1° TEST di autovalutazione LOGICA(L) (12cfu)
a.a. 2017-2018
prof.ssa Giovanna Corsi

06/11/2017

Considera il linguaggio contenente i seguenti simboli descrittivi:

- nomi: a, b, c, d, e, f,
- simboli predicativi 1-ari : Cube, Tet, Dodec, Small, Medium, Large,
- simboli predicativi 2-ari : Smaller, Larger, LeftOf, RightOf, BackOf, FrontOf,
- simboli predicativi 3-ari : Between.
- parentesi: (,)
- connettivi: $\neg, \bot, \wedge, \vee, \rightarrow$.

Enunciati atomici nel linguaggio di Tarski sono, ad esempio :

Tet(a)	*significato inteso*	a è un tetraedro
Dodec(b)	*sig. int.*	b è un dodecaedro
Cube(b)	*sig. int.*	b è un cubo
a = b	*sig. int.*	a è uguale a b
Medium(a)	*sig. int.*	a è di grandezza media
Large(a)	*sig. int.*	a è grande
Small(a)	*sig. int.*	a è piccolo
Larger(a, b)	*sig. int.*	a è più grande di b
Smaller(a, b)	*sig. int.*	a è più piccolo di b
LeftOf(b, c)	*sig. int.*	b sta a sinistra di c
RightOf(b, c)	*sig. int.*	b sta a destra di c
FrontOf(a, b)	*sig. int.*	a sta di fronte a b
BackOf(b, c)	*sig. int.*	b sta dietro a c
Between(a, b, c)	*sig. int.*	a sta tra b e c

1. Formalizza nel linguaggio di Tarski's World (utilizzando i soli connettivi $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$) i seguenti enunciati.

   (a) a è un cubo o b è un tetraedro, ma nessuno dei due è grande.
   $(Cube(a) \vee Tet(b)) \wedge (\neg Large(a) \wedge \neg Large(b))$
   $(Cube(a) \vee Tet(b)) \wedge \neg(Large(a) \vee Large(b))$

   (b) c è più grande di d se a si trova a destra di b.
   $RightOf(a, b) \rightarrow Larger(c, d)$

   (c) c è grande solo se esso è un tetraedro.
   $Large(c) \rightarrow Tet(c)$

   (d) a o b sono piccoli e c è grande
   $(Small(a) \vee Small(b)) \wedge Large(c)$

   (e) a è piccolo o sia b che c sono grandi.
   $Small(a) \vee (Large(b) \wedge Large(c))$

   (f) a è un cubo e b è più piccolo di esso.
   $Cube(a) \wedge Smaller(b, a)$

   (g) a è un cubo e non è né grande né piccolo.
   $Cube(a) \wedge (\neg Large(a) \wedge \neg Small(a))$
   [usando ‡, potremmo formlaizzare con $Cube(a) \wedge (Large(a) \ddagger Small(a))$]

   (h) Il fatto che c sia un cubo è condizione sufficiente e non necessaria affinché a sia più piccolo di d.
   $(Cube(c) \rightarrow Smaller(a, d)) \wedge \neg(Smaller(a, d) \rightarrow Cube(c))$

   (i) Se c si trova tra a e b, allora è un cubo oppure un tetraedro.
   $Between(c, a, b) \rightarrow Cube(c) \vee Tet(c)$

   (j) c si trova tra a e b esattamente nel caso in cui b è un grosso cubo.
   $(Between(c, a, b) \rightarrow Cube(b) \wedge Large(b)) \wedge (Cube(b) \wedge Large(b) \rightarrow Between(c, a, b))$
   [usando $\leftrightarrow$ potremmo formalizzare con $Between(c, a, b) \leftrightarrow Cube(b) \wedge Large(b)$]

   (k) Non è vero che il grande cubo c si trova tra i tetraedri b e d.
   $Large(c) \wedge Cube(c) \wedge Tet(b) \wedge Tet(d) \wedge \neg Between(c, b, d)$

(l) L'essere a più grande di b è condizione necessaria, ma non sufficiente, per il suo essere medio.
$(Medium(a) \to Larger(a,b)) \land \neg(Larger(a,b) \to Medium(a))$

2. Traduci in italiano i seguenti enunciati del linguaggio di Tarski's world

(a) $(Cube(a) \lor Tet(a)) \land \neg(Tet(a) \land Cube(a))$ a è un cubo o un tetraedro, ma non entrambi.

(b) $\neg Tet(a) \to (Large(b) \land LeftOf(a,b))$
Se a non è un tetraedro allora b è grande e a sta alla sua sinistra
a non è un tetraedro solo se b è grande e a sta alla sua sinistra
a non è un tetraedro solo se a sta alla sinistra di b e b è grande
a non è un tetraedro solo se a sta alla sinistra di un grande oggetto b

(c) $Between(c,a,d) \lor Between(a,c,d) \lor Between(d,a,c))$
Almeno uno fra c, a e d si trova fra gli altri due.

(d) $(Larger(b,c) \to Smaller(c,b)) \land (Smaller(c,b) \to Larger(b,c))$
b è più grande di c se e soltanto se c è più piccolo di b
b è più grande di c esattamente quando c è più piccolo di b

(e) $\neg\neg Cube(a)$
Non è vero che a non sia un cubo.

(f) $Large(b) \land Cube(b) \land FrontOf(b,c)$
b è un cubo grande che sta di fronte a c

3. Con il metodo degli alberi di sequenti, stabilisci se, e in caso contrario esibisci un (contro)modello per,

(a) $(A \to B) \land (B \to C) \to (A \to C)$ è una tautologia

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{B \to C, A \Rightarrow C, A} \qquad \dfrac{\overline{B, A \Rightarrow C, B} \qquad \overline{C, B, A \Rightarrow C}}{B, B \to C, A \Rightarrow C}\,L\to}{A \to B, B \to C, A \Rightarrow C}\,L\to}{A \to B, B \to C \Rightarrow A \to C}\,R\to}{(A \to B) \land (B \to C) \Rightarrow A \to C}\,L\land}{\Rightarrow (A \to B) \land (B \to C) \to (A \to C)}\,R\to$$

(a) è una tautologia.

(b) $(A \lor B) \leftrightarrow \neg(\neg A \land \neg B)$ è una tautologia

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$A \Rightarrow A, B$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$B \Rightarrow A, B$}
\RightLabel{$L\lor$}
\BinaryInfC{$A \lor B \Rightarrow A, B$}
\RightLabel{$L\neg$}
\UnaryInfC{$\neg B, A \lor B \Rightarrow A$}
\RightLabel{$L\neg$}
\UnaryInfC{$\neg A, \neg B, A \lor B \Rightarrow$}
\RightLabel{$L\land$}
\UnaryInfC{$\neg A \land \neg B, A \lor B \Rightarrow$}
\RightLabel{$R\neg$}
\UnaryInfC{$A \lor B \Rightarrow \neg(\neg A \land \neg B))$}
\RightLabel{$R\rightarrow$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow (A \lor B) \rightarrow \neg(\neg A \land \neg B)$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$A \Rightarrow A, B$}
\RightLabel{$R\neg$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow A, B, \neg A$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$B \Rightarrow A, B$}
\RightLabel{$R\neg$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow A, B, \neg B$}
\RightLabel{$R\land$}
\BinaryInfC{$\Rightarrow A, B, \neg A \land \neg B$}
\RightLabel{$L\neg$}
\UnaryInfC{$\neg(\neg A \land \neg B) \Rightarrow A, B$}
\RightLabel{$R\lor$}
\UnaryInfC{$\neg(\neg A \land \neg B) \Rightarrow A \lor B$}
\RightLabel{$R\rightarrow$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \neg(\neg A \land \neg B) \rightarrow (A \lor B)$}
\RightLabel{$R\land$}
\BinaryInfC{$\Rightarrow ((A \lor B) \rightarrow \neg(\neg A \land \neg B)) \land (\neg(\neg A \land \neg B) \rightarrow (A \lor B))$}
\end{prooftree}
$$

(b) è una tautologia.

(c) $A \land (B \lor C) \rightarrow A \lor (B \land C)$ è una tautologia

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$A, B \lor C \Rightarrow A, B \land C$}
\RightLabel{$L\land$}
\UnaryInfC{$A \land (B \lor C) \Rightarrow A, B \land C$}
\RightLabel{$R\lor$}
\UnaryInfC{$A \land (B \lor C) \Rightarrow A \lor (B \land C)$}
\RightLabel{$R\rightarrow$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow A \land (B \lor C) \rightarrow A \lor (B \land C)$}
\end{prooftree}
$$

(c) è una tautologia.

(d) $A \lor (B \land C) \rightarrow A \land (B \lor C)$ è una tautologia

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$A \Rightarrow A$}
\AxiomC{$B, C \Rightarrow A$}
\RightLabel{$R\land$}
\UnaryInfC{$B \land C \Rightarrow A$}
\RightLabel{$L\lor$}
\BinaryInfC{$A \lor (B \land C) \Rightarrow A$}
\AxiomC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\star$}
\UnaryInfC{$A \lor (B \land C) \Rightarrow B \lor C$}
\RightLabel{$R\land$}
\BinaryInfC{$A \lor (B \land C) \Rightarrow A \land (B \lor C)$}
\RightLabel{$R\rightarrow$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow A \lor (B \land C) \rightarrow A \land (B \lor C)$}
\end{prooftree}
$$

Un contromodello è dato dalla struttura $\mathcal{S}$ tale che $|B|_{\mathcal{S}} = |C|_{\mathcal{S}} = 1$ e $|A|_{\mathcal{S}} = 0$

(e) L'insieme di formule $\{A, \neg A\}$ è soddisfacibile

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$A \Rightarrow A$}
\RightLabel{$L\neg$}
\UnaryInfC{$A, \neg A \Rightarrow$}
\end{prooftree}
$$

L'insieme di formule $\{A, \neg A\}$ non è soddisfacibile.

(f) L'insieme di formule $\{\neg A, \neg B, (A \land B) \lor (C \rightarrow B)\}$ è soddisfacibile

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\star$}
\AxiomC{$\Rightarrow A, B, C$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$B \Rightarrow A, B$}
\RightLabel{$L\rightarrow$}
\BinaryInfC{$C \rightarrow B \Rightarrow A, B$}
\RightLabel{$L\lor$}
\BinaryInfC{$(A \land B) \lor (C \rightarrow B) \Rightarrow A, B$}
\RightLabel{$L\neg$}
\UnaryInfC{$\neg B, (A \land B) \lor (C \rightarrow B) \Rightarrow A$}
\RightLabel{$L\neg$}
\UnaryInfC{$\neg A, \neg B, (A \land B) \lor (C \rightarrow B) \Rightarrow$}
\end{prooftree}
$$

Un modello, ovvero una struttura che soddisfa l'insieme, è dato da $\mathcal{S}$ tale che $|A|_{\mathcal{S}} = |B|_{\mathcal{S}} = |C|_{\mathcal{S}} = 0$

(g) L'insieme di formule $\{A \to (B \to C), \neg B, A\}$ è soddisfacibile

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow B, A} \qquad \dfrac{A \Rightarrow B, B \quad C, A \Rightarrow B}{B \to C, A \Rightarrow B}\, L\to}{A \to (B \to C), A \Rightarrow B}\, L\to}{A \to (B \to C), \neg B, A \Rightarrow}\, L\neg$$

Una struttura che soddisfi l'insieme è data da $\mathcal{S}$ tale che $|A|_{\mathcal{S}} = 1$ e $|B|_{\mathcal{S}} = 0$

(h) La formula A è conseguenza logica dell'insieme di formule $\{\neg A \to A, B\}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, B \Rightarrow A}}{B \Rightarrow A, \neg A}\, R\neg \qquad \dfrac{}{A, B \Rightarrow A}}{\neg A \to A, B \Rightarrow A}\, L\to$$

4. Con il metodo della tavola di verità verifica che $A|A$ (A *nor* A) è logicamente equivalente a $\neg A$, e che $A \to B$ è equivalente a $\neg A \vee B$.

A	A	|	A	¬	A
1	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0

5. Sia dato l'enunciato ($\star$): $\neg(A \wedge B)$

   Quali dei seguenti enunciati è *logicamente equivalente* a ($\star$)?

   (a) $(\neg A \wedge \neg B)$

   (b) $(\neg A \to B)$

   (c) $(A \vee B)$

   (d) $(A \to \neg B)$

   $\neg(A \wedge B)$ è equivalente all'enunciato (d).

6. Sia $\mathcal{S}$ una $\mathcal{L}_0$-struttura. Dai la definizione di verità in $\mathcal{S}$ per induzione sulla costruzione degli enunciati.

   Definizione di Verità in una $\mathcal{L}_0$-struttura.

   Sia S una $\mathcal{L}_0$-struttura. $|\ldots|_S$ assegna 1 o 0 a ogni enunciato di $\mathcal{L}_0$ nel modo seguente:

   (a) Se A è un enunciato atomico, $|A|_S$ è il valore di verità assegnato ad A dalla $\mathcal{L}_0$-struttura S.

   (b) $|\perp|_S = 0$

   (c) $|\neg A|_S = 1$ se e solo se $|A|_S = 0$.

   (d) $|A \wedge B|_S = 1$ se e solo se $|A|_S = 1$ e $|B|_S = 1$.

   (e) $|A \vee B|_S = 1$ se e solo se $|A|_S = 1$ oppure $|B|_S = 1$.

   (f) $|A \to B|_S = 1$ se e solo se $|A|_S = 0$ oppure $|B|_S = 1$.

7. Scrivi le seguenti tautologie e/o argomenti notevoli

terzo escluso $A \vee \neg A$

sillogismo disgiuntivo

$$\frac{A \vee B \quad \neg A}{B} \qquad \text{oppure} \qquad \frac{A \vee B \quad \neg A}{A}$$

principio di non contraddizione $\neg(A \wedge \neg A)$

modus ponens

$$\frac{A \to B \quad A}{B}$$

modus tollendo ponens

$$\frac{A \vee B \quad \neg A}{B} \qquad \text{oppure} \qquad \frac{A \vee B \quad \neg A}{A}$$

leggi di De Morgan $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ e $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

legge di Frege $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

legge dell' *a fortiori* $A \to (B \to A)$

legge dell' *ex falso quodlibet* (o Legge di Duns Scoto) $A \to (\neg A \to B)$ $(A \wedge \neg A) \to B$

legge dell' *import* $(A \to (B \to C)) \to ((A \wedge B) \to C)$

legge dell' *export* $((A \wedge B) \to C) \to (A \to (B \to C))$

transitività dell'implicazione (o concatenazione) $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$