Alberi di sequenti per il linguaggio proposizionale $\mathcal{L}_0$.

- Un *multinsieme* è un insieme con ripetizioni.
- Un *sequente* è un'espressione
$$\Gamma \Longrightarrow \Delta$$
ove Γ e Δ sono multinsiemi finiti, eventualmente vuoti, di enunciati di $\mathcal{L}_0$.
- dato un sequente $\Gamma \Longrightarrow \Delta$, possiamo interpretare tutte le formule a sinistra di $\Longrightarrow$ (i.e. le formule in Γ) come vere e le formule a destra di $\Longrightarrow$ (i.e. le formule in Δ) come false.
- Un *albero di sequenti* per $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ è un albero la cui radice è (etichettata con) il sequente $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ e i cui nodi sono ottenuti applicando le regole del calcolo.
- Le regole vanno lette dal basso verso l'alto, ovvero dalla conclusione verso le premesse della regola.
- L'albero per un dato sequente $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ si costruisce partendo dalla radice e quindi costruendolo dal basso verso l'alto.
- Un nodo di un albero di sequenti è *chiuso* se ha una delle seguenti due forme:
$$A, \Gamma \Longrightarrow \Delta, A$$
$$\perp, \Gamma \Longrightarrow \Delta$$
altrimenti è detto *aperto*.
- Una *foglia* di un albero di sequenti è il nodo finale di un qualche ramo dell'albero. In particolare una foglia è
  1. un nodo chiuso (parleremo di *foglia chiusa*); oppure
  2. un nodo aperto a cui non è possibilile applicare alcuna regola del calcolo (parleremo di *foglia aperta*).
- Le regole del calcolo dei sequenti sono ottenute a partire dalle condizioni di verità di un enunciato in una $\mathcal{L}_0$ struttura $\mathcal{S}$.

  Per ogni simbolo logico $\dagger$ avremo una regola che governa il comportamento di $\dagger$ a sinistra di $\Longrightarrow$ (cioè 'nel vero') che indicheremo con $L_\dagger$ (L per Left) e una regola che governa il comportamento di $\dagger$ a destra di $\Longrightarrow$ (cioè 'nel falso') che indicheremo con $R_\dagger$ (R per Right). Tali regole sono determinate a partire dalle condizioni di verità (e di falsità) di enunciati il cui operatore principale sia $\dagger$. In particolare:

1. La clausola di verità per $\neg B$, ovvero

$$|\neg B|_{\mathcal{S}} = 1 \qquad \textit{sse} \qquad |B|_{\mathcal{S}} = 0$$

ci dice che $\neg B$ è (i) vero quando B è falso e, vice versa, esso (ii) è falso quando B è vero. Dato che in un sequente l'essere a sinistra di $\Longrightarrow$ corrisponde all'essere vero e l'esserne a destra corrisponde all'essere falso, da (i) e (ii) otteniamo, rispettivamente, le seguenti regole:

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \Longrightarrow \Delta}\ L_{\neg} \qquad \frac{A, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \neg A}\ R_{\neg}$$

2. La clausola di verità per $\wedge$, ovvero

$$|B \wedge C|_{\mathcal{S}} = 1 \qquad \textit{sse} \qquad |B|_{\mathcal{S}} = 1 \ \textbf{ e } \ |C|_{\mathcal{S}} = 1$$

ci dice che $B \wedge C$ è (i) vero quando sia B che C sono veri ed (ii) è falso quando almeno uno tra B e C è falso. Da (i) e (ii) otteniamo, rispettivamente, le seguenti regole:

$$\frac{B, C, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{B \wedge C, \Gamma \Longrightarrow \Delta}\ L_{\wedge} \qquad \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, B \qquad \Gamma \Longrightarrow \Delta, C}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, B \wedge C}\ R_{\wedge}$$

Nota. Le condizioni di verità e di falsità di un enunciato di forma $B \wedge C$ contengono, rispettivamente, una congiunzione metateorica e una disgiunzione metateorica. La congiunzione metatorica viene rappresentata nei sequenti tramite la virgola e la disgiunzione metateorica viene rappresentata tramite la biforcazione dell'albero in due rami separati (ciascuno dei quali rappresenta uno dei due casi possibili).

3. La clausola di verità per $\vee$, ovvero

$$|B \vee C|_{\mathcal{S}} = 1 \qquad \textit{sse} \qquad |B|_{\mathcal{S}} = 1 \ \textbf{ oppure } \ |C|_{\mathcal{S}} = 1$$

ci dice che $B \vee C$ è (i) vero quando almeno uno tra B e C è vero ed (ii) è falso quando sia B che C sono falso. Da (i) e (ii) otteniamo, rispettivamente, le seguenti regole:

$$\frac{B, \Gamma \Longrightarrow \Delta \qquad C, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{B \vee C, \Gamma \Longrightarrow \Delta}\ L_{\vee} \qquad \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, B, C}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, B \vee C}\ R_{\vee}$$

4. La clausola di verità per $\rightarrow$, ovvero

$$|B \rightarrow C|_{\mathcal{S}} = 1 \qquad \textit{sse} \qquad |B|_{\mathcal{S}} = 0 \ \textbf{ oppure } \ |C|_{\mathcal{S}} = 0$$

ci dice che $B \rightarrow C$ è (i) vero se B è falso oppure se C è vero ed (ii) è falso quando sia B che C sono falso. Da (i) e (ii) otteniamo, rispettivamente, le seguenti regole:

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, B \qquad C, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{B \rightarrow C, \Gamma \Longrightarrow \Delta}\ L_{\rightarrow} \qquad \frac{B, \Gamma \Longrightarrow \Delta, C}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, B \rightarrow C}\ R_{\rightarrow}$$

REGOLE DEL CALCOLO DI SEQUENTI

Regole per i connettivi:

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \Longrightarrow \Delta}\, L_{\neg} \qquad\qquad \frac{A, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \neg A}\, R_{\neg}$$

$$\frac{A, B, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Longrightarrow \Delta}\, L_{\wedge} \qquad\qquad \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, A \qquad \Gamma \Longrightarrow \Delta, B}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, A \wedge B}\, R_{\wedge}$$

$$\frac{A, \Gamma \Longrightarrow \Delta \qquad B, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Longrightarrow \Delta}\, L_{\vee} \qquad\qquad \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, A \vee B}\, R_{\vee}$$

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, A \qquad B, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Longrightarrow \Delta}\, L_{\rightarrow} \qquad\qquad \frac{A, \Gamma \Longrightarrow \Delta, B}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, A \rightarrow B}\, R_{\rightarrow}$$

Perché costruire un albero di sequenti per un dato sequente $\Gamma \Longrightarrow \Delta$?

1. Un albero di sequenti per $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ ha lo scopo di determinare tutti i modi possibili in cui si può realizzare l'interpretazione semantica di $\Gamma \Longrightarrow \Delta$, ovvero come possa essere fatta una struttura $\mathcal{S}$ tale che tutte le formule di Γ sono vere e tutte le formule di Δ sono false in essa.
2. Un albero di sequenti per $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ ci dice SE ESISTE almeno una struttura in cui tutti gli enunciati in Γ siano veri e tutti gli enunciati in Δ siano falsi. Quindi ci dice se esiste almeno una struttura che soddisfa l'insieme di formule che corrisponde alla interpretazione semantica di $\Gamma \Longrightarrow \Delta$, ovvero tale che tutte le formule di Γ sono vere e tutte le formule di Δ sono false.
3. Se un albero di sequenti per $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ contiene almeno un ramo la cui foglia è aperta siamo in grado di definire una struttura $\mathcal{A}$ in cui tutti gli enunciati in Γ sono veri e tutti gli enunciati in Δ sono falsi.
   Più precisamente, **a partire da un ramo la cui foglia è aperta** possiamo costruire la seguente struttura $\mathcal{S}$

   (a) $\mathcal{S}$ associa valore di verità 1 a ciascun enunciato atomico che occorre a sinistra di $\Longrightarrow$ nella foglia di tale ramo e associa valore di verità 0 a ciascun enunciato atomico che occorre a sinistra di $\Longrightarrow$ nella foglia di tale ramo.

   Tale struttura $\mathcal{S}$ rende veri tutti gli enunciati in Γ e rende falsi tutti gli enunciati in Δ.
4. Se le foglie di un albero di sequenti per $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ sono tutte chiuse, allora sappiamo che non esiste una struttura che renda veri tutti gli enunciati in Γ e falsi tutti gli enunciati in Δ. Questo perchè i nodi di tale albero esauriscono i possibili modi di definire una struttura per $\Gamma \Longrightarrow \Delta$, dato che le foglie sono tutte chiuse, risulta che ogni possibile struttura per $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ dovrebbe o rendere sia vera che falso uno stesso enunciato atomico (se la foglia è di forma $A, \Gamma' \Longrightarrow \Delta', A$) oppure rendere vero $\perp$ (se la foglia è di forma $\perp, \Gamma' \Longrightarrow \delta'$).

Applicazioni.

1. Un albero aperto per $\Gamma \Longrightarrow$ dice che l'insieme degli enunciati di Γ è *soddisfacibile.*
2. Un albero chiuso per $\Gamma \Longrightarrow$ dice che l'insieme degli enunciati di Γ *non è soddisfacibile.*
3. Un albero aperto per $\Longrightarrow A$ dice che A *non è una tautologia.*
4. Un albero chiuso per $\Longrightarrow A$ dice che A è una *tautologia.*
5. Un albero aperto per $\Gamma \Longrightarrow A$ dice che A *non è conseguenza logica di* Γ.
6. Un albero chiuso per $\Gamma \Longrightarrow A$ dice che A è *conseguenza logica di* Γ.