Lexikografikus allokációk a hozzárendelési játékokban

Solymosi Tamás

Kivonat
Két új lexikografikus allokációs eljárást vizsgálunk: a leximin és a leximax eljárásokat. Ezek abban hasonlítanak a jól ismert marginális allokációs eljáráshoz, hogy (i) a kifizetések meghatározása itt is a játékosok egy eleve adott prioritási sorrendjében történik; (ii) ha az eredmény egy mag-elosztás, akkor a kapott allokáció a magnak egy extremális eleme. A két új eljárás viszont nem a koalíciós értékekből állapítja meg az egyes kifizetéseket, hanem a mag-elosztásokra vonatkozó alsó, illetve felső korlátokat igyekszik, amennyire csak lehetséges, kielégíteni. Két fő kérdésre keressük a választ, néhány általános észrevételtől eltekintve főként a mindig nem üres maggal rendelkező hozzárendelési játékokra fókuszálva: (1) Mag-elosztást kapunk-e bármelyik játékos-sorrend esetén? (2) Megkapjuk-e mindegyik extremális mag-elosztást valamilyen játékos-sorrenddel?

1. Bevezetés

A kooperatív játékok Neumann és Morgenstern (1944) által bevezetett alapmodellje két részből áll: a játékosok nemüres, véges N halmazából és egy v **karakterisztikus függvény**ből, amely az N minden S részhalmazához (koalíció) hozzárendel egy $v(S)$ valós számot, és amelyre az egyetlen kikötés az, hogy $v(\emptyset) = 0$ legyen.

A $v(S)$ számot az S koalíció értékének nevezzük és úgy értelmezzük, mint az S koalíció tagjai által a koalícióban részt nem vevő $N \setminus S$-beli játékosok döntéseitől függetlenül elérhető egyéni hasznosságok összegének legnagyobb értékét. Megengedjük, hogy a játékosok

Solymosi Tamás
Budapesti Corvinus Egyetem, Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék,
email: tamas.solymosi@uni-corvinus.hu

bármelyik társulása létrejöjjön. A nemüres részkoalíciók halmazát $\mathcal{N}$-nel fogjuk jelölni, azaz $\mathcal{N} = \{S \subseteq N : S \neq \emptyset, S \neq N\}$.

Az (N,v) játék egy kimenetelét az $x \in \mathbb{R}^N$ **kifizetésvektor** adja meg. Eszerint az $i \in N$ játékos x_i kifizetéshez jut, az $S \subseteq N$ koalíció összkifizetése pedig $x(S) = \sum_{i \in S} x_i = e^S \cdot x$, ahol $e^S \in \{0,1\}^N$ jelöli az S koalíció tagsági vektorát, azaz $e_i^S = 1$ ha $i \in S$, és $e_i^S = 0$ különben.

Egy játék kimeneteleivel szemben támasztott stabilitási követelményeket fogalmaz meg a **mag**. Az (N,v) játék magján a

$$\mathbf{C}(N,v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \,:\, e^N \cdot x = v(N),\ \ \forall S \in \mathcal{N} : e^S \cdot x \geq v(S) \right\}$$

esetleg üres halmazt értjük, elemeit mag-elosztásoknak hívjuk. A mag, ha nem üres, nyilvánvalóan egy korlátos poliedrikus halmaz, vagyis előáll, mint a véges sok extrém pontjának a konvex burka. Jelölje $\mathrm{ext}\mathbf{C}(N,v)$ az extremális mag-elosztások halmazát.

A magot definiáló feltételekből könnyen adható felső korlát is az egyes koalíciók magbeli összkifizetésére.

1. Állítás. *Tetszőleges (N,v) játékban tetszőleges $S \subseteq N$ koalícióra,*

$$\sum_{i \in S} x_i \leq v(N) - v(N \setminus S) \qquad \text{minden } x \text{ mag-elosztásra.} \tag{1}$$

Bizonyítás: Figyelembe véve, hogy egy valódi részkoalíció komplementere is $\mathcal{N}$-beli, a mag-elosztások meghatározásából következik, hogy

$$\sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \in N} x_i - \sum_{j \in N \setminus S} x_j = v(N) - \sum_{j \in N \setminus S} x_j \leq v(N) - v(N \setminus S)$$

tetszőleges S koalícióra és x mag-elosztásra. ❑

Ezen állítás alapján a magot a koalíciók összkifizetéseinek felülről való korlátozásával is megadhatjuk. Tetszőleges $T \subseteq N$-re jelölje $b^v(T) = v(N) - v(N \setminus T)$ a T koalíció magbeli összkifizetésének (1) szerinti felső korlátját. Nyilvánvaló, hogy $b^v(N) = v(N)$ és $b^v(\varnothing) = 0$, tehát b^v is egy karakterisztikus függvény az N játékoshalmazon. Továbbá mivel igaz , hogy $b^{b^v}(S) = v(S)$ minden $S \subseteq N$ koalícióra, az (N, b^v) játékot az (N,v) játék duáljának hívjuk. Miután az $\mathcal{N}$ zárt a komplementerképzésre, az (N,v) játék magját ekvivalens módon leírhatjuk úgy is, mint a duáljának az antimagját, amit a rövidség kedvéért csak **duál-mag**nak hívunk:

$$\mathbf{C}(N,v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \,:\, e^N \cdot x = b^v(N),\ \ \forall T \in \mathcal{N} : e^T \cdot x \leq b^v(T) \right\}. \tag{2}$$

A továbbiakban csak olyan játékokkal foglalkozunk, amelyekben a mag nem üres.

A mag kétféle jellemzéséből az $i \in N$ játékos bármelyik magbeli x_i kifizetésére azt kapjuk, hogy

$$v(i) \leq x_i \leq b^v(i) = v(N) - v(N \setminus i).$$

A mag tehát része egyrészt annak az $\mathbb{R}^N$-beli téglatestnek, amelynek az i-koordinátára eső vetülete a $[v(i), b^v(i)]$ intervallum, másrészt az $e^N \cdot x = v(N)$ hipersíknak.

A dolgozatban a játék kimenetelének meghatározására szolgáló olyan eljárásokat vizsgálunk, amelyek közös jellemzői, hogy

- a játékosok egy előre rögzített sorrendjét követve rekurzív módon határozzák meg a kifizetéseket;
- allokációt eredményeznek, azaz a generált x kifizetésvektorra teljesül az $e^N \cdot x = v(N)$ egyenlőség;
- amennyiben a generált allokáció magbeli, akkor egy extremális mag-elosztás.

E harmadik jellemző alapján vetődik fel a különböző játékos-sorrendekhez tartozó allokációk és a mag extremális pontjai közötti kapcsolatra vonatkozó következő két kérdés:

Q1: Mag-elosztást kapunk-e bármelyik játékos-sorrend esetén?
Q2: Megkapjuk-e mindegyik extremális mag-elosztást valamilyen játékos-sorrenddel?

Dolgozatunkban e két kérdésre keressük majd a választ elsősorban a (később definiált) hozzárendelési játékok osztályán a (szintén később definiált) leximin illetve leximax allokációs eljárásokra vonatkozóan. Kissé meglepő számunkra, de nincs tudomásunk arról, hogy pontosan ezeket az eljárásokat már tanulmányozták volna. Kuipers (1994) ugyan használt egy, a leximin allokációhoz hasonlóan megkonstruált kifizetés-vektort a korlátozott kooperációs játékok magjának nemürességére vonatkozó vizsgálataiban, de az ő eljárása nem feltétlenül ad egy allokációt (viszont amikor igen, akkor az eredmény ott is egy extremális mag-elosztás). Ugyanez mondható el Izquierdo et al. (2007) módszeréről, ami gyakorlatilag Kuipers (1994) eljárásának a hozzárendelési játékokra specializált változata. A leximax eljáráshoz (többé vagy kevésbé) hasonlóval viszont még nem találkoztunk.

Létezik ugyanakkor egy jól ismert allokációs módszer, a **marginális allokációs eljárás**, ami a fentebb megfogalmazott keretbe illik. Először is idézzünk fel néhány erre vonatkozó tényt. A játékosok egy **sorrend**jének nevezzük a $\sigma : \{1,2,..,n\} \to N$ bijektív leképezést. A v játékban a σ sorrendhez tartozó **marginális allokáció** a következőképpen definiált $m^\sigma(v) \in \mathbb{R}^N$ kifizetésvektor:

$$\begin{aligned}
m^\sigma_{\sigma_1}(v) &= v(\sigma_1) - v(\emptyset);\\
m^\sigma_{\sigma_2}(v) &= v(\sigma_1\sigma_2) - v(\sigma_1);\\
\cdots &= \cdots\\
m^\sigma_{\sigma_{n-1}}(v) &= v(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{n-1}) - v(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{n-2});\\
m^\sigma_{\sigma_n}(v) &= v(N) - v(\sigma_1\ldots\sigma_{n-1}).
\end{aligned}$$

Nyilvánvaló, hogy tetszőleges $k = 1,\ldots,n$-re teljesül a $\sum_{i=1}^k m^\sigma_{\sigma_i}(v) = v(\sigma_1\ldots\sigma_k)$ egyenlőség. Speciálisan, $\sum_{i=1}^n m^\sigma_{\sigma_i}(v) = v(N)$, azaz a generált $m^\sigma(v)$ valóban egy allokáció a v játékban. Az is rögtön adódik, hogy ha $m^\sigma(v) \in \mathbf{C}(v)$, akkor $m^\sigma(v)$ a magnak csak egy extremális pontja lehet, hiszen az $m^\sigma(v)$ pontban aktív mag-feltételek rendszerének megoldása egyértelmű.

Fogalmazzuk meg formálisan is két kérdésünket, konkrétan a marginális allokációkra vonatkoztatva. Jelölje $\Theta(N)$ az N-beli játékosok $n!$ különböző sorrendjének és $\mathsf{Marg}(v) = \{m^\sigma(v) : \sigma \in \Theta(N)\}$ a marginális allokációknak a halmazát. A $\mathsf{Marg}(v)$ halmaz nyilván semmilyen v játékra nem üres, és persze tartalmazhat $n!$-nál kevesebb elemet is. Az allokációs eljárás harmadikként kiemelt jellemzőjét – nevezetesen, hogy $\mathsf{Marg}(v) \cap \mathbf{C}(v) \subseteq \mathsf{ext}\mathbf{C}(v)$ – figyelembe véve, kérdéseink most a következők:

M1: Teljesül-e tetszőleges (adott típusú) v játékra, hogy $\mathsf{Marg}(v) \subseteq \mathsf{ext}\mathbf{C}(v)$?
M2: Teljesül-e tetszőleges (adott típusú) v játékra, hogy $\mathsf{ext}\mathbf{C}(v) \subseteq \mathsf{Marg}(v)$?

A következő példában szereplő kis méretű és „elég szabályos” játék mutatja, hogy csak elég „speciális” tulajdonságok esetén várhatunk e két kérdés bármelyikére is pozitív választ.

1. Példa. (Egyetlen marginális allokáció sem magbeli, azaz $\mathsf{Marg} \cap \mathsf{ext}\mathbf{C} = \varnothing$.)
Tekintsük a következő 3-szereplős, szimmetrikus játékot:

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{ha } |S| \leq 1 \\ 4 & \text{ha } |S| = 2 \\ 7 & \text{ha } |S| = 3. \end{cases}$$

A játék magja nem üres, hiszen például az $(1,3,3)$ egy (extremális) mag-elosztás. Ugyanakkor egyetlen σ sorrendhez tartozó m^σ sem magbeli, mivel bármelyik σ-ra $m^\sigma_{\sigma_1} + m^\sigma_{\sigma_3} = (0-0)+(7-4) < 4 = v(\sigma_1\sigma_3)$.

1. Megjegyzés. Ha az 1. Példában mutatott játékban az egyik (de csak az egyik) 2-szereplős koalíció értékét 4-ről 3-ra csökkentjük, akkor a módosított játékban a $3! = 6$ marginális allokációból 4 már magbeli, de 2 továbbra sem. Továbbá, a 3 extremális mag-elosztásból 2 már előáll marginális allokációként (a 4 magbeli marginális közül 2-2 ugyanazt a kifizetésvektort adja), de a harmadik továbbra sem. Tehát mindkét kérdésünkre továbbra is negatív a válasz, habár $\mathsf{Marg} \cap \mathsf{ext}\mathbf{C} \neq \varnothing$.

Az 1. Példában szereplő játékra (és az 1. Megjegyzésben módosított változatára is) a marginális allokációs eljárás negatív választ adott mindkét kérdésre. Shapley (1971) egyik klasszikus eredménye ugyanakkor éppen azt jelenti, hogy **konvex játékok** esetén – vagyis, ha tetszőleges $S,T \subseteq N$ koalíciókra $v(S)+v(T) \leq v(S \cup T)+v(S \cap T)$ teljesül – pozitív a válasz mind az M1, mind az M2 kérdésre. Sőt, amint azt Ichiishi (1981) megmutatta, ha mindegyik marginális allokáció magbeli, akkor a játék konvex, vagyis csak konvex játékokban lehet az M1 kérdésre pozitív a válasz. Mindezek alapján megállapítható, hogy a **marginális allokációkat tekintve**

- az M1 kérdésre pontosan akkor igenlő a válasz, ha a játék konvex;
- ha az M1 kérdésre igenlő a válasz, akkor az M2 kérdésre is igenlő a válasz.

A következő példa mutatja, hogy egy nem konvex játék esetén lehet M2-re pozitív, de M1-re negatív a válasz.

2. Példa. (Előfordulhat, hogy $\mathsf{ext}\mathbf{C}(v) \subsetneq \mathsf{Marg}(v)$.)
Legyen $N = \{1,2,3\}$ és a koalíciók értékei

S	1	2	3	12	13	23	123
$v(S)$	0	0	0	2	1	1	2

Ebben a játékban a mag egyelemű, $\mathbf{C}(v) = \{(1,1,0)\}$, míg a marginális allokációk halmaza $\mathsf{Marg}(v) = \{(1,1,0),(0,2,0),(0,1,1),(2,0,0),(1,0,1)\}$. Az egyetlen mag-elosztás két különböző játékos-sorrendhez tartozó marginális allokációként is előáll, de a további négy sorrendhez tartozó marginális allokációk magon kívüliek. Ugyanakkor az $(1,1,0) \in \mathsf{Marg}(v)$ vektor nem extremális pontja a $\mathsf{Marg}(v)$-beli vektorok konvex burkának, hiszen a $(0,2,0)$ és $(2,0,0)$ vektorok átlaga.

A marginális allokációkkal kapcsolatban megemlítjük még Weber (1988) eredményét, miszerint bármilyen játékban a mag részhalmaza a marginális allokációk konvex burkának.

2. Leximin allokációk

Adott (N,v) játékban nevezzük a játékosok σ sorrendjéhez tartozó **leximin allokáció**nak a következő iteratív eljárás által meghatározott $r^\sigma(v) \in \mathbb{R}^N$ kifizetésvektort:

$$\begin{aligned}
r^\sigma_{\sigma_1}(v) &= v(\sigma_1);\\
r^\sigma_{\sigma_2}(v) &= \max\left\{v(\sigma_2),\ v(\sigma_1\sigma_2) - r^\sigma_{\sigma_1}(v)\right\};\\
\cdots &= \cdots\\
r^\sigma_{\sigma_{n-1}}(v) &= \max_{Q\subseteq\{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{n-2}\}}\left\{v(Q\cup\sigma_{n-1}) - \textstyle\sum_{j\in Q} r^\sigma_j(v)\right\};\\
r^\sigma_{\sigma_n}(v) &= v(N) - \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} r^\sigma_{\sigma_j}(v).
\end{aligned}$$

Nyilvánvaló, hogy $\sum_{i=1}^n r^\sigma_{\sigma_i}(v) = v(N)$, azaz a generált $r^\sigma(v)$ valóban egy allokáció a v játékban. Az is rögtön adódik, hogy tetszőleges $k = 1,\ldots,n-1$ esetén bármelyik $Q \subseteq \{\sigma_1,\ldots,\sigma_k\}$ koalícióra $\sum_{j\in Q} r^\sigma_j(v) \geq v(Q)$, vagyis az adott sorrendben utolsó játékosét leszámítva az összes többi kifizetéssel teljesülnek a magban előírt alsó korlátok. Sőt, nyilvánvalóan $r^\sigma_{\sigma_k}(v)$ az a legalacsonyabb kifizetés, amire mindezen egyenlőtlenségek teljesülnek. Innen ered az allokáció elnevezése, azt az adott sorrend szerinti lexikografikusan minimális allokációt keressük, amelyik az utolsó játékost nem tartalmazó összes koalícióra teljesíti a mag egyenlőtlenségeket. Tehát mindegyik $1 \leq k \leq n-1$ indexre van olyan $Q_k \subseteq \{\sigma_1,\ldots,\sigma_k\}$ koalíció, hogy $\sigma_k \in Q_k$ és $\sum_{j\in Q_k} r^\sigma_j(v) = v(Q_k)$. Ebből rögtön adódik, hogy az $r^\sigma(v)$ pontban aktív mag-feltételek rendszerének egyértelmű megoldása van, vagyis a leximin allokációkra is igaz, hogy ha $r^\sigma(v)$ magbeli, akkor $r^\sigma(v)$ a magnak csak egy extremális pontja lehet.

Konkretizáljuk két fő kérdésünket a leximin allokációkra vonatkoztatva. A v játékban jelölje $\mathsf{Lmin}(v) = \{r^\sigma(v) : \sigma \in \Theta(N)\}$ a leximin allokációk halmazát. Az $\mathsf{Lmin}(v)$ halmaz nyilván semmilyen v játékra nem üres, és persze tartalmazhat $n!$-nál kevesebb elemet is. Figyelembe véve, hogy $\mathsf{Lmin}(v) \cap \mathbf{C}(v) \subseteq \mathsf{ext}\mathbf{C}(v)$, kérdéseink most a következők:

R1: Teljesül-e tetszőleges (adott típusú) v játékra, hogy $\mathsf{Lmin}(v) \subseteq \mathsf{ext}\mathbf{C}(v)$?
R2: Teljesül-e tetszőleges (adott típusú) v játékra, hogy $\mathsf{ext}\mathbf{C}(v) \subseteq \mathsf{Lmin}(v)$?

Könnyen ellenőrizhető, hogy – a marginális allokációkhoz hasonlóan most is – az 1. Példában szereplő játék mindkét kérdésre negatív választ ad, míg a 2. példabeli játéknál az első kérdésre negatív, de a másodikra pozitív a válasz. A hasonlóság oka egyszerű, mindkét esetben a marginális allokációk azonosak a leximin allokációkkal. Azt mondjuk, hogy egy v játék **szuperadditív**, ha tetszőleges $S \cap T = \varnothing$ koalíciókra $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$. Egyszerűen belátható, hogy

minden legfeljebb 3-szereplős szuperadditív játékban a marginális allokációk azonosak a leximin allokációkkal.

Az ilyen játékok leximin allokációira tehát ugyanazok a megállapítások érvényesek, mint amiket a marginális allokációkra (ott a játékosok számától függetlenül) tettünk.

Közismert, hogy a **konvex játékok** ekvivalens módon definiálhatók a következő tulajdonsággal is: tetszőleges $i \in N$ játékosra és $S \subseteq T \subseteq N \setminus i$ koalíciókra $v(S \cup i) - v(S) \leq v(T \cup i) - v(T)$. Ezt használva könnyen belátható, hogy ha v egy konvex játék, akkor tetszőleges σ sorrend esetén $r^\sigma(v) = m^\sigma(v)$. Shapley (1971) fentebb már idézett eredményéből következik, hogy

tetszőleges v konvex játék esetén az R1 és az R2 kérdésre is pozitív a válasz.

De van-e a leximin allokációkra vonatkozó megfelelője Ichiishi (1981) eredményének? Másképpen fogalmazva, adhat-e R1-re igenlő választ egy nem konvex játék is? A következő példa mutatja, hogy igen, van olyan szuperadditív játék, amelyik R1-re igenlő, de R2-re tagadó választ ad.

3. Példa. (Az R1-re pozitív, de az R2-re negatív a válasz.)
Tekintsük a következő 4-szereplős szimmetrikus játékot:

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{ha } |S| \leq 1 \\ 3 & \text{ha } |S| = 2 \\ 5 & \text{ha } |S| = 3 \\ 10 & \text{ha } |S| = 4. \end{cases}$$

Könnyű ellenőrizni, hogy bármelyik σ sorrend esetén az első játékos 0-t, a következő két játékos 3-3-at, míg az utolsó 4-et kap kifizetésként, az $r^\sigma(v)$ tehát magbeli. Ugyanakkor, a magnak vannak egyéb extremális pontjai is, például az $(1,2,2,5)$ kifizetésvektor és permutált változatai, amelyek tehát a játékosok semmilyen sorrendjével sem állnak elő leximin allokációként. Erre a v játékra tehát $\mathsf{Lmin}(v) \subsetneq \mathsf{ext}\mathbf{C}(v)$.

Megjegyezzük, hogy a 3. Példában szereplő játék **egzakt**, azaz tetszőleges $S \subseteq N$ koalícióra van olyan $x \in \mathbf{C}$ mag-elosztás, hogy $x(S) = v(S)$. Az világos, hogy egy egzakt játék bármelyik részjátékának is nem üres a magja. Rögtön adódik, hogy minden egzakt játék szuperadditív. Ugyanakkor közismert, hogy minden konvex játék egzakt, valamint, hogy minden legfeljebb 3-szereplős egzakt játék konvex.

A 3. példabeli játékban a leximin allokációk konvex burka szigorú részhalmaza a magnak, vagyis Weber (1988) fentebb idézett eredményének a leximin allokációkra vonatkozó megfelelője nem igaz, még az egzakt játékok osztályán sem. A 2. Példa mutatja, hogy a fordított irányú szigorú tartalmazás is előfordulhat, a mag is lehet szigorú részhalmaza a leximin allokációk konvex burkának. Mivel az ottani egy 3-szereplős, nem konvex, tehát nem is egzakt játék, felmerül a kérdés, hogy lehet-e ilyen (legalább) 4-szereplős egzakt játékot találni?

3. Leximax allokációk

Az előzőekben vizsgált leximin allokációkat alapvetően az jellemzi, hogy a magbeli kifizetésekre előírt alsó korlátokat egy éppen adott sorrend szerint figyelembe véve a játékosok kifizetéseit a „relatíve” legalacsonyabb szintre hozza. Ennek mintájára, de az optimalizálás irányát megfordítva, meghatározhatunk olyan allokációkat is, amelyek egy adott sorrend szerinti „relatíve” legmagasabb kifizetéseket adnak, persze a magbeli kifizetésekre adott felső korlátokat tekintetbe véve. Most tehát a v játék magjának alternatív, a b^v duál játék antimagjaként történő (2) alatti megadását használjuk.

Adott (N, v) játékban nevezzük a játékosok σ sorrendjéhez tartozó **leximax allokáció**nak a következő iteratív eljárás által meghatározott $s^\sigma(v) \in \mathbb{R}^N$ kifizetésvektort:

$$\begin{aligned}
s^\sigma_{\sigma_1}(v) &= b^v(\sigma_1);\\
s^\sigma_{\sigma_2}(v) &= \min\left\{b^v(\sigma_2),\, b^v(\sigma_1\sigma_2) - s^\sigma_{\sigma_1}(v)\right\};\\
\cdots &= \cdots\\
s^\sigma_{\sigma_{n-1}}(v) &= \min_{Q\subseteq\{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{n-2}\}}\left\{b^v(Q\cup\sigma_{n-1}) - \textstyle\sum_{j\in Q} s^\sigma_j(v)\right\};\\
s^\sigma_{\sigma_n}(v) &= b^v(N) - \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} s^\sigma_{\sigma_j}(v).
\end{aligned}$$

Nyilvánvaló, hogy $\sum_{i=1}^n s^\sigma_{\sigma_i}(v) = b^v(N) = v(N)$, azaz a generált $s^\sigma(v)$ valóban egy allokáció a v játékban. Az is rögtön adódik, hogy tetszőleges $k = 1,\ldots,n-1$ esetén bármelyik $Q \subseteq \{\sigma_1,\ldots,\sigma_k\}$ koalícióra $\sum_{j\in Q} s^\sigma_j(v) \leq b^v(Q)$, vagyis az adott sorrendben utolsó játékosét leszámítva az összes többi kifizetéssel teljesülnek a magban előírt felső korlátok. Sőt, nyilvánvalóan $s^\sigma_{\sigma_k}(v)$ az a legmagasabb kifizetés, amire mindezen egyenlőtlenségek teljesülnek. Innen ered az allokáció elnevezése, azt az adott sorrend szerinti lexikografikusan maximális allokációt keressük, amelyik az utolsó játékost nem tartalmazó összes koalícióra teljesíti a duál-mag egyenlőtlenségeket. Tehát mindegyik $1 \leq k \leq n-1$ indexre van olyan

$Q_k \subseteq \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ koalíció, hogy $\sigma_k \in Q_k$ és $\sum_{j \in Q_k} s_j^\sigma(v) = b^v(Q_k)$. Ebből rögtön adódik, hogy az $s^\sigma(v)$ pontban aktív duál-mag feltételek rendszerének egyértelmű megoldása van, vagyis a leximax allokációkra is igaz, hogy ha $s^\sigma(v)$ magbeli, akkor $s^\sigma(v)$ a magnak csak egy extremális pontja lehet.

Konkretizáljuk most két fő kérdésünket a leximax allokációkra. A v játékban jelölje $\mathsf{Lmax}(v) = \{s^\sigma(v) : \sigma \in \Theta(N)\}$ a leximax allokációk halmazát. Az $\mathsf{Lmax}(v)$ halmaz nyilván semmilyen v játékra nem üres, és persze tartalmazhat $n!$-nál kevesebb elemet is. Figyelembe véve, hogy $\mathsf{Lmax}(v) \cap \mathbf{C}(v) \subseteq \mathsf{ext}\mathbf{C}(v)$, kérdéseink most a következők:

S1: Teljesül-e tetszőleges (adott típusú) v játékra, hogy $\mathsf{Lmax}(v) \subseteq \mathsf{ext}\mathbf{C}(v)$?
S2: Teljesül-e tetszőleges (adott típusú) v játékra, hogy $\mathsf{ext}\mathbf{C}(v) \subseteq \mathsf{Lmax}(v)$?

A marginális, illetve a leximin allokációktól eltérően, az 1. és a 2. Példában szereplő játékok most mindkét kérdésre pozitív választ adnak. Az eltérés oka, hogy a leximax allokációk már nem mindig azonosak a marginális allokációkkal. Érdekes ugyanakkor, hogy a legfeljebb 3-szereplős, nem üres maggal rendelkező, szuperadditív játékok osztályán mindkét kérdésre csak pozitív válasz adható.

2. Állítás. *Ha $|N| \leq 3$, v szuperadditív és $\mathbf{C}(v) \neq \varnothing$, akkor* $\mathsf{Lmax}(v) = \mathsf{ext}\mathbf{C}(v)$.

Bizonyítás (vázlat): A bizonyítás inkább hosszú, mint nehéz, ezért a pontos részletek végiggondolását az olvasóra hagyjuk.

Az 1-, illetve 2-szereplős játékokra az állítás triviális.

A 3-szereplős esetben mindkét irányú tartalmazás belátásakor alapvetően két esetet kell vizsgálni, attól függően, hogy egy adott σ sorrendben a második játékos kifizetését a $\min\left\{b^v(\sigma_2),\, b^v(\sigma_1\sigma_2) - s_{\sigma_1}^\sigma(v)\right\}$ kifejezésben szereplő melyik tag adja. Az első, illetve a harmadik játékos kifizetése egyértelmű. Bizonyos egyenlőtlenségek igazolásához szükség van arra a közismert tényre, hogy egy 3-szereplős szuperadditív v játék magja pontosan akkor nem üres, ha $\sum_{i \in N} v(N \setminus i) \leq 2v(N)$. ❑

A **konvex játékok** osztályán – a leximin allokációkhoz hasonlóan – most is mindkét kérdésre csak pozitív válasz adható. A konvex játékoknak a növekvő marginális hozzájárulásokkal történő ekvivalens definíciójából könnyen belátható, hogy ha v egy konvex játék, akkor tetszőleges σ sorrend esetén $s^\sigma(v) = m^{\sigma^*}(v)$, ahol σ^* jelöli a fordított σ sorrendet, azaz $\sigma_k^* = \sigma_{n+1-k}$ minden $k = 1, \dots, n$-re. Shapley (1971) eredményéből és korábbi megállapításainkból következik, hogy

tetszőleges v konvex játékra, $\mathsf{ext}\mathbf{C}(v) = \mathsf{Lmax}(v) = \mathsf{Lmin}(v) = \mathsf{Marg}(v)$.

De van-e a leximax allokációkra vonatkozó megfelelője Ichiishi (1981) eredményének? Figyelembe véve a 2. Állítást, az ellenkező irányból és egy kicsit általánosabban feltett kérdés az, hogy van-e olyan legalább 4-szereplős, szuperadditív játék, amelyik S1-re igenlő, de S2-re tagadó választ ad? Érdekes módon a 3. Példa itt is használható.

3. Példa (folyt.). (Az S1-re pozitív, de az S2-re negatív a válasz.)
A 4-szereplős szimmetrikus játék és a duálja:

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{ha } |S| \leq 1 \\ 3 & \text{ha } |S| = 2 \\ 5 & \text{ha } |S| = 3 \\ 10 & \text{ha } |S| = 4, \end{cases} \qquad \text{és} \qquad b^v(S) = \begin{cases} 0 & \text{ha } |S| = 0 \\ 5 & \text{ha } |S| = 1 \\ 7 & \text{ha } |S| = 2 \\ 10 & \text{ha } |S| \geq 3. \end{cases}$$

Könnyű ellenőrizni, hogy bármelyik σ sorrend esetén a leximax eljárásban az első játékos 5-öt, a következő két játékos 2-2-t, míg az utolsó játékos 1-et kap kifizetésként, az $s^{\sigma}(v)$ tehát magbeli. Ugyanakkor, a magnak vannak egyéb extremális pontjai is, például a leximin allokációk, azaz a $(0,3,3,4)$ kifizetésvektor és permutált változatai. Ezek tehát a játékosok semmilyen sorrendjével sem állnak elő leximax allokációként. Erre a v játékra tehát $\mathsf{Lmax}(v) \subsetneq \mathsf{ext}\mathbf{C}(v)$. Sőt, $\mathsf{Lmax}(v) \cap \mathsf{Lmin}(v) = \varnothing$, és ellenőrizhető, hogy $\mathsf{Lmax}(v) \cup \mathsf{Lmin}(v) = \mathsf{ext}\mathbf{C}(v)$.

Emlékeztetünk rá, hogy a 3. Példában szereplő játék egy egzakt játék. A leximax allokációk konvex burka szigorú részhalmaza a magnak, vagyis nem igaz Weber (1988) fentebb idézett eredményének a leximax allokációkra vonatkozó megfelelője, még az egzakt játékok osztályán sem. A 2. Állítás miatt most semmilyen 3-szereplős játék sem demonstrálhatja, hogy a fordított irányú szigorú tartalmazás is előfordulhat, vagyis a mag is lehet szigorú részhalmaza a leximax allokációk konvex burkának. Kérdés, hogy van-e ilyen (legalább) 4-szereplős szuperadditív (netán egzakt) játék?

4. Hozzárendelési játékok

Egy (N,w) játék akkor egy **hozzárendelési játék**, ha a játékosok halmazának van olyan $N = I \cup J$, $I \cap J = \varnothing$ partíciója és található egy olyan nemnegatív $A = [a_{ij}]_{i\in I, j\in J}$ mátrix, hogy minden $S \subseteq N$ koalícióra

$$w(S) = w_A(S) := \max_{\mu \in \Pi_{(S\cap I, S\cap J)}} \sum_{(i,j)\in\mu} a_{ij},$$

ahol $\Pi_{(P,Q)}$ jelöli két diszjunkt (nem feltétlenül azonos elemszámú) P és Q halmaz közötti hozzárendelések (párosítások) halmazát.

Kényelmes lesz azonosítani a játékosokat a hozzájuk tartozó sor- ill. oszlopindexekkel, és vesszővel ($'$) megkülönböztetni az oszlopjátékosokat az azonos sorszámú sorjátékosoktól. Tehát a j-edik sor- ill. oszlopjátékost egyszerűen j ill. j' fogja jelölni. Az $\{i, j'\}$ alakú koalíciókat **vegyespáros**oknak fogjuk nevezni. Nyilvánvaló, hogy (i) $w_A(S) = 0$, ha $S \subseteq I$ vagy $S \subseteq J$; és (ii) $w_A(\{i, j'\}) = a_{ij}$ minden i, j indexre. Könnyen belátható, hogy

tetszőleges $A \geq 0$ mátrix esetén a w_A hozzárendelési játék szuperadditív.

A tárgyalás egyszerűsítése érdekében a továbbiakban feltesszük, hogy **az alapmátrix négyzetes**. Ha szükséges, csupa 0 elemből álló sorok vagy oszlopok hozzávételével ezt mindig elérhetjük. Egy ilyen átalakítás ugyan az indukált hozzárendelési játéknak ún. nulla-játékosokkal történő bővítését jelenti, de közismert, hogy tetszőleges játékban egy nulla-játékos kifizetése minden mag-elosztásban nulla, vagyis az eredeti mag az esetleges bővítés utáni magnak egy vetülete. A magra vonatkozó vizsgálatainkban az általánosságot tehát nem korlátozza, ha csak négyzetes mátrixok által indukált hozzárendelési játékokra szorítkozunk.

További egységesítést eredményez, ha bővítjük a négyzetes alapmátrixot egy 0-s indexű csupa 0 elemből álló sorral és egy ugyanilyen oszloppal. Legyen $M_0 = \{0\} \cup M$ a **bővített mátrix** indexhalmaza, az új elemek pedig $a_{00} = a_{i0} = a_{0j} = 0$ minden $i, j \in M$-re. Ezáltal ugyan bővítjük az eredeti játékot egy fiktív sor-, illetve oszlopjátékossal, de nulla-játékosok lévén a magban konstans 0 a kifizetésük, kezelhetjük tehát az egyszemélyes koalíciókat is úgy, mint a másik oldali fiktív játékossal alkotott vegyespárosokat. Jelölje $I_0 = \{0\} \cup I$, illetve $J_0 = \{0'\} \cup J$ a bővített játékban a sor-, illetve az oszlopjátékosok halmazát.

Végezetül feltesszük, hogy a mátrixban **a főátló** egy **maximális értékű** párosítás, vagyis a nagykoalíció értékét a diagonális hozzárendelés adja, azaz $w_A(I_0 \cup J_0) = \sum_{i \in M_0} a_{ii}$. Mivel a sorokhoz és az oszlopokhoz tartozó játékosok különbözőek, felsorolásuk alkalmas megváltoztatásával ez mindig elérhető.

A hozzárendelési játékokat Shapley és Shubik (1972) vezették be a pénzbeli kompenzációkat megengedő kétoldalú párosítási piacok játékelméleti modellezésére. A magra vonatkozóan az alábbi főbb eredményeket bizonyították.

1. Tétel (Shapley és Shubik, 1972). *Legyen A egy tetszőleges nemnegatív mátrix és w_A az általa generált hozzárendelési játék. Ekkor*

1. *a w_A magja nem üres, sőt megegyezik a nagykoalíció értékét meghatározó lineáris programozási feladat duál-optimális megoldásainak halmazával, vagyis (a fentebb bevezetett standardizált formában, illetve jelölésekkel)*

$$\mathbf{C}(w_A) = \left\{ (u_i; v_j)_{i,j \in M_0} : \forall i \in M_0 : \ u_i + v_i = a_{ii} \text{ és } \forall i, j \in M_0 : \ u_i + v_j \geq a_{ij} \right\};$$

2. *$\mathbf{C}(w_A)$ háló-szerkezetű, azaz mag-elosztásokat kapunk, ha két mag-elosztás szerinti kifizetés helyett minden sor-/oszlopjátékos a kisebb/nagyobb kifizetést, vagy fordítva, a nagyobb/kisebb kifizetést kapja;*
3. *van két olyan mag-elosztás, ami a játékosok magbeli extrém kifizetéseiből áll: az egyikben mindegyik sorjátékos a magbeli kifizetéseinek a minimumát és mindegyik*

oszlopjátékos a magbeli kifizetéseinek a maximumát kapja (jelölje ezt $(\underline{u}, \overline{v})$), a másik extrém mag-elosztásban pedig fordítva (jelölje ezt $(\overline{u}, \underline{v})$).

Az 1. Tétel 1. pontja szerint egy hozzárendelési játék magjának meghatározásához nincs szükség az összes koalícióra, elegendő csak a vegyespáros, illetve az egyszemélyes koalíciókat (a konstans 0 kifizetésben részesülő másik oldali fiktív játékossal alkotott párokat) tekinteni. Ráadásul a szokásos, a nagykoalíció kifizetésére tett egyetlen egyenlőség helyett most az optimálisan egymáshoz rendelt mindegyik játékospár kifizetésére van egy egyenlőségünk. Ezek az egyenletek nyilvánvalóan lineárisan függetlenek, ebből adódik, hogy a $\mathbf{C}(w_A)$ dimenziója legfeljebb $|M|$, vagyis jóval kisebb, mint a mag dimenziója általában (azaz nem elfajult esetben $|N|-1$, ami itt $2|M|-1$ lenne). További hasznos tulajdonság, hogy a hozzárendelési játék magja leírható csak az egyik oldali kifizetéseket használva.

Nézzük, mit mondhatunk a hozzárendelési játékok osztályán a **marginális allokációk** és a mag extrém pontjainak kapcsolatáról. Hamers et al. (2002) bizonyították, hogy

tetszőleges hozzárendelési játék magjának mindegyik extremális pontja egy marginális allokáció, vagyis ezen a játékosztályon az M2 kérdésre igenlő a válasz.

Az M1 kérdésre persze csak akkor igenlő a válasz, ha a hozzárendelési játék konvex.

A konvex, illetve az egzakt hozzárendelési játékok egyébként jellemezhetők az őket generáló mátrixok tulajdonságaival is. Solymosi és Raghavan (2001) bizonyították, hogy (a fentebb bevezetett standardizáló feltevések mellett):

- *w_A akkor és csak akkor konvex, ha A diagonális, azaz $a_{ij}=0$ minden $i \neq j$-re;*
- *w_A akkor és csak akkor egzakt, ha az A alapmátrix*
  - ◇ *egyrészt* ***diagonálisan domináns*** *(röviden D2-tulajdonságú), azaz mindegyik $k \in M$-re $a_{kk} \geq \max\{a_{ik}, a_{kj}\}$ teljesül minden $i, j \in M$-re (vagyis mindegyik diagonális elem maximális a sorában és az oszlopában is);*
  - ◇ *másrészt* ***duplán diagonálisan domináns*** *(röviden D3-tulajdonságú), azaz $a_{ij} + a_{kk} \geq a_{ik} + a_{kj}$ minden (nem feltétlenül különböző) $i, j, k \in M$-re.*

Vegyük észre, hogy a D3 tulajdonság csak akkor egy megszorítást jelentő „igazi” feltétel, ha mindhárom index különböző, hiszen a kívánt egyenlőtlenség $i=j$ esetén következik a főátló maximalitásából, míg $i=k$ vagy $j=k$ esetén automatikusan teljesül. Megjegyezzük, hogy az egzaktságot együttesen karakterizáló D2 és D3 tulajdonságok között nincs logikai kapcsolat, egyik sem következik a másikból.

4.1. Leximin allokációk

Nézzük meg, hogy milyen választ adhatunk a leximin allokációkra vonatkozó R1 és R2 kérdésekre, ha a hozzárendelési játékok osztályára szorítkozunk. A marginális allokációkra vonatkozó fentebb idézett eredmény (Hamers et al., 2002) miatt könnyű dolgunk van a második kérdéssel.

3. Állítás. *Tetszőleges w_A hozzárendelési játékban* $\mathsf{ext}\mathbf{C}(w_A) \subseteq \mathsf{Lmin}(w_A)$*, vagyis a hozzárendelési játékok osztályán az R2 kérdésre pozitív a válasz.*

Bizonyítás: A definíciókból könnyen adódik a következő általános érvényű észrevétel:

> *tetszőleges v játékban, ha egy σ sorrendre $m^\sigma(v) \in \mathbf{C}(v)$, akkor $r^\sigma(v) = m^\sigma(v)$; vagyis ha egy marginális allokáció magbeli, akkor egybeesik az ugyanazon sorrendhez tartozó leximin allokációval.*

Ez alapján állításunk azonnal következik Hamers et al. (2002) fent idézett eredményéből, miszerint tetszőleges hozzárendelési játék magjának mindegyik extremális pontja egy marginális allokáció. ❑

A következő két példa mutatja, hogy a hozzárendelési játékok osztályán az R1 kérdésre csak akkor lehet igenlő válasz, ha a játék egzakt, vagyis az alapmátrixra teljesül a D2 és a D3 tulajdonság is.

4. Példa. (Az R1-re pozitív válaszhoz szükséges a D2-tulajdonság.)
Tegyük fel, hogy az A mátrix nem D2-tulajdonságú, mert van olyan $i \neq j$, hogy $a_{ji} > a_{jj}$. Bármilyen $\sigma = (i', i, j, j', \ldots)$ alakú sorrendre a leximin allokációs eljárásban a következő értékadásokra kerül sor: először $v_{i'}^\sigma = 0$, másodszor $u_i^\sigma = a_{ii}$, és mivel a_{ij} pozitív, harmadszor $u_j^\sigma = a_{ji}$. Mivel mindenképpen $v_{j'}^\sigma \geq 0$, így $u_j^\sigma + v_{j'}^\sigma \geq a_{ji} + 0 > a_{jj}$, vagyis sérül a diagonális párok kifizetéseitől a magban elvárt egyenlőség. (Szerepcserével ugyanez a gondolatmenet használható akkor, ha a_{jj} nem oszlopmaximum.) Tehát nem diagonálisan domináns alapmátrix esetén nem minden sorrend ad magbeli leximin allokációt.

Vegyük észre, hogy 2×2-es mátrixok esetén a D2-tulajdonság garantálja az R1 kérdésre az igenlő választ, mind a $4! = 24$ sorrend magbeli leximin allokációt eredményez. Megmutatjuk, hogy legalább 3×3-as mátrixoknál ehhez kell a D3-tulajdonság is.

5. Példa. (Az R1-re pozitív válaszhoz szükséges a D3-tulajdonság)
Tegyük fel, hogy az A alapmátrix legalább 3×3-as, rendelkezik a D2-tulajdonsággal, de nem D3-tulajdonságú, mert van olyan $i \neq j \neq k \neq i$, hogy $a_{ij} + a_{kk} < a_{ik} + a_{kj}$. Bármilyen $\sigma = (i, j', k, k', \ldots)$ alakú sorrendre a leximin allokációs eljárásban a következő értékadásokra kerül sor: először $u_i^\sigma = 0$, másodszor $v_{j'}^\sigma = a_{ij}$, és mivel a feltevés szerint $a_{kj} - a_{ij} > a_{kk} - a_{ik} \geq 0$, harmadszor $u_k^\sigma = a_{kj} - a_{ij}$. Mivel mindenképpen $v_{k'}^\sigma \geq a_{ik}$, így $u_k^\sigma + v_{k'}^\sigma \geq a_{kj} - a_{ij} + a_{ik} > a_{kk}$, vagyis a k, k' diagonális pár kifizetéseire nem teljesül a megfelelő mag-feltétel. Tehát nem duplán diagonálisan domináns alapmátrix esetén nem minden sorrend ad magbeli leximin allokációt.

Most megmutatjuk, hogy egy hozzárendelési játék egzaktsága (vagyis az alapmátrix D2- és D3-tulajdonsága) nem csak szükséges, de elegendő is ahhoz, hogy az R1 kérdésre igenlő legyen a válasz.[1]

4. Állítás. *Ha az A mátrix D2- és D3-tulajdonságú, akkor az indukált w_A hozzárendelési játékra* $\mathsf{Lmin}(w_A) \subseteq \mathsf{ext}\mathbf{C}(w_A)$*; vagyis az egzakt hozzárendelési játékok osztályán az R1 kérdésre pozitív a válasz.*

Bizonyítás: Legyen σ a játékosok egy tetszőleges sorrendje, és jelölje (u^σ, v^σ) az indukált leximin allokációt.

Első lépésként megmutatjuk, hogy $u_k^\sigma + v_k^\sigma = a_{kk}$ minden $k \in M$-re. Az általánosság bármilyen korlátozása nélkül feltehetjük, hogy az n' oszlopjátékos az utolsó a σ sorrendben. Legyen $i \in M$ egy tetszőleges $i \neq n$ index. Nyilván feltehetjük, hogy a σ-ban az i megelőzi az i'-t. Megmutatjuk, hogy erre a diagonális párra a mag-feltétel egyenlőségként teljesül.

Két eset van. Ha $u_i^\sigma = 0$, akkor a leximin allokációs eljárásban v_i^σ azt a legkisebb értéket kapja, amire teljesül a $v_i^\sigma \geq a_{ji} - u_j^\sigma$ egyenlőtlenség minden az i'-t a σ-ban megelőző j sorjátékossal, az i-t is beleértve. A D2-tulajdonság és a kifizetések nemnegativitása miatt $a_{ii} - 0 \geq a_{ji} - u_j^\sigma$ minden az i'-t megelőző j-re. Tehát $v_i^\sigma = a_{ii}$, vagyis ekkor tényleg $u_i^\sigma + v_i^\sigma = a_{ii}$.

Ha $u_i^\sigma > 0$ értéket kapott, akkor volt a σ sorrendben az i előtt egy olyan j' oszlopjátékos, hogy $u_i^\sigma = a_{ij} - v_j^\sigma$. Másrészt nyilván $u_k^\sigma \geq a_{kj} - v_j^\sigma$ minden az i'-t megelőző k sorjátékosra, a j-t is beleértve. A D3-tulajdonság miatt $a_{ii} - u_i^\sigma = a_{ii} - a_{ij} + v_j^\sigma \geq a_{ki} - a_{kj} + v_j^\sigma = a_{ki} - u_k^\sigma$, minden az i'-t megelőző k sorjátékosra. Tehát a leximin allokációs eljárásban v_i^σ pontosan az $a_{ii} - u_i^\sigma$ értéket kapja, vagyis az i, i' diagonális párra ekkor is egyenlőségként teljesül a mag-feltétel.

Ezzel beláttuk, hogy a σ sorrendben az utolsó játékost tartalmazó párt kivéve az összes diagonális párra teljesül az $u_i^\sigma + v_i^\sigma = a_{ii}$ egyenlőség. Mivel a nagykoalíció értéke a diagonális elemek összege, a σ-ban utolsó játékosra és diagonális párjára is teljesülnie kell ennek az egyenlőségnek, vagyis $u_n^\sigma + v_n^\sigma = a_{nn}$ is igaz.

Második lépésként emlékeztetünk, hogy a leximin allokáció definíció szerint teljesíti a mag-egyenlőtlenségeket az utolsó játékost nem tartalmazó összes koalícióra. Esetünkben tehát $u_i^\sigma + v_j^\sigma \geq a_{ij}$ minden $i \in I_0$ sorjátékosra (az $i = n$-t is beleértve) és minden $j \neq n$ oszlopjátékosra.

Utolsó lépésként megmutatjuk, hogy a mag-egyenlőtlenségek teljesülnek az n' oszlopjátékost tartalmazó vegyespáros koalíciókra is. Megint két eset van. Ha $u_n^\sigma = 0$, akkor a D2-tulajdonság és a kifizetések nemnegativitása miatt $v_n^\sigma = a_{nn} - 0 \geq a_{kn} - u_k^\sigma$ minden $k \in I_0$ sorjátékosra. Ha $u_n^\sigma > 0$, akkor volt a σ sorrendben az n sorjátékos előtt egy olyan j' oszlopjátékos, hogy $u_n^\sigma = a_{nj} - v_j^\sigma$. Mivel $j \neq n$, fennállnak az $u_k^\sigma + v_j^\sigma \geq a_{kj}$ mag-egyenlőtlenségek minden $k \in I_0$ sorjátékosra. Ezt felhasználva a D3-tulajdonságból kapjuk,

[1] Ezért az észrevételért köszönet Bednay Dezsőnek.

hogy $v_n^\sigma = a_{nn} - u_n^\sigma = a_{nn} - a_{nj} + v_j^\sigma \geq a_{kn} - a_{kj} + v_j^\sigma \geq a_{kn} - u_k^\sigma - v_j^\sigma + v_j^\sigma = a_{kn} - u_k^\sigma$ mindegyik $k \in I_0$ sorjátékosra.

A σ sorrendhez tartozó (u^σ, v^σ) leximin allokáció tehát valóban magbeli. ❑

4.2. *Leximax allokációk*

Végezetül nézzük meg, milyen választ adhatunk a leximax allokációkra vonatkozó S1 és S2 kérdésekre, ha a hozzárendelési játékok osztályára szorítkozunk. Kezdjük ismét a második kérdéssel.

5. Állítás. *Tetszőleges w_A hozzárendelési játékban $\mathsf{ext}\mathbf{C}(w_A) \subseteq \mathsf{Lmax}(w_A)$, vagyis a hozzárendelési játékok osztályán az S2 kérdésre pozitív a válasz.*

Bizonyítás: Legelőször belátjuk a következő általános érvényű észrevételt:

> *tetszőleges v játékban, ha egy σ sorrendre $m^\sigma(v) \in \mathbf{C}(v)$, akkor $s^{\sigma^*}(v) = m^\sigma(v)$, ahol σ^* jelöli a fordított σ sorrendet, azaz $\sigma_k^* = \sigma_{n+1-k}$ minden $k = 1, \ldots, n$-re; vagyis ha egy marginális allokáció magbeli, akkor egybeesik a fordított sorrendhez tartozó leximax allokációval.*

Valóban, a leximax allokációs eljárás menetét követve, a $\sigma_1^* = \sigma_n$ játékos kifizetésére teljesül, hogy $s_{\sigma_1^*}^{\sigma^*}(v) = b^v(\sigma_1^*) = v(N) - v(N \setminus \sigma_n) = m_{\sigma_n}^\sigma(v)$. Tegyük fel, hogy a leximax és a marginális kifizetések egyenlőségét már beláttuk a σ^* szerinti első $j \geq 1$ játékosra, azaz bármilyen $k = 1, \ldots, j$ mellett a $\sigma_k^* = \sigma_{n+1-k}$ játékos kifizetésére teljesül, hogy $s_{\sigma_k^*}^{\sigma^*}(v) = m_{\sigma_{n+1-k}}^\sigma(v)$. Ezeket összeadva a marginális kifizetések teleszkópos jellegéből adódik, hogy fennáll a $\sum_{k=1}^j s_{\sigma_k^*}^{\sigma^*}(v) = b^v(\sigma_1^* \ldots \sigma_j^*)$ összefüggés is. Mivel $m^\sigma(v)$ magbeli, a $\sigma_{j+1}^* = \sigma_{n-j}$ játékos leximax kifizetésének meghatározásában szereplő tetszőleges $Q \subseteq \{\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_j^*\}$ játékoshalmazra teljesül, hogy

$$
\begin{aligned}
b^v(Q \cup \sigma_{j+1}^*) - \sum_{k \in Q} s_k^{\sigma^*}(v) &= b^v(Q \cup \sigma_{n-j}) - \sum_{k \in Q} m_k^\sigma(v) \\
&\geq m_{\sigma_{n-j}}^\sigma(v) \\
&= v(\sigma_1 \ldots \sigma_{n-j}) - v(\sigma_1 \ldots \sigma_{n-j-1}) \\
&= b^v(\sigma_1^* \ldots \sigma_j^* \sigma_{j+1}^*) - b^v(\sigma_1^* \ldots \sigma_j^*) \\
&= b^v(\sigma_1^* \ldots \sigma_j^* \sigma_{j+1}^*) - \sum_{k=1}^j s_{\sigma_k^*}^{\sigma^*}(v).
\end{aligned}
$$

Eszerint a minimumot a legbővebb $Q = \{\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_j^*\}$ halmaz adja, tehát a $\sigma_{j+1}^* = \sigma_{n-j}$ játékos leximax kifizetésére is teljesül, hogy $s_{\sigma_{j+1}^*}^{\sigma^*}(v) = m_{\sigma_{n-j}}^{\sigma}(v)$. Ezzel induktív módon beláttuk, hogy $s^{\sigma^*}(v) = m^{\sigma}(v)$, amennyiben $m^{\sigma}(v)$ magbeli.

Ebből az észrevételből viszont állításunk azonnal következik, hiszen Hamers et al. (2002) fent idézett eredménye szerint tetszőleges hozzárendelési játék magjának mindegyik extremális pontja előáll, mint egy alkalmasan választott sorrendhez tartozó marginális allokáció, vagyis előáll, mint a fordított sorrendhez tartozó leximax allokáció. ❑

További vizsgálatokat igényel viszont a hozzárendelési játékok osztályára feltett S1 kérdés pontos megválaszolása.[2] Ehhez szükségesnek tűnik ugyanis a hozzárendelési játékok duáljának, pontosabban a duál magjának egy olyan jellegű „explicit” megadása, mint ami a magra ismert (lásd az 1. Tétel 1. pontját). Használhatónak véljük ugyanakkor Demange (1982), illetve Leonard (1983) egymástól függetlenül bizonyított eredményét, miszerint

> *tetszőleges w_A hozzárendelési játékban, a $k \in I \cup J$ játékos magbeli kifizetéseinek maximuma pontosan $b_k^{w_A} = w_A(I \cup J) - w_A(I \cup J \setminus k)$.*

Tetszőleges σ sorrend esetén tehát a σ_1 játékos leximax kifizetése megegyezik ennek a játékosnak a magbeli maximális kifizetésével. Ugyancsak hasznosak lehetnek Núñez és Rafels eredményei a hozzárendelési játékok magjának, illetve alapmátrixának a különböző dekompozícióiról (lásd a (Núñez és Rafels, 2009) cikket és az ott található további hivatkozásokat).

Köszönetnyilvánítás:
A szerző kutatásait az OTKA K-72856 pályázat támogatta.

Hivatkozások

Demange, G. (1982). Strategyproofness in the assignment market game. *Mimeo*, Laboratoire d'Econométrie de l'École Politechnique, Paris.

Hamers, H., Klijn, F., Solymosi, T., Tijs, S., Villar, J. P. (2002). Assignment games satisfy the CoMa-property. *Games and Economic Behavior*, 38:231–239.

Ichiishi, T. (1981). Super-modularity: Applications to convex games and to the greedy algorithm for LP. *Journal of Economic Theory*, 25:283–286.

Izquierdo, J. M., Núñez, M., Rafels, C. (2007). A simple procedure to obtain the extreme core allocations of an assignment market. *International Journal of Game Theory*, 36:17–26.

[2] Reményeim szerint jövőre egy, a fentiekhez hasonló „éles” eredménnyel köszönthetem az akkor 71 éves Forgó Ferencet.

Kuipers, J. (1994). Combinatorial methods in cooperative game theory. *Ph.D. Thesis*, University of Limburg, Maastricht, The Netherlands.

Leonard, H. B. (1983). Elicitation of honest preferences for the assignment of individuals to positions. *Journal of Political Economy,* 91:461–479.

Neumann, J. von, Morgenstern, O. (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Núñez, M., Rafels, C. (2009). A glove-market partitioned matrix related to the assignment game. *Games and Economic Behavior*, 67:598–610.

Shapley, L. S. (1971). Cores of convex games. *International Journal of Game Theory*, 1:11–26.

Shapley, L. S., Shubik, M. (1972). The assignment game I: The core. *International Journal of Game Theory*, 1:111–130.

Solymosi, T., Raghavan, T. (2001). Assignment games with stable core. *International Journal of Game Theory*, 30:177–185.

Weber, R. J. (1988). Probabilistic values for games. In: Roth, A. E. (szerk.) *The Shapley Value*, Cambridge University Press, pp. 101–119.