Esercizi con soluzioni

per il Corso

Struttura e dinamica dell'atmosfera ed oceano

Corso si Scienze Ambientali- Univ. Bologna, Ravenna
Autore: **Nadia Pinardi**
Data: **Gennaio 2014**

Esercizio 1

1) Descrivi in maniera quantitativa e discorsiva l'analisi di scala che porta alla relazione geostrofica e scrivi e equazioni geostrofiche.
2) dato un campo di pressione

$$p(x,z) = a\,x^2 e^{-\frac{z}{H}} \qquad (1)$$

scrivere l'espressione per il campo di velocità (u,v) in equilibrio geostrofico con (1).

3) ricavare la relazione di vento termico in equilibrio con (1) e ricavare il campo di velocità alla superficie rispetto alla profondità di 1000 m supposta essere il livello di moto zero. Si consideri H=2000 metri.

Soluzione:

2) Visto che il campo di pressione dipende solo da x e z si avrà solo una velocità meridionale ovvero:

$$v = \frac{1}{f_0 \rho_0}\left(2axe^{-\frac{z}{H}}\right)$$

e $u = 0$.

3) Dalla equazione idrostatica si ottiene:

$$\rho = \frac{ax^2 e^{-\frac{z}{H}}}{gH}$$

e quindi, tramite la relazione di vento termico:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{-1}{f_0 \rho_0 g H}\left(2axe^{-\frac{z}{H}}\right)$$

Integrando ora tra la superficie e H=1000 metri, e supponendo il livello di moto zero a –H, si ottiene:

$$v(0) \simeq \frac{0.8ax}{f_0 g \rho_0}$$

Esercizio 2

Dato il campo di velocità Euleriano:

$$u\ (x,t) = 5x \qquad (1)$$

con le altre componenti nulle. Determinare in forma analitica:

1) L'accelerazione Du/Dt.

2) La posizione x_p della particella di fluido che si nuove con il campo di velocità (1) usando la relazione:

$$\frac{Dx_p}{Dt} = u \qquad (2)$$

sapendo che al tempo $t = 0$ la particella ha posizione x_0.

3) La componente dell'accelerazione di Coriolis a 40^o Nord.

Soluzione

1) $\frac{Du}{Dt} = u\frac{\partial u}{\partial x} = 25x$

2) Si impone $\frac{Dx_p}{Dt} = 5x_p$ e si ricorda che la derivata $\frac{D}{Dt} = \frac{d}{dt}$ è la derivata totale matematicamente parlando. Moltiplicando per dt :

$$\frac{dx_p}{dt}dt = 5x_p dt$$

e usando la definizione di differenziale totale, ovvero $dx_p = \frac{dx_p}{dt}dt$, si può integrare nel tempo:

$$\int_{x_0}^{x_p} \frac{dx'_p}{x'_p} = \int_0^t 5\,dt'$$

e si ottiene: $x_p = x_o e^{5t}$

1) le componenti dell'accelerazione di Coriolis per il campo di velocita' (1) che considera la sola componente zonale sono:

$$2\vec{\Omega} \times \vec{u} = \hat{j}(2\Omega \sin\theta\ u) + \hat{k}(-2\Omega\cos\theta\ u)$$
$$= \hat{j}(10x\ \Omega\sin 40) + \hat{k}(-10x\ \Omega\cos 40)$$

Esercizio 3

a) L'equazione di continuità e' scritta:

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = -\nabla \cdot \vec{u}$$

Si considerino le seguente scale:

$u_o = O(u, v)$

$w_0 = O(w)$

$L = O(x, y)$

$H = O(z)$

$P = O(f_0 \rho_0 L u_0)$

<u>Trovare la scala della densità</u> e determinare, per mezzo dell'analisi di scala, se nell'equazione vi sono termini trascurabili, sapendo inoltre che:

$$\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}$$

e che $|\tilde{\rho}| << \rho_0$. Come si chiama l'equazione risultante?

b) Perché la velocità verticale è più piccola di quella orizzontale nell'equazione risultante?

Soluzione

Vedi note di lezione

Esercizio 4

Posto che il flusso di radiazione solare, Q_S, sia $200\,W\,m^{-2}$ e quello ri-emesso per radiazione e processi convettivi-conduttivi umidi e secchi, Q_R, sia $75\,W\,m^{-2}$,
1) calcolare il cambio di temperatura in 100 metri di acqua, sapendo che:

$$K_v \frac{\Delta T}{\Delta z} = \frac{Q_S - Q_R}{C_p \rho_0}$$

Usate $C_p = 4186\,Jkg^{-1}K^{-1}$, $\rho_0 = 1026\,kg\,m^{-3}$ e il coefficiente di diffusività turbolento, $K_v = 0.02 \quad m^2 s^{-1}$.
2) calcolare il cambiamento in densita' corrispondente e si indichi in che stagione tale cambiamento potrebbe avvenire

Soluzione

1) il cambiamento di temperatura

$$\Delta T = \Delta z \left(\frac{Q_S - Q_R}{\rho_0 C_p K_v} \right) = 0.15 \quad K$$

2) si consideri la formula per la densita' che dipende solo dalla temperatura:

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \alpha_T (T - T_0) \right]$$

e quindi

$$\Delta \rho = -\rho_0 \alpha_T \Delta T = 0.03 \quad kg\,m^{-3}$$

Tale cambiamento corrisponde ad una riscaldamento e quindi ad una diminuzione di densita' delle acque superficiali, proceso che avviene durante l'estate.

Esercizio 5

1) Dato il campo di velocità bidimensionale (u, v) e:

$u(x,y)=ax$
$v(x,y)=by$ (1)

dove a e b sono costanti, determinare la relazione esistente fra a e b affinché il campo di velocità abbia divergenza orizzontale nulla.

2) Usando le equazioni geostrofiche e il campo di velocità u,v in (1) trovare la forma del campo di pressione nel segmento zonale $\left[X_0, X_1\right]$

Soluzione

1)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial(ax)}{\partial x} + \frac{\partial(by)}{\partial y} = a + b = 0$$

3) Si usi l'equazione geostrofica per la velocità meridionale:

$$\frac{dp}{dx} = f_o \rho_0 v$$

dalla quale si può integrare ed ottenere:

$$\int_{p(X_0)}^{p(X_1)} dp' = f_0 \rho_0 by \int_{X_0}^{X_1} dx'$$

$$p(X_1) - p(X_0) = f_0 \rho_0 by \left[X_1 - X_0\right]$$

Esercizio 6

Deriva il bilancio idrostatico attraverso un'analisi di scala delle equazioni del moto supponendo il fluido essere incompressibile e usando le seguenti grandezze di scala:
L per la scala orizzontale,
H per quella verticale,
U per il moto nella direzione zonale e meridionale;
$T = \frac{L}{U}$ per la scala temporale.

Soluzione

Vedi note di lezione

Esercizio 7

a) Supponendo un gradiente atmosferico zonale di pressione $\frac{\partial p}{\partial x}$ pari a $10^{-4}\ Pa\,m^{-1}$ calcolare il campo di velocità in equilibrio geostrofico a 45^0 di latitudine. La velocità risultante e' realistica per l'atmosfera?
b) Quale sarebbe invece il gradiente di pressione invece per le velocità tipiche dell'oceano?

Soluzione

a) La relazione geostrofica per la componente zonale del gradiente è:

$$f_0\ v = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}$$

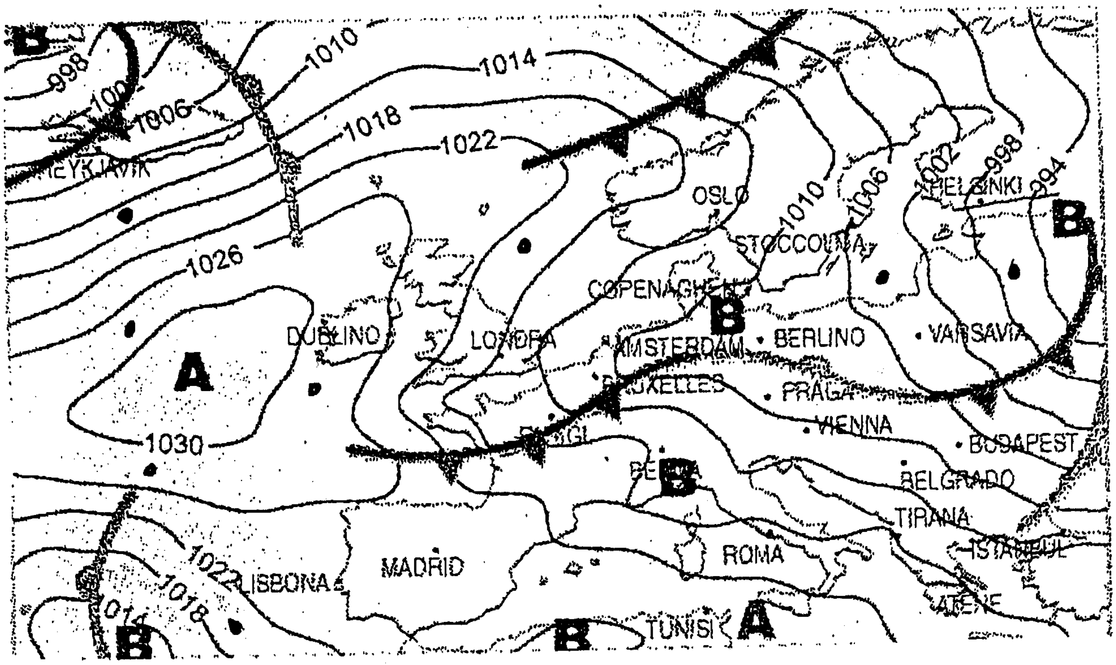
dove $f_0 = 2\Omega \sin\theta \approx 10^{-4} s^{-1}$ a 45^0 e $\rho_0 \approx 1.2\frac{kg}{m^3}$. Si ha quindi che:

$$v = \frac{1}{f_0\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} \approx 1\,\frac{m}{s}$$

Questa è una velocità tipica del vento atmosferico vicino alla superficie.

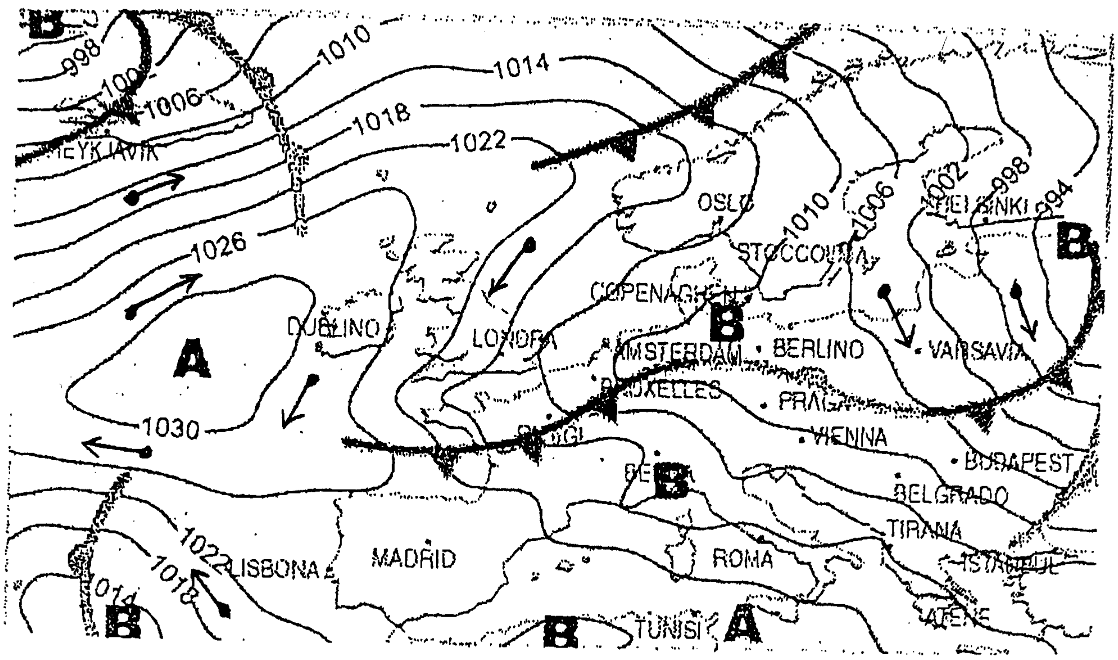
b) per le velocità tipiche dell'oceano pari a $10^{-1} m\,s^{-1}$ si dovrà invece avere $\frac{\partial p}{\partial x} \approx 10^{-2}\ Pa\,m^{-1}$

Esercizio 8



La figura illustra il campo di pressione al livello del mare sull'area Euro-Atlantica per il giorno 12 Febbraio 2002. Scrivete le equazioni geostrofiche e indicate sulla mappa (nei punti contrassegnati con "•") la direzione del vento geostrofico.

Soluzione



Esercizio 9

a) Calcolare la deviazione zonale determinata dalla accelerazione di Coriolis su una particella di fluido che si muove con velocità costante in direzione meridionale $v = 10\ m\,s^{-1}$ per una distanza pari a L=50 km. La particella parte dal tempo iniziale supposto essere uguale al valore nullo, dalla longitudine corrispondente a x=0 e con velocità zonale nulla. Si usi la relazione:

$$\frac{dx_p}{dt} = u \qquad (1)$$

e si consideri f=10^{-4} s^{-1} .

b) Se la particella avesse inizialmente una velocità zonale anziché meridionale, in che direzione sarebbe stato il suo spostamento nei tempi successivi e perché? Differenziate la risposta tra l'emisfero nord e sud della terra.

Soluzione

a) L'equazione del moto per una particella inizialmente solo con velocità meridionale è:

$$\frac{Du}{Dt} - fv = 0$$

Riscrivendo quindi:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{du}{dt}$$
$$\frac{du}{dt}dt = fvdt; \quad du = fvdt \qquad (2)$$

Integrando nel tempo, tra l'istante iniziale t=0 e t, si ottiene:

$$\int_0^{u(t)} du = fv\int_0^t dt$$
$$u = fvt \qquad (3)$$

supponendo che la velocità al tempo iniziale sia zero. Integrando la (3) nel tempo e usando la (1) si ottiene:

$$\frac{dx_p}{dt} = fvt$$
$$x_p(t) = fv\int_0^t t'\,dt' = \frac{1}{2}fvt^2 \qquad (4)$$

considerando la posizione iniziale essere a x=0. Il tempo che la particella impiega a percorrere la distanza L in direzione meridionale è $t = \frac{L}{v}$ e quindi lo spostamento zonale e' in corrispondenza:

$$x = \frac{1}{2} f \frac{L^2}{v} \approx 1.25 \quad km$$

b) lo spostamento sarebbe stato questa volta meridionale e nella direzione negativa (ovvero verso l'equatore). L'accelerazione di Coriolis per una velocita' iniziale zonale infatti genera una componente di velocita' meridionale come si vede dall'equazione:

$$\frac{dv}{dt} = -fu \quad (1)$$

Ripetendo i passaggi in a) si otterrebbe lo stesso risultato per lo spostamento in y ma con il segno negativo, nell'emisfero nord della terra. Per quello sud il segno sarebbe invece positivo perche' f diventa negativo.

Esercizio 10

a) Determinate la relazione esistente fra pressione e profondità nell'oceano assumendo la densità costante. Quale è la pressione a 100 metri di profondità?

b) Determinare la relazione tra pressione e altezza in atmosfera assumento la temperatura costante a $10\,^oC$. Calcolate la pressione a 100 metri di altezza.

Soluzione

a) Per l'oceano si utilizza l'equazione idrostatica con la densità costante. Integrando:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho_o g$$
$$\frac{dp}{dz}dz = -\rho_o g\,dz; \quad dp = -\rho_o g\,dz$$
$$\int_{p(-z)}^{p(0)} dp' = -\rho_o g \int_{-z}^{0} dz'$$

Si ottiene:

$$p(-z) = p(0) + \rho_0 g z$$

A z=100 metri di profondità, trascurando la pressione atmosferica e suppondendo $\rho_0 = 1020\ kg\,m^{-3}$ si ottiene:

$$p(-100) = 100\,db = 10^6\,Pa$$

b) Per l'atmosfera si prende l'equazione dei gas perfetti a temperatura costante ed integrando in altezza si ottiene:

$$\int_{p(0)}^{p(z)} \frac{dp'}{p} = -\frac{RT}{g}\int_0^z dz'$$
$$\ln\left(\frac{p(z)}{p(0)}\right) = -\frac{RT}{g}z$$

ovvero

$$p(z) = p(0)e^{-\frac{z}{H}}$$

con $H = \frac{RT}{g} \approx 8.3\,km$ (usa R= 287 J K^{-1} kg^{-1} , T=283 K e g=9.8 m s^{-2}). Considerando la pressione alla superficie pari a 1013 hPa, a 100 metri di altezza la pressione è quindi circa 1000 hPa.

Esercizio 11

a) Spiegare come si deriva l'equazione del calore per cambiamenti adiabatici in atmosfera e scriverla.

b) Si calcoli la temperatura potenziale rispetto a quella misurata alla pressione di 200 hPa, considerando $C_p = 1005\ J\,kg^{-1}K^{-1}$ e R= 287 J K^{-1} kg^{-1} e la pressione alla superficie pari a 1013 hPa. La temperatura potenziale è maggiore o minore di quella misurata?

Soluzione

a) L'equazione per i cambiamenti adiabatici in atmosfera è:

$$\frac{DT}{Dt} - \frac{1}{C_p \rho}\frac{Dp}{Dt} = 0$$

Vedi note di lezione per la derivazione

b) La temperatura potenziale

$$\frac{\theta}{T} = \left(\frac{p_r}{p}\right)^{\frac{R}{C_p}} \approx \left(\frac{1013}{200}\right)^{0,3} \simeq 1.7$$

e quindi la temperatura potenziale nell'atmosfera è sempre maggiore di quella misurata.

Esercizio 12

a) Calcolare la densita' per due strati aventi le seguenti temperature e salinita':

1) strato 1, fra 0 e 100 metri di profondita', T=10, S=38
2) strato 2, fra 100 e 1000 metri di profondita', T=5, S=39

considerando $\alpha_T = 2.10^{-4} \quad C^{-1}$ e $\beta = 8\,10^{-4} \quad PSU^{-1}$. Disegnate l'andamento in verticale della densita'.

b) calcolare la pressione a 1000 metri di profondita'

c) calcolare che differenza di temperatura si dovrebbe avere tra i due strati per avere un profilo di densita' uniforme.

Soluzione

a) L'equazione di stato e':

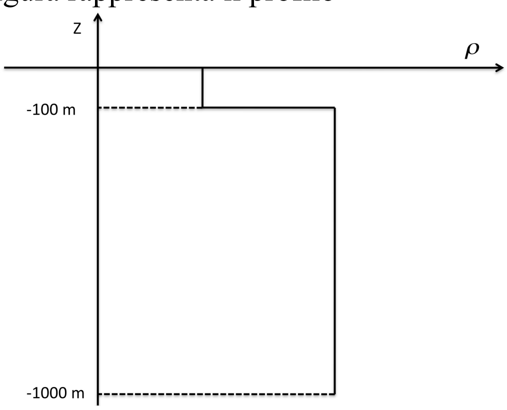
$$\rho = \rho_0 \left[1 - \alpha_T (T - T_0) + \beta (S - S_0) \right]$$

Scegliendo $\rho_0 = 1025$, $T_0 = 10$ e $S_0 = 35$, la densita' nei due strati e':

strato 1: $\rho_1 = 1025 \left[1 + 8\,10^{-4}(38 - 35) \right] = 1027.5 \; kg \; m^{-3}$

strato 2: $\rho_2 = 1025 \left[1 + 2\,10^{-4}(5) + 8\,10^{-4}(4) \right] = 1029.3 \; kg \; m^{-3}$

La figura rappresenta il profilo



b) la pressione a 1000 m e' data dall'integrale dell'equazione idrostatica e quindi nel nostro caso:

$$p(-1000) = g \int_{-1000}^{0} \rho \, dz' = g \left[\int_{-100}^{0} \rho_1 \, dz' + \int_{-1000}^{-100} \rho_2 \, dz' \right] =$$

$$9.8 \left[100 * 1027.5 + 900 * 1029.3 \right] = 10085376 \; Pa = 1008.5 \; db$$

c) la differenza di densita' tra i due strati puo' essere scritta:

$$\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2 = \rho_0\left[-\alpha_T\left(T_1 - T_2\right) + \beta\left(S_1 - S_2\right)\right]$$

Se si vuole un profilo di densita' uniforme, si deve imporre che questa differenza sia zero e quindi la differenza di temperatura necessaria e':

$$\left(T_1 - T_2\right) = \frac{\beta}{\alpha_T}\left(S_1 - S_2\right)$$

Imponendo i valori dati di salinita', si ottiene che la differenza di temperatura e' di - 4 C.

Esercizio 13

Dato il campo orizzontale di velocita'

$$u(x,y) = ax$$
$$v(x,y) = by$$

a. trovare il profilo della velocita' verticale corrispondente a questo campo orizzontale. Discutere se la velocita' verticale e' upwellling o downwelling dato a e b >0.

b. Calcolare il flusso di calore, definito come:

$$F_C = \frac{1}{(z_2 - z_1)} \int_{z_2}^{z_1} wT\, dz'$$

tra la superficie e 100 metri di profondita', supponendo che T sia costante e uguale a 20 C.

Soluzione

a) per trovare la velocita' verticale di fa uso dell'equazione di continuita' in approssimazion di incompressibilita':

$$-\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Integrando in verticale, trascurando la velocita' verticale alla superficie e imponendo la funzione della velocita' orizzontale si ottiene:

$$-\int_z^0 \frac{\partial w}{\partial z} dz = \int_z^0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz$$
$$w(z) = \int_z^0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz = -z(a+b)$$

Se a e b sono maggiori di zero, la velocita' verticale e' positiva o di upwelling visto che z prende valori negativi andando in profondita'.

b) per quanto riguarda il flusso di calore nello strato 0-100 si ha:

$$F_C = -\frac{1}{100} \int_{-100}^{0} (a+b)T\, z'\, dz' =$$
$$= -\frac{(a+b)T}{100} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{-100}^{0} = 50(a+b)T$$

che infatti e' positivo come ci si aspetta per le regioni di upwelling.

Esercizio 14

a) Si consideri l'equazione per un tracciante, C, nell'oceano soggetto alla diffusione ma non all'avvezione, senza sorgenti ne' pozzi. Si ricavi l'ordine di grandezza della diffusività orizzontale supposto che le scale di riferimento siano:

L=100 km
T=100 day

Quanto è grande questa diffusività rispetto alla diffusività termica molecolare e perché?

b) dimostrate che la viscosità turbolenta orizzontale è diversi ordini di grandezza maggiore di quella verticale nei fluidi terrestri, e dire di quanto.

Soluzione

a) L'equazione pe ril tracciante passivo senza avvezione è:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = K\nabla^2 C$$

Facendo l'analisi di scala risulta che:

$$K = \frac{L^2}{T} = 1.3\,10^3 \quad m^2 s^{-1}$$

La diffusività termica molecolare è dell'ordine di $10^{-7} \quad m^2 s^{-1}$ e quindi molto più piccola. Sulle scale di tempo delle decine dei giorni e le scale spaziali planetarie la diffusività è dovuta alla turbolenza ed ha valori molto più alti.

b) vedi note

Esercizio 15

1) Descrivi i passaggi principali della trsformazione dal sistema inerziale a quello rotante per le equazioni del moto e scrivi le differenti componenti dell'accelerazione di Coriolis. Quali di queste componenti dominano quando il numero di Rossby è piccolo?

2) Se il 'rapporto di scala' o 'aspect ratio' fosse dell'ordine 1 come cambierebbero le equazioni geostrofiche e l'equazione idrostatica?

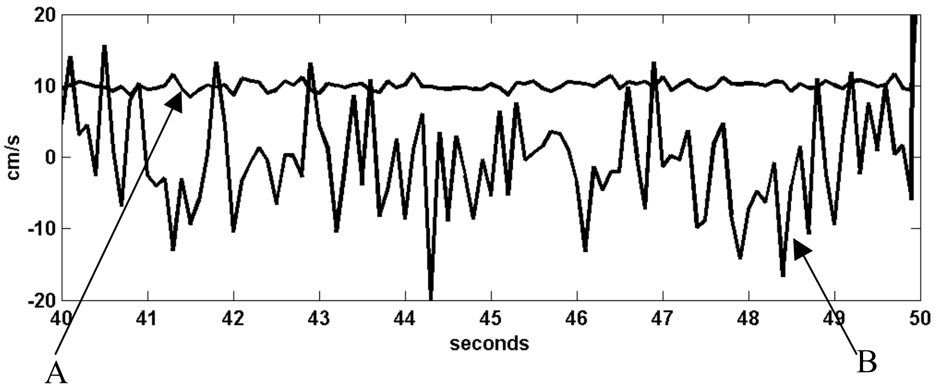
Soluzione

Vedi note

Esercizio 16

La figura sotto riportata illustra due registrazioni della velocità di una corrente (entrambe della durata di 10 secondi e in cm/s) effettuate in due diversi siti (A e B) lungo un canale. Si assuma che il gradiente orizzontale di salinità, $\frac{\partial S}{\partial x}$, lungo il canale sia uguale ad entrambi i siti.

1.1 Stimare ad occhio la velocità media della corrente ad entrambi i siti
1.2 Stimare ad occhio l'ordine di grandezza delle fluttuazioni della velocità ad entrambi i siti
1.3 Quale dei due siti è caratterizzato dal maggiore flusso avvettivo di sale. Perchè?
1.4 Quale dei due siti è caratterizzato dal maggiore flusso turbolento di sale. Perché?



Soluzione

1.1.
Sito A: ~ 10 cm/s
Sito B: ~ 0 cm/s
1.2.
Sito A: < 1 cm/s
Sito B: ~ 10 cm/s
1.3.
Il sito A è quello con il maggior flusso avvettivo di sale, $u\frac{dS}{dx}$, perché la velocità media è maggiore rispetto al sito B e quindi anche .
1.4
Il sito B è caratterizzato dal maggior flusso turbolento di sale, $-\langle u'S' \rangle$, perché le fluttuazioni di velocità , u', sono maggiori rispetto al sito B.

Esercizio 18

Descrivi le ipotesi, in termini di numeri dimensionali, che permettono di ottenere il bilancio idrostatico e scrivi l'equazione idrostatica (basta enunciare i numeri adimensionali e spiegare cosa significano).
Usando la relazione idrostatica, ricava l'altezza di scala dell'atmosfera e calcola poi la temperatura dell'atmosfera che corrisponde ad una altezza di scala di 21 km.

Soluzione

I numeri dimensionali che permettono di ottenere l'approssimazione idrostatica sono due:

1) $\delta = \frac{H}{L}$ che è l''aspect ratio' definito da H che è l'altezza di scala verticale e L quella orizzontale. Questo numero è molto minore di 1 sia nell'atmosfera che nell'oceano.

2) $\varepsilon = \frac{U}{f_0 L}$ che è il numero di Rossby e rappresenta il rapporto tra il periodo di rotazione della terra ad una certa latitudine e le scale temporali del moto. L'approssimazione idrostatica considera che questo rapporto deve essere minore di 1.

La relazione idrostatica è quindi:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

La pressione è ottenuta integrando la relazione idrostatica e assumendo un'atmosfera con temperatura uniforme:

$$p = p(0)e^{-\frac{z}{H}}$$

dove $H = \frac{RT_c}{g}$ e T_c è la temperatura uniforme dell'atmosfera. Per T_c pari a 250 K si ha $H=7.3\ km$.
Per avere $H=21\ km$ si avrà quindi approssimativamente T_c =717 K.

Esercizio 19

a) Stimate il valore di scala della velocità e del tempo per l'atmosfera e per l'oceano usando la stima della pressione geostrofica a 45° di latitudine, date inoltre le seguenti scale:

A) Atmosfera: L=1000 km, P= 1 hPa;
B) Oceano: L=100 km, P= 1 hPa.

b) Quale dei due sistemi è più consistente con l'ipotesi geostrofica? Perché?

c) Perché l'approssimazione geostrofica non è valida all'equatore?

Soluzione

a) per l'atmosfera: si usa la scala della pressione data dal bilancio geostrofico, ovvero

$$P = \rho_o f_o U L$$

da cui si ricava che U= 1 m/s. La scala di tempo è data da T=L/U=10^6 s=10 giorni

b) per l'oceano usando le stesse formule U=0,1 m/s e T=100 giorni.
c) L'approssimazione geostrofica non è valida all'equatore perché il parametro di Coriolis è zero.

Esercizio 20

a) Stimare per mezzo dell'analisi di scala l'ordine di grandezza della velocità verticale (W) conoscendo:
l'ordine di grandezza caratteristico delle velocità orizzontali (U): 10^{-1} m s^{-1}.
la scala spaziale orizzontale caratteristica (L): 100 km.
la scala spaziale verticale caratteristica: (H): 100 m.

b) che cosa significa il risultato trovato se il fluido si trova vicino ad una montagna sottomarina?

c) Nel caso dell'equazione di densità scritta come $\frac{\partial \rho}{\partial t} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$ quale è la scala di tempo che ne risulta?

Soluzione

L'esercizio può essere risolto conducendo una analisi di scala sulla equazione di continuità:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right] = \left[\frac{\partial w}{\partial z}\right]$$

e quindi $W = \frac{H}{L}U$.

b) Se la velocità verticale è molto più piccola di quella orizzontale vorrà dire che il fluido cercherà di andare 'attorno' alla montagna anziché 'sopra' la montagna.

c) facendo l'analisi di scala dell'equazione data, la scala di tempo che si ottiene è $T = L / U$.

Esercizio 21

a) Calcola lo shear (o gradiente verticale) del vento geostrofico tramite la relazione di vento termico, usando il gradiente di densità tra Polo e Equatore pari 3 $kg\,m^{-3}$. Considera un distanza tra Polo ed Equatore di 10000 km, $f \approx 10^{-4}$ e $\rho_0 = 1025\ kg\,m^{-3}$. In che unità è il gradiente risultante?
b) Se si assume che questo gradiente orizzontale di densità sia constante nei primi 1000 metri della colonna d'acqua, quanto è la differenza tra la velocità alla superficie e quella a 1000 metri?

Soluzione

a) si usa la relazione di vento termico in forma discretizzata

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{g}{f_o \rho_o} \frac{\partial \rho}{\partial x} \simeq \frac{g}{f_o \rho_o} \frac{\Delta \rho}{\Delta x}$$

Le unità sono s^{-1}.

b) la differenza è data da: $\Delta u \approx \dfrac{g}{f_o \rho_o} \dfrac{\Delta \rho}{\Delta x} \Delta h$

Esercizio 22

Scrivi l'equazione termodinamica per l'atmosfera nel caso adiabatico. Deduci il gradiente adiabatico per l'atmosfera (nel caso di aria secca) e fai un grafico della temperatura in funzione dell'altezza.

Soluzione

L'equazione termodinamica per l'atmosfera nel caso di cambiamenti adiabatici è:

$$\frac{1}{T}\frac{DT}{Dt} - \frac{R}{C_p p}\frac{Dp}{Dt} = 0$$

Passando al differenziale totale si ottiene:

$$C_p dT = \alpha\, dp$$

Il gradiente adiabatico è definito come $\Gamma_d = -\frac{dT}{dz}$ e, usando la relazione idrostatica, diventa:

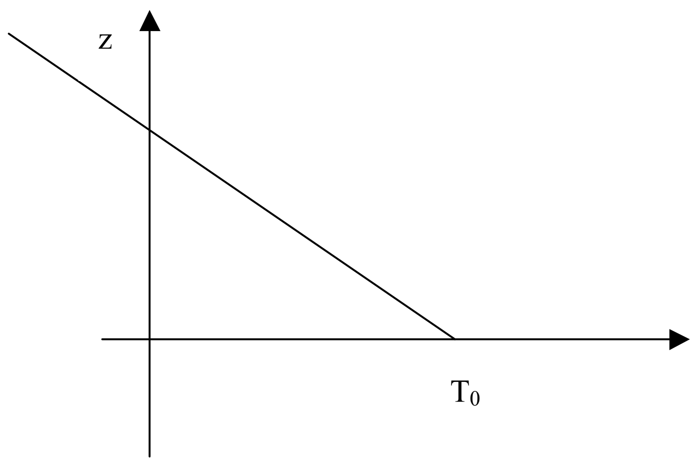
$$\Gamma_d = \frac{g}{C_p} = 10\ K\, km^{-1}$$

Il profilo di temperatura che se ne deduce è dedotto integrando l'equazione:

$$\int_{T_0}^{T} dT' = -\Gamma_d \int_0^z dz'$$

$$T = T_0 - \Gamma_d z$$

ovvero quello rappresentato in figura:

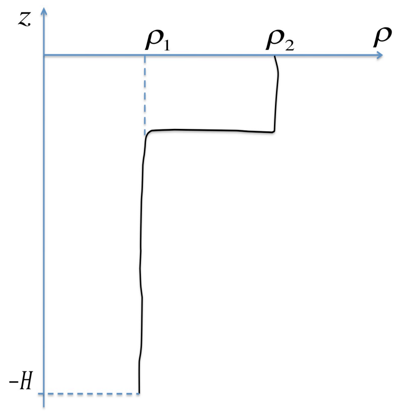


Esercizio 23

Nella figura vedete rappresentato un profilo di densità che può essere caratterizzato solo da due valori di densità, ρ_1 e ρ_2. Considerando la frequenza di Brunt-Valsala al quadrato definita come:

$$N^2 \approx -\frac{g}{\rho_o}\frac{\partial \rho}{\partial z}$$

Calcolate il valore della frequenza di Brunt Vaisala per il profilo di Fig. 1 e commentatene la stabilità. In che condizioni ambientali si può produrre tale profilo?



Considerate i seguenti valori: H=500 metri, $\rho_1 = 1021\ kg\,m^{-3}$, $\rho_2 = 1025\ kg\,m^{-3}$

Soluzione

Bisogna riscrivere la derivata in forma discretizzata come:

$$N^2 \approx -\frac{g}{\rho_o}\frac{(\rho_2 - \rho_1)}{H}$$

e ad esempio assumere $\rho_o = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$. La stratificazione è instabile perche' la freq. di Brunt-Vaisala è negativa.

Le condizioni ambientali nelle quali si può creare tale profilo sono quelle ad esempio di una perdita violenta di calore all'interfaccia con l'atmosfera che raffredda l'acqua e la rende più densa degli strati sottostanti.

Esercizio 24

a) Dato il campo di velocità Euleriano e stazionario:

$$u = 5x^3 y^2$$
$$v = -7.5x^2 y^3$$

determinare l'accelerazione Du/Dt.

b) Calcolare la deviazione relativa da una traiettoria lineare dovuta all'accelerazione di Coriolis, supposto che la velocità zonale, u, sia costante ed uguale a 13 m/sec, per una distanza L=50 km.

Soluzione

a)

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} =$$
$$= 5x^3y^2(15x^2y^2) - 7.5x^2y^3(10x^3y) = 0$$

b)

$$\frac{Dv}{Dt} + fu = 0$$
$$v = -fut + v_o$$
$$\frac{Dy}{Dt} = -fut + v_o$$
$$y - y_0 = -\frac{fut^2}{2} + v_o t$$

Sia:

$t = L/u, \; v_o = 0$

Si ha quindi che la deviazione subita dalla particella:

$$y - y_0 = -\frac{fx^2}{2u} \cong -9.6\left[km\right]$$

Esercizio 25

a) Descrivi in maniera quantitativa e discorsiva le assunzioni che portano alla relazione geostrofica e scrivi la relazione stessa.

b) Deduci il significato del numero di Rossby in termini di rapporto di scale di tempo

c) Dato un campo di pressione

$$p(x,y,z) = \alpha y x^2 e^{-z} \qquad (1)$$

scrivere l'espressione per le componenti del campo di velocità in equilibrio geostrofico con (1) usando il parametro di Coriolis costante

Soluzione

a) Tre sono le assuzioni o ipotesi fondamentali che conducono a semplificare le equazioni del moto ed ottenere le relazioni geostrofiche:
1) l'approssimazione di Boussinesq
2) il rapporto di scala $\delta = \frac{H}{L}$ deve essere piccolo;
3) il numero di Rossby, $\varepsilon = \frac{U}{f_0 L}$, deve essere piccolo

Le relazioni geostrofiche sono:

$$f_o v = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$f_o u = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y}$$

b) Il numero di Rossby $\varepsilon = \frac{U}{f_0 L}$ e si nota che $T = \frac{L}{U}$ (scala di tempo dell'avvezione) e $T_R = \frac{1}{f_0}$ (scala di tempo della rotazione terrestre). Risulta quindi che:

$$\varepsilon = \frac{T_R}{T}$$

Quindi se il numero di Rossby è piccolo vuol dire che le scale di tempo dell'avvezione sono piccole rispetto a quelle della rotazione, ovvero le scale di tempo avvettive sono più òlunghe del giorno.

c)
$$u = \frac{1}{\rho_0 f_0}\left(-\frac{\partial p}{\partial y}\right) = \frac{1}{\rho_0 f_0}\left(\alpha\, x^2\, e^{-z}\right)$$

$$v = \frac{1}{\rho_0 f_0}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{1}{\rho_0 f_0}\left(2\alpha\, x\, y\, e^{-z}\right)$$

Esercizio 26

a) Usa la relazione idrostatica per calcolare la pressione a -10 metri di profondità sapendo che il profilo di densità è:

$$\rho = 1028 - az \qquad (1)$$

dove $a=2\ 10^{-3}\ kg\, m^{-2}$ e z è da considerarsi in metri dalla superficie (si trascuri la pressione atmosferica). Dai le unità di misura della pressione risultante.

b) Il profilo di densità nell'espressione (1) è stabile o instabile? Perché? Dimostralo quantitativamente

c) Trova in maniera approssimata la temperatura corrispondente al profilo di densità (1) supposta essere la salinità trascurabile.

Soluzione

a) La relazione idrostatica è:

$$dp = -\rho g\, dz$$

Integrata tra la superficie e -10 metri da la seguente pressione a 10 metri di profondità:

$$p(-10m) = g\left[1028z + a\frac{z^2}{2}\right] = g\left[10280 + 50a\right] \cong 9.8\ 10280 \cong 10^5 Pa = 10db$$

b) La stabilità si calcola tramite la frequenza di Brunt-Valsala che per acque poco profonde si può approssimare nel modo seguente:

$$N^2 \approx -\frac{g}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{g}{\rho_0}a$$

Essendo la frequenza di Brunt Vaisala positiva, il profilo è stabile.

c) Sapendo che la forma approssimata della densità dipendente solo dalla temperatura si può scrivere come:

$$\rho = \rho_0\left[1 - \alpha_T\left(T - T_0\right)\right]$$

se ne deduce che:

$$T = T_0 - \frac{1}{\alpha_T}(\rho - \rho_0) = T_0 - \frac{1}{\alpha_T}(1028 - az - \rho_0) \approx T_0 + \frac{az}{\alpha_T}$$

supponendo che $\rho_0 = 1028$.

Esercizio 27

Si consideri il bilancio tra accelerazione locale e accelerazione di Coriolis per le equazioni orizzontali del moto ed in approssimazione di 'fluido sottile'. Queste risultano essere:

$$\frac{du}{dt} - f_0 v = 0$$
$$\frac{dv}{dt} + f_0 u = 0$$

Trovare la soluzione per le traiettorie delle particelle d'acqua che seguono il campo di velocita' soluzione di queste equazioni. Tali traiettorie sono chiamate 'inerziali'.

Soluzione

Bisogna innanzitutto 'disaccoppiare le equazioni' ed avere una equazione per ciascuna componente separatamente. Si ottiene cosi':

$$\frac{d^2u}{dt^2} - f_0 \frac{dv}{dt} = 0 \qquad \qquad \frac{d^2v}{dt^2} + f_0 \frac{du}{dt} = 0$$
$$\frac{d^2u}{dt^2} + f_0^2 u = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2v}{dt^2} + f_0^2 v = 0$$

Le soluzioni per queste equazioni sono oscillatorie e si scegliera':

$$u = A\cos(ft); \quad v = A\sin(ft)$$

in modo tale che $u^2 + v^2 = A^2$ e' l'ampiezza del moto orizzontale.
Usando ora la relazione tra la posizione di una particella di fluido e la velocita' si ottiene:

$$\frac{dx}{dt} = u = A\cos(ft)$$
$$\frac{dy}{dt} = v = A\sin(ft)$$

e integrando nel tempo:

$$x(t) - x_0 = \frac{A}{f}\sin(ft)$$
$$y(t) - y_0 = -\frac{A}{f}\cos(ft)$$

Supponendo che le coordinate al tempo iniziale siano zero, il moto descritto dalle particelle di fluido sara' quindi circolare con raggio:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{A}{f}$$

Se l'ampiezza delle correnti e' di 5 cm s^{-1} e $f = 10^{-4}\ s^{-1}$ il raggio della traiettoria sara' di 500 m.

Esercizio 28

Si consideri l'equazione semplificata della temperatura:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K_v \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \qquad (1)$$

dove K_v e' la diffusivita' tubolenta. Si trovi:

1) la scala, Σ, della temperatura sapendo che la scala della densita' e' $\Delta = \frac{\rho_0 f_0 LU}{gH}$ e la relazione tra la temperatura e la densita' e': $\rho = \rho_0 \left[1 - \alpha_T (T - T_0) \right]$.
2) L'equazione (1) nondimensionalizzata. Nel caso in cui $\delta = \frac{H}{L} << 1$ come si riduce l'equazione?

Soluzione

1) Data la relazione tra temprатura e densita' si puo' scrivere che:

$\Delta = \alpha_T \rho_0 \Sigma$

e quindi uguagliando con l'altra definizione della scala di densita' di ottiene:

$$\Sigma = \frac{f_0 LU}{\alpha_T gH}$$

2) Sostituendo dell'equazione (1) le seguenti scale:

$T = \Sigma\, T'$, $t = \frac{L}{U} t'$ e $z = H\, z'$ si ottiene:

$$\frac{U}{L}\frac{DT'}{Dt'} = \frac{K_v}{H^2}\frac{\partial^2 T'}{\partial z'^2}$$

Moltiplicando per $\frac{1}{f_0}$ entrambi i membri dell'equazione e moltiplicando il termine di destra dell'equazione per $L^2 U$ si ottiene:

$$\frac{DT'}{Dt'} = \left(\frac{K_v}{UL}\right)\frac{H^2}{L^2}\frac{\partial^2 T'}{\partial z'^2}$$

Se ora $\frac{H}{L} << 1$ l'equazione di ridurra':

$$\frac{DT'}{Dt'} = 0$$

Esercizio 29

Calcolare la temperatura di equilibrio radiativo di Marte sapendo che:
la distanza Sole-Marte (D_m) è circa 1.5 volte la distanza Sole-Terra (D_t), l'albedo planetario di Marte (α) è pari a 0.15 e la costante solare della Terra (S_t) è pari a 1380 W/m^2.

Soluzione

Per il calcolo della temperatura di equilibrio radiativo di Marte è necessario conoscere il valore della sua costante solare (S_m). Il dato del problema e' relativo alla costante solare della terra e quindi dobbiamo trovare la relazione tra la costanet sola di Marte e quella della Terra.
La radiazione emessa dal Sole (P) è espressa come:

$$P = S_t 4\pi D_t^2$$

Imponendo che la radiazione emessa dal sole intercetti anche Marte si puo' anche scrivere:

$$P = S_m 4\pi D_m^2 = S_m 4\pi (1.5\, D_t)^2$$

Uguagliando quindi quindi la radiazione solare nelle due espressioni sopra-citate si ottiene la costanet solare di Marte in relazione a quella della Terra, ovvero:

$$S_m 4\pi (1.5 D_t)^2 = S_t 4\pi D_t^2$$

$$S_m = \boxed{\frac{S_t}{1.5^2} = \frac{1380}{2.25} \cong 613 \frac{W}{m^2}}$$

Per trovare la tempratura di equilibrio radiativo, si deve imporre che la radiazione ricevuta e quella emessa (E_m) si bilanciano:

$$E_m 4\pi R^2 = (1-\alpha) S_m \pi R^2$$

dove R e' il raggio di Marte, e quindi:

$$E_m = (1-\alpha) S_m / 4.$$

Si può ora applicare la legge di Stefan-Boltzmann:

$$E_m = \sigma T^4$$

e quindi:

$$(1-\alpha) S_m / 4 = \sigma T^4$$

$$T = \left[\frac{(1-\alpha) S_m}{4\sigma}\right]^{0.25} = \left[\frac{(1-0.15)613}{4\left(5.67\cdot 10^{-8}\right)}\right]^{0.25} \cong 219\mathrm{K} \cong -54\ \mathrm{C}$$

Esercizio 30

Un termometro posto su una boa registra una variazione di temperatura atmosferica pari a 0.8 ºC/3h. Il vento nello stesso istante, è in direzione W→E con una velocità *u*=10 km/h. La temperatura atmosferica ha un gradiente spaziale pari a -0.5 ºC/240km. Calcolare la variazione locale di temperatura sulla boa.
Se la direzione del vento fosse opposta la variazione locale sarebbe minore o maggiore del caso precedente?

Soluzione

Il termometro misura il cambiamento dato dalla derivata totale della temperatura, ovvero il cambiamento dovuto alla somma del cambiamento locale piu' quello dovuto all'avvezione, ovvero:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x}$$

Viene richiesto il calcolo della variazione locale di temperatura. Quindi:

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\mathrm{DT}}{\mathrm{Dt}} - \mathrm{u}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}} = \frac{0.8^{\circ}\mathrm{C}}{3\mathrm{h}} - \left(\frac{10\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right)\left(-\frac{0.5^{\circ}\mathrm{C}}{240\mathrm{km}}\right) = \frac{0.8^{\circ}\mathrm{C}}{3\mathrm{h}} + \left(\frac{30\mathrm{km}}{3\mathrm{h}}\right)\left(\frac{0.5^{\circ}\mathrm{C}}{240\mathrm{km}}\right)$$
$$= \frac{0.8^{\circ}\mathrm{C}}{3\mathrm{h}} + \frac{0.0625}{3\mathrm{h}} = \frac{0.8625\ ^{\circ}\mathrm{C}}{3\mathrm{h}}$$

Se u =-10 km/h invece:

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\mathrm{DT}}{\mathrm{Dt}} - \mathrm{u}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}} = \frac{0.8^{\circ}\mathrm{C}}{3\mathrm{h}} - \left(-\frac{10\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right)\left(-\frac{0.5^{\circ}\mathrm{C}}{240\mathrm{km}}\right) = \frac{0.8^{\circ}\mathrm{C}}{3\mathrm{h}} - \left(\frac{30\mathrm{km}}{3\mathrm{h}}\right)\left(\frac{0.5^{\circ}\mathrm{C}}{240\mathrm{km}}\right) =$$
$$\frac{0.8^{\circ}\mathrm{C}}{3\mathrm{h}} - \frac{0.0625}{3\mathrm{h}} = \frac{0.7375^{\circ}\mathrm{C}}{3\mathrm{h}}$$

Esercizio 32

Un bacino semi-chiuso che abbia uno stretto che lo fa comunicare con il mare aperto ha uno scambio di acqua continuo con quest'ultimo che modifica le sue proprieta'. Consideriamo che lo Stretto sia a due strati, uno con acqua entrante e l'altro uscente e supponiamo che ci sia equilibrio tra il volume di sale uscente e quello entrante e il volume di acqua si conservi. Le relazioni sono quindi:

$$V_{in}S_{in} = V_{out}S_{out}$$
$$V_{in} - V_{out} = E - (P + R)$$

dove P e' la precipitazione, E l'evaporazione e R l'apporto fluviale tutti in $m^3\ s^{-1}$. Da queste relazioni si puo' ottenere il volume in entrata ed in uscita che e':

$$\mathrm{V_{out}} = \frac{[E - (P + R)]\mathrm{S_{in}}}{\mathrm{S_{out}} - \mathrm{S_{in}}}$$
$$\mathrm{V_{in}} = \frac{[E - (P + R)]\mathrm{S_{out}}}{\mathrm{S_{out}} - \mathrm{S_{in}}}$$

1) Calcolare i flussi d'acqua in entrata/uscita (V_{in}/V_{out}) nel/dal Mare Baltico assumendo che gli scambi con il Mare del Nord siano :
a. la salinità del Mare Baltico S_{out}=20 psu
b. la salinità del Mare del Nord S_{in}=34 psu
L'apporto netto di acqua dolce (P + R – E)= $7 \cdot 10^3\ m^3\ s^{-1}$

2) Il Mare Baltico è un bacino di concentrazione o di diluizione (motivare la risposta)?

Soluzione

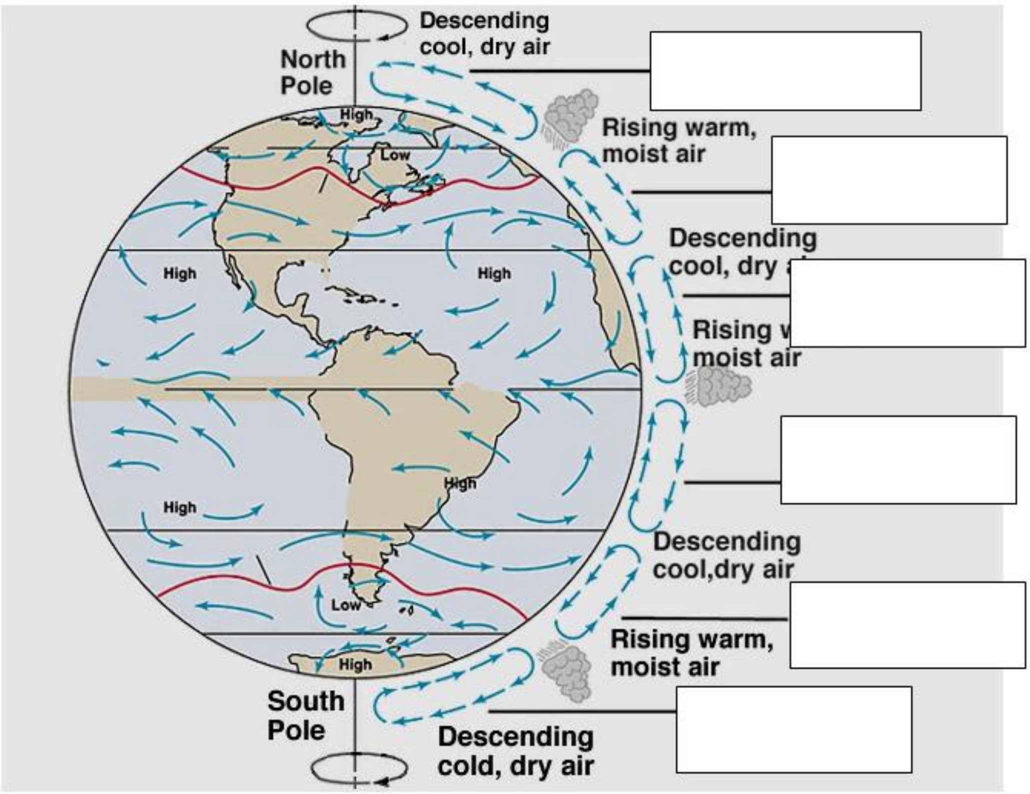
1) Ultilizzando le relazioni di Knudsen scritte sopra, si calcola quindi:

$$\mathrm{V_{in}} = \frac{[\mathrm{E} - (\mathrm{P} + \mathrm{R})]\,\mathrm{S_{out}}}{\mathrm{S_{out}} - \mathrm{S_{in}}} =$$
$$= \frac{(-7 \cdot 10^3) \cdot 20}{20 - 34} = \frac{14 \cdot 10^4}{14} = 10^4\left[\mathrm{m^3 s^{-1}}\right]$$
$$\mathrm{V_{out}} = \frac{[\mathrm{E} - (\mathrm{P} + \mathrm{R})]\,\mathrm{S_{in}}}{\mathrm{S_{out}} - \mathrm{S_{in}}} =$$
$$= \frac{(-7 \cdot 10^3) \cdot 34}{20 - 34} = \frac{23.8 \cdot 10^4}{14} = 1.7 \cdot 10^4\left[\mathrm{m^3 s^{-1}}\right]$$

Il Mare Baltico è un bacino di diluizione perché (P+R)>E

Esercizio 33

Inserisci i nomi delle celle di circolazione meridionale nel disegno 1 allegato. Quale è la ragione per la quale insorgono i venti zonali?
Inserisci sulla figura i nomi dei principali regimi di vento che conosci e che sono presenti nello schema dato. Che cosa indica nella figura 'high'?



Esercizio 34

1) Calcolare la densita' del vapor acqueo che esercita una pressione di 9 mb a 20 C.
2) Calcolare la temperatura virtuale corrispondente

Soluzione

1) si usa la relazione seguente:

$$\frac{e}{\rho_v} = R_v T$$

e quindi:

$$\rho_v = \frac{e}{R_v T} = \frac{900}{461 * 293} = 7\,10^{-3}\, kg\, m^{-3}$$

2) Bisogna anche conoscere la densita' dell'aria secca che si calcola:

$$\rho = \frac{p}{R_d T} = \frac{900}{287 * 293} = 0.01\, kg\, m^{-3}$$

e la temperatura virtuale e' quindi:

$$T_v = \frac{T}{\left[1 - \frac{e}{p}(1 - \frac{R_d}{R_v})\right]} = \frac{T}{\left[1 - \frac{\rho_v R_v}{\rho R_d} + \frac{\rho_v}{\rho})\right]} =$$

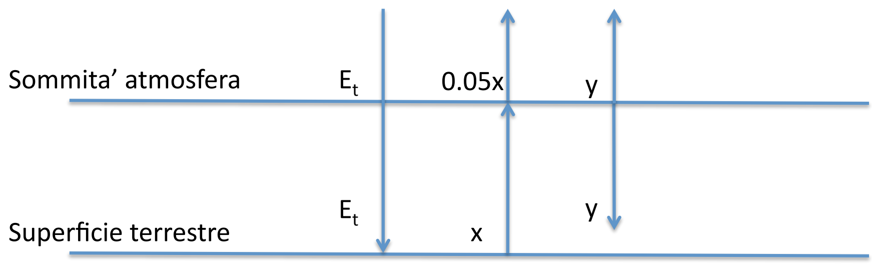
$$= \frac{T}{\left[1 - \frac{7\,10^{-3}}{0.01} * 1.6 + \frac{7\,10^{-3}}{0.01}\right]} = \frac{T}{0.7} = 418\, K$$

Esercizio 35

Consideriamo che la terra riceva $\mathrm{E_t} = 100\, W\ m^{-2}$ alla sommità dell'atmosfera. Sia l'atmosfera stessa completamente trasparente a questa radiazione solare e al contrario supponiamo che l'atmosfera assorba 95% della radiazione infrarossa emessa dalla superficie. Quale è la temperatura di equilibrio radiativo?

Soluzione

Lo schema dei flussi e' il seguente:



Dallo schema della figura si considera il bilancio alla superficie terrestre e alla sommita' dell'atmosfera:

$$\begin{cases} E_t + y = x \\ 0.05x + y = E_t \end{cases}$$

Risolvendo per x, ovvero la radiazione emessa alla superficie terrestre, si ha:

$$x = \frac{2}{1.05} E_t = 1.9 E_t$$

La temperatura di equilibrio radiativo e' quindi:

$$T = \left(1.9\ E_t/\sigma\right)^{1/4} = 240.6\, K$$