FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

Trabajo Fin de Grado

OPTIMIZACIÓN LINEAL APLICADA A TEORÍA DE JUEGOS

Alejandro Serrano Gallardo

Dirigido por:

Victoria Martín Márquez

Sevilla, Junio 2017.

Índice general

ABSTRACT

In the following TFG we deal with the Game Theory and with the application that the Linear Programming has on it. We start defining some key concepts that will serve us as a base. Within the Game Theory there are manly two theories: the cooperative one and the non-cooperative one. We consider that the non-cooperative approach is the most appropriate to analyse our problem, that is: every single player might find its own strategies considering that the others will use their best strategies as well. To this effect, we will use the Linear Programming to obtain the most accurate solution. On the other side, the cooperative approach deals with the assumption that the hypothetical players are going to cooperate and, to this respect, they will act according to the most suitable social way, focusing on how the players should divide out the benefits of its cooperation. Due to those reasons, we will use the Core and the Nucleolus and revise the Linear Production Games, in which the Linear Programming furnishes on how to spread the benefits within extensive coalitions.

Breve introducción histórica

La Programación Lineal estudia el problema de minimizar o maximizar una función lineal en presencia de desigualdades lineales. Desde que George B. Dantzig desarrolló el método simplex en 1947, la programación lineal se ha utilizado extensamente en el área militar, industrial, gubernamental y de planificación urbana, entre otras. Su popularidad se puede atribuir a muchos factores, incluyendo su potencial para modelar problemas grandes y complejos, y la habilidad de los usuarios para resolver problemas a gran escala en un intervalo de tiempo razonable mediante el uso del método simplex y de computadoras. A partir de la Segunda Guerra Mundial se hizo evidente que era esencial la planificación y coordinación entre varios proyectos, así como el uso eficaz de los recursos disponibles. En junio de 1947 se inició un trabajo intensivo del equipo de la Fuerza Aérea de los EE.UU. conocido como SCOOP (Scientific Computation of Optimum Programs). Como resultado, George B. Dantzig desarrolló el método simplex a finales del verano de 1947. El interés de la programación lineal se difundió rápidamente entre economistas, matemáticos, estadísticos e instituciones gubernamentales.

Desde la creación del método simplex mucha gente ha contribuido al crecimiento de la programación lineal, ya sea desarrollando su teoría matemática, diseñando códigos y métodos computacionales eficientes, experimentando nuevas aplicaciones, y también utilizando la programación lineal como una herramienta auxiliar para resolver problemas más complejos como son programas enteros, programas discretos, programas no lineales, problemas combinatorios, problemas de programación estocástica y problemas de control óptimo.

La Teoría de Juegos como tal fue creada por el matemático húngaro John von Neumann (1903-1957) y por Oskar Morgenstern (1902-1976) en 1944 gracias a la publicación de su libro "The Theory of Games Behavior". Anteriormente los economistas Cournot y Edgeworth habían anticipado ya ciertas ideas, a las que se sumaron otras posteriores de los matemáticos Borel y Zermelo que en uno de sus trabajos (1913) muestra que juegos como el ajedrez son resolubles. Sin embargo, no fue hasta la aparición del libro de von Neumann y Morgenstern cuando se comprendió la importancia de la Teoría de Juegos para estudiar las relaciones humanas.

Von Neumann y Morgenstern investigaron dos planteamientos distintos de la Teoría de Juegos. El primero de ellos es el planteamiento estratégico o no cooperativo. Este planteamiento requiere especificar detalladamente lo que los jugadores pueden y no pueden hacer durante el juego, y después cada jugador buscará una estrategia óptima.

En la segunda parte de su libro, von Neumann y Morgenstern desarrollaron el planteamiento coalicional o cooperativo, en el que buscaron describir la conducta óptima en juegos con muchos jugadores. Puesto que éste es un problema mucho más difícil, sus resultados fueran mucho menos precisos que los alcanzados para el caso de suma cero y dos jugadores, ambos juegos no cooperativos.

En los años 50 hubo un desarrollo importante de estas ideas en Princeton, con Luce and Raiffa (1957), difundiendo los resultados en su libro introductorio, Kuhn (1953) que permitió establecer una forma de atacar los juegos cooperativos, y por fin Nash (1950) quien definió el equilibrio que lleva su nombre, lo que permitió extender la Teoría de Juegos no-cooperativos más generales que los de suma cero. Durante esa época, el Departamento de Defensa de los EE.UU. fue el que financió las investigaciones en el tema, debido a que la mayor parte de las aplicaciones de los juegos de tipo suma-cero se concentraban en temas de estrategia militar.

John Forbes Nash (1928-2015) es el nombre más destacado relacionado con la Teoría de Juegos. A los 21 años escribió una tesina de menos de treinta páginas en la que expuso por primera vez su solución para juegos estratégicos no cooperativos, lo que desde entonces se llamó "el equilibrio de Nash", que tuvo un inmediato reconocimiento entre todos los especialistas.

El punto de equilibrio de Nash es una situación en la que ninguno de los jugadores siente la tentación de cambiar de estrategia ya que cualquier cambio implicaría una disminución en sus pagos. Von Neumann y Oskar Morgenstern habían ya ofrecido una solución similar pero sólo para los juegos de suma cero. Para la solución formal del problema, Nash utilizó funciones de mejor respuesta y el teorema del punto fijo de los matemáticos Brouwer y Kakutani.

En los años siguientes publicó nuevos escritos con originales soluciones para algunos problemas matemáticos y de la Teoría de Juegos, destacando la "solución de regateo de Nash" para juegos bipersonales cooperativos. Propuso también lo que se ha dado en llamar "el programa de Nash" para la reducción de todos los juegos cooperativos a un marco no cooperativo. A los veintinueve años se le diagnosticó una esquizofrenia paranoica que lo dejó prácticamente marginado de la sociedad e inútil para el trabajo científico durante dos décadas. Pasado ese lapsus, en los años setenta, recuperó su salud mental y pudo volver a la docencia y la investigación con nuevas geniales aportaciones, consiguiendo en 1994 el Premio Nóbel de Economía compartido con John C. Harsanyi y Reinhart Selten por sus pioneros análisis del equilibrio en la Teoría de los Juegos no cooperativos.

En los 60 y 70 Harsanyi (1967) extendió la Teoría de Juegos de información incompleta, es decir, aquellos en que los jugadores no conocen todas las características del juego: por ejemplo, no saben lo que obtienen los otros jugadores como recompensa. Ante la multiplicidad de equilibrios de Nash, muchos de los cuales no eran soluciones razonables a juegos, Selten (1975) definió el concepto de equilibrio perfecto en el subjuego para juegos de información completa y una generalización para el caso de juegos de información imperfecta.

La última aportación importante a la Teoría de Juegos es de Robert J. Aumann y Thomas C. Schelling, por la que han obtenido el premio Nóbel de Economía en el año 2005.

En The Strategy of Conflict, Schelling, aplica la Teoría de Juegos a las ciencias sociales. Sus estudios explican de qué forma un partido puede sacar provecho del empeoramiento de sus propias opciones de decisión y cómo la capacidad de represalia puede ser más útil que la habilidad para resistir un ataque.

Aumann fue pionero en realizar un amplio análisis formal de los juegos con sucesos repetidos. La teoría de los juegos repetidos es útil para entender los requisitos para una cooperación eficiente y explica por qué es más difícil la cooperación cuando hay muchos participantes y cuándo hay más probabilidad de que se rompa la interacción. La profundización en estos asuntos ayuda a explicar algunos conflictos, como la guerra de precios y las guerras comerciales.

En los últimos treinta años la Teoría de Juegos ha experimentado una expansión significativa en tres importantes aspectos. En lo que se refiere a la investigación científica no han cesado de aumentar las publicaciones especializadas en las que se estudia o aplica la Teoría de Juegos, tanto revistas como libros. En el aspecto docente, puede decirse que ha aumentado sensiblemente su influencia en los currícula de algunos grados y programas de doctorado, especialmente en los de Economía (tanto a través de asignaturas clásicas de corte microeconómico y macroeconómico, como de asignaturas específicas dedicadas al estudio de la Teoría de Juegos o a materias relacionadas con la información asimétrica, economía del pueblo, etc.) Por último, en el aspecto de divulgación y presencia pública puede decirse que el conocimiento de la Teoría de Juegos ha crecido fuertemente a partir de la concesión en 1994 del Premio Nóbel de Economía a tres de sus primeros y más importantes creadores (John Forbes Nash, Reinhard Selten y John C. Harsanyi), y especialmente tras la publicación de una interesante biografía de Nash que fue llevada exitosamente al cine en el año 2001.

Hay una curiosa anécdota extraida del libro de Dantzig *Mathematical Programming The State of the Art* [5], en la que se inicia la relación que tienen hoy en día la Teoría de Juegos y la Programación Lineal. El matemático estadounidense George Dantzig estaba desarrollando el método Simplex cuando decidió consultar con John von Neumann para ver que podía sugerirle sobre las técnicas de solución. Él era considerado por muchos el mejor matemático del mundo. El 3 de Octubre de 1947 Dantzing le visitó por primera vez en Princeton. Allí intentaba describirle la formulación del modelo de programación lineal cuando von Neumann impaciente le dijo que no se andara con rodeos, y Dantzig en menos de un minuto le puso la versión geométrica y algebraica del problema en la pizarra. von Neumann gritó "¡Era eso!", y en la siguiente hora y media se dedicó a darle una clase de teoría de programas lineales. Von Neumann dijo: "No quiero que pienses que estoy poniendo todo esto por arte de magia, es que recientemente he completado un libro con Oscar Morgenstern sobre la Teoria de Juegos. Y lo que estoy haciendo es conjeturar que los dos problemas son equivalentes. La teoría que que he desarrollado de tu problema, es análoga al que hemos desarrollado en Teoría de Juegos". Y fue ahí cuando se descubrió la relación que había entre la Programación Lineal y la Teoría de Juegos.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Conceptos básicos de la Teoría de Juegos

Hablando en términos generales e intuitivos, podríamos decir que la Teoría de Juegos estudia situaciones de conflicto y cooperación a las que denominamos juegos, en las que interactúan individuos racionales, analizando los comportamientos y resultados que son de esperar, bien mediante decisiones individuales (caso de los juegos no cooperativos), bien mediante acuerdos entre los participantes (caso de los juegos cooperativos). La Teoría de Juegos ha aportado instrumentos de análisis (entre ellos el equilibrio de Nash) que han resultado eficaces y enriquecedores en el estudio de muchas situaciones de tipo económico (en el estudio, por ejemplo, de los mercados oligopolísticos, de las licitaciones públicas o de la regulación de mercado), y también de muchas situaciones de tipo social, político y legal. Ello se ha reflejado en los progamas de estudio de economía y de las ciencias sociales en general.

Cabe distinguir dos tipos básicos de juego, o dicho de otro modo, dos enfoques básicos en el análisis de un juego, cooperativos y no cooperativos.

En el enfoque cooperativo se analizan las posibilidades de que algunos o todos los jugadores lleguen a un acuerdo sobre que decisiones va a tomar cada uno, mientras que en el enfoque no cooperativo se analiza que decisiones tomaría cada jugador en ausencia de acuerdo previo. Entre los juegos no cooperativos cabe hacer dos distinciones básicas, juegos estáticos o dinámicos, y juegos con o sin información completa.

Aunque se explicará con más detalle cada uno de los términos, se incluye a continuación una primera definición de la terminología básica que se utiliza habitualmente en la Teoría de Juegos.

- *Jugadores: Participantes que toman decisiones con el fin de maximizar su utilidad.*

- *Acciones de cada jugador: Decisiones que puede tomar cada jugador. El conjunto de acciones de un jugador puede ser finito o infinito.*

- *Resultados del juego: Distintos modos en que puede concluir un juego. Cada resultado conlleva unas consecuencias para cada jugador.*

- *Pagos: Valoración que para cada jugador tienen las consecuencias de alcanzar un de- terminado resultado. Cada jugador recibe un pago al acabar el juego.*

- *Estrategias: Plan completo de acciones con las que cada jugador participa en el juego.*

- *Forma normal y forma extensiva: Son formas de describir un juego. Ambas especifican los jugadores, las acciones y los pagos.*

La forma normal o forma estratégica organiza la descripción centrando su énfasis en las estrategias de los jugadores. La forma extensiva lo hace en forma de árbol, resaltando la secuencia del juego.

En este trabajo nos centraremos en juegos cooperativos y juegos no cooperativos. Veamos ahora un ejemplo:

Ejemplo 1.1.1. *Piedra, papel o tijera. Dos individuos, a los que denominaremos Jugador I y Jugador II, escogen simultáneamente una de las tres opciones (piedra, papel o tijera). Si uno escoge la piedra y el otro papel, gana quien escoge papel. Si uno escoge la piedra y el otro la tijera, gana el que escoge piedra. Si uno escoge el papel y el otro la tijera, gana quien escoge tijera. Si los dos jugadores eligen la misma opción se empata. La información relevante la podemos resumir en la tabla siguiente:*

	Piedra	*Papel*	*Tijer*
Piedra	*0*	*-1*	*1*
Papel	*1*	*0*	*-1*
Tijera	*-1*	*1*	*0*

1.2. Conceptos básicos de la Programación Lineal

En este apartado veremos los conceptos básicos que necesitaremos de ahora en adelante de la programación lineal.

Definición 1.2.1. *Un* ***problema de programación lineal*** *es un problema de optimización con restricciones en el que tanto la función a optimizar, también llamada función objetivo, como las restricciones son lineales. Todo problema de programación lineal se puede expresar como:*

$$\begin{aligned} \textit{minimizar} \quad & cx^t \\ \textit{sujeto a} \quad & xA \geq b, \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{P}$$

donde A es una matriz $m \times n$, c es un vector $1 \times m$ y b es un vector $1 \times n$. Queremos encontrar una solución factible para el problema (es decir, un vector $x \in \mathbb{R}^m$ que satisfaga las desigualdades) de modo que minimice la *función objetivo* cx^t *dentro del conjunto de soluciones factibles; de tal solución decimos que es óptima para este problema.*

Definición 1.2.2. *El* ***dual del problema*** *de la definición anterior es el siguiente problema de programación:*

$$\begin{aligned} \textit{maximizar} \quad & by^t \\ \textit{sujeto a} \quad & Ay^t \leq c^t, \\ & y \geq 0. \end{aligned} \tag{D}$$

Ahora queremos encontrar una solución factible para el problema (es decir, un vector $y \in \mathbb{R}^n$ que satisfaga las desigualdades) de modo que maximice la función objetivo by^t dentro del conjunto de soluciones factibles; de tal solución decimos que es óptima para este problema.

Si tenemos un par de problemas como los de las dos definiciones anteriores, nos referimos al primero como el problema primal (P) y al segundo como el problema dual (D). A continuación enunciamos un importante resultado que relaciona ambos problemas.

Teorema 1.2.3. [*Teorema de dualidad*]. *Sean (P) y (D) un par de problemas de programación lineal duales. Entonces,*

1. *(P) tiene una solución óptima si y solo si (D) tiene una solución óptima.*

2. *Supongamos que* x *e* y *son soluciones factibles de los problemas (P) y (D), respectivamente. Entonces,* x *es una solución óptima de (P) e* y *es una solución óptima de (D) si y solo si* $cx^t = by^t$.

Para llegar a la solución de un problema de Programación Lineal se utilizan diferentes métodos de solución. Los más difundidos son: el método gráfico y el Método Simplex. La solución de un problema de Programación Lineal utilizando un procedimiento gráfico es posible si se tienen no más de dos variables. El Método Simplex fue el primer método surgido para solucionar problemas de Programación Lineal, por lo que se le considera el método de solución clásico por excelencia. Teniendo en cuenta la filosofía de este método han surgido otros métodos cuyas ventajas fundamentales se concentran en las posibilidades de los mismos para ser programados por computadoras.

El procedimiento gráfico comienza elaborando una gráfica que muestre las soluciones posibles (valores x_1 y x_2). La gráfica tendrá valores los valores x_1 en el eje horizontal y los valores x_2 en el eje vertical. El procedimiento para hallar la solución gráfica consiste en lo siguiente:

1. Para cada inecuación del sistema de restricciones (medio espacio cerrado) se toma la recta correspondiente y se determinan los interceptos con la gráfica. Si la recta pasa por el origen del eje de coordenadas, el término independiente es cero, entonces se traza la recta tomando el origen y otro punto determinado dando un valor arbitrario a una de las variables.

2. Para determinar los puntos que satisfacen cada inecuación se sustituye un punto cualquiera del espacio (se recomienda el origen cuyas coordenadas son (0,0)), y de esta forma se determina si los puntos que satisfacen la misma están hacia el lado que está el origen o hacia el lado contrario, señalando con una flecha ese lado. Cuando la recta pasa por el origen entonces se toma otro punto cualquiera pero que sean sencillos los valores de sus coordenadas, por ejemplo, (0,1) , (1,0), (1,1), etc.

3. Luego se determina la región solución que es la región del plano que satisface todas las restricciones al mismo tiempo y que debe estar en el primer cuadrante. La figura formada es un poliedro convexo que tiene un conjunto de puntos extremos.

4. Se busca el punto óptimo entre el conjunto de puntos extremos. Para

eso se sustituye cada par de puntos (x_1, x_2) de los puntos extremos en la función objetivo y se calcula el valor de Z. Si se está maximizando el valor de la misma, el punto óptimo será aquel que proporcione el valor mayor para Z y si el criterio de optimización es de minimizar, entonces el punto óptimo será aquel que proporcione el valor mínimo de Z.

Este método gráfico tiene la desventaja que sólo permite la solución de problemas que tengan dos variables de aquí que la mayoría de los problemas de programación lineal se resuelvan utilizando como base el método simplex.

El método del Simplex constituye un procedimiento iterativo algebraico que resuelve cualquier problema en un número finito de pasos. La concepción de este método ha facilitados que otros especialistas del tema desarrollen otros métodos de solución con la misma filosofía, pero más adecuados para la programación por computadoras. Para explicar el método simplex es necesario definir un conjunto de conceptos básicos necesarios para la comprensión del mismo. Los pasos a tener en cuenta son los siguientes:

Paso 1. Poner el problema en forma estandar: La función objetivo se minimiza y las restricciones son de igualdad.

Paso 2. Encontrar una solución básica factible.

Paso 3. Testar la optimalidad.

Paso 4. Elegir una variable de entrada.

Paso 5. Elegir una variable de salida.

Paso 6. Actualizar la base y la solución básica factible.

Paso 7. Ahora tenemos una solución básica factible mejor que la inicial. Necesitamos saber si ésta es la óptima. Para ello necesitamos aplicar el test de optimalidad, el **paso 3**.

Para los que quieran entrar en más detalle pueden hacer uso de *Paul R. Thie y Gerard E. Keough* [9].

Capítulo 2

Juegos no cooperativos

2.1. Introducción a los Juegos en Forma Estratégica

Un juego en forma estratégica es un modelo estático que describe problemas de decisión en los que interaccionan varios jugadores. De acuerdo a este modelo, los jugadores toman sus decisiones simultánea e independientemente y, aunque los jugadores podrían comunicarse y tomar acuerdos informales antes de que el juego comience, se supone que no disponen de mecanisms que les permitan tomar acuerdos vinculantes. De ahora en adelante asumiremos que todos los jugadores son racionales en el sentido de que intentan maximizar su propia utilidad. Daremos ahora la definición formal de juego en forma estratégica.

Definición 2.1.1. *Un juego en* ***forma estratégica*** *G con conjunto de jugadores $N = 1, ..., n$ es una 2n-tupla $G = (X_1, ..., X_n,\ H_1, ..., H_n)$ donde, para todo $i \in N$, X_i es el conjunto de estrategias del jugador i y $H_i : X = \prod_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ es su función de pago, que asigna a cada perfil de estrategias $x \in X$ el pago que i obtiene si se juega de acuerdo a tal perfil.*

En realidad, en un problema de decisión en el que interaccionan los jugadores de N están involucrados los siguientes elementos:

- $\{X_i\}_{i\in N}$, los conjuntos de estrategias de los jugadores.
- R, el conjunto de posibles resultados.
- Una aplicación $f : X = \prod_{i=n}^{n} X_i \longrightarrow R$ que asigna a cada perfil de estrategias x su correspondiente resultado $f(x)$.
- $\{\succeq_i\}_{i\in N}$, las preferencias de los jugadores sobre R (relaciones binarias completas y transitivas).

La definición de juego en forma estratégica asume que las preferencias de los jugadores pueden representarse a través de funciones de utilidad. Si para cada $i \in N$ denotamos por h_i su función de utilidad, la correspondiente función de pago H_i viene dada, para todo perfil de estrategias $x \in X$, por $H_i(x) = h_i(f(x))$. Veamos ahora un ejemplo muy conocido en la Teoría de Juegos.

Ejemplo 2.1.2. *Dilema del prisionero. Dos sospechosos de un delito grave y de un pequeño hurto son ubicados en celdas diferentes. Se sabe que son culpables de ambos hechos, pero no hay pruebas de que hayan cometido el delito. A ambos se les da la oportunidad de confesar. Si ambos confiesan el delito, cada uno de ellos pasará 10 años en la cárcel. Si sólo uno confiesa, actuará como testigo contra el otro (que pasará 15 años en la cárcel) y no recibirá ningún castigo. Finalmente, si ninguno confiesa, serán juzgados por el hurto y cada uno de ellos pasará en la cárcel 1 año. Siguiendo la terminología común para este juego, nos vamos a referir a la confesión como "delatar" (D) y a la no confesión como "no delatar" (ND). En tal caso, el juego del dilema del prisionero se puede representar como el juego en forma estratégica* (X_1, X_2, H_1, H_2) *dado por:*

- $X_1 = X_2 = \{ND, D\}$;
- $H_1(ND, ND) = -1$, $H_1(ND, D) = -15$, $H_1(D, ND) = 0$, $H_1(D, D) = -10$;
- $H_2(ND, ND) = -1$, $H_2(ND, D) = 0$, $H_2(D, ND) = -15$, $H_2(D, D) = -10$.

La siguiente tabla muestra una representación más conveniente de este juego, que es la forma habitual de representar juegos en forma estratégica bipersonales con conjuntos finitos de estrategias.

	ND	*D*
ND	*-1, -1*	*-15,0*
D	*0, -15*	*-10, -10*

El dilema del prisionero es un clásico en Teoría de Juegos. Ha sido ampliamente utilizado en ámbitos teóricos, aunque también para propósitos más aplicados en sociología o economía. El resultado "cooperativo", (-1,-1), es bastante bueno para ambos jugadores; es "casi" todo lo que pueden obtener en el juego. Ahora bien, para cada jugador, la estrategia D conduce a un pago estrictamente más alto que ND, independientemente de la estrategia elegida por el otro jugador. De esta forma, un decisor racional debería jugar siempre D. Así, si ambos jugadores se comportan racionalmente, obtienen pagos (-10,-10), que son muchos peores que los pagos en el resultado "cooperativo". Muchas situaciones de la vida real pueden ser vistas como un juego del dilema del prisionero. Por ejemplo, en la carrera nuclear entre los EEUU y la URSS durante la denominada Guerra Fría, ambos países debían decidir si producir o no armas nucleares; en esta situación, los pagos tendrían una estructura similar a la tabla vista antes. $\diamond$

2.2. El Equilibrio de Nash en Juegos en Forma Estratégica

El concepto de solución más importante para juegos en forma estratégica es el equilibrio de Nash. Por su impacto en la teoría económica, John Nash recibió el Premio Nobel de Economía en 1994. En *Kohlberg* [16] se dice que la idea principal del equilibrio de Nash es hacer una importante simplificación y, en vez de preocuparse de cómo se desarrollará la interacción entre los jugadores, preguntarse cuáles serán los resultados estables de tal interacción. De hecho, un equilibrio de Nash de un juego en forma estratégica no es más que un perfil de estrategias tal que ningún jugador gana desviándose unilateralmente de él; en este sentido puede decirse que el concepto de equilibrio de Nash busca resultados estables de la situación interactiva descrita por el juego en forma estratégica.

Definición 2.2.1. *Sea $G = (X_1, ..., X_n, H_1, ..., H_n)$ un juego en forma estratégica. Un* ***equilibrio de Nash*** *de G es un perfil de estrategias $x \in X$ que cumple que*

$$H_i(x) \geq H_i(x_{-i}, x'_i),$$

para todo $x'_i \in X_i$, y todo $i \in N$, donde el perfil (x_{-i}, x'_i) es:

$$(x_1, ..., x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, ..., x_n).$$

Vemos ahora un par de ejemplos.

Ejemplo 2.2.2. *El único equilibrio de Nash del dilema del prisionero es (D, D). De hecho, como ya hemos argumentado, (D, D) es el único comportamiento racional en un contexto no cooperativo.*

Ejemplo 2.2.3. *Pares o nones. Los jugadores 1 y 2 tienen que escoger simultánea e independientemente un número natural. Si la suma de los números escogidos es par, entonces gana el jugador 1 y si la suma es impar entonces* *gana el jugador 2. Esencialmente, todo lo que importa para este juego es si el número escogido es par (P) o impar (I) y, por tanto, el juego en forma estratégica que describe esta situación es el que se recoge en la siguiente tabla; claramente, este juego no tiene equilibrios de Nash.*

	P	*I*
P	*1,-1*	*-1,1*
I	*-1,1*	*1,-1*

A continuación vamos a presentar el teorema de Nash, que da una condición suficiente para la existencia de equilibrios de Nash en un juego en forma estratégica. Para enunciar y demostrar el teorema de Nash debemos introducir algunos conceptos y resultados de análisis de correspondencias.

Definición 2.2.4. *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$.*

*1) Una **correspondencia** F de X en Y es una aplicación de X en 2^Y (la clase de todos los subconjuntos de Y).*

*2) Se dice que una correspondencia F es **semicontinua superiormente** si para toda sucesión $\{x^k\} \subset X$ que converge a $x \in X$ y todo abierto G de Y que contiene a F(x), existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F(x^k) \subset G$ para todo $k \geq k_0$.*

*3) Se dice que una correspondencia F es **no vacía, cerrada o convexa** si, para todo $x \in X$, F(x) es un subconjunto de Y no vacío, cerrado o convexo, respectivamente.*

*4) Una aplicación $f \to \mathbb{R}$ es **cuasi-cóncava** si para todo $r \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) \geq r\}$ es convexo o, equivalentemente si para cualesquiera x, $\hat{x} \in X$ y para todo $\alpha \in$ [0,1], f(α x + $(1-\alpha)$ $\hat{x}$) $\geq \min\{f(x), f(\hat{x})\}$. Claramente la concavidad implica cuasi-concavidad ya que la concavidad requiere que*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)\hat{x}) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(\hat{x})$$

y

$$\alpha f(x) + (1-\alpha) f(\hat{x}) \geq min\{f(x), f(\hat{x})\}.$$

Teorema 2.2.5. [*Teorema del punto fijo de Kakutani*]. *Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ no vacío, convexo y compacto y sea F una correspondencia de X en X no vacía, semicontinua superiormente, cerrada y convexa. Entonces, F tiene al menos un punto fijo, es decir, existe $x \in X$ tal que $x \in F(x)$.*

Ya sí estamos en condiciones de enunciar y demostrar el teorema de Nash.

Teorema 2.2.6. [*Teorema de Nash*]. *Sea $G = (X_1, ..., X_n, H_1, ..., H_n)$ un juego en forma estratégica que cumple las siguientes condiciones para todo i $\in N$:*

1) X_i es un subconjunto de $\mathbb{R}^{m_i}$ no vacío, convexo y compacto.

2) H_i es continua.

3) Para todo $(\hat{x})_{-i}$, la función de x_i dada por $H_i((\hat{x})_{-i}, x_i)$ es cuasi-cóncava en X_i.

Entonces, G tiene al menos un equilibrio de Nash.

Demostración. Tomemos la correspondencia $F : X \to 2^X$ definida por $F(x) = \prod_{i \in X} F_i(x_{-i})$ donde, para todo $i \in N$,

$$F_i(x_{-i}) = \{x'_i : H_i(x_{-i}, x'_i) \geq H_i(x_{-i}, \hat{x}_i), \forall \hat{x}_i \in X_i\},$$

es decir, es el conjunto de mejores respuestas de i a x_{-i}. Veamos que, para cada $i \in N$, F_i cumple las hipótesis del teorema del punto fijo de Kakutani.

- No vacía. Es inmediato ya que toda función continua definida en un compacto alcanza su máximo.

- Cerrada. Es también inmediato por la continuidad de las funciones de pago y la compacidad del conjunto de estrategias.

- Convexa. Sean $x_{-i} \in X_{-i}$ y $\hat{x}_i \in F_i(x_{-i})$. Sea $r = H_i(x_{-i}, \hat{x}_i)$. Entonces se puede escribir $F_i(x_{-i}) = \{x_i \in X_i : H_i(x_{-i}, x_i) \geq r\}$. Aplicando la cuasi-concavidad de H_i se tiene que F_i es convexa.

- Semicontinua superiormente. Procederemos por reducción al absurdo y para ello supongamos que F_i no es semicontinua superiormente. Entonces existe una sucesión $\{x^k_{-i}\} \subset X_{-i}$ que converge a $\bar{x}_{-i} \in X_{-i}$ y un abierto $A^* \subset X_i$ con $F_i(\bar{x}_{-i} \subset A^*$ y cumpliendo que para todo $k_0 \in \mathbb{N}$ existe $k \geq k_0$ tal que $F_i(x^k_{-i}) \not\subset A^*$. Esto implica que existe una sucesión $\{\hat{x}^k_i\} \subset X_i$ tal que, para todo $m \in \mathbb{N}$, $\hat{x}^k_i \in F_i(\hat{x}^m_{-i})\backslash A^*$. Ahora, como X_i es compacto, $\{\hat{x}^m_i\}$ tiene una subsucesión convergente. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\{\hat{x}^m_i\}$ converge y sea $x^0_i \in X_i$ su límite. Ya que A^* es un abierto, $X_i\backslash A^*$ es un cerrado y por tanto $x^0_i \in X_i\backslash A^*$, con lo que $x^0_i \notin F_i(\bar{x}_{-i})$ (puesto que $F_i(\bar{x}_{-i}) \subset A^*$). Ahora, para todo $m \in \mathbb{N}$ y todo $x_i \in X_i$, $H_i(x^m_{-i}, \hat{x}^m_i) \geq H_i(x^m_{-i}, x_i)$ pues $\hat{x}^m_i \in F_i(x^m_{-i})$. Tomando limites y usando la continuidad de H_i se tiene que, para todo $x_i \in X_i$, $H_i(\bar{x}_{-i}, x^0_i) \geq H_i(\hat{x}_{-i}, x_i)$. Por tanto $x^0_i \in F_i(\bar{x}_{-i})$, con lo que se llega a una contradicción.

Se tiene entonces que B satisface las hipótesis del teorema del punto fijo de Kakutani y que, por tanto, tiene un punto fijo. Ahora bien, si x es un punto fijo de B, entonces x es un equilibrio de Nash del juego G. □

Obsérvese que ninguno de los juegos de los ejemplos tratados hasta ahora está en condiciones del teorema de Nash. Sin embargo, la condición suficiente que nos da este resultado se puede aplicar a una importante clase de juegos, como veremos en las secciones siguientes.

2.3. Juegos Bipersonales de Suma Nula

Muchos de los primeros trabajos de Teoría de Juegos se concentraron en una clase particular de juegos en forma estratégica: los juegos bipersonales de suma nula. Tales juegos tienen la particularidad de que los dos jugadores involucrados tienen intereses totalmente opuestos.

Definición 2.3.1. *Un* ***juego bipersonal de suma nula*** *es un juego en forma estratégica* $G = (X, Y, H_1, H_2)$ *tal que para todo perfil de estrategias* $(x, y) \in X \times Y, H_1(x, y) + H_2(x, y) = 0$.

Para caracterizar un juego bipersonal de suma nula es suficiente dar la funcion de pago de uno de los jugadores; habitualmente se da la del jugador 1 y se denota por H. De esta forma y para simplificar se suele decir que G es la terna (X, Y, H). En esta sección supondremos también que H está acotada en $X \times Y$.

Los juegos bipersonales de suma nula representan situaciones en las que los jugadores tienen intereses totalmente contrapuestos de forma que si el jugador 1 prefiere (x, y) a (x', y'), entonces el otro jugador prefiere (x', y') a (x, y). John von Neumann fue quien primero analizó los juegos bipersonales de suma nula y quién introdujo los siguientes conceptos.

Definición 2.3.2. *Sea* $G = (X,\ Y,\ H)$ *un juego bipersonal de suma nula.*

1. *Para cada* $x \in X$, $\Lambda(x) = \inf_{y \in Y} H(x, y)$. $\Lambda(x)$ *es la mínima ganancia que puede obtener el jugador 1 si utiliza* x.

2. *El* ***valor inferior*** *de* G, *denotado por* λ, *está dado por:*

$$\lambda = \sup_{x \in X} \Lambda(x),$$

   y representa el pago que el jugador 1 puede garantizarse por sí mismo en el juego G.

3. *Para cada* $y \in Y, \Gamma(y) = \sup_{x \in X} H(x, y)$. $\Gamma(y)$ *es la máxima pérdida que puede tener el jugador 2 si utiliza* y.

4. *El* ***valor superior*** *de* G, *denotado por* γ, *está dado por:*

$$\gamma = \inf_{y \in Y} \Gamma(y),$$

y representa la pérdida que como mucho tendrá el jugador 2 en el juego G, es decir, el pago que el jugador 1 obtendrá como mucho en el juego G.

Las interpretaciones que acabamos de hacer sugieren que el valor inferior de un juego bipersonal de suma nula es menor o igual que su valor superior. Efectivamente, para todo $x \in X$ y todo $y \in Y$, $\Lambda(x) = \inf_{y\in Y} H(x, y) \leq \sup_{x\in X} H(x, y) = \Gamma(y)$. Por tanto, $\lambda \leq \gamma$.

Definición 2.3.3. *Sea $G = (X, Y, H)$ un juego bipersonal de suma nula. Decimos que G está* ***estrictamente determinado*** *(o que tiene valor) si sus valores inferior y superior coinciden, es decir $\lambda = \gamma$. En este caso, decimos que $V = \lambda = \gamma$ es el valor del juego.*

El valor es el pago que el jugador 1 se puede garantizar por sí mismo y el opuesto del pago que el jugador 2 se puede garantizar por sí mismo.En aquellos juegos bipersonales de suma nula que no tienen valor, el problema no está estrictamente determinado en el sentido de que no está claro cómo se va a repartir $\gamma - \lambda$.

Definición 2.3.4. *Sea $G = (X, Y, H)$ un juego bipersonal de suma nula con valor V.*

1. *Se dice que $x \in X$ es una* ***estrategia óptima*** *del jugador 1 si $V = \Lambda(x)$.*

2. *Se dice que $y \in Y$ es una* ***estrategia óptima*** *del jugador 2 si $V = \Gamma(y)$.*

En el siguiente ejemplo veremos un juego bipersonal de suma nula finito con valor y estrategias óptimas de los jugadores.

Ejemplo 2.3.5. *Consideremos el juego bipersonal de suma nula dado por la siguiente tabla.*

	L	R
U	*2*	*2*
D	*1*	*3*

Claramente, $\Lambda(U) = 2$ *y* $\Lambda(D) = 1$*, por lo que* $\lambda = 2$*. Por otro lado,* $\Gamma(L) = 2$ *y* $\Gamma(R) = 3$*, por lo que* $\gamma = 2$*. En consecuencia, el valor de este juego es 2, y además,* U *y* L *son estrategias óptimas de los jugadores 1 y 2, respectivamente. Notemos que si un juego finito bipersonal de suma nula tiene valor, entonces ambos jugadores tienen estrategias óptimas.*

Hasta ahora no hemos hablado de equilbrios de Nash en el ámbito de los juegos bipersonales de suma nula, a pesar de que éstos son juegos en forma estratégica. Podríamos, pues, preguntarnos cuál es la relación entre las aproximaciones de Nash y de von Neumann en este contexto. A continuación tratamos esta cuestión.

Sea $G = (X, Y, H)$ un juego bipersonal de suma nula. Un equilibrio de Nash de G es un par $(x, y) \in X \times Y$ tal que, para todo $x' \in X$ y todo $y' \in Y$,

$$H(x, y) \geq H(x', y),$$

$$-H(x, y) \geq -H(x, y'),$$

o, equivalentemente,

$$H(x', y) \leq H(x, y) \leq H(x, y').$$

Un punto $(x, y) \in X \times Y$ que satisface la condición anterior se denomina punto de silla de la función H. Queda, pues, claro que en juego bipersonales de suma nula, un equilibrio de Nash y un punto de silla de la función de pago del jugador 1 son lo mismo. Los dos resultados siguientes muestran que la teoría de Nash para juegos en forma estratégica es una generalización de la teoría de von Neumann para juegos bipersonales de suma nula.

Proposición 2.3.6. *Sea $G = (X, Y, H)$ un juego bipersonal de suma nula y suponemos que $(x, y) \in X \times Y$ es un equilibrio de Nash de G. Entonces se cumple:*

1. *G está estrictamente determinado.*

2. *x es una estratégia óptima del jugador 1 e y es una estratégia óptima del jugador 2.*

3. *$V = H(x, y)$.*

Demostración. En las hipótesis de la proposición se tiene que:

1. $\lambda = \sup_{x' \in X} \Lambda(x') \geq \Lambda(x) = \text{ínf}_{y' \in Y} H(x, y') \geq H(x, y)$

2. $H(x, y) \geq \sup_{x' \in X} H(x', y) = \Gamma(y) \geq \text{ínf}_{y' \in Y} \Gamma(y') \geq \gamma$

Como $\lambda \leq \gamma$, entonces todas las desigualdades anteriores son igualdades y se tiene la demostración. □

Proposición 2.3.7. *Sea $G = (X, Y, H)$ un juego bipersonal de suma nula. Supongamos que G está estrictamente determinado y que $x \in X$ e $y \in Y$ son estrategias óptimas de los jugadores uno y dos, respectivamente. Entonces (x, y) es un equilibrio de Nash de G y $V = H(x, y)$.*

Demostración. En las hipótesis de la proposición, para todo $x' \in X$ y todo $y' \in Y$,

$$H(x', y) \leq \sup_{x'' \in X} H(x'', y) = \Gamma(y) = V = \Lambda(x) = \operatorname*{ínf}_{y'' \in Y} H(x, y'') \leq H(x, y').$$

Tomando $x' = x$ e $y' = y$ se obtiene que $V = H(x, y)$ y concluye la demostración. □

Nota 2.3.8. *Por las proposiciones anteriores, si* (x, y) *y* (x', y') *son equilibrios de Nash del juego bipersonal de suma nula* G*, entonces* (x, y') *y* (x', y) *son también equilibrios de Nash de* G*, y además,*

$$H(x, y) = H(x', y') = H(x, y') = H(x', y).$$

Sin embargo, esto no es cierto para cualquier juego bipersonal como veremos, por ejemplo, al estudiar los juegos bimatriciales.

Nota 2.3.9. *Un* ***juego bipersonal de suma constante*** *es un juego en forma estratégica* $G = (X, Y, H_1, H_2)$ *tal que, para todo perfil de estrategias* $(x, y) \in X \times Y, H_1(x, y) + H_2(x, y) = k$*, siendo* k *una constante real. Obviamente, un juego de suma nula es un juego de suma constante con* $k = 0$*. Sin embargo, desde el punto de vista estratégico, analizar el juego* G *es lo mismo que analizar el juego de suma nula* $G^1 = (X, Y, H_1)$ *ya que* $(x, y) \in X \times Y$ *es un equilibrio de Nash de* G *si y sólo si es un equilibrio de Nash de* G^1*.*

2.4. Estrategias Mixtas en Juegos Finitos

A partir de ahora nos centraremos en la clase de los juegos finitos, que definimos a continuación.

Definición 2.4.1. *Un* ***juego finito*** *es un juego en forma estratégica*

$$G = (X_1, ..., X_n, H_1, ..., H_n)$$

cuyos jugadores tienen conjuntos de estrategias finitos, es decir, tal que $|X_i| = m_i$ *para todo* $i \in N$ *(siendo cada* m_i *un número natural).*

El teorema de Nash visto anteriormente no se puede aplicar a los juegos finitos, ya que los conjuntos de estrategias no son convexos. Por otro lado, ya hemos visto un juego finito sin equilibrios de Nash: el juego de pares o nones.

Sin embargo, hay un "ingenio teórico" que nos permite extender el juego y garantizar la existencia de equilibrios de Nash en la revisión extendida de todo juego finito: tal ingenio consiste en aumentar las posibilidades estratégicas de los jugadores y considerar que no sólo tienen sus estrategias iniciales (que pasaremos a denominar estrategias puras), sino que también pueden escoger loterías sobre sus conjuntos finitos de estrategias puras. Esta extensión del juego original se llama extensión mixta y las estrategias de los jugadores en la extensión mixta se llaman estrategias mixtas.

Aunque nos hemos referido a la extensión mixta de un juego como un "ingenio teórico", las estrategias mixtas surgen de modo natural en muchas situaciones en la práctica. Vamos a discutir brevemente esta cuestión en el ejemplo siguiente, en el que introducimos informalmente la extensión mixta de un juego en forma estratégica. Después del ejemplo daremos una definición formal.

Ejemplo 2.4.2. *Consideremos de nuevo el juego de pares y nones y supongamos ahora que los jugadores, además de escoger P o I, pueden escoger también una loteria L que selecciona P con probabilidad 1/2 e I con probabilidad 1/2. Supongamos también que los jugadores tienen funciones de utilidad de von Neumann y Morgenstern y, por tanto, sus funciones de pago se pueden extender al conjunto de perfiles de estrategias mixtas calculando sus correspondientes esperanzas matemáticas. El juego resultante viene dado por la tabla siguiente:*

	P	*I*	*L*
P	*1,-1*	*-1,1*	*0,0*
I	*-1,1*	*1,-1*	*0,0*
L	*0,0*	*0,0*	*0,0*

Para calcular las funciones de pago del juego extendido hemos tenido en cuenta que, dado que estamos en un juego en forma estratégica, los jugadores *eligen sus loterías independientemente. Así, por ejemplo:*

$$H_1(L,L) = \frac{1}{4}H_1(P,P) + \frac{1}{4}H_1(P,I) + \frac{1}{4}H_1(I,P) + \frac{1}{4}H_1(I,I) = 0$$

Observamos que este juego tiene un equilibrio de Nash: (L, L). La extensión mixta del juego de partida es un nuevo juego en forma estratégica en el que los jugadores pueden escoger cualquier lotería sobre $\{P, I\}$*. Es fácil comprobrar que el único equilibrio de Nash de este juego es (L, L). Una posible interpretación de esto es la siguiente. En el juego de pares o nones es muy importante para cada uno de los jugadores que el otro no tenga ninguna información sobre si elegirá finalmente P o I. Para ello, lo mejor es que ni él mismo lo sepa, lo cual puede llevarse a efecto seleccionando la estrategia de L.* $\diamond$

Definición 2.4.3. *Sea* $G = (X_1, ..., X_n, H_1, ..., H_n)$ *un juego finito. La* ***extensión mixta*** *de G es el juego en forma estratégica*

$$E(G) = (S_1, ...S_n, H_1, ..., H_n)$$

donde, para cada jugador $i \in N$*,*

1. $S_i = \{s_i \in \mathbb{R}^{X_i} : s_i(x_i) \geq 0 \ \forall x_i \in X_i, \sum_{x_i \in X_i} s_i(x_i) = 1\}$
2. $H_i(s) = \sum_{x \in X} H_i(x)s(x)$, *para todo* $s \in S$, *donde* $S = \prod_{i \in N} S_i$ *y s(x) denota el producto* $s_1(x_1) \times ... \times s_n(x_n)$.

Nota 2.4.4. *La extensión mixta de un juego finito sólo tiene sentido cuando los jugadores tienen preferencias sobre el conjunto de loterías definidas sobre el conjunto de posibles resultados y sus funciones de utilidad son funciones de utilidad de von Neumann y Morgenstern.*

Nota 2.4.5. *E(G) es una extensión de G en el sentido de que, para todo jugador i, cada elemento de* X_i*, o estrategia pura, puede ser identificado con* *un elemento de S_i, o estrategia mixta, por lo que podemos escribir $X_i \subset S_i$. Por otro lado, las funciones de pago de los jugadores en E(G) son extensiones de las funciones de pago de los jugadores en G.*

Nota 2.4.6. *El conjunto de estrategias del jugador i lo vamos a identificar en ocasiones con el símplex de $\mathbb{R}^{m_i}$ dado por:*

$$\{s_i \in \mathbb{R}^{m_i} : s_i^k \geq 0 \ \forall k \in \{1, ..., m_i\}, \sum_{k=1}^{m_i} s_i^k = 1\}.$$

Nota 2.4.7. *La extensión mixta de un juego finito cumple las hipótesis del teorema de Nash y, por lo tanto, un corolario de tal teorema es que la extensión mixta de un juego finito tiene siempre, al menos, un equilibrio de Nash. De hecho, éste fue el resultado probado por John Nash en su artículo original.*

Para terminar con esta sección daremos algunas definiciones y resultados básicos en relación con los juegos finitos.

Definición 2.4.8. *Sea E(G) la extensión mixta de un juego finito y sean $s_i \in S_i$, una estrategia del jugador i, y $s \in S$ un perfil de estrategias.*

1. *El **soporte** de s_i es el conjunto $C(s_i)$ dado por:*

$$\{x_i \in X_i : s_i(x_i) > 0\},$$

2. *El **soporte** de s es el conjunto $C(s)$ dado por:*

$$\prod_{i \in N} C(s_i) = \{x \in X : s(x) > 0\}.$$

3. *Se dice que s_i es **completamente mixta** si $C(s_i) = X_i$. Se dice que s es completamente mixta si $C(s) = X$ o, equivalentemente, si s_i es completamente mixta para todo $i \in N$.*

4. *El* ***conjunto de mejores respuestas puras*** *del jugador i a s_{-i} es el conjunto*

$$PB_i(s_{-i}) = \{x_i \in X_i : H_i(s_{-i}, x_i) \geq H_i(s_{-i}, x_i')\forall x_i' \in X_i\}.$$

Usaremos la notación $PB(s) = \prod_{i\in N} PB_i(s_{-i})$.

Proposición 2.4.9. *En la extensión mixta de un juego finito, para todo $i \in N, s_i \in S_i$ y $s \in S$, se cumple:*

1. *$s_i \in B_i(s_{-i})$ si y sólo si $C(s_i) \subset PB_i(s_{-i})$.*
2. *s es un equilibrio de Nash de E(G) si y solo si $C(s) \subset PB(s)$.*
3. *s es un equilibrio de Nash de E(G) si y solo si $H_i(s) \geq H_i(s_{-i}, x_i)$ para todo $x_i \in X_i$ y todo $i \in N$.*

Demostración. Es fácil ver que $H_i(s) = \sum_{x_i\in X_i} H_i(s_{-i}, x_i)s_i(x_i)$, con lo que la proposición se sigue inmediatamente. □

Obsérvese que el apartado 3) de la proposición anterior implica que si un perfil de estrategias es un equilibrio de Nash de un juego finito G también lo es de $E(G)$.

2.5. Juegos Matriciales y Algoritmos

En esta sección comprobaremos que resolver un juego matricial es, en cierto modo, equivalente a resolver un par de problemas de programación lineal duales y obtendremos un algoritmo para resolver juegos matriciales.

Definición 2.5.1. *Un* ***juego bimatricial*** *es la extensión mixta de un juego bipersonal finito (M, N, H_1, H_2), donde $M = \{1, .., m\}$ y $N = \{1, .., n\}$. Por tanto, un juego bimatricial es una 4-tupla (S_m, S_n, H_1, H_2) tal que:*

1. $S_m = \{x \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0\ \forall i \in M, \sum_{i \in M} x_i = 1\}$.

2. $S_n = \{y \in \mathbb{R}^n : y_j \geq 0\ \forall j \in N, \sum_{j \in N} y_j = 1\}$.

3. *Para todo* $(x, y) \in S_m \times S_n$,

$$H_1(x, y) = \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} H_1(i, j) x_i y_j = xAy^t,$$

donde $A = (H_1(i, j))_{i \in M, j \in N}$ *es una matriz* $m \times n$.

4. *Para todo* $(x, y) \in S_m \times S_n$,

$$H_2(x, y) = \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} H_2(i, j) x_i y_j = xBy^t,$$

donde $B = (H_2(i, j))_{i \in M, j \in N}$ *es una matriz* $m \times n$.

Nótese que para caracterizar un juego bimatricial es suficiente conocer el par de matrices (A, B).

Definición 2.5.2. *Un* ***juego matricial*** *es la extensión mixta de un juego bipersonal de suma nula finito* (M, N, H), *donde* $M = \{1, ..., m\}$ *y* $N = \{1, ..., n\}$. *Por tanto, un juego matricial es una terna* (S_m, S_n, H) *tal que:*

1. $S_m = \{x \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0\ \forall i \in M, \sum_{i \in M} x_i = 1\}$.

2. $S_n = \{y \in \mathbb{R}^n : y_i \geq 0\ \forall j \in N, \sum_{j \in N} y_j = 1\}$.

3. *Para todo* $(x, y) \in S_m \times S_n$,

$$H(x, y) = \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} H(i, j) x_i y_j = xAy^t,$$

donde $A = (H(i, j))_{i \in M, j \in N}$ *es la matriz* $m \times n$ *que contiene los pagos del jugador 1.*

Véase que para caracterizar un juego matricial es suficiente dar la matriz A. Obviamente todo juego matricial puede verse como un juego bimatricial, aunque el recíproco no es cierto. Por tanto, el teorema de Nash implica que todo juego matricial tiene un equilibrio de Nash. Por la Proposición 2.3.7, se tiene entonces que todo juego matricial está estrictamente determinado. Éste es el resultado conocido como **teorema minimax**, probado por John von Neumann en 1928.

Teorema 2.5.3. [*Teorema minimax de von Neumann*]. *Todo juego matricial tiene un valor (en estrategias mixtas), es decir,*

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} x^tAy = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} x^tAy.$$

El lector interesado en la demostración del Teorema 2.5.3 puede encontrarla en *Isabel Fernández* [6].

Existen diferentes pruebas directas del teorema minimax, algunas de ellas muy elegantes: una basada en un lema de alternativas para matrices, una basada en un teorema de punto fijo de Brower; incluso hay una que utiliza únicamente el principio de inducción. El lector interesado puede encontrar algunas de estas demostraciones en *Owen* [8] y *González-Díaz y otros* [11].

Vamos a ver a continuación dos métodos para resolver juegos matriciales (por "resolver un juego matricial" entendemos encontrar su valor y los conjuntos de estrategias óptimas de los jugadores). Comenzamos por un método geométrico para juegos matriciales $2 \times n$. Para describirlo necesitamos el siguiente resultado.

Proposición 2.5.4. *Consideremos un juego matricial $m \times n$ dado por la matriz A. Entonces, para todo $x \in S_m$ y todo $y \in S_n$,*

$$\Lambda(x) = \min_{j\in N} xP_j,$$

$$\Gamma(y) = \max_{i\in M} Q_iy^t,$$

donde P_j y Q_i denotan la columna j-ésima y la fila i-ésima de A, respectivamente.

Demostración. Sólo vamos a probar la primera de las igualdades (la segunda se probaría analogamente). Sea $x \in S_m$, Claramente,

$$\Lambda(x) = \inf_{y \in S_n} xAy^t \leq \min_{j \in N} xP_j.$$

Por otro lado, dado $y \in S_n$.

$$xAy^t = \sum_{k \in N} (xP_k)y_k \geq \sum_{k \in N} (\min_{j \in N} xP_j)y_k = \min_{j \in N} xP_j.$$

Por tanto, $\Lambda(x) = \inf_{y \in S_n} xAy^t \geq \min_{j \in N} xP_j$, con lo que se tiene el resultado. $\square$

Consideramos ahora un juego matricial $2 \times n$ dado por la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & a_{2j} & ... & a_{2n} \end{pmatrix}$$

Podemos identificar una estrategia del jugagador 1, $x \in S_2$, con su primera componente, y utilizando la proposición anterior se tiene que:

$$\begin{aligned} V &= \max_{x \in [0,1]} \Lambda(x) = \max_{x \in [0,1]} \min_{j \in N} [(x, 1-x) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \end{pmatrix}] \\ &= \max_{x \in [0,1]} \min_{j \in N} [a_{2j} + (a_{1j} - a_{2j})x]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para calcular el valor del juego y el conjunto de estrategias óptimas del jugador 1, será suficiente representar, para cada $j \in N$, los segmentos $\{(x, a_{2j} + (a_{ij} - a_{2j})x) : x \in [0, 1]\}$, obtener su envoltura inferior y buscar el conjunto de puntos $\bar{x} \in S_m$ que maximiza esa envoltura.

Ahora, para calcular el conjunto de estrategias óptimas del jugador 2, debemos tener en cuenta que $y \in S_n$ es una de tales estrategias si y sólo si:

$$\begin{aligned} V = \Gamma(y) &= \max_{x\in[0,1]} H(x,y) \\ &= \max_{x\in[0,1]} xAy^t = \max_{x\in[0,1]} [\sum_{j\in N} [a_{2j} + (a_{1j} - a_{2j})x]y_j]. \end{aligned}$$

En consecuencia, una estrategia óptima del jugador 2 vendrá dada por un elemento de S_n que proporciona una combinación convexa de los segmentos $\{(x, a_{2j} + (a_{ij} - a_{2j})x) : x \in [0,1]\}$ que se encuentra bajo el segmento $\{(x, V) : x \in [0,1]\}$. A continuación lo vemos con un ejemplo.

Ejemplo 2.5.5. *Resolvamos el juego matricial dado por la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Los segmentos correspondientes a las columnas de A *son,* $\{(x, 1+x) : x \in [0,1]\}$, $\{(x, 4-2x) : x \in [0,1]\}$, $\{(x, 3) : x \in [0,1]\}$. *Claramente, el valor de este juego es* $V = 2$*, el conjunto de estrategias del jugador 1 es* $O_1(A) = \{(1,0)\}$ *y el conjunto de estrategias óptimas del jugador 2 es la envoltura convexa de* $(1,0,0)$ *y* $(2/3, 1/3, 0)$*, esto es* $O_2(A) = conv(\{(1,0,0), (2/3,1/3,0)\})$. *Para obtener* $O_2(A)$*, la forma más sencilla será combinar una recta creciente y otra decreciente de entre las que cortan a la recta* $y = V$ $(y = 2)$ *y conseguir que la pendiente de esa combinación sea nula. La recta será paralela al eje de abcisas y pasa por los puntos* $(0, V)$ *y* $(1, V)$*. Si ahora tomamos una combinación convexa de las expresiones* $1+x$ *y* $4-2x$ *de la forma* $\alpha(1+x) + (1-\alpha)(4-2x) = (3\alpha-2)x + 4 - 3\alpha$*, con* $\alpha \in [0,1]$*, entonces por la condición de pendiente nula,* $\alpha = 2/3$.

A continuación vamos a describir el denominado **método de las submatrices**, que es un algoritmo para resolver cualquier juego matricial $m \times n$. Se basa en la caracterización de los puntos extremos de los conjuntos de estrategias óptimas de los jugadores.

Proposición 2.5.6. *Sea A un juego matricial $m \times n$ y tomemos $x \in S_m$ e $y \in S_n$. Entonces:*

1. *$x \in O_1(A)$ si y sólo si $xP_j \geq V$, para todo $j \in N$.*

2. *$y \in O_2(A)$ si y sólo si $Q_i y^t \leq V$, para todo $i \in M$.*

Demostración. Probamos sólo la primera equivalencia (la segunda se probaría análogamente).

"$\Rightarrow$" Supongamos que $x \in O_1(A)$. Entonces, por la Proposición 2.5.4, $V = \Lambda(x) = \text{mín}_{j \in N} xP_j$. Consecuentemente, $V \leq xP_j$ para todo $j \in N$.

"$\Leftarrow$" Supongamos que $xP_j \geq V$ para todo $j \in N$. Aplicamos nuevamente la Proposición 2.5.4:

$$V = \max_{x' \in S_m} \Lambda(x') \geq \Lambda(x) = \min_{j \in N} xP_j \geq V$$

con lo que concluye la demostración. □

Proposición 2.5.7. *Sea A un juego matricial $m \times n$. Entonces, los conjuntos de estrategias óptimas de los jugadores, $O_1(A)$ y $O_2(A)$, son conjuntos convexos y compactos.*

Demostración. En virtud de la Proposición 2.5.6, los conjuntos son claramente convexos. También está claro que son acotados. Son cerrados ya que las funciones Λ y Γ son continuas y $O_1(A) = \Lambda^{-1}(\{V\})$ y $O_2(A) = \Lambda^{-1}(\{V\})$. □

Proposición 2.5.8. *Sea A un juego matricial $m \times n$, y tomemos $x \in S_m$, $y \in S_n$. Entonces, $x \in O_1(A)$ e $y \in O_2(A)$ si y sólo si $xP_j \geq Q_i y^t$ para todo $i \in M$ y todo $j \in N$.*

Demostración. "$\Rightarrow$" Esta implicación es una consecuencia de la Proposición 2.5.6.

"$\Leftarrow$" Si $xP_j \geq Q_i y^t$ para todo $i \in M$ y todo $j \in N$, entonces

$$V = \gamma \leq \Gamma(y) = \max_{i \in M} Q_i y^t \leq \min_{j \in N} xP_j = \Lambda(x) \leq \lambda = V.$$

Por lo tanto, todas las desigualdades anteriores son igualdades y con esto termina la demostración. □

Proposición 2.5.9. *Sean A y A' dos juegos matriciales $m \times n$ tales que $a'_{ij} = a_{ij} + k$, para todo $k \in \mathbb{R}, i \in M$ y todo $j \in N$ (siendo a_{ij} y a'_{ij} los elementos de A y A', respectivamente). Entonces, $V_{A'} = V_A + k$, $O_1(A) = O_1(A')$ y $O_2(A) = O_2(A')$.*

Demostración. Basta tener en cuenta que, para todo $x \in S_m$ y todo $y \in S_n$, $\Lambda_{A'}(x) - \Lambda_A(x) = \Gamma_{A'} - \Gamma_A(y) = k$. □

Definición 2.5.10. *Sea un juego matricial $m \times n$ y consideremos $x \in S_m$ e $y \in S_n$. El par (x, y) se denomina una* ***solución simple*** *de A si $xP_j = Q_i y^t$ para todo $i \in M$ y todo $j \in N$.*

Obsérvese que si (x, y) es una solución simple de A, entonces es también un equilibrio de Nash de A, aunque el recíproco no es cierto en general.

A continuación anunciaremos los tres teoremas principales en los que se basa el método de las submatrices. Sus demostraciones son bastante largas y pueden encontrarse, por ejemplo, en *Parthasarathy y Raghavan* [7] o *González-Díaz y otros* [11]. El primero de tales teoremas es un resultado clásico de análisis convexo y los otros dos son debidos a *Shapley y Snow* [12].

Teorema 2.5.11. [Teorema de Krein-Milman]. *Todo subconjunto no vacío, convexo y compacto $S \subset \mathbb{R}^n$ tiene al menos un punto extremo (esto es, un punto $x \in S$ tal que $S \backslash \{x\}$ es convexo). Además, si S_e es el conjunto de puntos extremos de S, entonces $S = conv(S_e)$.*

Teorema 2.5.12. *Sea A un juego matricial $n \times n$ con $|A| \neq 0$. Entonces, el juego A tiene una solución simple si y sólo si todos los números $R_1, .., R_n, C_1, .., C_n$ son no positivos o todos son no negativos donde, para todo $i, j \in N$,*

1. $R_i = \sum_{j \in N} a^*_{ij}$,

2. $C_j = \sum_{i \in N} a^*_{ij}$,

siendo $A^* = (a^*_{ij})$ *la matriz adjunta de* A*, es decir,* $A^* = |A|(A^{-1})^t$*. Además, si* A *tiene una solución simple, entonces tiene una única solución simple dada por:*

$$\left(\frac{1}{\sum_{i \in N} R_i}(R_1, .., R_n), \frac{1}{\sum_{j \in N} C_j}(C_1, ..., C_n) \right).$$

Teorema 2.5.13. *Sea* A *un juego matricial* $m \times n$ *con valor distinto de cero. Entonces:*

1. *Los conjuntos de puntos extremos de* $O_1(A)$ *y* $O_2(A)$ *son finitos.*

2. *Tomemos* $x \in O_1(A)$ *e* $y \in O_2(A)$*. Entonces* x *es un punto extremo de* $O_1(A)$ *e* y *es un punto extremo de* $O_2(A)$ *si y sólo si existe* B*, una submatriz cuadrada y no singular de* A*, tal que* (x_B, y_B) *es una solución simple de* B *(*x_B *denota el vector obtenido de* x *tras borrar las componentes corespondientes a las filas de* A *que no están en* B *e* y_B *se define análogamente).*

Ahora podemos dar el **método de las submatrices**. Consiste simplemente en encontrar todos los puntos extremos de los conjuntos de estrategias óptimas de los jugadores (ya sabemos que hay un número finito de tales puntos) buscando soluciones simples en todas las submatrices cuadradas y no singulares de la matriz del juego. Por la Proposición 2.5.7 y el teorema de Krein-Milman, los conjuntos de estrategias óptimas de los jugadores son las envolturas convexas de sus puntos extremos. A continuación describimos el método para un juego matricial $m \times n$ caracterizado por la matriz A.

1. **Paso 1**. El algoritmo sólo se puede aplicar si $V_A \neq 0$. Si $V_A = 0$ o si no tenemos seguridad de que $V_A \neq 0$, aplicaremos el algoritmo al juego

matricial $\hat{A}$, donde $\hat{A}$ es una matriz con todos sus elementos positivos que se obtiene sumando a todos los elementos de A una constante adecuada. Claramente, $V_{\hat{A}} > 0$ y, por la Proposición 2.5.9, resolver $\hat{A}$ es lo mismo que resolver A. Por tanto, sin pérdida de generalidad, suponemos $V_A \neq 0$.

2. **Paso 2**. Se buscan los equilibrios de Nash puros de A (un equilibrio de Nash puro de A es un elemento de tal matriz que sea el máximo de su columna y el mínimo de su fila). Si (x, y) es un equilibrio de Nash puro de A, entonces x es un punto extremo de $O_1(A)$ e y es un punto extremo de $O_2(A)$ (teniendo en cuenta el segundo apartado del Teorema 2.5.13, siendo B una matriz 1×1).

3. **Paso 3**. (Se repite para $i \in \{2, .., \text{mín}\{m, n\}\}$). Para cada submatriz $i \times i$ de A que sea no singular, se estudian si tienen una solución simple haciendo uso del Teorema 2.5.12. Si la tiene, se completa con ceros (en las filas y columnas borradas de A para obtener la submatriz en consideración) hasta tener un par $(x, y) \in S_m \times S_n$. Si $x \in O_1(A)$ e $y \in O_2(A)$ (usar la Proposición 2.5.8 para comprobarlo), entonces x es un punto extremo de $O_1(A)$ e y es un punto extremo de $O_2(A)$ (teniendo en cuenta el Teorema 2.5.13).

Terminamos esta sección con una aplicación de los juegos matriciales en antropología.

Ejemplo 2.5.14. *Este ejemplo está tomado de Davenport [13] y Straffin [14]. En su artículo, Davenport ilustra con un ejemplo que los patrones de comportamiento social a veces pueden ser respuestas funcionales a problemas que la sociedad debe resolver. Davenport estudió una aldea de Jamaica, donde alrededor de doscientos habitantes se ganaban la vida gracias a la pesca. Los caladeros se podían clasificar en bancos interiores (entre 5 y 15 millas de* *la costa) y bancos exteriores (entre 15 y 22 millas de la costa). Veintiséis tripulaciones de pescadores pescaban en canoas utilizando una clase de nasas que se vaciaban tres días por semana. Debido a las especiales características del fondo submarino, de vez en cuando se producían corrientes muy fuertes que afectaban a los bancos exteriores y que eran muy difíciles de prever. Los capitanes de las tripulaciones debían tomar una de las tres estrategias siguientes:*

1. *Pescar en los bancos interiores (I)*
2. *Pescar en los bancos exteriores (O)*
3. *Pescar en ambos bancos (I-O).*

Pescar en los bancos interiores es más seguro (en el sentido de que, cuando se producen las corrientes, el pescado de los bancos exteriores se pierde) y más fácil (en el sentido de que están mas próximos a la costa). Sin embargo, en los bancos exteriores se puede obtener mejor pescado. La siguiente tabla muestra la estimación realizada por Davenport de los beneficios medios mensuales, en libras esterlinas, para los capitanes de las canoas, dependiendo de la estrategia de pesca utilizada y del hecho de que se produjeran corrientes (R) o no (N).

	R	*N*
I	*17.3*	*11.5*
O	*-4.4*	*20.6*
I-O	*5.2*	*17*

Él destaca que hizo estimaciones antes de planear hacer un análisis de los datos por medio de la Teoría de Juegos. Los capitanes de las canoas se enfrentaban a un problema de decisión en un entorno de riesgo que se podía tratar como un juego matricial 3×2. *Si se resuelve utilizando alguno de los dos métodos explicados, el resultado es que el primer jugador tiene una única* *estrategia óptima (0.67,0,0.33). Sorprendentemente, el comportamiento real de los capitanes es muy próximo a esta estrategia óptima. Davenport observó que el 69 por ciento de ellos escogía la estrategia* I*, el 31 seguía la estrategia* $I - O$ *y ningún capitán usaba la estrategia O. Tambien observó que las corrientes se producían un 25 por ciento del tiempo, lo cual es también bastante próximo a la única estrategia óptima del jugador 2: (0.31, 0, 0.69). La crítica que se puede hacer a este análisis es que esta situación no es realmente un juego, porque si bien los pescadores buscan maximizar sus objetivos, no ocurre lo mismo con el jugador 2 que no está escogiendo su estrategia. Por lo tanto, un comportamiento racional para el jugador 1 sería observar las corrientes y responder de manera óptima. Ahora bien, la estrategia del jugador 1 que maximiza su pago esperado, asumiendo que las corrientes se producen un 25 por ciento del tiempo, es (0,1,0). Contra este último punto de vista se puede argumentar que las corrientes son impredecibles y que el porcentaje de tiempo que se producen, visto como una variable aleatoria, tiene mucha varianza. Esto puede explicar que la sociedad prefiera la estrategia maxmin que, con independencia de las corrientes, garantiza un resultado razonable (en realidad, muy próximo al óptimo) que asegura la supervivencia de la aldea.*

2.6. Juegos Matriciales y Programación Lineal

En esta sección comprobaremos que resolver un juego matricial es, en cierto sentido, equivalente a resolver un par de problemas de programación lineal duales y obtendremos un nuevo algoritmo para resolver juegos matriciales.

Consideremos un juego matricial A con su valor positivo (en vista de la Proposición 2.5.9 podemos hacer esta suposición sin pérdida de generalidad). Para encontrar el valor del juego y el conjunto de estrategias óptimas del jugador 1 basta resolver el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{maximixar} \quad & \Lambda \\ \text{sujeto a} \quad & xP_j \geq \Lambda, \forall j \in N, \\ & xJ_m^t = 1, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

donde $N_m = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^m$. Claramente, este problema es equivalente al siguiente:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \frac{1}{\Lambda} \\ \text{sujeto a} \quad & xA \geq \Lambda J_n, \\ & xJ_m^t = 1, \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Consideremos ahora el problema que describimos a continuación:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & uJ_m^t \\ \text{sujeto a} \quad & uA \geq J_n, \\ & u \geq 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Es un ejercicio sencillo probar el siguiente resultado.

Proposición 2.6.1. *a) Si el par* (x, Λ) *es una solución óptima del problema* (2.1) *entonces* u *es una solución óptima del problema* (2.2) *donde, para todo* $i \in M$,

$$u_i = \frac{1}{\Lambda} x_i$$

b) Si u es una solución óptima del problema (2.2)*, entonces* (x, Λ) *es una solución óptima del problema* (2.1) *donde, para todo $i \in M$,*

$$x_i = \frac{1}{uJ_m^t} u_i, \ \ y \ \Lambda = \frac{1}{uJ_m^t}.$$

Ahora podemos proceder de modo análogo desde el punto de vista del jugador 2. Para encontrar el valor del juego y el conjunto de estrategias óptimas del jugador 2 basta resolver el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & \Gamma \\ \text{sujeto a} & Q_i y^t \leq \Gamma, \forall i \in M, \\ & yJ_n^t = 1, \\ & y \geq 0. \end{array}$$

Claramente este problema es equivalente al siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{maximizar} & \dfrac{1}{\Gamma} \\ \text{sujeto a} & Ay^t \leq \Gamma J_m^t, \\ & yJ_n^t = 1, \\ & y \geq 0. \end{array} \tag{2.3}$$

Consideremos ahora el problema que describimos a continuación (que es el dual del problema (2.2):

$$\begin{array}{rl} \text{maximizar} & wJ_n^t \\ \text{sujeto a} & Aw^t \leq J_m^t, \\ & w \geq 0. \end{array} \tag{2.4}$$

De nuevo, es un ejercicio sencillo probar el siguiente resultado.

Proposición 2.6.2. *a) Si el par* (y,Γ) *es una solución óptima del problema* (2.3)*, entonces* w *es una solución óptima del problema* (2.4) *donde, para todo* $j \in N$,

$$w_j = \frac{1}{\Gamma} y_j.$$

b) Si w *es una solución óptima del problema* (2.4)*, entonces* (y,Γ) *es una solución óptima del problema 2.3 donde, para todo* $j \in N$,

$$y_j = \frac{1}{wJ_n^t} w_j, \ \ y\ \Gamma = \frac{1}{wJ_n^t}.$$

Como conclusión podemos decir que, para resolver un juego matricial, es suficiente resolver los problemas (2.2) y (2.4) que son un par de problemas de programación lineal duales. Nótese que este resultado implica que el algoritmo del símplex puede ser usado para resolver un juego matricial.

Vamos a ver ahora que, para resolver un par de problemas de programación lineal, es suficiente resolver un cierto juego matricial. Para ello precisamos de unas definiciones y resultados básicos.

Definición 2.6.3. *Un juego matricial* $n \times n$ *caracterizado por la matriz* A *se dice* ***simétrico*** *si los jugadores son intercambiables, esto es, si* $A = -A^t$.

Proposición 2.6.4. *Sea* A *un juego matricial* $n \times n$ *simétrico. Entonces, su valor* V *es cero y, además,* $O_1(A) = O_2(A)$.

Definición 2.6.5. *Sea* A *un juego matricial* $m \times n$*. Una fila* Q_i *se denomina* ***relevante*** *si existe* $x \in O_1(A)$ *tal que* $x_i > 0$*. Una columna* P_j *se denomina* ***relevante*** *si existe* $y \in O_2(A)$ *tal que* $y_j > 0$.

Proposición 2.6.6. *Sea* A *un juego matricial* $m \times n$.

1. *Si* P_j *es una columna relevante, entonces se tiene que* $xP_j = V$ *para todo* $x \in O_1(A)$.

2. Si Q_i es una fila relevante, entonces se tiene que $Q_i y^t = V$ para todo $y \in O_2(A)$.

Consideremos ahora un par de problemas de programación lineal duales (P) y (D) según las definiciones . Consideremos el siguiente juego matricial B:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & A & -c^t \\ -A^t & 0 & b^t \\ c & -b & 0 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que se trata de un juego matricial simétrico, por lo que su valor es cero y además $O_1(B) = O_2(B)$. A partir de ahora en juegos matriciales simétricos, al referirnos a una estrategia óptima de los jugadores diremos sencillamente una *estrategia óptima del juego.*

Teorema 2.6.7. *Los problemas (P) y (D) tienen soluciones óptimas si y sólo si el juego matricial B tiene una estrategia óptima cuya última componente es positiva.*

Ejemplo 2.6.8. *La matriz de pagos del jugador 1 es*

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Es claro que no hay estrategias puras en equilibrio.

Formulamos uno de los problemas de programación lineal, o el del jugador 1

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & v \\ \textit{sujeto a} & 2p_1 + 7p_2 \geq v \\ & 4p_1 + 2p_2 \geq v \\ & 3p_1 + 5p_2 \geq v \\ & p1 + p_2 = 1 \\ & p_1, p_2 \geq 0 \end{array}$$

o bien, el del jugador 2

$$\begin{array}{rl} \text{mín} & w \\ \textit{sujeto a} & 2q_1 + 4q_2 + 3q_3 \leq w \\ & 7q_1 + 2q_2 + 5q_3 \leq w \\ & q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ & q_1, q_2, q_3 \geq 0 \end{array}$$

Si por ejemplo resolvemos este último problema, la solución óptima es $q_1 = 2/7, q_2 = 5/7, q_3 = 0$*, siendo* $w = v = 24/7$*, y las variables duales son* $(-5/7, -2/7)$*, de donde se deduce que la estrategia óptima del jugador 1 es* $p_1 = 5/7, p_2 = 2/7$.

Capítulo 3

Juegos Cooperativos

En este capítulo tratamos de estudiar cómo pueden actuar grupos de jugadores, sin detenernos en las acciones individuales de los mismos. El problema fundamental que vamos a estudiar es el de cómo puede hacerse una distribución de pagos entre los jugadores que forman una coalición y han obtenido una ganancia actuando coordinalmente, de manera cooperativa y cómo la programación lineal facilita el cálculo. Para resolver dicho problema, y al igual que en el caso de los juegos no cooperativos, se han propuesto diversos conceptos de solución. En este capítulo se estudian dos de ellos: el core y el nucleolus.

3.1. Introducción

En los juegos cooperativos se parte de que es posible que algunos jugadores puedan llegar a acuerdos vinculantes (a los que quedarían obligados de manera ineludible), por lo que se trata es de estudiar los resultados que puede obtener cada una de las coaliciones de jugadores que se pueden formar. Se trata, por tanto de estudiar cómo pueden actuar grupos de jugadores, interesándonos los comportamientos colectivos y sin que haga falta detenerse en las acciones individuales de cada uno de los miembros de una coalición.

A continuación, tras recordar la definición de juego en forma coalicional (o juego en forma de función característica), se introducen otras definiciones que se van a utilizar a lo largo del capítulo.

Definición 3.1.1. *Un juego en **forma coalicional** o en forma función característica con utilidades transferibles consiste en:*

1. *Un conjunto finito de jugadores* $N = \{1, 2, ..., n\}$.

2. *Una función característica, que asocia a cada subconjunto* S *de* N *un número real* $v(S)$ *(valor de coalición), siendo* $v(\emptyset) = 0$.

Por tanto, $G = (N, v)$ *es un juego en forma coalicional con utilidades transferibles si* N *y* v *están especificados.*

Si al crecer el número de jugadores que forman una coalición se cumple que el beneficio o ganancia que obtiene la coalición no disminuye, estamos ante un juego cooperativo monótono, tal como se define formalmente a continuación.

Definición 3.1.2. *Se dice que un juego* $G = (N, v)$ *es **monótono** si* $\forall S, T \subset N$, *con* $S \subset T$, *se verifica que*

$$v(S) \leq v(T).$$

A continuación se define el concepto de juego superaditivo, en el cual cuando dos coaliciones con intersección vacía se unen el beneficio o ganancia de la nueva coalición es al menos igual a la suma de los beneficios de las coaliciones que se unen.

Definición 3.1.3. *Se dice que un juego* $G = (N, v)$ *es **superaditivo** si* $\forall S, T \subset N$, *con* $S \cap T = \emptyset$, *se verifica que*

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$$

Si la desigualdad de la definición anterior se da en sentido opuesto se dice que el juego es ***subaditivo****.*

Ahora se introduce una propiedad más fuerte que la anterior. Si dos coaliciones (con intersección no necesariamente vacía) se unen, entonces la suma de los beneficios de la unión e intersección es al menos igual a la suma de beneficios de las coaliciones que se unen.

Definición 3.1.4. *Se dice que un juego $G = (N, v)$ es* ***convexo*** *si $\forall S, T \subset N$, se verifica que*

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$$

Si la desigualdad anterior se da en sentido opuesto se dice que el juego es ***cóncavo****.*

Definición 3.1.5. *Sean (N, v) y (N, w) dos juegos cooperativos, con $N = \{1, 2, ..., N\}$. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Se define:*

$$\begin{aligned}
(v + w)(S) &= v(S) + w(S), \forall S \subset N; \\
(\lambda v)(S) &= \lambda[v(S)], \forall S \subset N; \\
(vw)(S) &= v(s)w(S), \forall S \subset N.
\end{aligned}$$

Se comprueba facilmente que el conjunto de juegos cooperativos con n jugadores, sobre el cuerpo de los números reales, con las operaciones definidas de suma y de producto por un escalar, tiene estructura de espacio vectorial de dimensión $2^n - 1$.

3.2. El Core y Conceptos Relacionados

Sea $G = (N, v)$ un juego en su forma coalicional, en donde $N = \{1, ..., n\}$ es el conjunto de jugadores y v es la función característica. Si en un juego los jugadores deciden trabajar conjuntamente, es decir, cooperan, el problema que se presenta consiste en cómo repartir el valor $v(N)$ entre los n jugadores. Sea $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ un vector de distribución de pagos, en donde para cada $i = 1, 2, .., n$, x_i representa el pago que recibe el jugador i. Para cualquier coalición $S \subset N$, se utilizará la siguiente notación:

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i.$$

Por tanto,

$$x(N) = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Definición 3.2.1. *El conjunto de* ***preimputaciones*** *de un juego* $G = (N, v)$ *es el siguiente conjunto de vectores de distribución de pagos:*

$$PI(N, v) = \{x = (x_1, x_2, .., x_n) \in \mathbb{R}^n : x(J) = v(J)\}.$$

Cabe pensar que ningún jugador aceptará un pago inferior al que obtendría por sí mismo sin participar en ninguna coalición. Surge entonces el concepto que se define a continuación.

Definición 3.2.2. *El conjunto de* ***imputaciones*** *de un juego* $G = (N, v)$ *es el siguiente conjunto de vectores de pagos:*

$$I(N, v) = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(n), x_i \geq v(\{i\}), \textit{para } i = 1, 2, .., n\}$$

La condición de que para cada jugador i tiene que cumplirse que $x_i \geq v(\{i\})$ recibe el nombre de principio de racionalidad individual.

La siguiente proposición nos da una condición necesaria y suficiente para que el conjunto de imputaciones de un juego sea no vacío.

Proposición 3.2.3. *Sea* $G = (N, v)$ *un juego en su forma función característica.*

$$I(N, v) \neq \emptyset \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) \leq v(N)$$

Definición 3.2.4. *Se dice que el juego $G = (N, v)$ es **esencial** si verifica que $I(N, v) \neq \emptyset$.*

El principio de racionalidad individual que se recoge en el conjunto de imputaciones puede extenderse a todas las coaliciones mediante el principio de racionalidad coalicional. Llegamos entonces al concepto de *core* de un juego cooperativo.

Definición 3.2.5. *El **core** de un juego $G = (N, v)$ es el siguiente conjunto de vectores de pagos:*

$$C(N, v) = \{x = (x_1, x_2, .., x_n) \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N), x(S) \geq v(S), \forall S \in P(N)\}$$

A partir de la definición se ve que el core es un subconjunto del conjunto de imputaciones. Se trata de las asignaciones que podrían constituir acuerdos de distribución estables, en el sentido de que ningún grupo de jugadores podría impugnar unilateralmente ninguno de esos acuerdos. En efecto, ningún grupo conseguiría por sí mismo más de lo que cualquiera de esos acuerdos le permite obtener.

Proposición 3.2.6. *Sea $G = (N, v)$ un juego cooperativo. El conjunto $C(N, v)$ es cerrado, acotado y convexo.*

Ejemplo 3.2.7. *Una finca está valorada por su actual propietario en 350.000 euros. Un empresario le ofrece acondicionarla para su utilización como polígono industrial, con lo que su valor de mercado alcanzaría los 700.000 euros. Una empresa constructora le ofrece urbanizar la finca para su posible subdivisión en parcelas destinadas a viviendas unifamiliares. Con esta urbanización el valor de la finca sería de 775.000 euros.*

Representamos el juego en forma coalicional. Sea

$$N = \{1, 2, 3\}$$

donde el jugador 1 es el empresario que ofrece acondicionar la finca como polígono industrial, la jugadora 2 es la empresa constructora y el jugador 3 es el propietario actual de la finca.

Obtengamos ahora la función característica para este juego cooperativo. Tanto el jugador 1 como la jugadora 2 necesitan el acuerdo con el jugador 3 para poder utilizar la finca. Sin la participación del jugador 3 no se puede hacer nada y, por tanto, no se puede obtener ningún beneficio. Por consiguiente:

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{1, 2\}) = 0.$$

Si el jugador 3 no coopera con ninguno de los otros dos jugadores mantiene la situación actual, es decir mantiene la finca tal como está, a la cual valora en 350.000 euros. Si llega a un acuerdo sólo con el jugador 1 para obtener el mayor valor posible, obtendrán entre los dos 700.000 euros. Si llega a un acuerdo exclusivamente con la jugadora 2 para obtener el mayor valor posible obtendrán entre los dos 775.000 euros. Finalmente si cooperan los tres jugadores y deciden llevar conjuntamente adelante el proyecto que dé mayor valor de mercado, obtendrán entre los tres 775.000 euros. Es decir,

$$v(\{3\}) = 350, v(\{1, 3\}) = 700, v(\{2, 3\}) = 775, v(\{1, 2, 3\}) = 775$$

en donde los valores de la función característica vienen expresados en miles de euros. Por tanto, la representación del juego en forma coalicional es (N, v) *en donde*

$$N = \{1, 2, 3\}$$

$$v : P(N) \to R, con$$

$$v(\emptyset) = 0, v(\{1\}) = 0, v(\{2\}) = 0, v(\{3\}) = 350,$$

$$v(\{1, 2\}) = 0.v(\{1, 3\}) = 700, v(\{2, 3\}) = 775, v(\{1, 2, 3\}) = 775$$

donde los valores de la función característica vienen dados en miles de euros.

Vamos a obtener ahora el core del juego. Pertenecerán al core los puntos (x_1, x_2, x_3) *que satisfagan las siguientes restricciones:*

$$x_1 + x_2 + x_3 = 775 \text{ (principio de eficiencia)},$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 350 \text{ (racionalidad individual)},$$

$$x_1 + x_2 \geq 0, x_1 + x_3 \geq 0, x_1 + x_3 \geq 700, x_2 + x_3 \geq 775$$

(racionalidad para las coaliciones formadas por dos jugadores).

Es decir, los elementos del core son los puntos que pertenecen al conjunto de imputaciones del juego y, además, verifican las restricciones correspondientes a la racionalidad para las coaliciones de los jugadores.

Teniendo en cuenta la restricción $x_1 + x_2 + x_3 = 775$ *(principio de eficiencia), se tiene que:*

$$x_1 + x_2 \geq 0 \Leftrightarrow 775 - x_3 \geq 0 \Leftrightarrow x_3 \leq 775$$

$$x_1 + x_3 \geq 700 \Leftrightarrow 775 - x_2 \geq 700 \Leftrightarrow x_2 \leq 75$$

$$x_2 + x_3 \geq 775 \Leftrightarrow 775 - x_1 \geq 775 \Leftrightarrow x_1 \leq 0$$

Por tanto,

$C(N, v) =$

$$= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1+x_2+x_3 = 775, x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq 75, 350 \leq x_3 \leq 775\} =$$

$$= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq 75, 350 \leq 775-x_2 \leq 775, x_3 = 775-x_2\} =$$

$$= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq 75, 0 \leq x_2 \leq 425, x_3 = 775 - x_2\} =$$

$$= \{(0, x_2, 775 - x_2) : 0 \leq x_2 \leq 75\}$$

Las distribuciones de pagos (x_1, x_2, x_3) *que cumplen el principio de eficiencia y no pertenencen al core son inaceptables para alguna coalición que se pueda* *formar y consigue mejores resultados de los que obtienen con* (x_1, x_2, x_3). *Así, por ejemplo:*

(50, 75, 650) no interesaría a la coalición $\{2, 3\}$, *que puede obtener por sí misma 775, que es mayor que 75 + 650 = 725, cantidad que obtiene con la distribución de pagos (50, 75, 650).*

3.3. Juegos de producción lineal

Los juegos de producción lineal fueron introducidos por *Owen* [10]. En esta sección veremos como la programación lineal facilita de forma considerable cómo repartir los beneficios en una coalición.

Definición 3.3.1. *Una familia* $\{S_1, S_2, .., S_m\}$ *de subconjuntos de N, distintos y no vacíos, es* ***equilibrada*** *sobre N si existen numeros positivos* $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_m$, *denominados pesos, tales que para todo* $i = 1, 2, ..., n$ *verifican:*

$$\sum_{\{j:i \in S_j\}} \alpha_j = 1.$$

Definición 3.3.2. *Se dice que el juego* (N, v) *es* ***equilibrado*** *si para cualquier familia equilibrada* $\{S_i, .., S_m\}$ *sobre* N, *con pesos* $\alpha_1, ..., \alpha_m$, *se verifica que*

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v(S_j) \leq v(N).$$

Teorema 3.3.1. *Un juego* (N, v) *tiene core no vacío si y sólo si* (N, v) *es un juego equilibrado.*

Sea

$$N = \{1, 2, .., n\}$$

un conjunto de agentes. Existen q recursos $R_1, R_2, .., R_q$, de manera que cada agente tiene determinada cantidad de cada uno de los recursos. Así, el jugador

$i \in N$, tiene b_{i1} unidades del recurso R_1, b_{i2} unidades de recurso R_2, .., b_{iq} unidades del recurso R_q. Estos recursos no tienen ningún valor por sí mismos. Sólo sirven para utilizarse en la producción de r bienes $B_1, B_2, .., B_r$. Se supone que el proceso de producción es lineal, de manera que una unidad del bien B_i requiere a_{1l} unidades de R_1, a_{2l} unidades de R_2,.., a_{ql} unidades de R_q, con $l \in 1, .., n$, y puede ser vendido a un precio de p_l unidades monetarias.

Cuando se forma una coalición $S \subseteq N$, los agentes que la componen unen sus recursos y producirán aquel vector de bienes $(x_1, x_2, .., x_r) \in \mathbb{R}^r$ que resuelva el siguiente programa lineal:

$$\begin{aligned}
v(S) = \text{máx} \quad & p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_r x_r \\
\text{sujeto a :} \quad & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1r} x_r \leq \sum_{i \in S} b_{i1} \\
& a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2r} x_r \leq \sum_{i \in S} b_{i2} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& a_{q1} x_1 + a_{q2} x_2 + ... + a_{qr} x_r \leq \sum_{i \in S} b_{iq} \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_r \geq 0
\end{aligned}$$

Demostraremos que el core de este juego es no vacío, viendo que dicho juego es equilibrado. En efecto, sea

$$B = \{S_1, S_2, .., S_m\}$$

cualquier familia de coaliciones equilibrada sobre N, con pesos (positivos) respectivos $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_m$. Por tratarse de una familia equilibrada se verifica que

$$\sum_{\{j : i \in S_j\}} \alpha_j = 1.$$

Veamos que el juego es equilibrado, es decir, que se verifica

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v(S_j) \leq v(N).$$

Para cada $S_j \in B$, sea $x^j = (x_1^j, x_2^j, .., x_r^j)$ la solución óptima del programa lineal que define $v(S_j)$. Por tanto se verifica que

$$v(S_j) = \sum_{l=1}^{r} p_l x_l^j$$

Sea

$$x^* = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x^j$$

Podemos poner $x^* = (x_1^*, x_2^*, .., x_r^*)$, siendo $x_l^* = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_l^j \geq 0, \forall l = 1, 2, .., r$

Para cada $k = 1, 2, ..., q$ se tiene que

$$\sum_{l=1}^{r} a_{kl} x_l^* = \sum_{l=1}^{r} a_{kl} \left[\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_l^j \right] = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \left[\sum_{l=1}^{r} a_{kl} x_l^j \right] \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \left[\sum_{i \in S_j} b_{ik} \right] = \sum_{i \in N} b_{ik} \left[\sum_{[j: i \in S_j]} \alpha_j \right] = \sum_{i \in N} b_{ik}$$

Por tanto x^* es solución factible del programa lineal que define $v(N)$, lo que implica que

$$\sum_{l=1}^{r} p_l x_l^* \leq v(N).$$

Por tanto,

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v(S_j) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \left[\sum_{l=1}^{r} p_l x_l^j \right] = \sum_{l=1}^{r} p_l \left[\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_l^j \right] = \sum_{l=1}^{r} p_l x_l^* \leq v(N)$$

como se quería demostrar.

El problema anterior es el primal de la coalición S, denotado (P_S), de forma matricial se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & p^t x \\ \text{sujeto a:} \quad & Ax \geq b(S) \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad (P_S)$$

Si consideramos varios agentes (varias empresas) que producen, con la misma tecnología, según los recursos de que disponen cada uno, un problema interesante es estudiar la posible cooperación entre varios de los agentes que pueden juntar sus recursos en un proceso de producción conjunto cuya finalidad es obtener un mayor beneficio aprovechando posibles sinérgias.

En juegos cooperativos TU suponemos que todos los jugadores alcanzan un cierto consenso, forman la gran coalición y el problema que se plantea es como repartir la utilidad total, v(N), entre los jugadores de una manera "justa". Este reparto o conjunto de repartos "justos" constituyen una solución del juego.

Dada la coalición S, consideremos el problema dual (D_S) del problema (P_S):

$$\begin{array}{rl} \text{mín} & b(S)^t u \\ \text{sujeto a} & A^t u \geq p \\ & u \geq 0 \end{array} \qquad (D_S)$$

En este problema la región factible no depende de la coalición que se forme; sin embargo la solución del problema $u^*(S) = (u_1^*(S), ..., u_q^*(S))$, y el valor de la función objetivo $v(S) = u^*(S)b(S)$ si que depende de cada coalición $S \subseteq N$. Si se valoran los recursos que cada jugador aporta al proceso de producción a los precios de equilibrio o precios sombra de los recursos correspondientes a la solución óptima del problema cuando se forma la gran coalición, N, el vector resultante es un reparto del núcleo del juego. El reparto o conjunto de repartos obtenidos de esta forma se llama conjunto de Owen. Veamos el teorema en el que se prueba lo anteriormente dicho.

Teorema 3.3.3. *Si $u^*(N)$ es solución óptima del problema (D_N), el vector de Owen $O_w(N, v)$, donde $O_w(i) = u^*(N)b^i$, constituye un reparto del núcleo del juego .*

En este teorema los vectores de $u^*(N)$ se interpretan como los precios sombra a los que se valoran los recursos, es decir a los agentes se les valoran sus recursos de acuerdo al vector de precios sombra, que produce un vector Owen, siendo dicho vector un reparto del núcleo del juego. La solución que proporcionan los Conjuntos de Owen no tiene porque ser única. Si (D_N) tiene solución múltiple, todas las valoraciones duales que dichas soluciones representan son válidas para obtener elementos del conjunto de Owen. Aún en el caso en que (D_N) tenga solución única, si hay holgura positiva en alguno de los recursos, eliminando el recurso sobrante obtenemos una solución múltiple dual y algunas de las valoraciones duales que dichas soluciones representan nos permiten obtener elementos en el conjunto de Owen del juego original.

Ejemplo 3.3.4. *Consideremos tres agentes o jugadores que aportan al proceso productivo tres recursos necesarios, según se muestra a continuación:*

$$B = \begin{pmatrix} 139 & 181 & 110 \\ 140 & 87 & 183 \\ 130 & 225 & 215 \end{pmatrix}$$

Se producen tres bienes que se venden en el mercado obteniéndose unos beneficios unitarios $p = (2{,}5, 5, 4)^t$ *. La matriz tecnológica del problema es:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 3,5 \\ 6 & 4 & 9 \\ 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

Veamos el juego. Si se forma la gran coalición, el problema a resolver es:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 2,5x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \textit{sujeto a:} \quad & 2x_1 + 9x_2 + 3,5x_3 \leq 430 \\ & 6x_1 + 4x_2 + 9x_3 \leq 410 \\ & 8x_1 + 9x_2 + 7x_3 \leq 570 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Si resolvemos el problema, utilizando el software LINDO obtenemos que el esquema óptimo de producción consiste en producir exclusivamente de los bienes segundo y tercero, es decir, $x^*(N) = (0, 36, 343, 29, 403)$.

La solución óptima del problema dual (D_N), *es:* $u^*(N) = (0, 4328, 0, 2761, 0)$. *Resolviendo el problema* (P_N) *hemos obtenido el valor de la función característica para la gran coalición en el juego de la producción* (N, v), *siendo dicho valor de* $v(N) = 299,328$. *Resolviendo los problemas* (P_S) *para cada coalición, S, obtenemos todos los valores de la función característica del juego:*

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	N
v(S)	*73,774*	*102,336*	*98,142*	*198,528*	*194,868*	*200,507*	*299,328*

Obtengamos el reparto de Owen, valorando los recursos aportados por cada jugador a los precios duales, $u^*(N)$. *Se obtiene el siguiente reparto:*

$O_w(N, v) = (u^*(N)b_i) =$

$= ((0, 4328, 0, 2761, 0)(139, 140, 130)^t, (0, 4328, 0, 2761, 0)(181, 87, 225)^t,$

$(0, 4328, 0, 2761, 0)(110, 183, 215)^t) =$

$= (98, 821, 102, 366, 98, 142).$

A continuación se presenta una tabla que contiene los valores de la función característica con las asignaciones del reparto de Owen, pudiéndose comprobar que dicho reparto es del núcleo del juego. $O_w(S) = \sum_{i \in S} O_w(i)$, *represen-*

ta la asignación que conjuntamente obtiene la coalición S con el reparto de Owen.

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	N
v(S)	*73,774*	*102,336*	*98,142*	*198,528*	*194,868*	*200,507*	*299,328*
$O_w(S)$	*98,821*	*102,366*	*98,142*	*201,19*	*196,96*	*200,507*	*299,328*

En éste ejemplo la máxima utilidad que se obtiene de la cooperación de los tres agentes que participan en el proceso de producción es $v(N) = 299,3283$. *Pero ahora en éste caso sobran recursos. En concreto sobran 37,0895 unidades del tercer recurso. En este caso los agentes pueden considerar la posibilidad de aportar al proceso de producción los recursos justos, eliminando el recurso sobrante.*

3.4. El Nucleolus

Hemos visto en la sección anterior que el *core* es un concepto de solución que tiene una dificultad importante: en algunas ocasiones es un conjunto muy grande y en otras es un conjunto vacío. El concepto de *nucleolus* propone una solución que, siempre que el conjunto de imputaciones sea no vacío, supera la dificultad anterior, pues es no vacío y único. Además, pertenece al *core* si éste es no vacío. Se considera un juego cooperativo (N, v).

Sea una distribución de pagos $x = (x_1, x_2, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$ eficiente entre los jugadores, es decir, tal que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$$

Definición 3.4.1. *El **exceso** o **queja** de una coalición S con respecto a una distribución de pagos x es la diferencia entre el valor de la coalición S y lo* *que recibe dicha coalición por la distribución x. Es decir,*

$$e(S,x) = v(S) - x(S) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i$$

Se trata de una medida del grado de insatisfacción de la coalición S con la distribución x. Cuanto mayor es $e(S,x)$ mayor es la insatisfacción.

Definición 3.4.2. *Para cada $x \in I(N,v)$, se define el vector de excesos como el siguiente vector $\theta(x)$, con 2^n componentes:*

$$\theta(x) = (e(S,x))_{S \in P(N)} = (\theta_1(x), \theta_2(x), .., \theta_{2^n}(x))$$

en donde

$$\theta_k(x) \geq \theta_{k+1}(x), \forall k = 1, 2, .., 2^n - 1.$$

Se considera el orden lexicográfico que definimos formalmente a continuación.

Definición 3.4.3. *Sean $x, x' \in I(N,x)$.*

a)

$$\theta(x) \leq_L \theta(x') \Leftrightarrow \theta_1(x) < \theta_1(x'),$$

o bien, para $j > 1$,

$$\theta_j(x) < \theta_j(x') \text{ } y \text{ } \theta_i(x) = \theta_i(x'), i = 1, ..., j-1.$$

b)

$$\theta(x) =_L \theta(x') \Leftrightarrow \theta_j(x) = \theta_j(x'), \forall j.$$

c)

$$\theta(x) \leq_L \theta(x) <_L \theta(x') \text{ o bien } \theta(x) =_L \theta(x').$$

Por tanto, dados dos vectores de excesos, para compararlos según el orden lexicográfico, se observan sólo las primeras componentes; si la primera componente de un vector es menor que la primera componente del otro vector, el primer vector es menor que el segundo según el orden lexicográfico definido. Si los dos vectores tienen iguales sus primeras componentes se comparan sus segundas componentes, siendo menor según el orden lexicográfico aquel vector cuya segunda componente sea menor. Si sus segundas componentes son iguales, se comparan con sus terceras componentes y así sucesivamente.

Definición 3.4.4. *El nucleolus de un juego (N, v) es el conjunto* $\mathcal{N}(N, v)$ *definido de la siguiente forma:*

$$\mathcal{N}(N, v) = \{x \in I(N, v) : \theta(x) \geq_L \theta(y), \forall y \in I(N, v)\}$$

Por tanto, se puede decir que el *nucleolus* contiene aquellas distribuciones de pagos que son imputaciones, y para las cuales se minimiza el mayor de los grados de insatisfacción.

El siguiente teorema, del que vamos a dar el enunciado sin la demostración, se debe a *Schemeidler* [15].

Teorema 3.4.1. *Sea* (N, v) *un juego esencial (lo cual quiere decir que su conjunto de imputaciones es no vacío). Entonces se verifica que el nucleolus existe y es único.*

Proposición 3.4.5. *Una condición suficiente para que el nucleolus exista y sea único es que*

$$\sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) \leq v(N).$$

Demostración. Supongamos que $\sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) \leq v(N)$. Entonces por la Proposición 3.2.3 se tiene que $I(N, v) \neq \emptyset$ de donde se deduce la existencia y unicidad del *nucleolus* por el Teorema 3.4.1 □

A continuación, se dan dos definiciones que se utilizarán posteriormente en una proposición en que se presentarán algunas propiedades importantes del *nucleolus*, que nos permitirán calcularlo en algunos casos.

Definición 3.4.6. *Se dice que dos jugadores i, j son **simétricos** en un juego (N, v) si realizan aportaciones equivalentes para cada coalición. Es decir, si se cumple que*

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}), \forall S \in P(N), i, j \notin S$$

Definición 3.4.7. *Se dice que el jugador i es un **jugador pasivo** en el juego (N, v) si no aporta ningún beneficio adicional al resto de los jugadores. Es decir, si se cumple que*

$$v(S) = v(S - \{i\}) + v(\{i\}), \text{ para toda coalicion } S \text{ con } i \in S$$

Proposición 3.4.8. *Se considera el juego (N, v). El nucleolus $\mathcal{N}(N, v)$ verifica las siguientes propiedades:*

1. *Si el core del juego es no vacío, entonces el único elemento del nucleolus pertenece al core.*

2. *Si el core del juego es unitario, entonces el core coincide con el nucleolus.*

3. *Sea $\mathcal{N}(N, v) = (\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, ..., \mathcal{N}_n)$ el nucleolus. Si i, j son jugadores simétricos, entonces $\mathcal{N}_i = \mathcal{N}_j$.*

4. *Sea $\mathcal{N}(N, v) = (\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, ..., \mathcal{N}_n)$ el nucleolus. Si $i \in N$ es un jugador pasivo, entonces $\mathcal{N}_i = v(\{i\})$.*

El lector interesado puede ver la demostración en *Joaquín Pérez y otros* [1]

Método para calcular el nucleolus utilizando programación lineal

Para calcular el *nucleolus* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ del juego (N, v), se resuelve el siguiente programa lineal:

$$\begin{aligned}
&\min \alpha_1 \\
&v(S) - \sum_{i \in S} x_i \le \alpha_i, \text{ para S } \in P(N), S \neq \emptyset, S \neq N \\
&x \in I(N, v)
\end{aligned}$$

Sea α_1^* el mínimo de ese problema. Si tal mínimo se alcanza en un único punto $\hat{x}$, entonces $\hat{x}$ es el *nucleolus* y el cálculo está completo. Normalmente dicho mínimo no se alcanzará en un único punto x sino en un conjunto X^1. En tal caso normalmente habrá una familia $\Im_1$ de coaliciones, tal que para todo $S \in \Im_1$ y $x \in X^1$ es $e(S, x) = \alpha_1$. Entonces se resueve el programa lineal

$$\begin{aligned}
&\min \alpha_2 \\
&v(S) - \sum_{i \in S} x_i \le \alpha_2, \text{ para S } \in P(N) - \Im_1, S \neq \emptyset, S \neq N \\
&x \in X^1.
\end{aligned}$$

Si el mínimo se alcanza en un único x se termina, si no es así se sigue como anteriormente.

Ejemplo 3.4.9. *En un departamento universitario hay tres investigadores consolidados que trabajan en la misma linea de investigación. Se disponen a presentar solicitudes para optar a financiación de proyectos de investigación. Han preguntado a una persona de confianza que tiene toda la información sobre los criterios y candidatos y les ha comentado lo que es previsible que ocurra con la resolución acerca de las posibles solicitudes, a la vista del historial y méritos de los candidatos.*

Si el doctor Díaz presenta de manera individual la solicitud, lo previsible es que le concedan treinta mil euros, el doctor García no conseguirá nada si *va solo, mientras que la doctora López conseguiría individualmente cincuenta mil euros. Si los doctores Díaz y García presentan un proyecto conjunto obtendrán una financiación de 50, Díaz y López obtendrían 80 y García y López obtendrían tambien 80 (siempre en miles de euros). Si los tres investigadores solicitan el proyecto de manera conjunta, previsiblemente obtendrían 100(en miles de euros). Cada investigador sólo puede figurar en una solicitud.*

La representación del juego en forma coalicional es inmediata en este caso:

$$N = \{1, 2, 3\}$$

en donde el jugador 1 es el doctor Díaz, el jugador 2 es el doctor García y la jugadora 3 es la doctora López.

La función característica es la función

$$v : P(N) \to \mathbb{R}, con$$

$$v(\emptyset) = 0,$$

$$v(\{1\}) = 30, v(\{2\}) = 0, v(\{3\}) = 50,$$

$$v(\{1, 2\}) = 50, v(\{1, 3\}) = 80, v(\{2, 3\}) = 80,$$

$$v(\{1, 2, 3\}) = 100$$

Calculemos el nucleolus. Para este juego se verifica que

$$v(\{1\}) + v(\{2\}) + v(\{3\}) = 80 < v(\{1, 2, 3\}) = 100,$$

por lo que el conjunto de imputaciones es no vacío y el nucleolus existe y es único. Sea $x = (x_1, x_2, x_3)$ el nucleolus. Por pertenecer el nucleolus, por definición, al conjunto de imputaciones se tienen que cumplir las siguientes condiciones:

$$x_1 \geq 30, x_2 \geq 0, x_3 \geq 50, x_1 + x_2 + x_3 = 100$$

Los valores de $e(S, x)$ para $S \in P(N)$, con $S \neq \emptyset$ y $S \neq N$, y $x = (x_1, x_2, x_3)$ son los siguientes:

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$
$e(S,\ x)$	$30-x_1$	$-x_2$	$50-x_3$	$50-x_1-x_2$	$80-x_1-x_3$	$80-x_2-x_3$

Para calcular el nucleolus hay que resolver el siguiente problema:

$$\min_{x_1,x_2,x_3}\{\max\{30-x_1,-x_2,50-x_3,50-x_1-x_2,80-x_1-x_3,80-x_2-x_3\}\},$$

$$\textit{sujeto a: } x_1 \geq 30, x_2 \geq 0, x_3 \geq 50, x_1+x_2+x_3=100$$

Para resolver el anterior problema minimax se procede de la siguiente forma, se define:

$$\max\{30-x_1,-x_2,50-x_3,50-x_1-x_2,80-x_1-x_3,80-x_2-x_3\}=\alpha_1$$

Cada una de las funciones a las que afecta la maximización anterior debe ser menor o igual a α_1. El problema minimax formulado es equivalente al siguiente programa lineal:

$$\begin{aligned}
&\min_{x_1,x_2,x_3,\alpha_1} \alpha_1\\
&30-x_1 \leq \alpha_1\\
&-x_2 \leq \alpha_1\\
&50-x_3 \leq \alpha_1\\
&50-x_1-x_2 \leq \alpha_1\\
&80-x_1-x_3 \leq \alpha_1\\
&80-x_2-x_3 \leq \alpha_1\\
&x_1 \geq 30\\
&x_2 \geq 0\\
&x_3 \geq 50\\
&x_1+x_2+x_3=100.
\end{aligned}$$

Resolvemos el problema anterior con algún programa informático para programas lineales, y obtenemos que el programa tiene solución óptima que no es única. Dicha solución óptima se alcanza para $\alpha_1 = 10, x_1 = 30$ y x_2, x_3 tales que $x_2 \geq 0, x_3 \geq 50$ y $x_2 + x_3 = 70$. (En la solución óptima del programa lineal no se satura ninguna de las 5 primeras restricciones y sí se satura la sexta restricción.) Podemos asegurar que la primera componente del nucleolus es $x_1 = 30$ pero aún no podemos concretar su segunda y tercera componente. Para ello hay que resolver el siguiente programa:

$$
\begin{aligned}
&\min_{x_1, x_2, x_3, \alpha_1} \ \alpha_2 \\
&-x_2 \leq \alpha_2 \\
&50 - x_3 \leq \alpha_2 \\
&20 - x_2 \leq \alpha_2 \\
&50 - x_3 \leq \alpha_2 \\
&x_2 \geq 0 \\
&x_3 \geq 50 \\
&x_2 + x_3 = 70
\end{aligned}
$$

El problema tiene solución única, que es $x_2 = 20, x_3 = 50, \alpha_2 = 0$. Por tanto, el nucleolus del juego es

$$N = (30, 20, 50).$$

Bibliografía

[1] Joaquín Pérez, Jose Luis Jimeno, Emilio Cerdá, *Teoria de Juegos*, PEARSON EDUCACIÓN, 2004.

[2] Balbina Casas, M.Gloria Fiestras, Ignacio García, Julio González, *Introducción a la Teoría de Juegos*, Servizo de Publicacións e Intercambio Científico, 2012.

[3] Miguel Ángel Hinojosa, Ana María Sánchez, *Juegos de Investigación Operativa. El Juego de la Producción Lineal*, Departamento de Economía y Empresa. Universidad Pablo de Olavide.

[4] Federico Anzil (24 de Feb de 2006). "Teoría de Juegos". Dirección URL: http://www.zonaeconomica.com/teoriadejuegos/teoriadejuegos.

[5] George B. Dantzig, *Mathematical programming : the state of the art*, 1983.

[6] Isabel Fernández Isasi, *Trabajo Fin de Grado: Juegos de suma cero. Teoremas de Von Neumann, Sion y Kneser-Fan.*

[7] Parthasarathy y Raghavan, *Some Topics in Two-Person Games*, Elsevier, 1971.

[8] G. Owen, *Game Theory*, Academic Press, 1995.

[9] Paul R. Thie y G. E. Keough, *An Introduction to Linear Programming and Game Theory*, Wiley, 2008.

[10] G. Owen, *On the core of linear production games*, 1975.

[11] Gonzalez-Diaz, García-Jurado y Fiestras-Janeiro, *An Introductory Course on Mathematical Game Theory*, American Mathematical Society, 2010.

[12] Shapley, L. S. y Snow, R. *Basic solutions of discrete games, Annal of Mathematical Studies*, 1950.

[13] Davenport, *Papers in Caribbean Anthropology*, Yale University Press, 1960.

[14] Straffin, *Game Theory and Strategy*, Mathematical Association of America, 1993.

[15] D. Schmeidler, *The Nucleolus of a Characteristic Function Game*, 1969.

[16] Augusto Blasi, *Kohlberg's theory and moral motivation*, 1990.