'accelerazione di Coriolis quindi ha componenti in tutte e tre le direzioni del moto. In particolare si definisce il parametro di Coriolis, f :

$$f = 2\Omega \sin \theta \quad (1.35)$$

E' utile scrivere la variazione approssimata del parametro di Coriolis attorno ad un punto di latitudine di riferimento, diciamo θ_0 : per fare cio' si linearizza f con una serie di Taylor e si indica questa approssimazione con il nome di approssimazione di piano β :

$$f \approx 2\Omega \left[\sin \theta_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} (\theta - \theta_0) \right] \quad (1.36)$$

Sapendo che $y = R_e \theta$ si puo' riscrivere:

$$f = 2\Omega \sin \theta_0 + \beta (y - y_0) \quad (1.37)$$

dove il parametro $\beta = \frac{2\Omega \cos \theta_0}{R_e}$.

1.8 Le equazioni del moto complete nel sistema rotante

Riscriviamo ora in maniera sintetica le equazioni di Navier-Stokes nel sistema rotante. Da questo punto in avanti il sistema di riferimento solidale con la

terra (le coordinate primarie in 1.7) sono ridefinite e si indicheranno semplicemente con (x, y, z) . Inserendo nella 1.20 i termini di accelerazione centripeta e di Coriolis si ottiene:

$$\rho \left(\frac{D\vec{u}}{Dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{u} \right) = -\vec{\nabla}p - \rho(\vec{g}_0 + \Omega \times \Omega \times \vec{r}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} \quad (1.38)$$

Per il termine di gravità nella (1.38) si trascurano le componenti orizzontali e si considera solo la direzione verticale, \hat{k} , lungo la quale si definisce una gravità efficace:

$$\begin{aligned} g_{eff} &= (\vec{g}_0 + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r}) \cdot \hat{k} \\ &= \left(\frac{Gm_e}{R_e^2} - \Omega^2 R_e \cos^2 \theta \right) \end{aligned} \quad (1.39)$$

All'equatore la differenza tra g_{eff} e g_0 è massima ed i valori sono $g_{eff} = 9.78032 \text{ m s}^{-2}$ e $g_0 = 9.7976 \text{ m s}^{-2}$. Le differenze sono piccole per l'idrodinamica dei fluidi terrestri e si considererà quindi un valore costante pari a 9.8 m s^{-2} , indicandolo con g . Le singole componenti delle equazioni di Navier-Stokes nel sistema rotante sono quindi scritte:

Componente zonale o x:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}u + 2\Omega \cos \theta w - 2\Omega \sin \theta v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \quad (1.40)$$

Componente meridionale o y:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}v + 2\Omega \sin \theta u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \quad (1.41)$$

Componente verticale o z:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}w - 2\Omega \cos \theta u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \quad (1.42)$$

E' importante analizzare l'effetto dell'accelerazione di Coriolis in queste equazioni. Supponendo che il moto sia solo nel piano orizzontale (ovvero $w=0$) e trascurando tutte le forze interne al fluido e i termini di avvezione, si potrà scrivere:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\Omega \sin \theta v \quad (1.43)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -2\Omega \sin \theta u \quad (1.44)$$

Cerchiamo di interpretare queste due equazioni. Dalla (1.43) si può notare che l'accelerazione nella direzione zonale ($\frac{\partial u}{\partial t}$) viene prodotta dal moto inizialmente in direzione meridionale (v) e viceversa per l'accelerazione meridionale (1.44). In altre parole, se inizialmente il moto è in direzione zonale, agli istanti successivi l'accelerazione di Coriolis produrrà una componente meridionale che quindi comporterà una deviazione della particella da una traiettoria rettilinea. Questo è il meccanismo di 'deviazione' verso destra (nell'emisfero Nord) e verso sinistra (nell'emisfero Sud) della particella di fluido rispetto ad una direzione iniziale. Nei due emisferi le velocità risultanti dall'accelerazione di Coriolis sono in direzione opposta perché il termine con $\sin \theta$ cambia di segno, positivo nell'emisfero nord e negativo in quello sud.

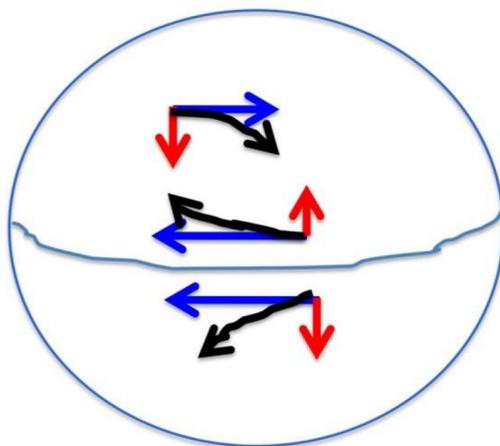


Figura 1.10: Velocità risultante dall'accelerazione di Coriolis nell'emisfero Nord e Sud della terra (freccie nere curve), considerando la componente dovuta al termine di Coriolis (freccie rosse) e la componente del moto iniziale (freccia blu).

Le equazioni 1.40, 1.41 e 1.42 sono le equazioni di Navier Stokes riscritte nel sistema rotante della terra e formano l'insieme di equazioni fondamentali per la dinamica dei fluidi geofisici della terra. Queste equazioni considerano 14 incognite: le tre componenti della velocità, u, v, w , la densità, la pressione

e le nove componenti del tensore degli sforzi. Il sistema di equazioni non e' quindi risolvibile in quanto il numero di incognite e' largamente superiore alle 3 equazioni disponibili. E' quindi necessario o introdurre nuove equazioni o fare delle ipotesi fisiche sui termini delle equazioni stesse. Cominciamo con quest'ultima operazione per poi proseguire con l'introduzione delle nuove equazioni.

1.9 Gli sforzi tangenziali riscritti in termini di viscosità

Il tensore degli sforzi (in inglese stress tensor) scritto in precedenza può essere riscritto in maniera esplicita in funzione del campo di velocità'.

Il tensore degli sforzi rappresenta le forze per unità di superficie interne al fluido che tendono a deformarlo (vedi Fig.1.3). Considerando il volumetto infinitesimale di fluido in Fig. 1.5 gli sforzi tendono a trascinare le facce parallele in direzioni opposte. Generalizzando da questo schema, si può pensare ad un fluido contenuto tra due piastre che si muovono in maniera relativa l'una rispetto all'altra, come raffigurato in fig. 1.11.

Lo sforzo tangenziale, rappresentato dal moto della piastra superiore di Fig. 1.11, mettera' in moto il fluido tra le due piastre in maniera proporzionale ad una proprietà costituente del fluido chiamata 'viscosità'. Sperimentalmente si trova che lo sforzo tra le due piastre è proporzionale al gradiente della velocità ovvero:

$$\tau_{xz} = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.45)$$

dove μ è la viscosità molecolare. Un fluido che si comporta in questo modo è chiamato Newtoniano. Aria e acqua sulla terra sono esempi assai buoni di fluidi Newtoniani.

Generalizzando, il tensore degli sforzi si riscrive quindi:

$$\vec{\tau} = \mu \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & 2\frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

1.9. GLI SFORZI TANGENZIALI RISCritti IN TERMINI DI VISCOSITÀ 21

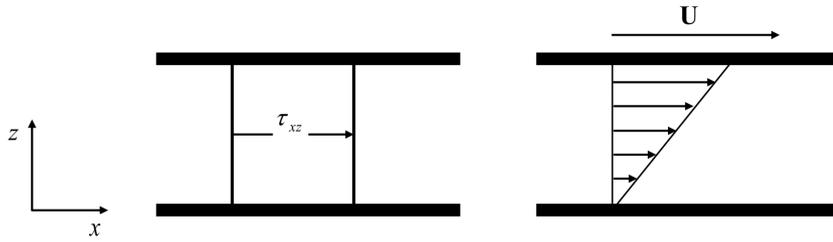


Figura 1.11: Due piastre che si muovono a diversa velocità inducono un moto nel fluido tramite gli sforzi tangenziali interni che producono un profilo di velocità lineare (disegno a destra) e uno sforzo costante tra le piastre (disegno a sinistra).

Tabella 1.1: Valori della viscosità per l'acqua distillata

Temperatura °C	Viscosità dinamica $\times 10^{-3} \text{ Nsm}^{-2}$	Viscosità cinematica $\times 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$
0	1.787	1.787
5	1.519	1.519
10	1.307	1.307
20	1.002	1.004
30	0.798	0.801

Le accelerazioni corrispondenti agli sforzi tangenziali in 1.40, 1.41 e 1.42 possono essere quindi riscritte come:

$$\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{\tau} = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{u} \quad (1.47)$$

se si suppone che $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ (da dimostrare come esercizio) e dove $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ e' il laplaciano. La viscosità molecolare divisa per la densità e' definita essere la viscosità cinematica:

$$v = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.48)$$

I valori di viscosità molecolare dell'acqua e di un gas sono riportati nelle tabelle seguenti. La viscosità cinematica è importante perchè quella che appare nelle equazioni del moto.

Come si legge dalle tabelle sopra riportate la viscosità cinematica per l'acqua è circa 10^{-6} e per l'aria invece è circa 10^{-5} (m^2s^{-1}), ovvero il liquido è meno 'viscoso' del gas. Entrambi i valori sono piccoli rispetto alla viscosità 'turbolenta', come vedremo in seguito.

Tabella 1.2: Valori della viscosità per l'aria

Temperatura °K	Viscosità dinamica $\times 10^{-5} \text{ Nsm}^{-2}$	Viscosità cinematica $\times 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$
250	1.488	9.49
300	1.983	15.68

Le equazioni finali di Navier-Stokes per l'atmosfera e l'oceano, con i termini di viscosità esplicitati, sono quindi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} u + 2\Omega \cos \theta w - 2\Omega \sin \theta v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \quad (1.49)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} v + 2\Omega \sin \theta u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \quad (1.50)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} w - 2\Omega \cos \theta u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \nabla^2 w \quad (1.51)$$

E' importante notare che nel caso in cui le componenti del campo di velocità siano identicamente nulle, rimane solo il termine di pressione in bilancio con la gravità, ovvero:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g \quad (1.52)$$

che è consistente con il fatto che la pressione agisce nel fluido anche in assenza di moto. La (1.52) è la famosa equazione idrostatica che ricaveremo nei capitoli successivi anche dall'analisi di scala delle equazioni del moto.

A questo punto il sistema di equazioni 1.49, 1.50 e 1.51 ha cinque incognite (le tre componenti del campo di velocità, (u, v, w) ; il campo di densità, ρ e la pressione, p) e tre equazioni. La latitudine presente nei termini di Coriolis e la viscosità molecolare sono informazioni geometriche e proprietà da specificare per definire il problema che si vuole risolvere. Bisogna ora aggiungere equazioni se si vuole risolvere il problema praticamente e la prima da inserirsi è l'equazione di conservazione della massa che sarà introdotta nel prossimo capitolo.

1.10 L'equazione di continuità

Le equazioni di Newton sono valide solo per sistemi a massa costante. Bisogna quindi imporre il principio di conservazione della massa come equazione

aggiuntiva. L'equazione di conservazione della massa in fluidodinamica e' anche chiamata equazione di continuit .

Consideriamo di nuovo il nostro volumetto infinitesimale, supposto essere a volume costante. Essendo quindi $m = \rho V$, la conservazione della massa riguarder  i cambiamenti di densit . Imporre la 'conservazione della densit ' vuol dire che il cambiamento locale nel tempo della densit  dentro al volumetto deve essere bilanciato da un flusso di densit  attraverso le pareti, come rappresentato in Fig. 1.12.

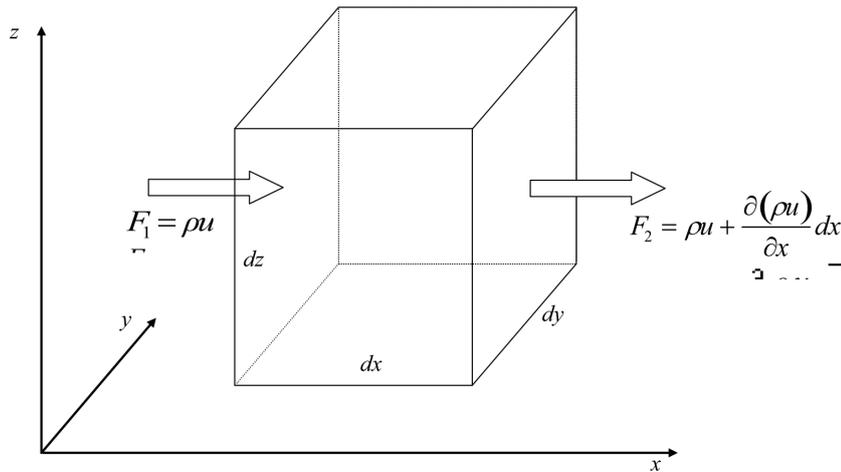


Figura 1.12: Flussi di densit  nella direzione x per il volumetto infinitesimale

Il flusso di massa nella direzione x   quindi:

$$F_{\rho}^x = (F_2 - F_1) dzdy = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz \quad (1.53)$$

Facendo lo stesso per le altre facce si ha che il flusso netto attraverso il volumetto  :

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dz dy = \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) dx dy dz \quad (1.54)$$

La 1.54   una equazione di divergenza del flusso di massa attraverso il volumetto. Questa divergenza esprime una perdita di massa dal volume e quindi si dovr  uguagliare tale perdita alla descrescita della massa nel volume stesso, ovvero a $-\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$. Si ottiene quindi l'equazione di continuit  uguagliando i due contributi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) \quad (1.55)$$

Riscrivendo l'equazione 1.55 si ottiene la forma piu' usata dell'equazione di continuit :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (1.56)$$

Se il fluido   incompressibile si ha:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (1.57)$$

Questa approssimazione   particolarmente valida per l'oceano, meno per l'atmosfera, ma comunque usata per studi teorici. Nel Capitolo 5 si dimostrer  con l'analisi di scala come si puo' giustificare questa approssimazione.

1.11 Appendice: Equazioni per traccianti attivi e passivi nei fluidi

Lo stesso bilancio fatto per la massa puo' essere scritto per altri campi scalari che esprimono propriet  associate al fluido. Tali scalari sono, ad esempio, la salinit  per l'oceano ed il vapore acqueo per l'atmosfera oppure componenti chimiche in tracce nell'atmosfera o nell'oceano.

Facendo lo stesso bilancio di Fig. 1.12 ma per un tracciante generico, diciamo C , l'equazione risulta:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}C) + S_{in} - S_{out} \quad (1.58)$$

dove il secondo il e terzo termine sul lato destro dell'equazione esprimono sorgenti e 'pozzi' ('sinks' in inglese) del tracciante considerato. Per fare un caso di tracciante attivo nell'oceano, si potrebbe considerare C essere la concentrazione di nutrienti disciolti nell'acqua: i termini di 'pozzo' possono essere considerati rappresentare il consumo da parte dei produttori primari e quelli sorgente la produzione di nutrienti disciolti da parte dei batteri.

Per il caso dell'atmosfera, si potrebbe considerare C essere la concentrazione di ozono: i termini di 'pozzo' e sorgente sono i processi distruttivi e generativi del ciclo di Chapman (http://en.wikipedia.org/wiki/Ozone-oxygen_cycle).

Nel caso di un campo di velocit  a divergenza nulla, ovvero l'equazione 1.57, l'equazione 1.58 diventa:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \vec{\nabla} C + S_{in} - S_{out} \quad (1.59)$$

Nei fluidi esiste un processo di redistribuzione della concentrazione che si parametrizza attraverso la cosiddetta 'diffusività' (http://en.wikipedia.org/wiki/Molecular_diffusion). Si parla ora di equazione di avvezione-diffusione e si scrive:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \vec{\nabla} C + K \nabla^2 C + S_{in} - S_{out} \quad (1.60)$$

dove K è il coefficiente di diffusività che dovrà essere giustificato per ogni tracciante che si vuole studiare. Questa equazione è molto usata nella modellistica ambientale per simulare il trasporto e la diffusione di inquinanti.

1.12 Notazione e cenni di calcolo vettoriale

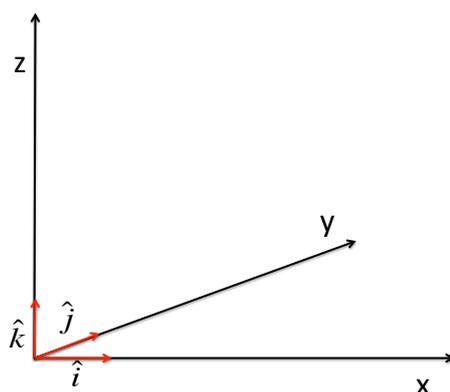


Figura 1.13: Sistema cartesiano ortogonale e vettori $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$.

Il vettore posizione e velocità di un elemento di fluido o punto materiale è riferito ad un sistema cartesiano di coordinate (x, y, z) rappresentato in Fig. 1.13:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (x, y, z) \\ \vec{u} &= (u, v, w) \end{aligned} \quad (1.61)$$

Le quantità tra parentesi sono le componenti del vettore. Un'altra notazione vettoriale usata al posto della 1.61 è:

$$\vec{u} = \hat{i}u + \hat{j}v + \hat{k}w$$

dove $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ sono i vettori unitari (versori) lungo i tre assi cartesiani. In quello che segue si farà' uso di operatori differenziali vettoriali: uno dei piu' usati è l'operatore gradiente definito come:

$$\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.62)$$

Il prodotto scalare tra due vettori, $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ e $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$, e' definito come segue:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.63)$$

dove θ è l'angolo tra i due vettori.

Il prodotto vettoriale tra A e B è invece definito come:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix} = \hat{i} (A_y B_z - A_z B_y) + \hat{j} (A_z B_x - A_x B_z) + \hat{k} (A_x B_y - A_y B_x) \quad (1.64)$$

e il suo modulo è:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta. \quad (1.65)$$

Applicando (1.63) tra il campo di velocità e il gradiente si ottiene la divergenza del campo di velocità:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.66)$$

che è una quantità scalare molto usata in fluidodinamica.

Capitolo 2

La turbolenza nei fluidi geofisici

La viscosita' molecolare introdotta nel capitolo precedente e' stata inserita per esprimere la relazione tra gli stress tangenziali e i gradienti di velocita' che tendono a deformare gli elementi di fluido che lo costituiscono. In qualche modo la viscosita' molecolare misura la resistenza a tale deformazione, tramite il moto disordinato delle molecole e dipende dalle proprieta' intrinseche e locali del fluido in esame.

La viscosita' molecolare e' quindi legata ad un concetto di *turbolenza* che si associa fisicamente ai moti irregolari, caotici e variabili nel tempo. Ancora, il concetto di turbolenza e' legato al rimescolamento delle proprieta' del fluido, quali la velocita', la temperatura e i traccianti attivi e passivi. Il rimescolamento ha il significato intuitivo di diminuire i gradienti di tali proprieta'.

Nei fluidi geofisici esistono vari tipi di turbolenza a seconda delle scale spazio-temporali di interesse:

1. turbolenza associata alla viscosita' molecolare che agisce nel fluido a scale millimetriche e che contribuisce al rimescolamento delle proprieta' del fluido e alla dissipazione di energia e calore;
2. turbolenza negli strati limite (sia verticali che orizzontali): questi strati si formano a contatto con le pareti di un oggetto e/o all'interfaccia tra due strati di fluido di densita' differente, quali ad esempio l'aria e l'acqua. La scala spazio-temporale di questa turbolenza e' piu' grande rispetto a quella della viscosita' molecolare e anche in questo caso la turbolenza ha un effetto netto di rimescolamento e di dissipazione;
3. turbolenza 'libera', a scala planetaria o 'grande', che si genera per processi di instabilita' del fluido a scale grandi (100-1000 km) e che produ-

ce vortici che risentono dell'accelerazione di Coriolis e che hanno scale temporali piu' lunghe della giornata.

Nell'oceano e nell'atmosfera l'energia dalle scale turbolente planetarie passa a quelle della viscosita' tramite un processo 'a cascata'. Nella Fig. 2.1 viene schematicamente rappresentato questo processo.

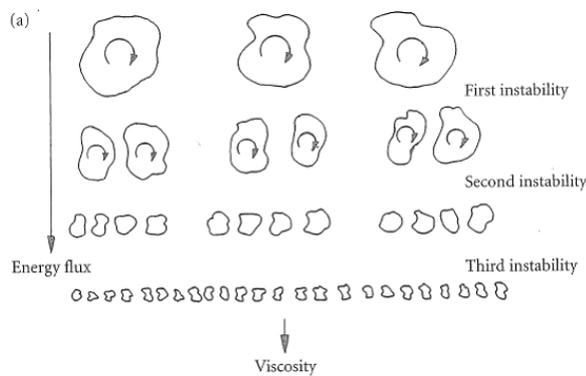


Figura 2.1: Lo schema della cascata di energia nei fluidi, dalle scale grandi a quelle dissipative della viscosita' molecolare

La turbolenza e' un processo naturale, presente in tutti i fluidi ed in particolare quelli geofisici ma e' necessario distinguere fra le varie componenti per ottenere in pratica soluzioni realistiche delle equazioni del moto. Per fare cio' si usano i '*numeri nondimensionali*' che esprimono il rapporto tra termini nelle equazioni del moto e quindi danno una misura della loro relativa importanza. L'importanza della viscosita' molecolare rispetto alla turbolenza di strato limite o 'libera' e' descritta dal numero di Reynolds, definito come il rapporto tra le scale dell'avvezione e il termine di viscosita':

$$\text{Re} = \frac{[\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}]}{[\nu \nabla^2 \vec{u}]} = \frac{UL}{\nu} \quad (2.1)$$

dove U e' la scala della velocita', L la scala orizzontale del moto e le parentesi quadre indicano che si stima l'ordine di grandezza dei termini tramite le scale indicate. Il moto turbolento viene associato all'avvezione poiche' questo

e' il termine *non-lineare* ovvero capace di scambiare energia tra le differenti scale del moto al fine di produrre il processo a 'cascata'. Se il numero di Reynolds e' grande significa che il fluido e' turbolento e la viscosita' molecolare non importante. Al contrario, per numeri di Reynolds piccoli il fluido e' dominato dalla viscosita' molecolare e si comporta come un '*fluido laminare*' o semplicemente viscoso.

Lo studio classico della turbolenza e' stato fatto nel passato con esperimenti di laboratorio dove si studiavano sia gli strati limite che la turbolenza libera in sistemi non rotanti e con ostacoli interposti al moto del fluido, cosi' da potere avere una stima di U e L per il caso specifico di studio. Uno dei casi piu' classici e' quello del moto attorno ad un cilindro, mostrato in Fig. 2.2. In questa figura si vede che al crescere del numero di Reynolds, nella scia dietro l'ostacolo, si formano vortici quando $Re > 55$: per il tipo di fluido usato in quell'esperimento (olio) questo e' il valore critico del numero di Reynolds per il passaggio da un regime laminare a quello turbolento.

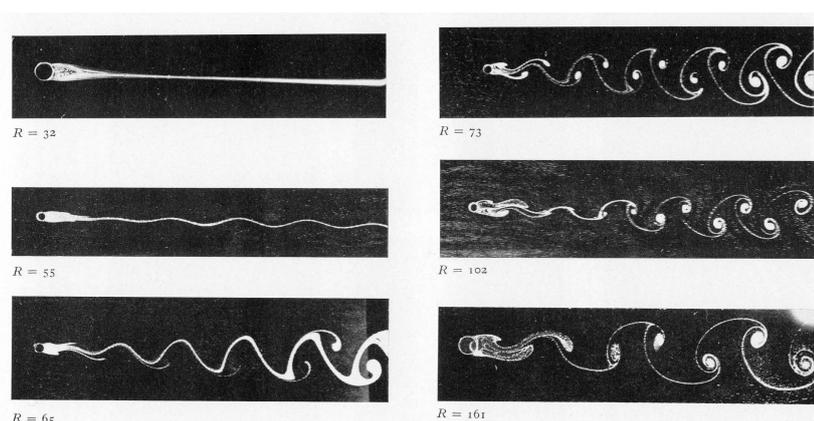


Figura 2.2: Il moto turbolento dietro ad un ostacolo cilindrico al variare del numero di Reynolds (indicato sotto le figure). Il colore bianco mette in evidenza le 'streaklines' del fluido (letteralmente striature) che sono prodotte dal rilascio continuo di una sostanza colorata, trasportata dal campo di velocita' del fluido. In questo caso la sostanza colorata e' rilasciata ai bordi dell'ostacolo.

Per valori costanti ed alti del numero di Reynolds, tali da permettere la turbolenza, l'evoluzione delle streaklines (Fig. 2.3) mostra il fluido evolvere da uno stato laminare ad uno turbolento non stazionario, dove i vortici si creano e poi perdono di intensita' e sono dissipati con il tempo.

L'oceano e l'atmosfera sono fluidi geofisici turbolenti poiche' il loro numero di Reynolds e' alto, dell'ordine di 10^5 . Sono presenti quindi tutte le

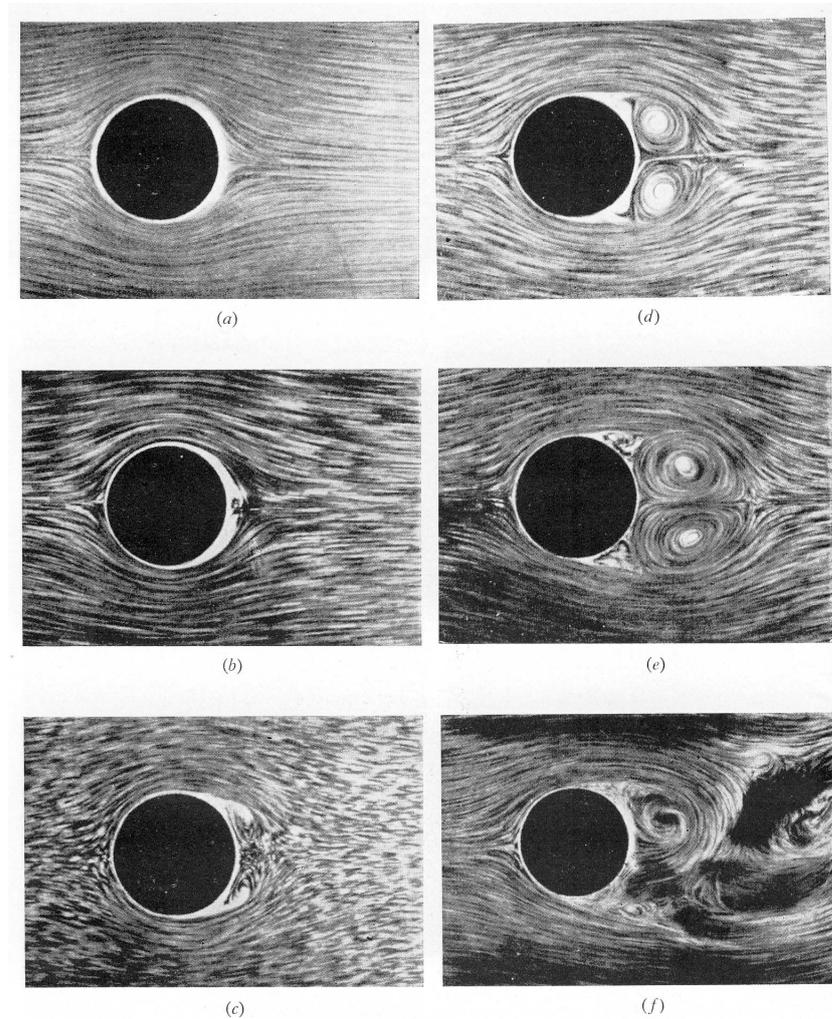


Figura 2.3: Il moto turbolento dietro ad un ostacolo cilindrico a vari istanti con numero di Reynolds alto tale da produrre turbolenza 'libera' nel fluido. Il colore bianco mette in evidenza le 'streaklines' del fluido (letteralmente striature) che sono prodotte dal rilascio continuo di una sostanza colorata che viene trasportata dal campo di velocità del fluido. In questo caso la sostanza colorata è rilasciata prima dell'ostacolo, nella figura a sinistra.

scale, da quelle della turbolenza 'libera' a quella dello strato limite. La separazione tra queste scale del moto non è cosa facile da giustificare ma si può tentare di guardare lo spettro dell'energia cinetica e cercare di estrarre tale classificazione.

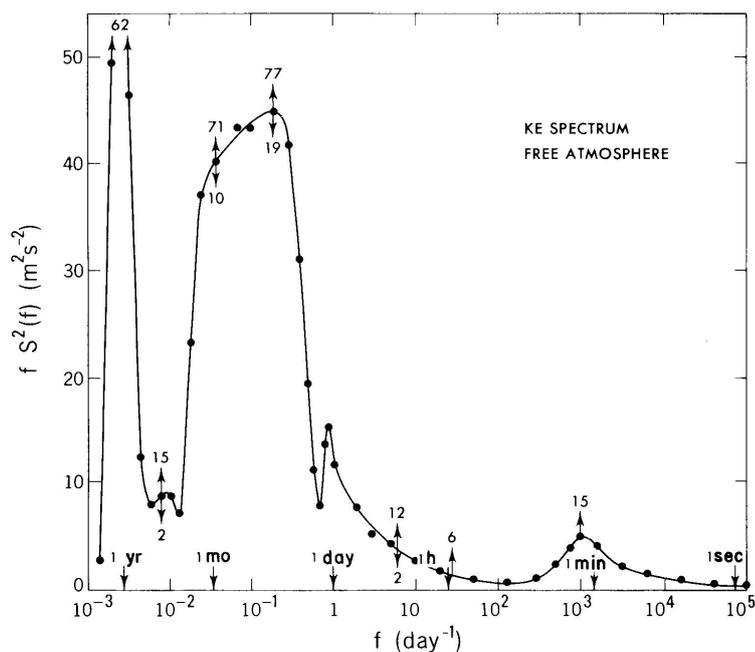


Figura 2.4: Lo spettro di energia cinetica nell'atmosfera in funzione della frequenza temporale (da Peixoto e Oort, Physics of Climate)

In Fig. 2.4 si può notare che in atmosfera esistono 'picchi' ben differenziati tra di loro ed in particolare esistono due zone, una corrispondente alle scale lunghe, centrata sui periodi di 10 giorni e un'altra a scale corte, caratterizzata da un picco con scala temporale dell'ordine del minuto. Più i moti corrispondenti alle due scale temporali sono differenziati, più lo spettro è caratterizzato da un 'buco spettrale' evidente (vedi Fig. 2.5).

2.1 Teoria di Reynolds della turbolenza

Vogliamo ora cercare di distinguere tra la turbolenza che produce rimescolamento e la turbolenza 'libera' usando il concetto di buco spettrale e di suddivisione delle scale del moto. Riscriviamo in forma vettoriale le equa-

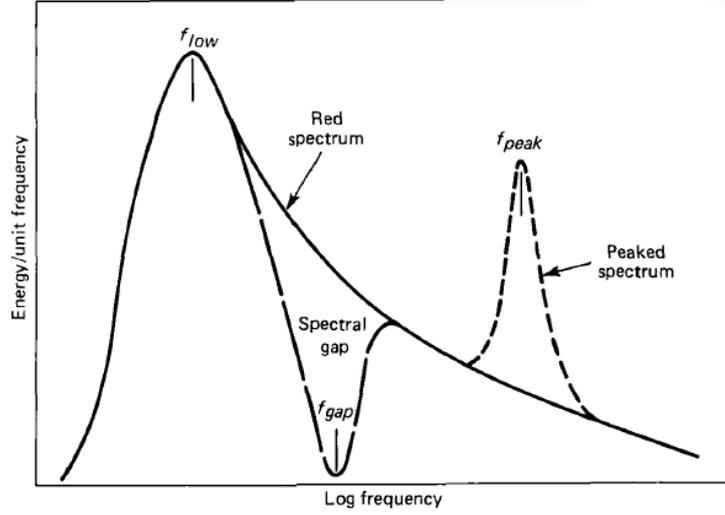


Figura 2.5: Schema dello spettro di energia con due zone spettrali distinte da un 'buco spettrale' (spectral gap)

zioni di Navier-Stokes per un fluido rotante, incompressibile e con viscosità molecolare:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} + 2\vec{\Omega} \times \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - g\hat{k} + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (2.2)$$

dove $\vec{u} = (u, v, w)$, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\vec{\Omega} = \hat{j}\Omega \cos \theta + \hat{k}\Omega \sin \theta$ and $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ sono i versori del sistema di riferimento solidale con la rotazione della terra e ν la viscosità molecolare. In questo capitolo l'equazione di continuità si considera in approssimazione di incompressibilità (che dimostreremo solo in seguito):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.3)$$

Per introdurre matematicamente la separazione di scala nel campo di velocità, si definisce la componente a scala temporale lunga come la *media* sul periodo, t_a , associato al picco dello spettro a frequenze basse f_{low} o *climatologiche* mostrato in Fig. 2.5. La componente rimanente, definita come la differenza tra il campo totale e questa media, rappresenterà la parte a scala temporale breve e quindi turbolenta. La componente media è calcolata il più delle volte come media aritmetica che è un'approssimazione della media d'insieme della meccanica statistica. Si suppone quindi di avere una serie temporale sufficientemente lunga durante la quale il sistema attraversa

tutti gli stati realizzabili così che la media d'insieme si riduce alla media aritmetica.

Il campo di velocità è quindi suddiviso nelle due componenti scrivendo:

$$\vec{u} = \langle \vec{u} \rangle + \vec{u}' \quad (2.4)$$

dove l'operatore media $\langle \rangle$ è definito come $\langle f \rangle = \frac{1}{t_a} \int_0^{t_a} f dt'$. Naturalmente $\langle \vec{u} \rangle$ può ancora dipendere dal tempo visto che la parte media del campo è una funzione dell'intervallo t_a sul quale si media. Dalla equazione (2.4) ne consegue che:

$$\langle \vec{u}' \rangle = 0 \quad (2.5)$$

La componente zonale dell'equazione (2.2) diventa, inserendo la definizione in (2.4):

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\langle u \rangle + u') \frac{\partial}{\partial x} + (\langle w \rangle + w') \frac{\partial}{\partial z} + (\langle v \rangle + v') \frac{\partial}{\partial y} \right] (\langle u \rangle + u') \\ & \quad + 2\Omega \cos\theta (\langle w \rangle + w') - 2\Omega \sin\theta (\langle v \rangle + v') \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} [\langle p \rangle + p'] + v \nabla^2 (\langle u \rangle + u') \end{aligned} \quad (2.6)$$

Si prende ora la media di 2.6 e si ottiene l'equazione per il campo medio $\langle u \rangle$ che è:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} + \langle u \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} + \langle w \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} \\ & \quad + 2\Omega \cos\theta \langle w \rangle - 2\Omega \sin\theta \langle v \rangle \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x} + v \nabla^2 \langle u \rangle - \frac{\partial}{\partial x} \langle u'u' \rangle - \frac{\partial}{\partial y} \langle u'v' \rangle - \frac{\partial}{\partial z} \langle u'w' \rangle \end{aligned} \quad (2.7)$$

Per ottenere la 2.7 si è usato il fatto che $\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{u} \rangle = 0$ e $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}' = 0$ per soddisfare 2.3.

Sebbene $\langle u' \rangle = \langle v' \rangle = \langle w' \rangle = 0$ il flusso di momento delle fluttuazioni, $\langle u'u' \rangle$, $\langle u'v' \rangle$, etc. non è invece zero. Si definiscono quindi gli **sforzi di Reynolds** nella direzione x come:

$$\tau_{xy} = -\rho \langle v'u' \rangle \quad \tau_{xx} = -\rho \langle u'u' \rangle \quad \tau_{xz} = -\rho \langle w'u' \rangle \quad (2.8)$$

Riscrivendo 2.7 con l'ausilio di 2.8 si ha:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} + \langle \vec{u} \rangle \cdot \vec{\nabla} \langle u \rangle + 2\Omega \cos\theta \langle w \rangle - 2\Omega \sin\theta \langle v \rangle \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} \right] + v \nabla^2 \langle u \rangle \end{aligned} \quad (2.9)$$

Analogamente per l'equazione della componente meridionale del campo si potrà scrivere:

$$\frac{\partial \langle v \rangle}{\partial t} + \langle \vec{u} \rangle \cdot \vec{\nabla} \langle v \rangle + 2\Omega \sin\theta \langle u \rangle = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{yz} \right] + \nu \nabla^2 \langle v \rangle \quad (2.10)$$

e

$$\tau_{yy} = -\rho \langle v'v' \rangle \quad \tau_{xy} = -\rho \langle u'v' \rangle \quad \tau_{zy} = -\rho \langle w'v' \rangle \quad (2.11)$$

e lo stesso per l'equazione di $\langle w \rangle$. Gli sforzi di Reynolds compongono quindi un tensore come quello viscoso ma ora contenente i flussi di momento delle fluttuazioni (per una definizione generale vedi l'Appendice):

$$\tau_{ij} = -\rho \begin{bmatrix} \langle u'u' \rangle & \langle u'v' \rangle & \langle u'w' \rangle \\ \langle v'u' \rangle & \langle v'v' \rangle & \langle v'w' \rangle \\ \langle w'u' \rangle & \langle w'v' \rangle & \langle w'w' \rangle \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Le equazioni dinamiche riscritte con i termini turbolenti, sono quindi:

$$\frac{\partial \langle \vec{u} \rangle}{\partial t} + \langle \vec{u} \rangle \cdot \vec{\nabla} \langle \vec{u} \rangle + 2\vec{\Omega} \times \langle \vec{u} \rangle = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \langle p \rangle - g\hat{k} + \nu \nabla^2 \langle \vec{u} \rangle + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \tau_{ij} \quad (2.13)$$

Queste equazioni non sono risolvibili perché ora abbiamo come incognite sia il campo $\langle \vec{u} \rangle$ che i prodotti $\langle u'_i u'_j \rangle$ e sempre solo quattro equazioni. Si deve ricorrere quindi alla cosiddetta "ipotesi di chiusura" della turbolenza. Partendo da evidenze empiriche, si cercherà di descrivere i flussi turbolenti in funzione dei campi medi, supponendo che il moto turbolento sia 'generato' da quello medio ed in particolare dai gradienti del campo medio.

Si scrive quindi:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2A_H \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} \\ \tau_{yy} &= 2A_H \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial y} \\ \tau_{zz} &= 2A_V \frac{\partial \langle w \rangle}{\partial z} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = A_H \left[\frac{\partial \langle v \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \right] \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \left[A_V \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} + A_H \frac{\partial \langle w \rangle}{\partial x} \right] \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \left[A_V \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial z} + A_H \frac{\partial \langle w \rangle}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

dove A_V , A_H sono chiamati coefficienti di viscosita' turbolenta in verticale ed orizzontale, rispettivamente. Questi sono diversi tra di loro poiche' il moto e' anisotropo in verticale ed orizzontale e ci si aspetta che le fluttuazioni ed il loro trasporto di momento lo sia di conseguenza.

2.2 I coefficienti di viscosita' turbolenta

In generale A_V , A_H dipenderanno dalla posizione (x, y, z) e sono definiti tramite misure in campo ed esperimenti di laboratorio ed in campo come:

$$\begin{aligned} A_H &= \rho \langle l_x u' \rangle = \rho \langle l_y v' \rangle \\ A_V &= \rho \langle l_z w' \rangle \end{aligned} \quad (2.15)$$

dove l_x , l_y , l_z sono le "lunghezze di rimescolamento" ("mixing lengths"). Le equazioni del moto 2.2 si riscrivono quindi:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \langle \vec{u} \rangle}{\partial t} + \langle \vec{u} \rangle \cdot \vec{\nabla} \langle \vec{u} \rangle + 2\vec{\Omega} \times \langle \vec{u} \rangle \\ &= -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \langle p \rangle - g\hat{k} + \nu \nabla^2 \langle \vec{u} \rangle + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla}_h \cdot \left(A_H \vec{\nabla}_h \langle \vec{u} \rangle \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(A_V \frac{\partial \langle \vec{u} \rangle}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Se A_V , A_H sono costanti, la (2.17) si puo' riscrivere come:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \langle \vec{u} \rangle}{\partial t} + \langle \vec{u} \rangle \cdot \vec{\nabla} \langle \vec{u} \rangle + 2\vec{\Omega} \times \langle \vec{u} \rangle \\ &= -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \langle p \rangle - g\hat{k} + \nu \nabla^2 \langle \vec{u} \rangle + \frac{A_H}{\rho} \nabla_h^2 \langle \vec{u} \rangle + \frac{A_V}{\rho} \frac{\partial^2 \langle \vec{u} \rangle}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

dove $\nabla_h = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Per l'oceano, $\frac{A_H}{\rho} = O(10^3 - 10^5) m^2 s^{-1}$ e $\frac{A_V}{\rho} = O(1 - 10^{-4}) m^2 s^{-1}$, mentre ricordiamo che $\nu = 10^{-6} m^2 s^{-1}$.

Passiamo ora a dimostrare che $A_V \ll A_H$. Prendendo il rapporto di scala tra i due termini di divergenza dello stress per la parte verticale e orizzontale si ottiene:

$$R = \frac{\left[A_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]}{\left[A_H \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]} = \frac{A_V L^2}{A_H H^2} \quad (2.18)$$

dove $[z] \approx H$, $[x] \approx L$, $[u] \approx U$. Se si impone ora che $R = 1$ afficne' i due termini di viscosita' turbolenta abbiano la stessa importanza nell'equazione 2.17 questo implica che:

$$\frac{A_V}{A_H} \approx \frac{H^2}{L^2} \quad (2.19)$$

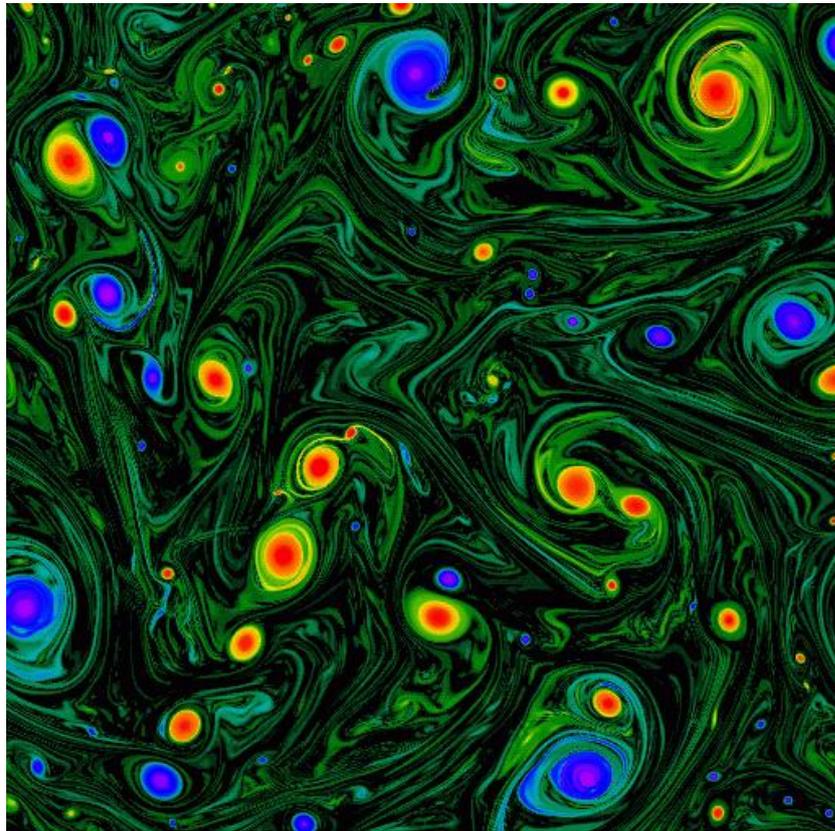


Figura 2.6: Campo di vortici e streaklines ottenuti da una simulazione numerica della turbolenza a larga scala dell'oceano. Questa volta il colore indica la vorticità (definita come $q = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$) che aiuta a mettere in evidenza vortici di diverso verso di rotazione (blu anticiclonici (rotazione oraria) e rossi ciclonici (rotazione anti-oraria)).

cioè $\frac{A_V}{A_H} \ll 1$ visto che $H \approx 1,10 \text{ km}$ e $L \approx 100,1000 \text{ km}$ rispettivamente nell'oceano e nell'atmosfera.

Nella Fig. 2.6 è mostrato il campo tipico della turbolenza 'libera' composta da vortici di grande scala abbastanza isolati. Il campo della figura proviene da una simulazione numerica con le equazioni del moto e con i coefficienti di viscosità turbolenta messi quasi a zero ovvero minimizzando l'effetto della turbolenza di 'rimiscelamento', lasciando quindi solo quella a larga scala. Nel campo si possono individuare zone senza vortici e con vortici di segno opposto e di diverse dimensioni. Il campo non è 'rimiscelato' ovvero mantiene gradienti alti di 'vorticità', la quantità che più caratterizza la turbolenza geofisica a larga scala.

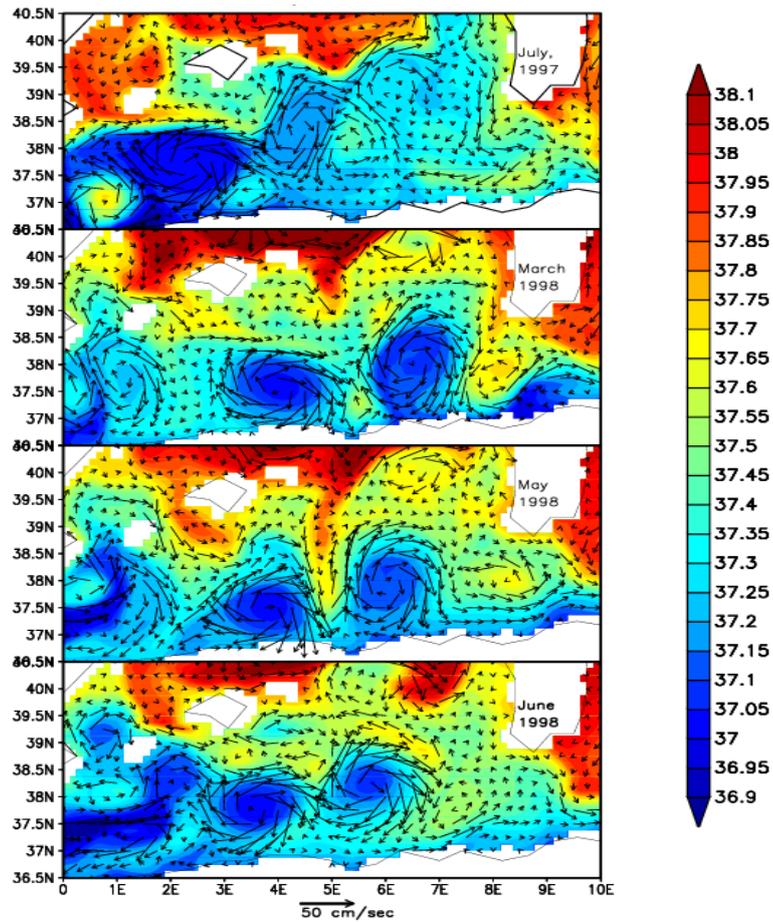


Figura 2.7: Campo di vortici nel Mediterraneo occidentale e vicino alle coste dell'Algeria. Il colore indica la salinita' le cui unita' sono riportate sul lato destro dell'immagine.

Nella Fig. 2.7 e' mostrato invece un campo di vortici realistici presenti nella Corrente Algerina del Mediterraneo occidentale. I vortici hanno un diametro di un centinaio di km, sono di segno alterno e sono circondanti da un fluido quasi quiescente. Questa turbolenza e' anche chiamata 'geostrofica' e i vortici hanno una vita media di diversi mesi se non anni. Diminuendo la taglia, la loro vita media diminuisce, si dividono in vortici piu' piccoli fino ad essere dissipati dalla viscosita' turbolenta.

Appendice

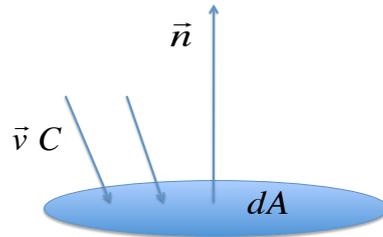


Figura 2.8: Schema di flusso della variabile C , trasportata dal campo di velocità \vec{v} attraverso la superficie dA

Il *flusso di C* è la quantità di C che passa attraverso una superficie nell'unità di tempo. Se il fluido si muove con velocità \vec{v} e trasporta C attraverso la superficie dA , come illustrato in Fig. (2.8) il flusso di C , F_C , è dato da:

$$F_C = \int \vec{v} \cdot \vec{n} C \, dA \quad (2.20)$$

Nel caso di in cui $C = 1$, equation (2.20) definisce il flusso di volume:

$$F_v = \int \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA \quad (2.21)$$

Il flusso di massa è invece dato da $C = \rho$ e quindi:

$$F_m = \int \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA \quad (2.22)$$

Il flusso di temperatura è invece:

$$\vec{F}_T = \int T \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA \quad (2.23)$$

Il flusso della componente zonale, u , della velocità, anche chiamato flusso di momento, è invece:

$$\vec{F} = \int u \vec{v} \cdot \vec{n} dA \quad (2.24)$$

Gli stress turbolenti hanno le dimensioni di flussi di momento come ricavato nel capitolo 2.

Capitolo 3

Termodinamica

3.1 L'equazione del calore per i fluidi

Le equazioni per il calore o lo stato termodinamico del fluido, in generale, derivano da considerazioni di termodinamica di base e da concetti di conservazione del calore. Ricordiamo che la conservazione dell'energia interna per unita' di massa del fluido si scrive:

$$de = dq + dw \quad [J \text{ kg}^{-1}] \quad (3.1)$$

considerando cambi infinitesimali di energia. Si ricorda che il differenziale di una funzione $f(x)$ e' dato dalla variazione infinitesimale rispetto alla variabile x , ovvero $df = \frac{df}{dx} dx$. Nell'equazione (3.1), de e' l'energia per unita' di massa o energia interna, dq e' il calore per unita' di massa ricevuto dal sistema e dw e' il lavoro fatto sul sistema dalle forze di pressione. Quest'ultimo si scrive:

$$dw = -p d\left(\frac{V}{m}\right) = -p d\alpha \quad (3.2)$$

dove $\alpha = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho}$ e' chiamato il volume specifico. Il secondo principio della termodinamica per processi reversibili e' invece scritto:

$$dq = T ds \quad (3.3)$$

dove s e' l'entropia. Ne deriva quindi che:

$$de = T ds - p d\alpha \quad (3.4)$$

Si riscrivano ora i differenziali delle (3.3) e (3.4) in funzione della derivata lagrangiana, ad esempio per la funzione f :

$$df = \frac{Df}{Dt} dt$$

Le derivate lagrangiane delle equazioni (3.3) e (3.4) sono quindi:

$$\frac{De}{Dt} = \frac{Dq}{Dt} - p \frac{D\alpha}{Dt} \quad (3.5)$$

$$\frac{Dq}{Dt} = T \frac{Ds}{Dt} \quad (3.6)$$

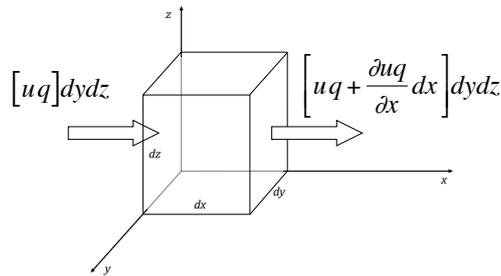


Figura 3.1: Volume di fluido elementare e flusso di calore nella direzione x

Per quanto riguarda il calore ricevuto o perso dal fluido, bisogna considerare il bilancio nel volume di fluido elementare (Fig. 3.1). Come fatto in precedenza per la massa, la perdita di calore nella direzione x sarà:

$$\begin{aligned} \Delta_x q &= \left[uq + \frac{\partial(uq)}{\partial x} dx \right] dydz - [uq] dydz \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (uq) dx dydz \end{aligned} \quad (3.7)$$

Prendendo il bilancio su tutte facce, ne deriva che:

$$\Delta q = \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}q) dx dy dz$$

Questa perdita di calore deve essere bilanciata da una diminuzione nel tempo del calore all'interno del volumetto e quindi:

$$-\frac{\partial q}{\partial t} dx dy dz = \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}q) dx dy dz$$

Dividendo per il volume e riscrivendo si ottiene:

$$\frac{D}{Dt}q = -q\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$$

Se si considerano le sorgenti di calore interne al fluido, indicate con Q , e i processi diffusivi del calore, anche chiamati conduzione, l'equazione finale si scrive:

$$\frac{D}{Dt}q = -q\vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \frac{k}{\rho}\nabla^2 T + \frac{Q}{\rho} \quad (3.8)$$

dove $\frac{k}{\rho}\nabla^2 T$ e' il termine di diffusione del calore, e k la conducibilita' termica molecolare in unita' di $W m^{-1} K^{-1}$. Quest'ultima e' il rapporto, in condizioni stazionarie, fra il flusso di calore e il gradiente di temperatura necessario per il passaggio del calore stesso. In altri termini, la conducibilita' termica e' una misura della capacita' di una sostanza a trasmettere il calore e dipende solo dalla natura del materiale, non dalla sua forma. Questo concetto di conducibilita' e' del tutto equivalente a quello di viscosita' gia' trattato per la velocita' nel Capitolo 1.

Assumendo che $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ (ipotesi di incompressibilita') e usando il secondo principio della termodinamica (3.6) per riscrivere $\frac{Dq}{Dt}$ si ottiene:

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{k}{\rho}\nabla^2 T + \frac{Q}{\rho} \quad (3.9)$$

La (3.9) e' una forma dell'equazione termodinamica per i fluidi che normalmente non si usa in meteorologia ed oceanografia poiche' l'entropia non viene misurata in campo. Si cerchera' quindi di riscrivere l'entropia in funzione di temperatura, T , e pressione, p . Supponendo l'entropia essere una funzione di pressione e temperatura, ovvero $s = f(T, p)$, la variazione dell'entropia puo' quindi essere riscritta come:

$$\frac{Ds}{Dt} = \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \frac{Dp}{Dt} + \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \frac{DT}{Dt} \quad (3.10)$$

da cui si ricava la nuova forma della (3.9) che e':

$$C_p \frac{DT}{Dt} + T \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \frac{Dp}{Dt} = \frac{k}{\rho}\nabla^2 T + \frac{Q}{\rho} \quad (3.11)$$

dove si e' usata la definizione di calore specifico a pressione costante:

$$C_p = T \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_p$$

Si puo' infine riscrivere il seguente termine:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = -\frac{\alpha_T}{\rho} \quad (3.12)$$

dove $\alpha_T = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$ e' chiamato il coefficiente di espansione termica e l'uguaglianza (3.12) e' dimostrata nell'Appendice 1 a questo capitolo.

L'equazione (3.9) diventa quindi:

$$C_p \frac{DT}{Dt} - \frac{T\alpha_T}{\rho} \frac{Dp}{Dt} = \frac{k}{\rho} \nabla^2 T + \frac{Q}{\rho} \quad (3.13)$$

che e' l'equazione generale del calore per i fluidi terrestri, valida sia per atmosfera che oceano. Le tipiche fonti di calore per l'oceano e l'atmosfera sono il calore assorbito ed emesso alla superficie terrestre. Trascurando gli effetti di compressibilita', rappresentati da $\frac{Dp}{Dt}$, la (3.13) diventa:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{k}{\rho C_p} \nabla^2 T + \frac{Q}{\rho C_p} \quad (3.14)$$

che e' una equazione solo per la temperatura del fluido valida per l'oceano ma non per l'atmosfera. Si definisce ora un nuovo coefficiente, chiamato diffusivita' molecolare, definito come:

$$K_m = \frac{k}{\rho C_p} \quad (3.15)$$

La diffusivita' molecolare per l'oceano e' $K_m \sim 1.7 \cdot 10^{-7} m^2 s^{-1}$.

Si parla di cambiamenti *adiabatici* se Q e la diffusione sono nulli, ovvero:

$$C_p \frac{DT}{Dt} - \frac{T}{\rho} \alpha_T \frac{Dp}{Dt} = 0 \quad (3.16)$$

3.2 La diffusivita' turbolenta

L'equazione per la temperatura del fluido (3.14) puo' essere riscritta considerando la separazione di Reynolds del Capitolo 2, tra scale temporali lunghe o "medie" e le fluttuazioni. Il procedimento e' del tutto analogo a quello considerato per il caso delle equazioni del moto. Si suddivide quindi T e \vec{u} in una parte media ed in una fluttuante, cioe':

$$\begin{aligned} T &= \langle T \rangle + T' \\ \vec{u} &= \langle \vec{u} \rangle + \vec{u}' \end{aligned} \quad (3.17)$$

dove in questo caso la media e' indicata con la barra ad apice, ($\bar{\quad}$). Si prenda ora l'equazione 3.14 senza Q , si introducano le definizioni 3.17 e si prenda nuovamente la media di tutti i termini dell'equazione. Si otterra' quindi:

$$\frac{D\langle T \rangle}{Dt} = K_m \nabla^2 \langle T \rangle - \frac{\partial}{\partial x} \langle u'T' \rangle - \frac{\partial}{\partial y} \langle v'T' \rangle - \frac{\partial}{\partial z} \langle w'T' \rangle \quad (3.18)$$

Facendo l'ipotesi di chiusura della turbolenza del tipo:

$$\begin{aligned} -\rho \langle u'T' \rangle &= K'_h \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x} \\ -\rho \langle v'T' \rangle &= K'_h \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial y} \\ -\rho \langle w'T' \rangle &= K'_v \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial z} \end{aligned}$$

dove ora K'_h e K'_v sono le diffusivita' turbolente orizzontali e verticali. L'equazione finale per la temperatura 'media' $\langle T \rangle$ e':

$$\frac{D\langle T \rangle}{Dt} = K_m \nabla^2 \langle T \rangle + \frac{K'_h}{\rho} \nabla_h^2 \langle T \rangle + \frac{K'_v}{\rho} \frac{\partial^2 \langle T \rangle}{\partial z^2} \quad (3.19)$$

dove si e' considerato il caso K'_h e K'_v costanti per semplicita' e sempre $\nabla_h^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Definendo $K_H = K_m + \frac{K'_h}{\rho}$ e $K_V = K_m + \frac{K'_v}{\rho}$ e riconsiderando ora i processi di compressibilita' e le sorgenti di calore, la forma finale dell'equazione del calore per i fluidi terrestri e'

$$\frac{DT}{Dt} - \frac{\alpha_T T}{\rho C_p} \frac{Dp}{Dt} = K_H \nabla_h^2 T + K_V \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{Q}{\rho C_p} \quad (3.20)$$

dove d'ora in avanti si omettera' di mettere le parentesi triangolari. Sara' immediato comunque capire che la separazione di Reynolds sia stata fatta poiche' nell'equazione saranno presenti i coefficienti di diffusivita' turbolenti.

3.3 Equazione di stato per l'oceano

Per definire in maniera completa lo stato termodinamico del sistema e' necessario usare l'equazione di stato, che e' una equazione costitutiva della fisica chimica e che esprime la relazione tra la densita' e le variabili termodinamiche del sistema, ovvero la pressione e la temperatura. Nel caso dell'oceano bisogna aggiungere come variabile di stato anche la salinita'. Quest'ultima,

indicata con S e' definita come il peso dei sali disciolti in un kg di acqua e le unita' sono $g\ kg^{-1}$. Le unita' di misura della salinita' sono pero' oggi giorno riferite ad una misura di conducibilita' dell'acqua che e' appunto messa in relazione alla salinita' e si definiscono come PSU (dall'inglese Practical Salinity Units).

L'equazione di stato per l'oceano e' una funzione di T , p e S che puo' essere in generale scritta:

$$\rho = f(T, S, p) \quad (3.21)$$

La densita' dell'acqua di mare non viene misurata direttamente ma e' calcolata a partire dalle misure di temperatura, salinita' e pressione. Il calcolo e' basato sull'equazione di stato internazionale per l'acqua di mare (Equation Of State-EOS-80) formulata dall'Unesco nel 1978. La relazione tra la densita' e le variabili termodinamiche e' un polinomio assai complesso, di cui riportiamo per informazione solo alcuni dei termini:

$$\begin{aligned} \rho(T, S, p) &= \frac{\rho(T, S, 0)}{\left(1 - \frac{p}{K(T, S, p)}\right)} \\ \rho(T, S, 0) &= \rho_w + (b_0 + b_1T + b_2T^2 + b_3T^3 + b_4T^4)S + \\ &\quad (c_0 + c_1T + c_2T^2)S^{\frac{3}{2}} + d_0S^2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

S	$t(^{\circ}C)$	$p(\text{dbars})$	$\rho(S, t, p)$
0	5	0	999.96675
		10000	1044.12802
	25	0	997.04796
		10000	1037.90204
35	5	0	1027.67547
		10000	1069.48914
	25	0	1023.34306
		10000	1062.53817

Figura 3.2: Valori di densita' al variare di pressione, salinita' e temperatura risultanti da EOS-80

In Fig. 3.2 si riportano alcuni valori di densita' in funzione della T , S e p calcolati con la (3.22).

Al fine di studiare gli effetti della temperatura e salinita' sulla densita', si puo' considerare un'equazione di stato semplificata, dipendente solo da T e da S :

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha_T (T - T_0) + \beta (S - S_0)] \quad (3.23)$$

L'equazione 3.23 e' l'espansione di Taylor della densita' prendendo in considerazione solo i termini al primo ordine e $\alpha_T = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)$ e' il coefficiente di espansione termica, gia' definito nella 3.10, e $\beta = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial S}$ e' chiamato il coefficiente di contrazione alina. Valori tipici dei coefficienti sono: $\rho_0 = 1028 \text{ kgm}^{-3}$; $T_0 = 10^\circ\text{C}$; $\alpha_T = 2 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$, $S_0 = 35 \text{ PSU}$ e $\beta = 7.8 \cdot 10^{-4} \text{ PSU}^{-1}$.

Nell'oceano ci si riferisce spesso non alla densita' ma alla 'sigma T' che e' definita:

$$\sigma_T(T, S, p) = \rho(T, S, 0) - 1000 \quad (3.24)$$

dove 1000 si assume sia la densita' dell'acqua distillata.

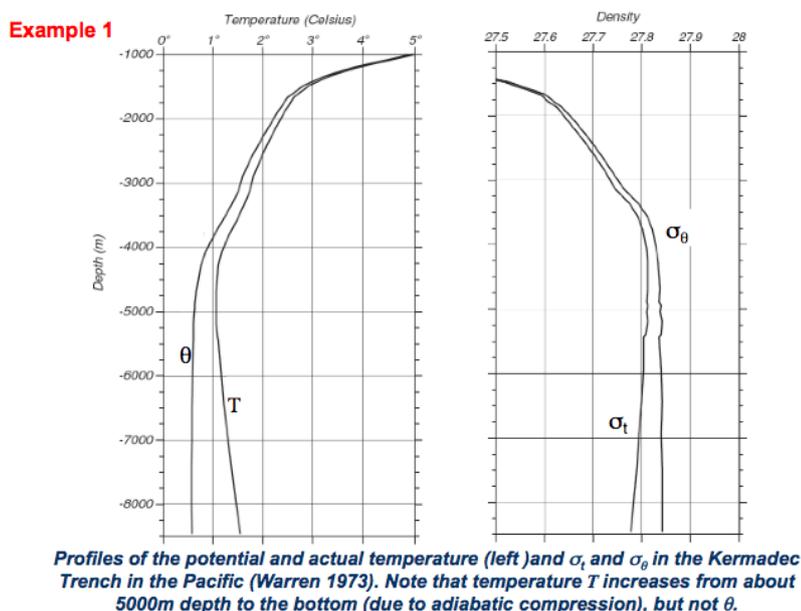


Figura 3.3: Profiles of (left) in situ and potential temperature and (right) sigma-t and sigma-theta in the Kermadec Trench in the Pacific measured by the R/V Eltanin during the Scorpio Expedition on 13 July 1967 at 175.825 E and 28.258 S. Data from Warren (1973).

A grandi pressioni la temperatura cresce grazie agli effetti di compressibilità e non è possibile non considerare anche gli effetti di pressione nell'equazione di stato. In figura 3.3 si può notare come la temperatura cresca visibilmente sotto i 4000 metri. Questa situazione dovrebbe implicare un'instabilità della colonna d'acqua, in quanto acqua più calda si troverebbe a profondità maggiori rispetto a quella più fredda sovrastante. Invece la colonna d'acqua è stabile e se si ripete la misura a distanza di ore o giorni si ritroveranno sempre gli stessi valori. Il 'riscaldamento' dell'acqua in profondità è determinato dalla pressione come si può capire prendendo in considerazione l'equazione per i cambiamenti adiabatici 3.16:

$$dT = \frac{T\alpha_T}{\rho C_p} dp \quad (3.25)$$

dove la derivata totale nel tempo è stata sostituita dal differenziale totale. La 3.25 esprime il cambiamento della temperatura in funzione della pressione, mettendo in evidenza che al crescere della pressione la temperatura aumenta. Questi sono effetti della compressibilità del fluido sulla temperatura che non corrispondono ad un effettivo riscaldamento della colonna d'acqua ma ad una conversione di energia da una forma ad un'altra. Se si vogliono considerare gli effetti di compressibilità senza dovere abbandonare la semplicità dell'equazione 3.23, è utile definire una nuova temperatura, chiamata potenziale ed indicata con il simbolo θ :

$$\theta = T + \int_p^{p_r} \Gamma dp = T + \int_p^{p_r} \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s dp \quad (3.26)$$

dove T e p sono temperatura e pressione misurate, s è l'entropia, p_r è la pressione di riferimento, alla quale $T = \theta$, e Γ è chiamato il *Gradiente Adiabatico* o *Lapse Rate*. Quest'ultimo può essere scritto come:

$$\Gamma = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s = \frac{\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T}{\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p} = -\frac{\alpha_T T}{C_p \rho} \quad (3.27)$$

Riscrivendo (3.26):

$$\theta = T - \int_p^{p_r} \frac{\alpha_T T}{C_p \rho} dp$$

si capisce che θ è sempre minore di T poiché tutti i termini dentro all'integrale sono positivi e l'integrale si sottrae a T . La Fig. 3.3 mostra il profilo di temperatura potenziale calcolato tramite la 3.26 ed è chiaro che θ ha un

valore costante in profondita'. L'equazione semplificata 3.23 che considera gli effetti di pressione e' quindi:

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha_T (\theta - \theta_0) + \beta (S - S_0)] \quad (3.28)$$

Troviamo ora l'equazione per la temperatura potenziale partendo dalla 3.26 e prendendo la derivata totale dei vari termini cosi' da ottenere:

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{DT}{Dt} - \frac{\alpha_T T}{C_p \rho} \frac{Dp}{Dt} \quad (3.29)$$

Considerando cambiamenti adiabatici, espressi nella 3.16, ne deriva che:

$$\frac{D\theta}{Dt} = 0 \quad (3.30)$$

Quindi θ nel caso adiabatico e' conservata seguendo il moto della particella di fluido al contrario di T che non lo sarebbe in ragione degli effetti di pressione sulla temperatura. Se si considerano i processi diffusivi l'equazione termodinamica finale per l'oceano e':

$$\frac{D\theta}{Dt} = K_H \nabla_h^2 \theta + K_V \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$$

E' importante notare che l'equazione di stato (3.21) aggiunge la salinita' a quelle usate per riscrivere il primo e secondo principio della termodinamica per i fluidi terrestri. Occorre quindi aggiungere una equazione per l'evoluzione della salinita'. In questo caso si considera che i sali disciolti siano un tracciante passivo della circolazione (seguendo la definizione del capitolo 1) e con effetti diffusivi. Si scrive quindi:

$$\frac{DS}{Dt} = K_H \nabla_h^2 S + K_V \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \quad (3.31)$$

dove K_H e K_V sono i coefficienti di diffusivita' turbolenta definiti nella sezione precedente e considerati essere uguali a quelli per la temperatura. In realta' i coefficienti di diffusivita' turbolenta del sale e della temperatura sono diversi poiche' esiste un effetto, chiamato 'doppia diffusione' che mostra che la salinita' si diffonde piu' lentamente della temperatura ma in questo corso verranno considerati uguali. In generale $K_H \sim 10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ e $K_V \sim 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ sia per temperatura che salinita'.

3.4 Equazione di stato per l'atmosfera secca

L'equazione di stato per un sistema composto da m grammi di un gas con peso molecolare M e':

$$pV = \frac{m}{M}R^*T \quad (3.32)$$

dove R^* e' la costante universale dei gas pari a $8314 \text{ JK}^{-1}\text{kmol}^{-1}$. Sostituendo il volume con la sua espressione in funzione della massa e densita', la 3.32 si riduce a:

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (3.33)$$

dove $\frac{R^*}{M} = R$ e' ora la costante dei gas specifica per il peso molecolare degli elementi che costituiscono l'atmosfera. Per l'aria secca si considera un peso molecolare apparente pari a $M = 28.97$ e quindi $R = 287 \text{ JK}^{-1}\text{kg}^{-1}$. Il peso molecolare apparente e' calcolato come la somma della massa molare di ciascun componente dell'aria (N_2 , O_2 , Ar , etc.) pesata dalla frazione molare di gas nell'aria.

Vogliamo ora esprimere l'equazione termodinamica 3.20 per l'atmosfera. Innanzitutto il coefficiente di espansione termica, definito nella (3.12) diventa, usando l'equazione di stato 3.33:

$$\alpha_T = \frac{1}{T} \quad (3.34)$$

e quindi:

$$\frac{DT}{Dt} - \frac{RT}{C_p p} \frac{Dp}{Dt} = K_H \nabla_h^2 T + K_V \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{Q}{\rho C_p} \quad (3.35)$$

Questa e' l'equazione termodinamica per l'atmosfera. Nel caso di cambiamenti adiabatici, ovvero non considerando la dissipazione e le sorgenti interne di calore, la 3.35 diventa:

$$\frac{1}{T} \frac{DT}{Dt} - \frac{R}{C_p p} \frac{Dp}{Dt} = 0 \quad (3.36)$$

Vediamo ora a che tipo di temperatura potenziale, θ , corrisponde l'equazione termodinamica adiabatica 3.36. Riscriviamo $\frac{D}{Dt}$ in termini di differenziale, d , e otteniamo:

$$\frac{dT}{T} - \frac{R}{C_p} \frac{dp}{p} = 0 \quad (3.37)$$

Integriamo ora la 3.35 tra θ e T e in corrispondenza tra p_r e p , ottenendo:

$$\int_T^\theta \frac{dT}{T} = \frac{R}{C_p} \int_p^{p_r} \frac{dp}{p} \quad (3.38)$$

La temperatura potenziale in atmosfera e' quindi:

$$\frac{\theta}{T} = \left(\frac{p_r}{p} \right)^{\frac{R}{C_p}} \quad (3.39)$$

Normalmente p_r e' scelta essere la pressione alla superficie ovvero circa 1010 hPa. In Fig. 3.4 e' mostrato il profilo della temperatura misurata in situ e quello della temperatura potenziale, calcolata con la 3.39. Si puo' notare che la temperatura potenziale cresce con l'altezza, indicando 'stabilita' della colonna d'aria.

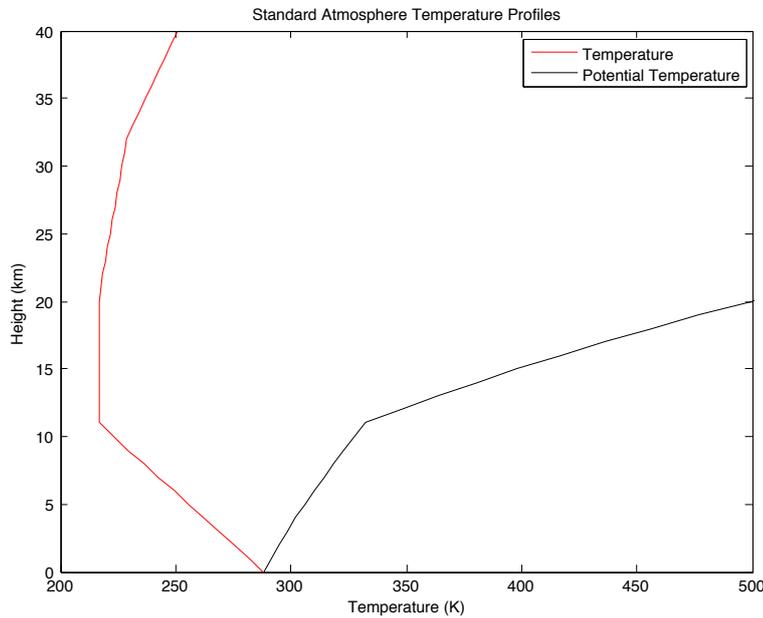


Figura 3.4: Profili di temperatura in situ e potenziale per l'Atmosfera standard

Proviamo ora a dimostrare che la temperatura potenziale e' conservata seguendo il moto della particella di fluido. Usando (3.39) e prendendo il logaritmo si ottiene:

$$\ln \theta = \ln T + \frac{R}{C_p} \ln p_r - \frac{R}{C_p} \ln p$$

la cui derivata totale e' quindi:

$$\frac{1}{\theta} \frac{D\theta}{Dt} = \frac{1}{T} \frac{DT}{Dt} - \frac{R}{C_p} \frac{Dp}{Dt}$$

dove il membro di destra dell'equazione e' identico all'equazione per i processi adiabatici (3.16) e quindi:

$$\frac{D\theta}{Dt} = 0 \quad (3.40)$$

Questo significa che, anche per l'atmosfera, in assenza di diffusione e sorgenti di calore, la temperatura potenziale e' conservata.

Nel caso atmosferico si definisce il gradiente adiabatico 'secco':

$$\Gamma_d = - \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (3.41)$$

Considerando la 3.37 e la relazione idrostatica $\alpha dp = -g dz$ si ha che il gradiente adiabatico secco e':

$$\Gamma_d = \frac{g}{C_p} = 10 \text{ K km}^{-1} \quad (3.42)$$

Questo vuol dire che in condizioni di aria secca, salendo di 100 m l'atmosfera si raffreddera' approssimativamente di un grado.

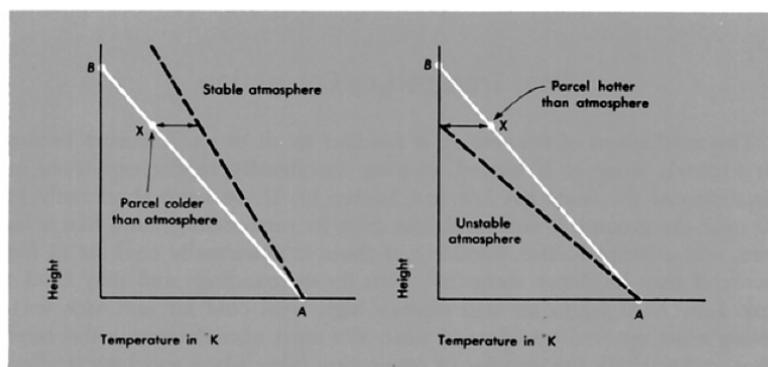


Figura 3.5: Concetto di stabilita' ed instabilita' per l'atmosfera secca nei casi in cui la decrescita della temperatura dell'ambiente sia minore o maggiore di quella data dal gradiente adiabatico secco (linea bianca), ovvero quella della particella. Questo definisce una atmosfera 'stabile' ed 'instabile'. Nel caso in cui la temperatura dell'ambiente (linea tratteggiata) decresca in maniera meno veloce di quella della particella si parla di atmosfera stabile mentre nel caso di sinistra, l'ambiente (linea tratteggiata) decresce la sua temperatura piu' velocemente e di parla di fluido instabile.

In Fig.3.5 si mostrano possibili condizioni di temperatura rispetto al gradiente adiabatico sopra calcolato, condizioni che si classificano in termini di

'stabilita' ed 'instabilita'. Quando l'aria sale e' soggetta ad una pressione minore, quindi si espande e la sua energia interna decresce. Se questo cambio avviene senza scambio di calore con il fluido esterno, allora si ha la relazione per i cambiamenti adiabatici 3.16. Questa relazione dice che diminuendo la pressione al salire verticale della particella, deve esserci una decrescita anche della temperatura se si vuole mantenere la stessa densita'. Se la particella rimane meno fredda dell'aria che la circonda continuera' a salire poiche' piu' leggera. Il moto si definisce in questo caso 'instabile', dando luogo a *convezione*. Questo concetto di stabilita' e quello di instabilita' gravitazionale ovvero quello per il quale una particella, mossa dalla sua posizione di equilibrio in un campo gravitazionale, non ritorna alla sua posizione originale. In atmosfera quando questo succede si dice che e' in atto un processo di 'convezione' che porta masse d'aria a spostarsi molto velocemente in altezza dalla loro posizione di equilibrio iniziale.

Usando il concetto di gradiente adiabatico, se il gradiente adiabatico Γ_{atmo} dell'atmosfera nella quale la particella di fluido si muove, e' maggiore di Γ_d si dice che l'atmosfera e' *instabile* e invece al contrario, se Γ_{atmo} e' minore di Γ_d , si dira' *stabile*. Nel caso instabile, se la particella riesce a salire a sufficienza comincera' a raffreddarsi, condensandosi e formando nubi.

3.5 Equazione di stato per l'atmosfera umida

Per arrivare ad una considerazione dei processi atmosferici riguardanti la formazione di nubi e la convezione, e' necessario considerare la componente del vapor acqueo che, sebbene presente in quantita' piccole (circa lo 0.5 "% del volume dell'atmosfera), e' essenziale per questi processi. A tal fine si considera un gas che e' composto da due tipi di molecole, uno tipico dell'aria secca e l'altro rappresentativo del vapor acqueo. La massa di vapore acqueo per unita' di massa di aria e' chiamata umidita' specifica ed e' indicata con q . Se m e' la massa d'aria totale e m_v e' la massa di vapore acqueo, l'umidita' specifica sara':

$$q = \frac{m_v}{m} = \frac{\rho_v}{\rho} \quad (3.43)$$

Riscriviamo l'equazione di stato (3.33) per la parte "secca" dell'aria con il seguente formalismo:

$$p_d = \rho_d R T \quad (3.44)$$

dove ρ_d e' la densita' dell'aria secca, e R e' la costante specifica del gas secco definita in precedenza. Nel caso del vapor acqueo, supposto anch'esso essere un gas perfetto, l'equazione di stato e':

$$e = \rho_v R_v T \quad (3.45)$$

dove e e' chiamata la pressione di vapore acqueo e $R_v = \frac{R^*}{M_v}$, dove ora $M_v = 18$ per la massa molecolare dell'acqua. L'equazione per la combinazione di questi gas e' scritta:

$$p = p_d + e \quad (3.46)$$

$$\rho = \rho_d + \rho_v$$

$$\rho_d = (1 - q) \rho \quad (3.47)$$

Sostituendo (3.46) e (3.47) nel rapporto $\frac{e}{p}$ si ottiene:

$$\frac{e}{p} = \frac{q}{[\epsilon + (1 - \epsilon)q]} \quad (3.48)$$

dove $\epsilon = \left(\frac{R}{R_v}\right)$. Se si usa ora (3.48) assieme a (3.46) si ottiene che la densita' totale dell'aria umida e':

$$\rho = \frac{p}{RT \left[(1 - q) + \frac{q}{\epsilon} \right]} \quad (3.49)$$

Si puo' quindi definire una temperatura virtuale, $T_v = T \left(1 - q + \frac{q}{\epsilon}\right)$ e l'equazione di stato rimane simile a quella dell'aria secca.

Nel caso di aria umida bisogna considerare che la particella d'acqua puo' condensare e quindi bisogna usare la seconda legge della termodinamica in forma completa, non adiabatica. Nel caso dell'atmosfera e' possibile riscrivere la (3.1) in una forma specifica, spiegata in Appendice 2 a questo capitolo:

$$dq = C_p dT - \alpha dp \quad (3.50)$$

dove dq tiene conto del calore aggiunto o sottratto al sistema e in questo caso e' il calore latente di condensazione. Quest'ultimo puo' essere scritto come:

$$dq = -L dw_s \quad (3.51)$$

dove $w_s = \frac{m_v}{m_d} = \frac{\rho_v}{\rho_d}$ e' chiamato '*mixing ratio*' o '*rapporto di rimescolamento*'. Nel caso dell'atmosfera umida, il Gradiente Adiabatico umido e' Γ_s si ricava dalla (3.50) inserendo la (3.51) e ottenendo:

$$\Gamma_s = -\frac{dT}{dz} = \frac{\Gamma_d}{\left(1 + \frac{L}{C_p} \frac{dw_s}{dT}\right)} \quad (3.52)$$

Si vede quindi che $\Gamma_s \leq \Gamma_d$ sempre ovvero la perdita di calore con l'altezza in una atmosfera umida e' minore. Un atmosfera umida e' quindi piu' stabile di

una secca in quanto l'aria umida si raffredda in generale piu' lentamente dell'aria secca al crescere dell'altezza. Naturalmente quando l'atmosfera umida e' in condizioni di instabilita' la convezione porta alla formazione di nubi, un processo fondamentale che avviene nell'atmosfera terrestre e che produce sia fenomeni precipitativi sporadici ma importanti per la vita sulla terra che fenomeni climatologici quali parte dell'albedo terrestre.

3.6 Appendice 1 al capitolo 3

Vogliamo dimostrare che:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \quad (3.12)$$

Questa uguaglianza si ottiene usando il principio della termodinamica che qui riportiamo per convenienza:

$$de = T ds - p d\alpha \quad (3.4)$$

Si usera' inoltre la definizione di calore specifico gia' data ma in una forma

$$C_p = T \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_p + p \left(\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right)_p \quad (3.53)$$

Prendendo la derivata in p di 3.53 si ottiene:

$$T \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right)_p + p \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right)_p \quad (3.54)$$

mentre la derivata in p di 3.4 e':

$$T \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial e}{\partial p}\right)_T + p \left(\frac{\partial \alpha}{\partial p}\right)_T \quad (3.55)$$

e la sua ulteriore derivata in T e' :

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T + T \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial e}{\partial p}\right)_T + p \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial p}\right)_T \quad (3.56)$$

Sottraendo ora 3.54 da 3.56 si ottiene:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \quad (3.57)$$

che e' appunto 3.12.

3.7 Appendice 2 al Capitolo 3

Nel caso atmosferico e' possibile riscrivere la prima legge della termodinamica:

$$de = dq + dw(3.1)$$

in maniera piu' semplice. Innanzitutto si assumano cambi di calore a volume costante, ovvero $dq = de$ da cui ne risulta che:

$$\left(\frac{dq}{dT}\right)_\alpha = C_v = \left(\frac{de}{dT}\right)_\alpha$$

dove C_v e' il calore specifico a volume costante. La (3.1) si puo' quindi riscrivere come:

$$dq = C_v dT + d(p\alpha) - \alpha dp$$

Usando $p\alpha = RT$ si ha che:

$$d(p\alpha) = R dT$$

e quindi:

$$dq = (C_v + R) dT - \alpha dp$$

e usando l'uguaglianza $C_p = C_v + R$ si ottiene finalmente quello che volevamo mostrare:

$$dq = C_p dT - \alpha dp$$

Capitolo 4

Sintesi delle equazioni per atmosfera e oceano

Lo stato dell'atmosfera e dell'oceano in sintesi e' caratterizzato da variabili di campo quali il campo di velocita' tridimensionale $\vec{u} = (u, v, w)$, il campo di pressione p , il campo di densita' ρ , la temperatura T , la salinita' S per l'oceano e l'umidita' specifica q per l'atmosfera. Tali variabili sono dipendenti dalle coordinate geografiche che noi definiamo in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale (x, y, z) , solidale con la terra rotante, e dal tempo. Abbiamo quindi sette variabili indipendenti da determinare per ciascuno dei due ambienti fisici che studiamo, l'atmosfera e l'oceano.

Come abbiamo visto questi due ambienti fisici sono considerati essere fluidi e obbediscono alle equazioni di Navier-Stokes nel sistema rotante della terra, con la suddivisione tra campi medi e fluttuanti e quindi la parametrizzazione della turbolenza.

Le equazioni per il moto dei fluidi geofisici, descritte nei primi tre capitoli, possono essere cosi' sintetizzate:

a) le tre equazioni del moto per le componenti del campo di velocita':

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} u - 2\Omega \sin \theta v + 2\Omega \cos \theta w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{A_H}{\rho} + \nu\right) \nabla_h^2 u + \left(\frac{A_V}{\rho} + \nu\right) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} v + 2\Omega \sin \theta u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \left(\frac{A_H}{\rho} + \nu\right) \nabla_h^2 v + \left(\frac{A_V}{\rho} + \nu\right) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} w - 2\Omega \cos \theta u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \left(\frac{A_H}{\rho} + \nu\right) \nabla_h^2 w + \left(\frac{A_V}{\rho} + \nu\right) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (4.3)$$

dove chiameremo $f = 2\Omega \sin \theta$ il parametro di Coriolis e $f^* = 2\Omega \cos \theta$, θ la latitudine, $\nabla_h^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, A_H e A_V i coefficienti di viscosita' turbolenta sono stati scelti essere costanti e ν e' la viscosita' cinematica. A queste tre equazioni si aggiunge la conservazione della massa, l'equazione di stato e la termodinamica. L'equazione di conservazione della massa o equazione di continuita' e' scritta:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (4.4)$$

Per la termodinamica e l'equazione di stato l'oceano e l'atmosfera hanno equazioni molto differenti. Riscriveremo quindi le equazioni per i casi specifici:

a) Caso Oceano

L'equazione di stato per l'oceano e' scritta in modo generale come un polinomio complesso di T, p, S (vedi capitolo 3) ma anche come una funzione lineare della temperatura potenziale, θ :

$$\rho \sim \rho_0[1 - \alpha_T(\theta - \theta_0) + \beta(S - S_0)] \quad (4.5)$$

L'equazione per la temperatura potenziale e per la salinita' chiudono l'insieme di equazioni necessarie a risolvere il problema, ovvero avere lo stesso numero di incognite e di equazioni:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \theta = K_H \nabla_h^2 \theta + K_V \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} S = K_H \nabla_h^2 S + K_V \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \quad (4.7)$$

dove si sono supposte le diffusita' turbolente (K_H e K_V) essere costanti ed uguali per T e S , come definite nel capitolo 3.

b) Caso Atmosfera In questa sintesi si elencheranno solo le equazioni di stato e della termodinamica per l'atmosfera secca:

$$\rho = \frac{p}{RT} \quad (4.8)$$

$$\frac{DT}{Dt} - \frac{RT}{pC_p} \frac{Dp}{Dt} = K_H \nabla_h^2 T + K_V \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (4.9)$$

Una approssimazione che viene fatta immediatamente sia in atmosfera che in oceano e' quella di Boussinesq per la quale la variazione della densita' nelle tre equazioni del moto, 4.1,4.2,4.3, influenza solo i termini di gravita'

. Le equazioni del moto riscritte con l'approssimazione di Boussinesq sono quindi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} u - 2\Omega \sin \theta v + 2\Omega \cos \theta w = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{A_H}{\rho_0} + \nu\right) \nabla_h^2 u + \left(\frac{A_V}{\rho_0} + \nu\right) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} v + 2\Omega \sin \theta u = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \left(\frac{A_H}{\rho_0} + \nu\right) \nabla_h^2 v + \left(\frac{A_V}{\rho_0} + \nu\right) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} w - 2\Omega \cos \theta u = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho}{\rho_0} g + \left(\frac{A_H}{\rho_0} + \nu\right) \nabla_h^2 w + \left(\frac{A_V}{\rho_0} + \nu\right) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (4.12)$$

Da 4.10,4.11, refeq4.12 partiremo per fare l'analisi di scala che ci permettera' di ottenere soluzioni approssimate delle equazioni.

Capitolo 5

Analisi di scala delle equazioni del moto

5.1 Grandezze di scala

Le equazioni scritte nei capitoli precedenti tengono in considerazione una grande varietà di processi fisici, dalla scala planetaria a quella dei processi di viscosità molecolare. La soluzione di queste equazioni nella loro complessità si può ottenere solo tramite metodi numerici sofisticati.

Per ottenere soluzioni approssimate ma che considerino processi importanti per la circolazione oceanica ed atmosferica, è necessario fare un'analisi di scala delle equazioni. Questo significa calcolare la taglia di ciascuno dei termini sulla base di *grandezze di scala* e confrontarli tra di loro per capire se è possibile trascurarne qualcuno. L'operazione da farsi è quella di assumere le grandezze di scala, come mostrato in Tabella 5.1, e nondimensionalizzare le variabili indipendenti e di campo delle equazioni del capitolo 4. Nondimensionalizzare significa 'scalare' le variabili attraverso le grandezze di scala ed ottenere delle variabili nondimensionali.

Consideriamo le seguenti scale e nondimensionalizzazioni:

1) la scala orizzontale di (x, y) viene rappresentata da L . Si scriverà allora che le variabili spaziali nondimensionali, indicate con (x', y') sono:

$$(x, y) = L(x', y')$$

In questo modo (x', y') assumeranno valori $\ll 1$ se la nondimensionalizzazione è fatta in maniera giusta.

2) la scala verticale z è diversa da quella orizzontale poiché si considerano fluidi planetari, ovvero *sottili*. Per questi ultimi si sceglie come H la scala

Tabella 5.1: Valori delle grandezze di scala per l'oceano e l'atmosfera

Scala	Valore oceano	Valore atmosfera
L	100-1000 km	10000 km
H	1 km	10 km
U	0.1 m s ⁻¹	1-10 m s ⁻¹
f ₀	1 × 10 ⁻⁴ s ⁻¹	1 × 10 ⁻⁴ s ⁻¹

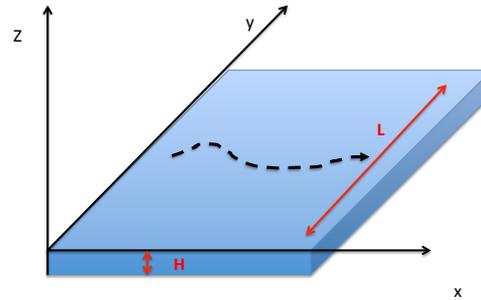


Figura 5.1: L'ipotesi di 'fluido sottile' per atmosfera ed oceano

verticale e la variabile nondimensionale z' è:

$$z = Hz'$$

dove $H \ll L$. Ne discende quindi che il rapporto di scala, o 'aspect ratio' in inglese, è:

$$\delta = \frac{H}{L} \ll 1$$

ovvero circa $10^{-2} - 10^{-3}$ con i valori della Tabella 5.1.

3) la scala del moto orizzontale (u, v) è scelta essere uguale ad U . Ne deriva quindi che le variabili nondimensionali (u', v') risultano:

$$(u, v) = U (u' v')$$

4) La scala del moto verticale non e' scelta liberamente ma si considera l'equazione di continuita' approssimata nella forma $\nabla \cdot \vec{u} = 0$. Usando l'analisi di scala di quest'ultima equazione si ha che:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] \approx \left[\frac{\partial w}{\partial z} \right] \quad (5.1)$$

dove le parentesi quadre indicano appunto la scala dei termini che contengono. Se si indica con W la scala del moto verticale e si usano le altre scale precedentemente definite, ne deriva che la scala del moto verticale e':

$$W = \delta U$$

e quindi la velocita' verticale nondimensionale e':

$$W = \delta U w'$$

5) Il parametro di Coriolis e' nondimensionalizzato con il valore di f_0 calcolato ad una latitudine di riferimento. Quindi

$$f = f_0 f'$$

6) La scala della pressione deve essere ricavata dalle equazioni come e' stato fatto per il caso della velocita' verticale. Per lo studio dei fluidi a livello planetario, si considera il bilancio tra l'accelerazione di Coriolis e i termini di pressione nelle equazioni delle componenti del moto orizzontale 4.10 e 4.11. Indicando la scala della pressione con P si ottiene quindi:

$$[fv] \approx \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right] \quad (5.2)$$

$$f_0 U = \frac{1}{\rho_0} \frac{P}{L}$$

Ne deriva quindi che la pressione nondimensionale e':

$$p = (\rho_0 f_0 U L) p'$$

7) La scala della densita' si ottiene assumendo l'equilibrio tra l'accelerazione di gravita' e il gradiente verticale della pressione nella 4.12:

$$\left[\frac{\partial p}{\partial x} \right] \approx [-\rho g] \quad (5.3)$$

Se si denota con Δ la scala della densita', si ottiene:

$$\Delta = \frac{\rho_0 f_0 U L}{gH}$$

e la quindi densita' nondimensionale:

$$\rho = \left(\frac{\rho_0 f_0 U L}{gH} \right) \rho'$$

8) Infine si deve scegliere la scala temporale t_0 che e' a questo punto una scelta 'libera' come nel caso coordinate spaziali del moto. Normalmente si sceglie $t_0 = \frac{L}{U}$ ovvero la scala di tempo avvertiva e quindi:

$$t = \frac{L}{U} t'$$

5.2 Approssimazione di incompressibilita'

Questa approssimazione riguarda l'equazione di continuita' e ci condurra' a spiegare come e' possibile approssimarla. Supponiamo innanzitutto che la densita' possa essere decomposta nel modo seguente:

$$\rho = \rho_o + \tilde{\rho} \quad (5.1)$$

dove $|\tilde{\rho}| \ll \rho_o$. Nell'oceano, dove questa approssimazione e' piu' usata, $\rho_o = 1028$ e $\tilde{\rho}$ varia tra ± 10 . L'equazione di continuita' e' quindi riscritta come:

$$\frac{D\tilde{\rho}}{Dt} + \rho_o \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \tilde{\rho} \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (5.4)$$

Si trascuri ora il terzo termine a sinistra dell'uguale visto che e' moltiplicato per un fattore che e' circa due ordini di grandezza piu' piccolo del secondo termine. Sostituendo le variabili non dimensionali trovate in precedenza si ottiene:

$$\frac{U}{L} \frac{\rho_0 f_0 U L}{gH} \frac{D\rho'}{Dt'} = -\frac{U}{L} \rho_0 \vec{\nabla}' \cdot \vec{u}'$$

e riscrivendo

$$\frac{L^2}{R^2} \epsilon \frac{D\rho'}{Dt'} = -\vec{\nabla}' \cdot \vec{u}' \quad (5.5)$$

dove $R = \frac{\sqrt{gH}}{f_0}$ e' chiamato "raggio esterno di Rossby" e $\epsilon = \frac{U}{f_0 L}$ e' chiamato il "numero di Rossby". Per valori tipici dell'oceano (vedi Tabella 5.1), $\epsilon \ll 1$ e $\frac{L^2}{R^2} \approx 1$. Si ha quindi che il termine a sinistra della 5.5 e' piu' piccolo di quello

a destra dell'uguale che invece e' composto solo di termini nondimensionali. Entro il limite per il quale $\frac{L^2}{R^2} \approx 1$ e $\epsilon \ll 1$ si ha che l'equazione di continuita' si riduce a:

$$\vec{\nabla}' \cdot \vec{u}' = 0 \quad (5.6)$$

Questa e' chiamata l'equazione di conservazione della massa in approssimazione di incompressibilita'. Per l'atmosfera $\frac{L^2}{R^2} \approx 10$ e quindi l'approssimazione di incompressibilita' e' valida solo marginalmente.

5.3 Approssimazione idrostatica

Per ottenere un'altra approssimazione importante, quella idrostatica, e' necessario partire dall'equazione per il moto verticale in approssimazione di Boussinesq, ovvero la 4.12. Usando i valori di scala definiti in precedenza ed introducendo le variabili nondimensionali si ha che:

$$\frac{U}{L} \delta \frac{\partial w'}{\partial t'} + \frac{U}{L} \delta \vec{u}' \cdot \vec{\nabla}' w' - f^* u = \frac{f_0 L}{H} \frac{\partial p'}{\partial z'} - \rho' \frac{f_0 L}{H} + \frac{A_H}{\rho_0 L^2} \delta \nabla'^2 w' + \frac{A_V}{\rho_0 H^2} \delta \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2}$$

Dividendo ogni termine dell'equazione ora per $\frac{f_0 L}{H}$ si ottiene:

$$\delta^2 \epsilon \frac{Dw'}{Dt'} - \frac{f^*}{f_0} \delta u' = -\frac{\partial p'}{\partial z'} - \rho + \frac{A_H}{\rho_0 UL} \delta^2 \epsilon \nabla'^2 w' + \frac{A_V}{\rho_0 UL} \epsilon \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2} \quad (5.7)$$

Ne consegue quindi che i termini moltiplicati per δ , δ^2 e ϵ sono vari ordini di grandezza piu' piccoli degli altri. Il bilancio all'ordine zero in δ , δ^2 e ϵ dell'equazione 5.7 e' chiamato bilancio o equazione *idrostatica* ed e' scritta come:

$$\frac{\partial p'}{\partial z'} = -\rho' \quad (5.8)$$

Possiamo ora riscrivere la 5.8 in termini dimensionali inserendo le relazioni si scala inverse e ottenendo:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho \quad (5.9)$$

Il bilancio idrostatico e' una delle semplificazioni delle equazioni del moto piu' usate e generalmente valide per una classe di processi atmosferici e oceanici assai vasta. Questo bilancio, come dimostrato, dipende solamente dal fatto che ϵ e δ siano $\ll 1$.

5.3.1 Soluzioni dell'equazione idrostatica per l'oceano

Integrando l'equazione idrostatica 5.9 tra z e η che indica la superficie libera dell'oceano, si ottiene :

$$\int_z^\eta dp = -g \int_z^\eta \rho dz$$

$$p(z) = p(\eta) + g \int_z^\eta \rho dz \quad (5.10)$$

dove $p(\eta)$ e' la pressione atmosferica. Se si considera il fluido omogeneo, ovvero $\rho = \rho_0$, e si trascura la pressione atmosferica alla superficie, si puo' finalmente scrivere:

$$p(z) = \rho_0 g (\eta - z) \quad (5.11)$$

che da' la conversione tra profondita' e pressione. Se infatti vogliamo sapere alla profondita' di $z = -1000 \text{ m}$ quale sia approssimativamente la pressione dalla 5.11 si ottiene :

$$p \approx \rho_0 g H = 1000 (9.8) 10^3 \approx 10^7 \text{ Pa} = 100 \text{ bar} = 1000 \text{ db}$$

Ne segue quindi che nell'oceano ogni metro di profondita' corrisponde approssimativamente all'aumento di 1 db di pressione.

5.3.2 Soluzioni dell'equazione idrostatica per l'atmosfera

Vogliamo ora trovare la corrispondenza tra pressione ed altezza nell'atmosfera usando l'equazione idrostatica 5.9. Considerando ora l'equazione di stato 3.32 per l'atmosfera secca ed integrando tra la superficie, supposta essere rigida a $z = 0$, ed una certa altezza z , si ha:

$$\ln \left(\frac{p(z)}{p(0)} \right) = -\frac{g}{RT} z \quad (5.12)$$

dove T e' il profilo di temperatura dell'atmosfera. Prendendo un valore costante della temperatura, pari a T_c e' possibile risolvere l'integrale in 5.12 in maniera esatta. In questo caso, definendo l'*altezza di scala* dell'atmosfera, $H = \frac{RT_c}{g}$ 5.12 risulta dare il profilo di pressione in maniera analitica :

$$p(z) = p(0) e^{-\frac{z}{H}} \quad (5.13)$$

Nell'atmosfera quindi per $T_c = 288\text{ K}$ $H = 8.4\text{ km}$ che giustifica l'assunzione fatta per la scala verticale in Tabella 5.1.E' utile notare che la pressione nell'atmosfera varia quindi in maniera esponenziale invece che lineare come nell'oceano.

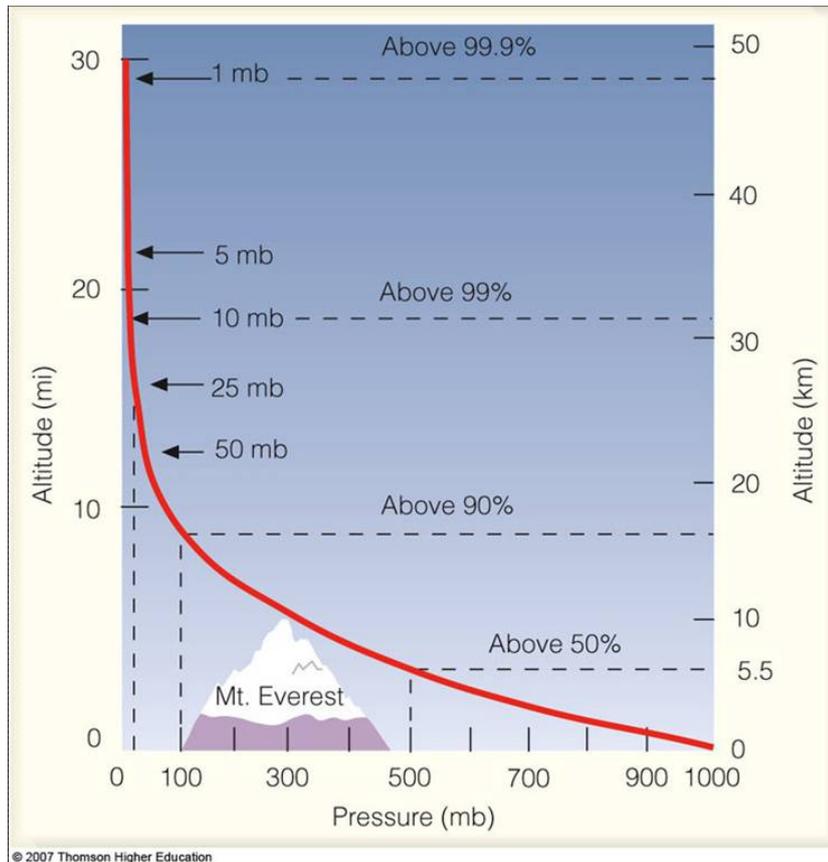


Figura 5.2: Grafico dell'andamento della pressione atmosferica con l'altezza per un profilo di temperatura 'standard'

Nel caso che T vari con l'altezza, bisogna risolvere l'integrale in 5.12 in maniera numerica e si otterra' il grafico riportato in Fig. 5.2

Capitolo 6

Il moto geostrofico

La quarta e ultima approssimazione delle equazioni del moto e' quella 'geostrofica'. Il termine 'geostrofico' proviene dall'unione di due termini greci, che significano 'terra rotante'. Troviamo innanzitutto le equazioni approssimate.

6.1 Equazioni geostrofiche

Per trovare questa importante approssimazione, molto utile sia in casi pratici che teorici, e' necessario ricorrere di nuovo all'analisi di scala. Facendo l'analisi di scala delle componenti zonali e meridionali del moto 4.10 e 4.11 si ottengono le equazioni non-dimensionali seguenti:

$$\epsilon \frac{\partial u'}{\partial t'} + \epsilon \vec{u}' \cdot \vec{\nabla}' u' - \frac{f}{f_0} v' + \delta \frac{f^*}{f_0} w' = -\frac{\partial p'}{\partial x'} \quad (6.1)$$

$$\epsilon \frac{\partial v'}{\partial t'} + \epsilon \vec{u}' \cdot \vec{\nabla}' v' + \frac{f}{f_0} u' = -\frac{\partial p'}{\partial y'} \quad (6.2)$$

dove si sono trascurati i termini viscosi. Come discusso nel capitolo precedente, il numero di Rossby, ϵ , e' piccolo e δ e' ancora piu' piccolo. All'ordine zero quindi nel numero di Rossby, ovvero trascurando i termini moltiplicati per ϵ e δ , si ottiene:

$$\frac{f}{f_0} v' = \frac{\partial p'}{\partial x'} \quad (6.3)$$

$$\frac{f}{f_0} u' = -\frac{\partial p'}{\partial y'} \quad (6.4)$$

Riscrivendo con le variabili dimensionali si trova:

$$fv = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (6.5)$$

$$fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (6.6)$$

Le equazioni soprascritte sono chiamate *geostrofiche*. Sono equazioni ‘diagnostiche’ ovvero esprimono la relazione tra quantità fisiche ma non la derivata temporale di queste. Non possono quindi essere usate per ‘prevedere il tempo’ ma sono utili per analizzare come il campo di velocità si evolve istante per istante.

Usando le due equazioni geostrofiche, considerando $f \approx f_0$, e prendendo la divergenza si ricava che il campo geostrofico è a divergenza nulla, ovvero:

$$\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} = 0 \quad (6.7)$$

Un campo vettoriale a divergenza nulla può essere espresso in funzione della cosiddetta ‘funzione di flusso’ ψ definita come:

$$\vec{u}_g = \hat{k} \times \vec{\nabla} \psi \quad (6.8)$$

Se si riscrivono le equazioni geostrofiche usando la definizione $\vec{f} = \hat{k} f_0$, si ottiene la forma vettoriale delle equazioni ovvero:

$$\vec{f} \times \vec{u}_g = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p \quad (6.9)$$

Introducendo ora la definizione di funzione di flusso, si ottiene:

$$f_0 \vec{\nabla} \psi = \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p \quad (6.10)$$

ovvero $\psi = \frac{1}{f_0 \rho_0} p$. In conclusione la pressione è la funzione di flusso del campo geostrofico opportunamente scalata per il fattore $\frac{1}{\rho_0 f_0}$.

La relazione geostrofica ci permette di calcolare il campo di velocità dal campo di pressione. Vediamo di calcolare ora il moto attorno alle zone di bassa e alta pressione mostrate in Fig. 6.1.

Si riscrivono le equazioni geostrofiche 6.9 con le differenze finite, ovvero:

$$\begin{aligned} f_0 v_g &= \frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta p}{\Delta x} \\ f_0 u_g &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta p}{\Delta y} \end{aligned} \quad (6.11)$$

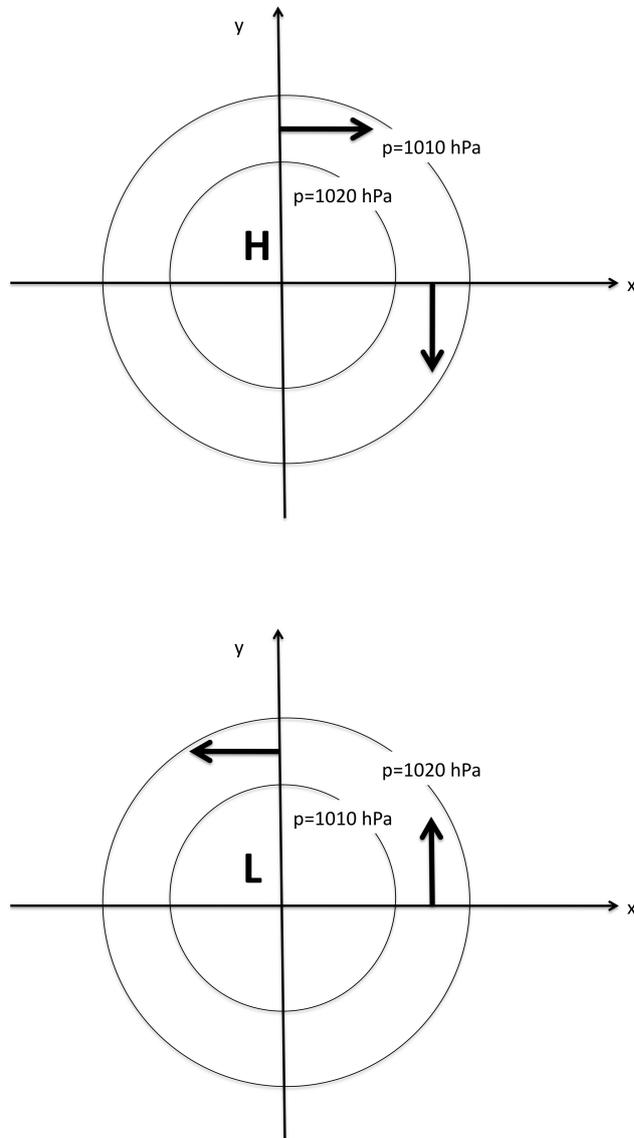


Figura 6.1: Campo con isolinee di uguale pressione o isobare. I vettori indicano le direzioni del campo geostrofico nell'emisfero Nord della terra. Per l'emisfero meridionale le direzioni sono esattamente invertite.

e si calcolano i gradienti di pressione in Fig. 6.1. Considerando il caso dell'emisfero Nord ($f_0 > 0$) ne risulta che attorno alla bassa pressione il moto e' antiorario, al contrario attorno all'alta pressione. Nell'emisfero meridionale ($f_0 < 0$) il moto sara' esattamente in direzione opposta.

Le zone di bassa pressione sono chiamate cicloni e il moto attorno ad esse ciclonico, mentre le aree di alta pressione sono anticicloni e il moto e' chiamato anticiclonico, sia nell'emisfero Nord che Sud. Nell'emisfero Nord (Sud) il campo di velocita' dei cicloni e' antiorario (orario) mentre quello degli anticicloni orario (antiorario).

6.2 Relazione di vento termico

Prendendo la derivata verticale delle equazioni geostrofiche 6.9 si ottiene:

$$f_0 \frac{\partial u_g}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (6.12)$$

$$f_0 \frac{\partial v_g}{\partial z} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (6.13)$$

Usando la relazione idrostatica $-g\rho = \frac{\partial p}{\partial z}$ si ottengono le equazioni di 'vento termico':

$$f_0 \frac{\partial u_g}{\partial z} = \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial y} \quad (6.14)$$

$$f_0 \frac{\partial v_g}{\partial z} = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (6.15)$$

Queste equazioni esprimono la relazione tra il gradiente verticale della velocita' geostrofica e quello orizzontale della densita'. Questa forma delle equazioni e' utile in oceanografia poiche' dalle misure di temperatura e salinita' si puo' dedurre la densita' e quindi calcolare le correnti dalle relazioni 6.14 e 6.15.

6.3 Geopotenziale e altezza dinamica

Il lavoro, dw , fatto per spostare una massa M , ad una distanza dz in un campo gravitazionale e' scritto:

$$dw = M g dz \quad (6.16)$$

Definiamo ora il geopotenziale come:

$$M d\phi = M g dz \quad (6.17)$$

Usando l'equazione idrostatica ne deriva che:

$$d\phi = -\alpha dp \quad (6.18)$$

dove α e' il volume specifico. Integrando tra l'altezza z_1 e la superficie a $z = 0$, alle quali corrisponde la pressione p_1 e p_0 , si ottiene la differenza di geopotenziale $\Delta\phi$:

$$\Delta\phi = \int_0^1 d\phi = \int_0^{z_1} g dz' = - \int_{p_0}^{p_1} \alpha dp' \quad (6.19)$$

dove le unita' della differenza di geopotenziale sono m^2s^{-2} . Dimostriamo ora che la differenza di geopotenziale e' la funzione di flusso del campo geostrofico.

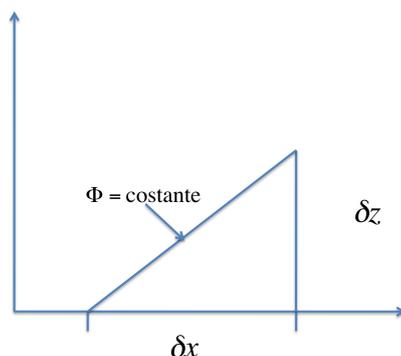


Figura 6.2: Sistema di coordinate (x, z) e isosuperficie ϕ sulla quale si vuole ridefinire la derivata in x della variabile ξ .

Il geopotenziale e' una nuova superficie che dipende da tutte le coordinate e dalla pressione stessa. Per sostituire la pressione nelle equazioni geostrofiche con il geopotenziale, dobbiamo cambiare il sistema verticale di coordinate. Supponiamo di dovere rappresentare il gradiente orizzontale di una quantita' ξ definita su una isosuperficie di geopotenziale ϕ costante. In Figura 6.2 viene mostrata la geometria del problema. L'incremento in x di ξ a ϕ costante sara':

$$\delta\xi_\phi = \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_z \delta x + \left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)_x \delta z \quad (6.20)$$

Passando ora alle derivate in x e scrivendo per analogia la derivata in y si ha:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}_\phi = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_z + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\phi \quad (6.21)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y}_\phi = \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)_z + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_\phi \quad (6.22)$$

Imponendo ora $\phi = \xi = p$ si avra' che $\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_p = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_p = 0$ e quindi:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z = -\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p = \rho g \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p \quad (6.23)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_z = -\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_p = \rho g \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_p \quad (6.24)$$

Usando infine la relazione idrostatica si puo' scrivere che:

$$\alpha \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z = g \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (6.25)$$

$$\alpha \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_z = g \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_p = \frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (6.26)$$

Le equazioni geostrofiche sono quindi:

$$f_0 u_g = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (6.27)$$

$$f_0 v_g = +\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (6.28)$$

ovvero, $\psi = \frac{\phi}{f}$. Quindi il geopotenziale e' la funzione di flusso del campo geostrofico.

Prendendo ora la differenza di geopotenziale tra due livelli verticali, si puo' infine scrivere:

$$f_0 \Delta u_g = -\frac{\partial}{\partial y} \Delta \phi \quad (6.29)$$

$$f_0 \Delta v_g = \frac{\partial}{\partial x} \Delta \phi \quad (6.30)$$

dove le velocita' in $\Delta u_g = u_1 - u_0$ sono calcolate a p_1 e p_0 . La velocita' calcolata a p_0 e' chiamata velocita' di riferimento.

6.3.1 Caso oceano

Il volume specifico in oceanografia si puo' esprimere come:

$$\alpha(T, S, p) = \alpha_{(0,35,p)} + \delta \quad (6.31)$$

dove δ e' l'anomalia del volume specifico. Si ottiene quindi che la differenza di geopotenziale 6.19 e' :

$$\Delta\phi = - \int_0^{p_1} \alpha_{0,35,p} dp - \int_0^{p_1} \delta dp \quad (6.32)$$

In oceanografia si usa definire l'altezza dinamica' o 'topografia dinamica', ΔD , definita come:

$$\begin{aligned} \Delta D &= - \frac{1}{g} \int_{p_1}^0 \alpha_{0,35,p} dp - \int_{p_1}^0 \delta dp \\ &= - \frac{\Delta\phi}{g} \end{aligned} \quad (6.33)$$

e quindi il campo geostrofico e' dato da:

$$f_0 \Delta u_g = -g \frac{\partial \Delta D}{\partial y} \quad (6.34)$$

$$f_0 \Delta v_g = +g \frac{\partial \Delta D}{\partial x} \quad (6.35)$$

Nel caso dell'oceano la velocita' di riferimento e' considerata essere nulla e il livello di riferimento p_1 viene chiamato livello di moto nullo.

L'altezza dinamica della superficie e' il livello del mare: questo e' facilmente dimostrabile usando l'equazione idrostatica e integrando 6.33 tra il livello del mare η e la profondita' $-H$ corrispondente a p_1 , ottenendo:

$$\begin{aligned} \Delta D &= - \frac{1}{g} \int_{p_1}^0 \frac{dp'}{\rho} \\ &= \int_{-H}^{\eta} dz' = (\eta + H) \end{aligned} \quad (6.36)$$

Il livello del mare espresso dall'altezza dinamica e' il risultato del forzante atmosferico alla superficie, in particolare il vento, e le proprieta' termodinamiche della colonna d'acqua. Dall'equazione 6.36 si nota che per densita' basse (o temperatura alta) la topografia dinamica della superficie atterra' a valori massimi mentre il contrario avviene per valori alti di densita' (o temperature basse). Si ha quindi che i cicloni che hanno temperature basse e

quindi densita' alte al loro centro corrisponderanno ad un livello del mare basso rispetto alle zone circostanti e viceversa per gli anticicloni. In Fig. 6.3 questa relazione e' mostrata per un vortice anticiclonico. Naturalmente, visto che l'altezza dinamica appare nella stessa relazione geostrofica del campo di pressione, la circolazione attorno ad aree di livello del mare alto sara' oraria come nel caso di alta pressione, considerando ancora una volta l'emisfero Nord.

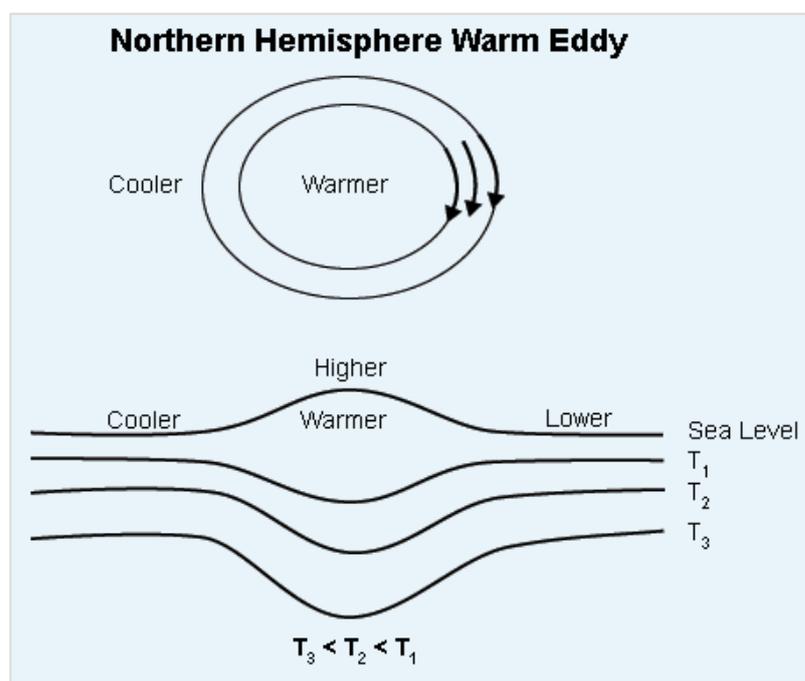


Figura 6.3: Struttura verticale di temperatura e del livello del mare per una tipica struttura anticiclonica nell'oceano. La direzione della velocita' geostrofica e' mostrata in alto.

Nei giri subtropicali il livello del mare e' piu' alto che non ai bordi, cosi' come nei giri subpolari il livello del mare e' piu' basso rispetto alle zone circostanti. La corrente del Golfo e della Kuroshio corrispondono ai gradienti piu' forti di livello del mare sulla terra, con dislivello di circa un metro in un'area orizzontale di poche decine di km.

La Fig. 6.3.1 mostra il campo di topografia dinamica media risultante dalle misure di altimetria per gli anni 1993-1999. La topografia dinamica mette in rilievo i giri subtropicali e subpolari della terra che corrispondono a valori positivi i primi e negativi i secondi della anomalia di topografia

dinamica. Attorno a valori positivi di anomalia di topografia dinamica la circolazione e' anticiclonica mentre attorno ai valori negativi e' ciclonica.

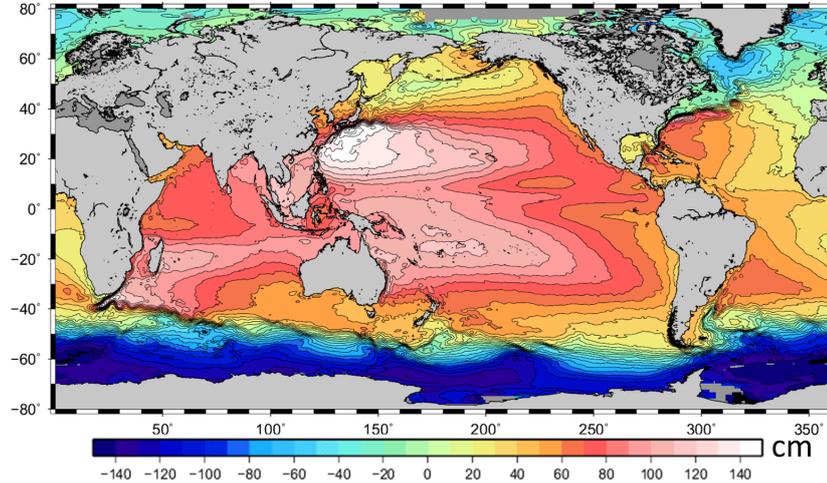


Figura 6.4: Campo della topografia dinamica dell'oceano risultante dalle media delle osservazioni da satellite altimetrico per gli anni 1993-1999.

6.3.2 Caso atmosfera

Nel caso dell'atmosfera si parla della differenza di 'altezza di geopotenziale' ovvero, dalla 6.19:

$$z_1 - z_0 = -\frac{1}{g} \int_{p_0}^{p_1} \alpha dp' \quad (6.37)$$

In questa equazione, z_1 e' l'altezza della superficie di pressione p_1 e z_0 corrisponde a p_0 . Introducendo l'equazione di stato $\alpha = \frac{RT}{p}$ si ottiene:

$$z_1 = z_0 - \frac{1}{g} \int_{p_0}^{p_1} \frac{RT}{p} dp' \quad (6.38)$$

Quindi, supponendo $z_0 = 0$ alla superficie terrestre, la 6.38 esprime l'altezza della superficie di pressione p_1 rispetto a p_0 in metri, come mostrato in 6.5 per la superficie di pressione a $500mb$.

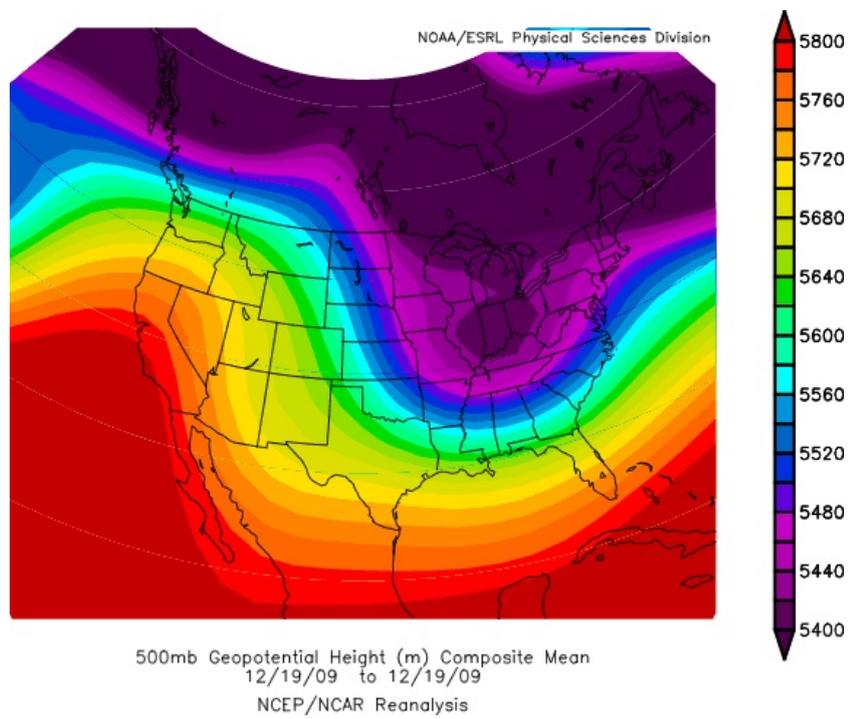


Figura 6.5: Campo di altezza di geopotenziale per la superficie di pressione a 500 mb.

Capitolo 7

Stratificazione e rimescolamento verticale

Lungo la direzione verticale del moto, la gravita' agisce in modo tale da produrre un profilo di densita' stabile gravitazionalmente, ovvero con il minimo di energia potenziale. Questo corrisponde ad un gradiente verticale di densita' crescente con la profondita' nell'oceano e decrescente con l'altezza nell'atmosfera. In questa situazione il moto e' inibito e la stratificazione si dice stabile.

Quando per qualche ragione questo stato di energia potenziale minima cambia, si possono creare condizioni tali da produrre 'instabilita'', quindi turbolenza ed infine rimescolamento che riporta la situazione al suo minimo di energia potenziale. Stratificazione e stabilita' gravitazionale sono quindi concetti collegati e possono essere usati per analizzare situazioni dove esistono condizioni adatte per il rimescolamento.

La stratificazione e' connessa alla proprieta' di 'galleggiamento' (buoyancy in inglese) di un fluido, definita come:

$$b = -g \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \quad (7.1)$$

dove ρ_0 e' una densita' di riferimento ' dell'ambiente e ρ quella di una particella d'acqua che e' immersa in quell'ambiente. Se $\rho < \rho_0$ allora la particella ha un galleggiamento 'positivo' ; se $\rho > \rho_0$ il galleggiamento e' negativo. Vediamo ora come e' possibile associare questa proprieta' di galleggiamento al moto verticale.

Consideriamo ora la Fig. 7.1 che rappresenta un profilo di densita' dell'oceano di cui vogliamo definire le proprieta' di galleggiamento: consideriamo una particella d'acqua alla profondita' di equilibrio z_1 con densita' ρ_1 . Se

la particella viene spostata da questa sua posizione di equilibrio e i cambiamenti sono adiabatici, questa potrà o continuare ad allontanarsi o ritornare alla sua posizione di equilibrio in funzione del suo galleggiamento rispetto al profilo di densità. Se si trova immersa alla profondità z_2 dove l'ambiente ha una densità minore ρ_2 , come mostrato nel profilo in alto di Fig. 7.1 la particella ritornerà alla sua posizione di equilibrio, sotto l'azione della gravità. Per il profilo in alto di Fig. 7.1 succederà lo stesso anche se lo spostamento è nella direzione opposta. Si parlerà in definitiva di oscillazione della particella attorno alla posizione di equilibrio e di profilo stabile. Al contrario, se il profilo è come quello del pannello in basso della Fig. 7.1, la particella non ritornerà mai alla sua posizione di equilibrio. Si parla quindi di profilo instabile, non c'è oscillazione attorno alla posizione di equilibrio e questo moto di allontanamento produrrà rimescolamento della colonna d'acqua.

La differenza cruciale tra i due profili di Fig. 7.1 è il segno della derivata del profilo di densità, nel caso stabile negativo mentre in quello instabile, positivo. Nel caso stabile si parla di oscillazione attorno alla posizione di equilibrio e quindi cercheremo di trovare una 'frequenza' per questo moto verticale. Tale frequenza è chiamata di galleggiamento o di Brunt-Vaisala dal nome dei suoi due scopritori.

7.1 La frequenza di Brunt-Vaisala

L'oscillazione di galleggiamento descritta in precedenza riguarda la componente verticale del moto e quindi si prenderà in considerazione l'equazione 4.12 ma senza considerare né gli effetti di rotazione terrestre, né quelli di viscosità:

$$\rho_0 \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} - g\rho \quad (7.2)$$

Per trovare se w può avere soluzioni oscillatorie si prende la derivata di 7.2 ottenendo:

$$\rho_0 \frac{D^2w}{Dt^2} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Dp}{Dt} \right) - g \frac{D\rho}{Dt} \quad (7.3)$$

Dobbiamo ora riscrivere i termini $\frac{Dp}{Dt}$ e $\frac{D\rho}{Dt}$. Si sviluppa quindi:

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} &\cong w \frac{\partial \rho}{\partial z} = w \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \\ &= \frac{w}{C^2} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (7.4)$$

dove C e' la velocita' del suono nell'acqua ($C^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$). Usando la relazione idrostatica ora nella forma $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_0 g$ si ottiene:

$$\frac{D\rho}{Dt} \cong w \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\frac{\rho_0 g w}{C^2} \quad (7.5)$$

L'altro termine invece deve essere riscritto usando la relazione idrostatica $\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho$:

$$\frac{Dp}{Dt} \approx w \frac{\partial p}{\partial z} = -g w \rho \quad (7.6)$$

Finalmente si puo' ora riscrivere 7.3 ed ottenere quindi:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{D^2 w}{Dt^2} &= \frac{\partial}{\partial z} g w + \rho_0 \frac{g^2}{C^2} w \\ &= - \left[-g \frac{\partial \rho}{\partial z} - \rho_0 \frac{g^2}{C^2} \right] w \end{aligned} \quad (7.7)$$

A questo punto si definisce la frequenza di Brunt-Vaisala:

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{g^2}{C^2} \quad (7.8)$$

e l'equazione per la velocita' verticale e' quindi:

$$\frac{D^2 w}{Dt^2} = -N^2 w \quad (7.9)$$

Questa equazione ammette soluzioni oscillatorie se N e' reale. Trascu-
rando il termine della velocita' del suono, N sara' reale se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} < 0 \quad (7.10)$$

I casi con $N^2 > 0$ sono casi di alta stratificazione, periodo di oscillazione della velocita' verticale piccolo e quindi di estrema stabilita' della colonna d'acqua.

Al contrario se $N^2 < 0$, l'equazione 7.9 ammette soluzioni esponenziali crescenti nel tempo. L'ampiezza del moto verticale cresce con il tempo allontanando la massa d'acqua dalla sua posizione di equilibrio. La situazione si dice instabile.

Nella figura 7.2 si riportano tipici profili di densita', T , S e N per acque stratificate.

Il coefficiente di diffusivita' turbolenta, descritto nel capitolo 3, e' quindi scritto in funzione del galleggiamento, ovvero

$$K_v = N^{-2} \epsilon \Gamma \quad (7.11)$$

dove $\Gamma = 0.2$ e ϵ e' la dissipazione del calore. Il rimescolamento e' quindi inversamente proporzionale alla frequenza di Brunt-Vaisala, una relazione molto importante per applicazioni pratiche in quanto si potra' calcolare il rimescolamento dalle misure di T e S e quindi di densita'.

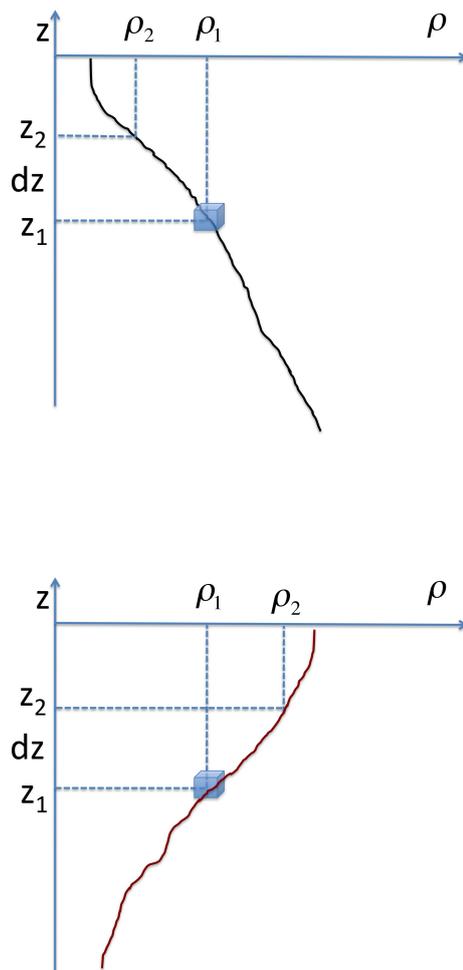


Figura 7.1: Profili di densita' con posizione di equilibrio e spostamento per il calcolo del galleggiamento: grafico in alto per un profilo stabile, in basso instabile.

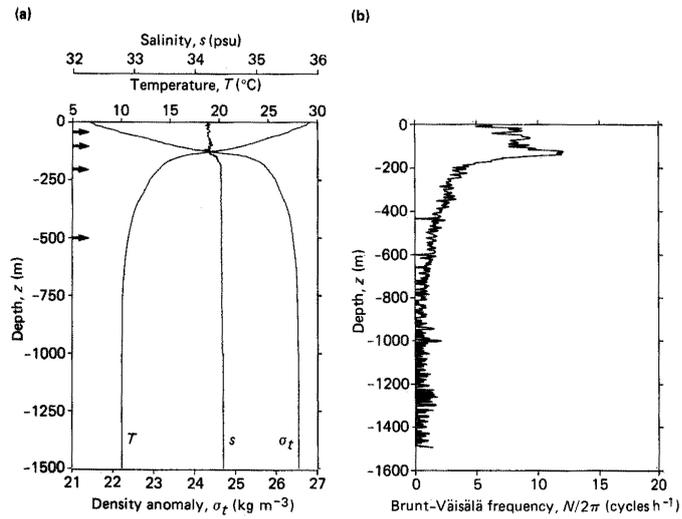


Figura 7.2: Profili di T , S , σ_t e frequenza di Brunt-Vaisala