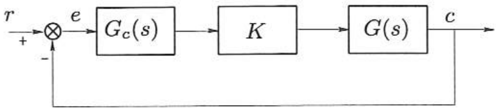
Prova scritta di Controlli Automatici

Bologna, 17 Settembre 2014

Si consideri il sistema in retroazione rappresentato dal diagramma a blocchi di Fig. 1.



$$G(s) = \frac{100}{s(s+1)(s+20)}\,.$$

Fig. 1: Sistema in retroazione.

a) Si assuma $G_c(s) = 1$. Si determini l'intervallo dei valori del parametro K per i quali il sistema in retroazione è stabile asintoticamente.

b) Si assuma $G_c(s) = 1$ e $K = 1$. Si traccino i diagrammi asintotici di Bode (delle ampiezze e delle fasi) della funzione guadagno d'anello $G_a(j\omega) = K\,G_c(j\omega)\,G(j\omega)$ del sistema.

c) Si assuma $G_c(s) = 1$. Si determini il valore di K per il quale l'errore a regime nella risposta alla rampa unitaria è uguale a 0.1. Si verifichi che per tale vale il sistema ad anello chiuso sia stabile.

d) Si assuma $G_c(s) = 1/s$. Si tracci il luogo delle radici del sistema in retroazione al variare del parametro $K > 0$. Si determinino, in particolare, il centro della stella degli asintoti e gli angoli formati dagli asintoti con l'asse reale.

e) Si assuma $K = 1$. Si progetti $G_c(s)$ come la rete correttrice (una sola rete anticipatrice o una sola rete ritardatrice) che assegna al sistema compensato il margine di fase $M_\varphi = 45°$ in corrispondenza della pulsazione di incrocio $\omega = 5$ rad/sec. A questo scopo, si suggerisce di utilizzare le formule di inversione.[1]

[1] Si ricorda che le formule di inversione per la rete anticipatrice sono:

$$\alpha = \frac{M\cos\varphi - 1}{M(M - \cos\varphi)}, \qquad \omega\tau = \frac{M - \cos\varphi}{\sin\varphi},$$

e che le stesse valgono anche per la rete ritardatrice con un'opportuna ridefinizione di M e φ.

COMPITO 17 SETT. 2014

a) $1 + kG(s) = 0$

$$1 + \frac{100K}{s(s+1)(s+20)} = 0$$

$$s^3 + 21s^2 + 20s + 100K = 0$$

3	1	20
2	21	100K
1	420 - 100K	
0	100K	

$$-(100K - 20 \times 21) = 420 - 100K$$

$$\frac{+100K\,\cancel{(420-100K)}}{\cancel{420-100K}} = 100K$$

$$\begin{cases} 420 - 100K > 0 \\ 100K > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10\cancel{0}K < 42\cancel{0} \\ K > 0 \end{cases} \Rightarrow K < 4.2 \Rightarrow \underline{0 < K < 4.2}$$

b) Vedere grafici

c) $e_r = \dfrac{1}{K_v}$

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \frac{100K}{\cancel{s}(s+1)(s+20)} = \frac{100K}{20} = 5K$$

$$0.1 = \frac{1}{5K} \Rightarrow \cancel{5}^{1}K = \cancel{10}^{2} \Rightarrow \underline{K = 2}$$

Il sistema ad anello chiuso è stabile per $K = 2$ in virtù dei risultati al punto a)

d) $$\sigma_a = \frac{1}{n-m}\left(\Sigma p_i - \Sigma z_i\right) = \frac{1}{4}(-1-20) = -\frac{21}{4} = -5.25$$

$$\theta_{a,\nu} = \frac{(2\nu+1)\pi}{n-m} = \frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4} \qquad \nu = 0, 1, 2, 3$$

$$G_e(s) = G_c(s)\,G(s) = \frac{100}{s^2(s+1)(s+20)}$$

e)

$|G(j5)| = 0.1903$

$\angle G(j5) = -183°$

Si utilizza una rete Verifica della realizzabilità:

$$M = \frac{1}{|G(j5)|} = \frac{1}{0.1903} = 5.2549$$

$$\varphi = -135° + 183° = 48° = 0.8378 \text{ rad}$$

$$\varphi_{max} = a\cos\frac{1}{M} = a\cos\frac{1}{5.2549} = 1.3793 \text{ rad}$$

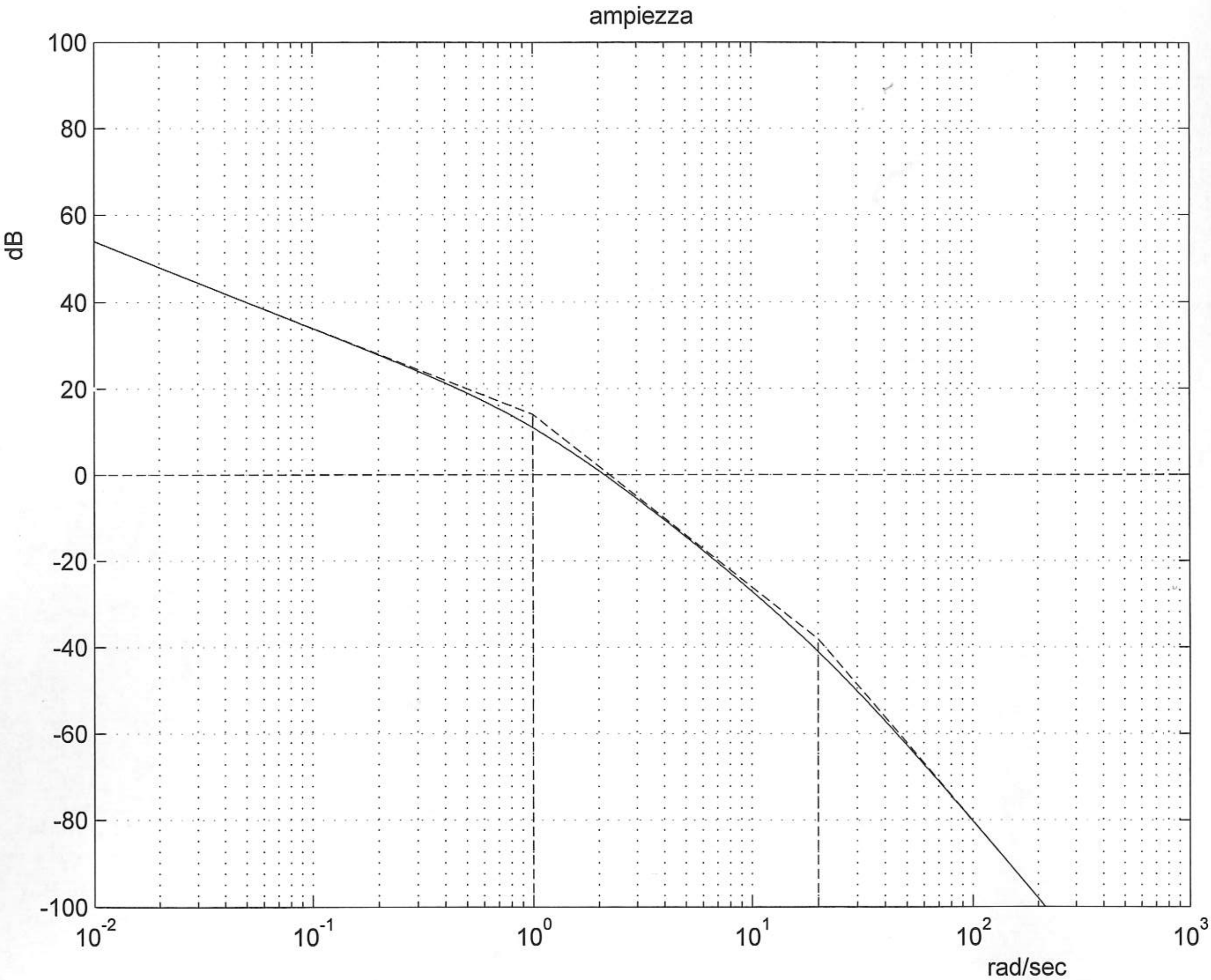
$\varphi < \varphi_{max} \Rightarrow$ la rete anticipatrice è realizzabile

$$\alpha = \frac{M\cos\varphi - 1}{M(M - \cos\varphi)} = 0.1044$$

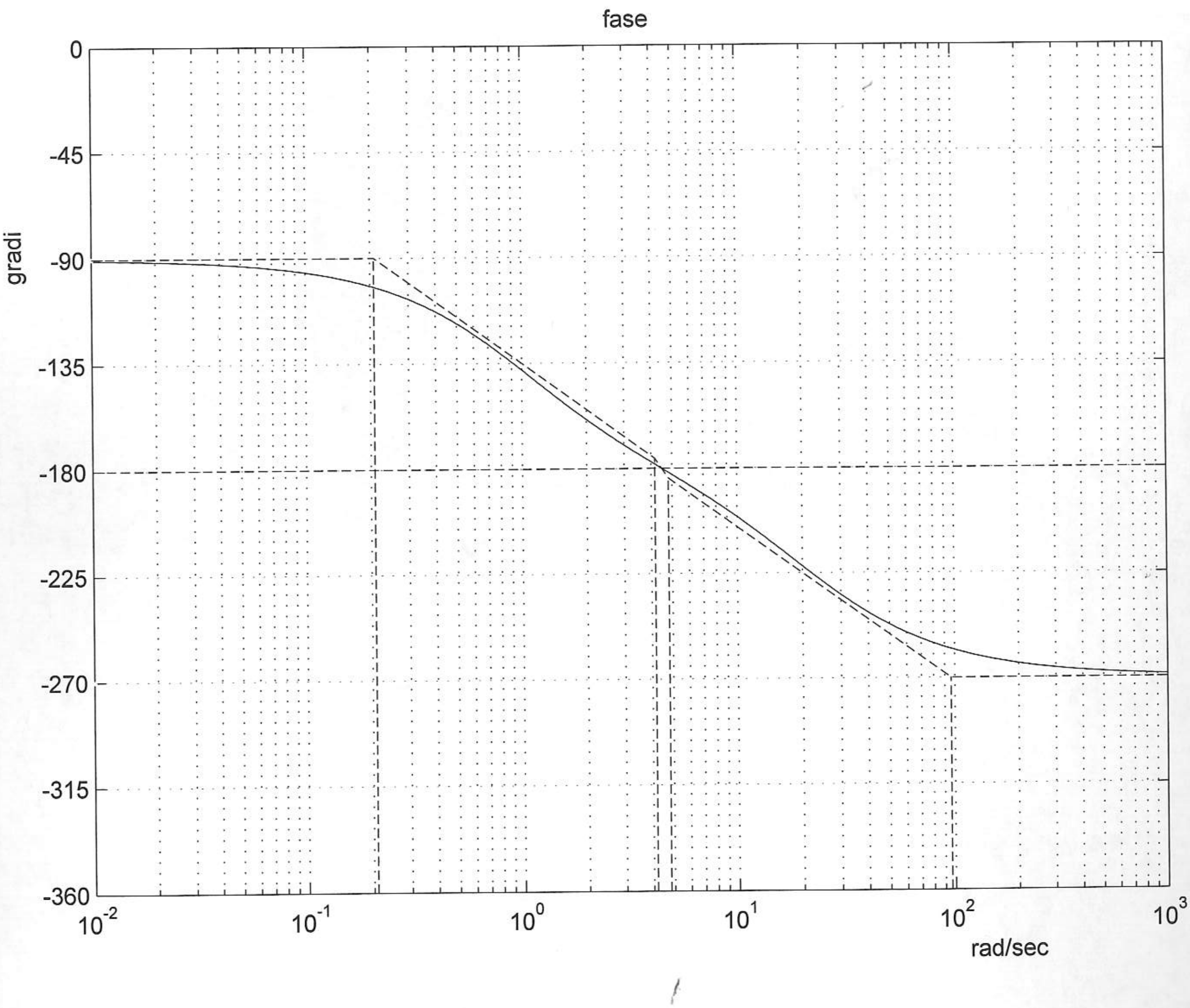
$$\tau = \frac{M - \cos\varphi}{\omega \sin\varphi} = 1.2341$$

$$G_c(s) = \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s} = \frac{1 + 1.2341 s}{1 + 0.1288 s} = \frac{9.582\,(s + 0.8103)}{s + 7.764}$$

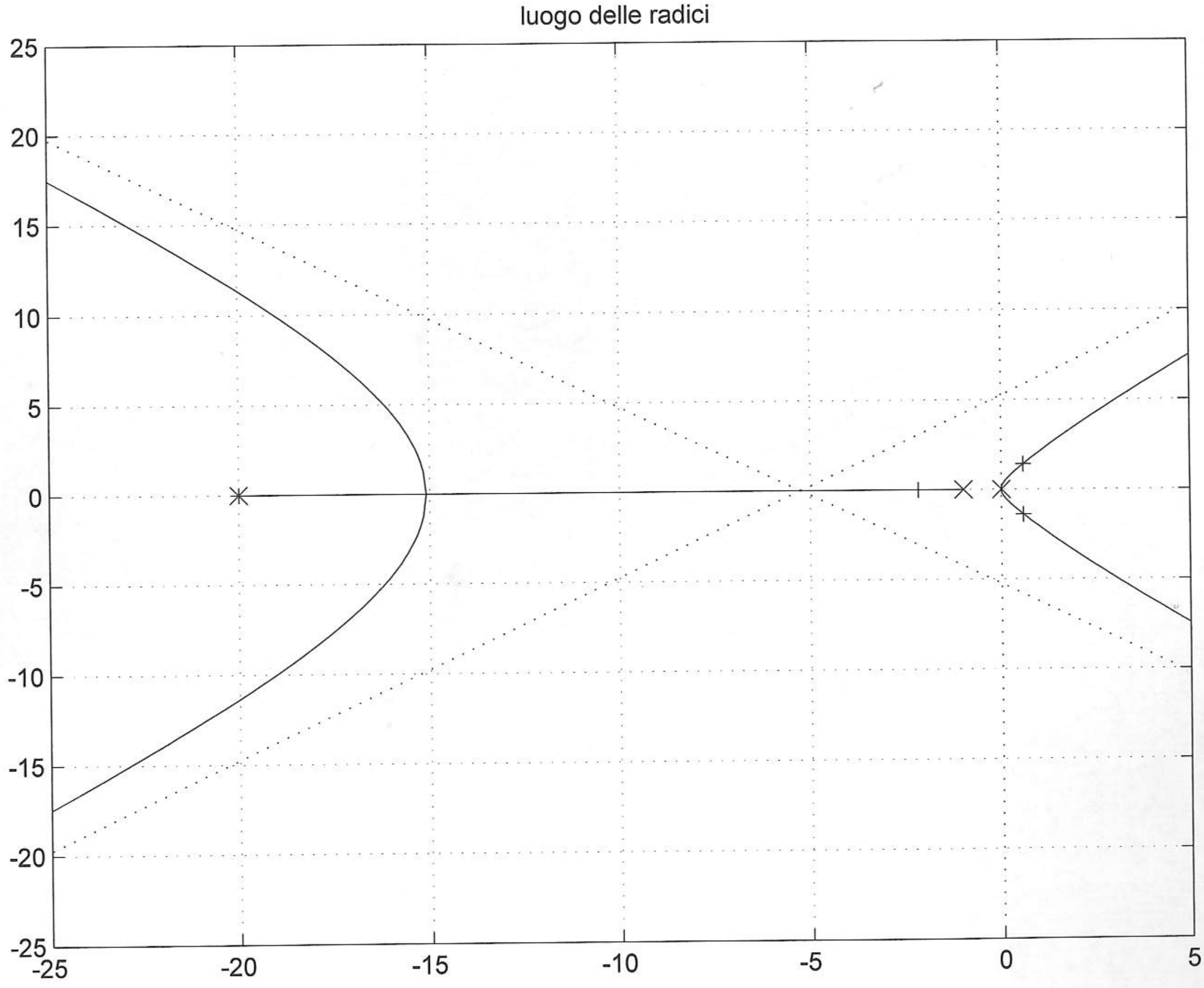
Verifica con FFI: $M_\varphi = 45.29°$ per $\omega = 5$ rad/sec



ampiezza
dB
rad/sec
100
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}



fase
gradi
0
-45
-90
-135
-180
-225
-270
-315
-360
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
rad/sec


luogo delle radici
25
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
-25
-20
-15
-10
-5
0
5