FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico

TRABAJO FIN DE GRADO

Introducción a la Optimización Infinito Dimensional

Dirigido por:

Juan Casado Díaz

Manuel Luna Laynez

Fdo.: **Miguel Peña Gallardo**

Sevilla, Junio 2017

Notaciones

$|\Omega|$: medida de Lebesgue de un conjunto medible Ω.

$\mathcal{L}(X,Y)$: espacio vectorial de aplicaciones lineales y continuas de X en Y. En el caso de que $X=Y$, se denotará $\mathcal{L}(X)$ en lugar de $\mathcal{L}(X,X)$.

X': dual del espacio normado X, i.e. $X'=\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$.

$\langle x',x\rangle_{X',X}$: producto de dualidad de $x'\in X'$ con x, i.e. $\langle x',x\rangle_{X',X}=x'(x)$.

$C_0^1(\bar{I})=\{\varphi\in C^1(\bar{I})\,/\,\varphi(a)=\varphi(b)=0\}$.

e.c.t : "en casi todo", indica que una propiedad se verifica en todo punto salvo a lo sumo en un conjunto de medida nula.

$\mathcal{L}_2(X)$: espacio vectorial de aplicaciones bilineales y continuas de $X\times X$ en $\mathbb{R}$.

$\overset{\circ}{\mathcal{U}}$: denota el interior del conjunto $\mathcal{U}$.

Índice general

Resumen

El objetivo de este trabajo es obtener un resultado general acerca de la existencia de solución de problemas de minimización en espacios infinito dimensionales. El teorema correspondiente extiende el resultado clásico de Weierstrass que establece que una función continua en un compacto siempre alcanza mínimo y máximo global. Estas hipótesis son muy restrictivas en el caso de espacios de dimensión infinita. Los resultados obtenidos a lo largo del trabajo se aplican a la existencia de solución para problemas del Cálculo de Variaciones. Para llevar a cabo estos objetivos necesitamos algunas nociones de Análisis Funcional, un estudio de los espacios de Sobolev en dimensión uno y algunos resultados elementales acerca de la teoría de derivación en espacios normados.

Abstract

The goal of this work is to obtain a general result about the existence of solution of minimization problems in infinite dimensional spaces. The corresponding theorem extends the classic Weierstrass result which establishes that a continuous function in a compact set always reaches its global maximum and its global minimum. These hypotheses are very restrictive in the case of infinite dimensional spaces. The results proved in this work are applied to the study of the existence of solution for problems of Calculus Variations. To achieve these objectives we need some notions of functional analysis, a study of Sobolev spaces in dimension one and some elementary results about the theory of derivation in normed spaces.

Introducción

Este trabajo pretende extender los resultados relativos a la minimización de funciones definidas en $\mathbb{R}^N$, vistos en el primer y segundo curso del Grado en Matemáticas al caso de funcionales definidos en espacios de dimensión infinita. Principalmente, nos centramos en la existencia de mínimo global. En el caso de problema sin restricciones también obtenemos condiciones de optimalidad tanto necesarias como suficientes que debe verificar un mínimo local. Como principal aplicación de los resultados obtenidos se realizará una introducción a la resolución de problemas del Cálculo de Variaciones donde la incógnita es una función vectorial dependiente de una sola variable. En este caso obtenemos un resultado bastante general de existencia. Aunque a lo largo de la memoria estamos hablando siempre de problemas de mínimos, recordamos que un problema de máximos se reduce a uno de mínimos sin más que cambiar el signo del funcional.

La presente Memoria está organizada como sigue:

En el **Capítulo 1**, el cual es prácticamente introductorio, enunciaremos los conceptos básicos y algunos resultados fundamentales de Análisis Funcional que serán necesarios para desarrollar esta memoria. Entre ellos, hay que destacar la presentación de la convergencia débil y $*$-débil así como los resultados de compacidad en espacios reflexivos. Recordar que en dimensión infinita la bola unidad cerrada nunca es compacta, con lo cual la hipótesis de compacidad que conlleva el teorema de Weierstrass, que es el resultado fundamental estudiado en el Grado acerca de la existencia de máximo y mínimo resulta ser demasiado restrictiva y debe ser debilitada.

En el **Capítulo 2**, realizamos un estudio de la teoría de espacios de Sobolev en dimensión uno que complementa algunos resultados obtenidos en la asignatura de Análisis Funcional y EDP. Estos espacios jugarán un papel fundamental en los teoremas de existencia que serán expuestos en el último capítulo. Recordar que para $1 < p < \infty$ los espacios de Sobolev $W^{1,p}$ son reflexivos cosa que no ocurre con el espacio clásico C^1. Ello los hace por tanto mucho más adecuados para aplicar técnicas de Análisis Funcional a la resolución de los problemas que nos interesan.

En el **Capítulo 3**, estudiaremos la existencia de solución de un problema de minimización planteado en un subconjunto de un espacio normado (generalmente de dimensión infinita). Dividimos el capítulo en dos secciones. En la primera introducimos el concepto de semicontinuidad inferior tanto para la topología fuerte como para la débil. También obtenemos algunas caracterizaciones y propiedades importantes. El concepto de semicontinuidad inferior es más general que el de continuidad que aparece en el teorema de Wierstrass y suele ser la buena hipótesis cuando solo estamos interesados en la existencia de mínimos y no de máximos. En la segunda sección usando la semicontinuidad inferior débil y la compacidad de la convergencia débil para espacios reflexivos, obtenemos un resultado abstracto bastante general acerca de la existencia de solución para un problema de mínimos. Como aplicación obtenemos un resultado de existencia para un funcional cuadrático definido en un conjunto convexo y cerrado de un espacio de Hilbert.

En el **Capítulo 4**, presentamos algunos resultados elementales acerca de la derivación en espacios de dimensión infinita donde principalmente nos centramos en el caso de derivadas direccionales, tanto de primer como de segundo orden. Estos resultados nos van a permitir extender la condición necesaria de mínimo para una función definida en un conjunto abierto que consiste en que las derivadas direccionales deben anularse en este punto. Los conceptos de derivabilidad introducidos son también usados en este capítulo para caracterizar la convexidad de un funcional a través de sus derivadas primera o segunda.

En el **Capítulo 5** y final de esta memoria, utilizamos el teorema abstracto de existencia que obtuvimos en el capítulo 3 para probar la existencia de solución de un problema de Cálculo de Variaciones bastante general planteado en un espacio de Sobolev $W^{1,p}(a,b)^n$ sometido a varias restricciones. Como aplicación obtenemos un resultado de existencia para la existencia de solución de un problema de contorno para una ecuación diferencial ordinaria no lineal con condiciones tipo Dirichlet.

Capítulo 1

Recordatorio Análisis Funcional

En el presente Capítulo recordamos los conceptos básicos y algunos resultados fundamentales de la Teoría de Análisis Funcional.

Posteriormente daremos la definición de espacios reflexivos, así como las nociones de convergencia débil y convergencia $*$-débil. Concluiremos con los resultados de compacidad que jugarán un papel importante en los siguientes capítulos. Para un tratamiento más profundo puede consultarse H.Brézis [2].

En lo que sigue, los espacios vectoriales estarán definidos sobre el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$.

1.1. Preliminares

1.1.1. Espacios normados y espacios de Banach

La motivación más sencilla para introducir el concepto de norma sobre un espacio vectorial no es otro que la generalización de los conceptos de valor absoluto y módulo en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, respectivamente.

Definición 1.1 *Sea X un espacio vectorial. Una norma en el espacio X es una aplicación $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$ tal que*

1. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0,$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \ \forall\lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in X,$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \ \forall x, y \in X.$

*Llamaremos **espacio normado** a un espacio vectorial dotado de una norma.*

Proposición 1.1 *Todo espacio normado X es un espacio métrico con la distancia $d : X \times X \to [0, +\infty)$ definida por*

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

Definición 1.2 *Un espacio normado X se dice de Banach si es completo (i.e. toda sucesión de Cauchy es convergente) para la distancia definida anteriormente.*

Observación 1.1 *Recordemos que una sucesion $\{x_n\}$ en un espacio métrico (X,d) se dice que es de Cauchy si, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, $\forall n, m \geq n_0$.*

Proposición 1.2 *Sea X un espacio de Banach y consideramos V un subespacio vectorial dotado de la norma de X. Entonces el espacio V es de Banach si y sólo si es cerrado.*

Hay que tener presente que en un espacio vectorial X pueden definirse distintas normas.

Definición 1.3 *Sea X un espacio vectorial y $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ dos normas definidas en X. Se dice que las dos normas son equivalentes si generan la misma topología.*

Se tiene la siguiente caracterización de la equivalencia de normas (es una consecuencia de la Proposición 1.6 que veremos más adelante).

Proposición 1.3 *Dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ definidas en un espacio X son equivalentes si y sólo si existen constantes C_1, $C_2 > 0$ tales que*

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1, \quad \forall x \in X.$$

Nota 1.1 *En $\mathbb{R}^N$, y en general en todo espacio de dimensión finita, todas las normas son equivalentes.*

1.1.2. Productos escalares. Espacios prehilbertianos

Definición 1.4 *Sea X un espacio vectorial. Llamamos producto escalar sobre X a una aplicación $(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ que cumple:*

1. $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x,z) + \mu(y,z), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y, z \in X,$

2. $(x,y) = (y,x)$, $\forall x, y \in X$,

3. $(x,x) > 0, \quad \forall x \in X \setminus \{0\}$.

En otras palabras, un producto escalar es una forma bilineal, simétrica y definida positiva.
*Un espacio vectorial X dotado de un producto escalar se dice **prehilbertiano**.*

Proposición 1.4 *Todo espacio prehilbertiano es normado con la norma*

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}, \quad \forall x \in X.$$

siendo esta la norma inducida por el producto escalar. En los espacios prehilbertianos se verifica la desigualdad de Cauchy - Schwarz

$$|(x,y)| \leq \|x\|\|y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

Definición 1.5 *Un espacio prehilbertiano X se dice de* ***Hilbert*** *si es un espacio de Banach con la norma inducida por el producto escalar.*

1.1.3. Ejemplos de espacios normados

Veamos algunos ejemplos de espacios de Banach y Hilbert.

▷ **El espacio** $\mathbb{R}^N$

Este es el ejemplo más sencillo de espacio de Banach. En este caso se sabe que todas las normas son equivalentes. Entre las normas más usuales recordaremos que para $1 \leq p \leq \infty$ se define

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{N} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad , \forall x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N, \text{ si } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_N|\} \quad , \forall x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N, \text{ si } p = \infty.$$

En el caso particular $p = 2$, la norma correspondiente es la norma euclídea. Esta norma proviene del producto escalar

$$(x,y) = \sum_{j=1}^{N} x_i y_i, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Por tanto, $\mathbb{R}^N$ es un espacio de Hilbert.

▷ **Los espacios** $\mathbb{L}^p(\Omega)$

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un subconjunto medible de $\mathbb{R}^N$. Para $1 \leq p \leq \infty$, se define

$$L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medible } : \int_\Omega |u|^p \, dx < +\infty\right\}, \quad \text{si } 1 \leq p < \infty,$$

$$L^\infty(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medible } : \exists C \geq 0 \text{ tq } |u(x)| \leq C \text{ e.c.t } \Omega\right\}, \text{ si } p = \infty.$$

El espacio $L^p(\Omega)$ es de Banach con la norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall u \in L^p(\Omega),\ \text{si } 1 \le p < \infty,$$
$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \min\{C \ge 0 :\ |u(x)| \le C \ \text{ e.c.t } \Omega\}, \quad \forall u \in L^\infty(\Omega),\ \text{si } p = \infty.$$

Observación 1.2 *En realidad los elementos de $L^p(\Omega)$ no son funciones sino clases de funciones, ya que funciones que son iguales salvo un conjunto de medida nula se consideran la misma. Observar que esto significa por ejemplo que no podemos hablar del valor de una función de $L^p(\Omega)$ en un punto de Ω.*

En el caso $p = 2$, el espacio $L^2(\Omega)$ es de Hilbert con el producto escalar

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uv\,dx, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

En $L^p(\Omega)$ con $1 \le p, p' \le +\infty$ se verifica la desigualdad de Hölder: Si $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^{p'}(\Omega)$, entonces $uv \in L^1(\Omega)$ y se tiene

$$\left|\int_\Omega uv\,dx\right| \le \|u\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^{p'}(\Omega)},$$

ó también

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \le \|u\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^{p'}(\Omega)},$$

que resulta de aplicar la desigualdad anterior a las funciones $|u|$ y $|v|$.

Definición 1.6 *Si $1 \le p \le \infty$, se designa por p' el exponente conjugado de p, es decir*

$$p' = \begin{cases} \frac{p}{p-1} & si \quad 1 < p < \infty, \\ \infty & si \quad p = 1, \\ 1 & si \quad p = \infty. \end{cases}$$

Observar que para $1 < p < \infty$, se verifica la siguiente relación

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Finalmente, cuando $|\Omega| < +\infty$ se tiene la siguiente relación de inclusión.

Proposición 1.5 *Supongamos $|\Omega| < +\infty$. Si $1 \le q \le p \le \infty$ entonces $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ y se cumple*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le \|u\|_{L^p(\Omega)}\,|\Omega|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, \quad \forall u \in L^p(\Omega).$$

▷ **Los espacios** $C^k([a,b])$

Sea a, $b \in \mathbb{R}$ e $I = [a,b]$, para $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, se define el espacio $C^k(\bar{I})$ como el espacio formado por las restricciones a I de las funciones de clase k en $\mathbb{R}$, es decir tales que son derivables hasta el orden k con derivadas continuas. En el caso $k = 0$ son simplemente las funciones continuas en I. El espacio $C^k(I)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_{C^k(I)} = \sum_{i=0}^{k} \max_{t \in I} |f^{i)}(t)|.$$

1.1.4. Aplicaciones Lineales y continuas. Espacio Dual

Sean X e Y espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, recordemos que una aplicación $T : X \to Y$ es **lineal** si

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y), \quad \forall x, y \in X,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Nos interesa ahora saber cuando una aplicación lineal es continua. El siguiente resultado proporciona diversas caracterizaciones de la continuidad de una aplicación lineal entre espacios normados.

Proposición 1.6 *Sean X e Y dos espacios normados y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Entonces son equivalentes:*

1. *T es continua en todo X.*
2. *Existe $x_0 \in X$ tal que T es continua en x_0.*
3. *Existe $C \geq 0$ tal que*

$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

Definición 1.7 *El espacio $\mathcal{L}(X,Y)$ se dota de la norma*

$$\begin{aligned}\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} &= \min\{C \geq 0 : \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X,\ \forall x \in X\} \\ &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|_Y = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|_Y, \quad \forall T \in \mathcal{L}(X,Y).\end{aligned}$$

Proposición 1.7 *Si Y es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{L}(X,Y)$ es un espacio de Banach.*

Definición 1.8 *Dado un espacio normado X, se denomina espacio dual de X y se denota por X' al espacio $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$.*

Usualmente, si x' es un elemento de X' usaremos la notación

$$\langle x', x \rangle_{X',X}$$

en lugar de $x'(x)$. Es lo que se conoce como producto de dualidad de x' con x. Cuando los espacios X y X' sean sobreentendidos, escriberemos simplemente

$$\langle x', x \rangle.$$

Observación 1.3 *Observar que la Proposición 1.7, prueba que X' es siempre un espacio de Banach incluso aunque X no lo sea.*

Observación 1.4 *Teniendo en cuenta la Definición 1.7, la norma de una aplicación T en el espacio dual viene dada por*

$$\|T\|_{X'} = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle T, x \rangle| = \sup_{\|x\| \leq 1} \langle T, x \rangle, \quad \forall x \in X, \, \forall T \in X'$$

1.1.5. Algunos resultados importantes

Comencemos recordando algunas caracterizaciones del dual.

Teorema 1.1 (Teorema de Riesz) *Sea H un espacio de Hilbert. Para todo $x_0 \in H$, la aplicación*

$$f : x \in H \mapsto (x_0, x) \in \mathbb{R},$$

es un elemento de H' y se verifica

$$\|f\|_{H'} = \|x_0\|_H.$$

Recíprocamente, si $f \in H'$, entonces existe un único $x_0 \in H$ tal que

$$f(x) = (x_0, x), \quad \forall x \in H.$$

Observación 1.5 *El teorema de Riesz se puede enunciar también de la siguiente manera:*

Sea H un espacio de Hilbert, la aplicación $\Phi : H \to H'$ definida por

$$\langle \Phi(x), y \rangle_{H',H} = (x, y), \quad \forall x, y \in H, \tag{1.1}$$

está bien definida y es un isomorfismo lineal e isométrico (i.e conserva las normas) entre H y H', es decir es lineal, biyectiva y verifica $\|\Phi(x)\|_{H'} = \|x\|_H$, $\forall x \in H$.

Esta aplicación permite entonces identificar los espacios H y H'.

Por identificar nos referimos a que existe una biyección (1.1) entre ambos espacios que conserva las normas.

A continuación, recordemos un resultado fundamental de la teoría del Análisis Funcional, como es la siguiente consecuencia del Teorema de Hanh-Banach.

Teorema 1.2 (Hahn-Banach) *Sean X un espacio normado, $M \subset X$ un subespacio vectorial y una aplicación $m' : M \to \mathbb{R}$ lineal y continua. Entonces existe $x' \in X'$ tal que*

$$x'_{|M} = m', \tag{1.2}$$

$$\|m'\|_{M'} = \|x'\|_{X'}.$$

Observación 1.6 *Sean X un espacio normado, $M \subset X$ un subespacio vectorial, $m' \in M'$, $x' \in X'$ tales que se verifica (1.2), entonces se tiene*

$$\|m'\|_{M'} = \sup_{m \neq 0} \frac{\langle m', m \rangle}{\|m\|_M} = \sup_{m \neq 0} \frac{\langle x', m \rangle}{\|m\|_M} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\langle x', x \rangle}{\|x\|_X} = \|x'\|_{X'}.$$

Luego el Teorema de Hahn-Banach, además de decirnos que toda aplicación lineal y continua de M en $\mathbb{R}$, se puede prolongar a una aplicación lineal y continua de X en $\mathbb{R}$, nos dice que esta prolongación la podemos tomar de forma que la norma no aumente.

Para terminar, en el caso de los espacios $L^p(\Omega)$ se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.3 *Si $1 \leq p < +\infty$, entonces el dual del espacio $L^p(\Omega)$ se identifica con $L^{p'}(\Omega)$ mediante la aplicación $\Phi : L^{p'}(\Omega) \to (L^p(\Omega))'$ definida por*

$$\langle \Phi f, g \rangle = \int_\Omega f g \, dx, \quad \forall f \in L^{p'}(\Omega), \, \forall g \in L^p(\Omega).$$

1.2. Espacios reflexivos

La identificación entre H y H' mencionada en la Observación 1.5 no sucede en otros espacios de Banach. Sin embargo, podemos obtener una identificación usando biduales, tal como se verá seguidamente.

Si X es un espacio de Banach y X' su dual, el *bidual* de X se define como $X'' := (X')'$. Análogamente, $X''' := (X'')'$, etc.

Definición 1.9 *Dado X un espacio normado, se define $J : X \to X''$ por*

$$\langle J(x), x' \rangle_{X'', X'} = \langle x', x \rangle_{X', X}, \quad \forall x \in X, \, \forall x' \in X', \tag{1.3}$$

y se le llama inyección canónica de X en X''.

Proposición 1.8 *La aplicación J está bien definida, es lineal e isométrica. Por tanto permite identificar X con el subespacio $J(X)$ de X''.*

Definición 1.10 *Un espacio normado X se dice reflexivo, si la aplicación J definida por* (1.3) *es sobreyectiva.*

Observación 1.7 *Es claro a partir de la definición anterior que todo espacio reflexivo se identifica con su bidual, sin embargo esta condición no basta para que el espacio sea reflexivo, se debe cumplir también que la aplicación J sea sobreyectiva, ya que puede ocurrir que haya una identificación de X con X'' distinta de J y que J no sea sobreyectiva.*

Observación 1.8 *Como el espacio bidual de un espacio normado es de Banach, deducimos que todo espacio reflexivo es un espacio de Banach.*

A continuación, veamos algunas propiedades de los espacios reflexivos.

Proposición 1.9 *Sea X un espacio de Banach, se tiene*

$$X \text{ es reflexivo} \Longleftrightarrow X' \text{ es reflexivo.}$$

Proposición 1.10 *Sea X un espacio reflexivo y $V \subset X$ un subespacio cerrado de X, entonces V es un subespacio reflexivo.*

Nota 1.2 (Ejemplos espacios reflexivos) *Se tiene que:*

- *Todo espacio H Hilbert es reflexivo.*
- *Los espacios $L^p(\Omega)$ con $1 < p < +\infty$ son reflexivos.*

1.3. Convergencia débil y $*-$ débil.

A continuación, definimos las nociones de convergencia débil y convergencia $*-$ débil.

Definición 1.11 *Sea X un espacio normado, una sucesión $\{x_n\} \subset X$ se dice que converge débilmente a un punto $x \in X$ y se escribe $x_n \rightharpoonup x$ si se verifica*

$$\langle x', x_n \rangle \to \langle x', x \rangle, \quad \forall x' \in X'.$$

Definición 1.12 *Sea X un espacio normado, una sucesión $\{x'_n\} \subset X'$ se dice que converge $*$-débilmente a un punto $x' \in X'$ y se escribe $x'_n \overset{*}{\rightharpoonup} x'$ si se verifica*

$$\langle x'_n, x \rangle \to \langle x', x \rangle, \quad \forall x \in X.$$

Obsérvese que la convergencia $*$-débil no es otra cosa que la convergencia puntual.

Observación 1.9 *En general, la convergencia débil implica la convergencia $*$-débil, siendo ambos conceptos equivalentes en el caso de espacios reflexivos.*

Observación 1.10 *Si una sucesión* $\{x_n\}$ *converge en norma (i.e converge fuertemente) hacia un elemento* $x \in X$*, entonces gracias a la continuidad de los elementos de* X' *se tiene que* $\langle x', x_n \rangle$ *converge a* $\langle x', x \rangle$, $\forall x \in X$ *y por tanto* $\{x_n\}$ *converge débil a* $x \in X$.
Es decir, la convergencia fuerte implica la convergencia débil.

En particular, en los espacios $L^p(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$ se tiene que
Una sucesión $\{f_n\} \subset L^p(\Omega)$ converge débilmente en $L^p(\Omega)$ a $f \in L^p(\Omega)$ si y sólo si

$$\int_\Omega f_n \, g \, dx \to \int_\Omega f g \, dx, \qquad \text{cuando } n \to \infty, \quad \forall g \in L^{p'}(\Omega).$$

En el caso $p = \infty$, se tiene que una sucesión $\{f_n\} \subset L^\infty(\Omega)$ converge $*$-débil en $L^\infty(\Omega)$ si y sólo si

$$\int_\Omega f_n \, g \, dx \to \int_\Omega f g \, dx, \qquad \text{cuando } n \to \infty, \quad \forall g \in L^1(\Omega).$$

Algunas de las propiedades de la convergencia débil y $*-$ débil son las siguientes:

Proposición 1.11 *Sean* X, Y *espacios normados y* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. *Si* $\{x_n\}$ *converge débilmente a* x *en* X*, entonces* Ax_n *converge débilmente a* Ax *en* Y.

Observación 1.11 *En el caso de que* A *no fuese lineal (incluso cuando sea continua), lo mencionado anteriormente no cierto en general.*

Proposición 1.12 *Sea* X *un espacio normado. Si* $\{x_n\}$ *converge débilmente a* $x \in X$*, entonces está acotada y se verifica*

$$\|x\|_X \leq \liminf_{n \to \infty} \|x_n\|_X.$$

Análogamente, si X *es un espacio de Banach y* $\{x'_n\}$ *es una sucesión que converge* $*$*-débilmente a* $x' \in X'$*, entonces está acotada y se verifica*

$$\|x'\|_{X'} \leq \liminf_{n \to \infty} \|x'_n\|_{X'}.$$

La importancia de saber si el límite débil de una sucesión contenida en un determinado conjunto sigue estando en dicho conjunto es lo que conduce a la siguiente definición.

Definición 1.13 *Sea* X *un espacio normado y* $V \subset X$*, se dice que* V *es secuencialmente débilmente cerrado si* $\forall x \in X$*, y para toda sucesión* $\{x_n\} \subset V$ *que converge débilmente a* x*, se tiene que* $x \in V$.

Observar que todo subconjunto secuencialmente débilmente cerrado de un espacio normado es cerrado. Ahora bien, el recíproco no es cierto, salvo si el subconjunto es convexo.

Teorema 1.4 *Todo subconjunto V convexo y cerrado de un espacio normado X es secuencialmente débilmente cerrado.*

1.4. Teoremas de compacidad

La propiedad de que todo subconjunto cerrado y acotado de un espacio normado sea compacto, tal y como sucedía en los espacios finito-dimensionales, se puede generalizar en ciertos espacios de dimensión infinita si nos conformamos con la convergencia débil o $*$-débil. Ese es el objeto de los siguientes resultados. Previamente, recordamos cuando un espacio se dice que es separable.

Definición 1.14 *Un espacio normado X se dice que es separable si existe un subconjunto $V \subset X$ numerable y denso.*

Observación 1.12 *Los espacios $L^p(\Omega)$ con $1 \leq p < +\infty$ son separables.*

Teorema 1.5 *Sea X un espacio normado separable y $\{x'_n\} \subset X'$ una sucesión acotada, entonces existe una subsucesión de $\{x'_n\}$ que converge $*$-débil.*

Teorema 1.6 *Sea X un espacio reflexivo. Entonces toda sucesión acotada en X admite una subsucesión que converge débilmente.*

Para terminar, como los espacios $L^p(\Omega)$ van a hacer de especial interés, el siguiente cuadro recapitula las principales propiedades presentadas.

Los espacios $L^p(\Omega)$			
	Reflexivo	Separable	Espacio dual
$L^p(\Omega)$ $1 < p < \infty$	SI	SI	$L^{p'}(\Omega)$
$L^1(\Omega)$	NO	SI	$L^\infty(\Omega)$
$L^\infty(\Omega)$	NO	NO	Contiene estrictamente a $L^1(\Omega)$

Capítulo 2

Espacios de Sobolev en dimensión uno

El hecho de introducir espacios con una estructura similar a L^p pero en los cuáles tenga sentido derivar es lo que conduce a la teoría de los espacios de Sobolev. Estos espacios son de gran utilidad para resolver problemas de Ecuaciones en Derivadas Parciales, y en particular, problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. En lo que sigue, nos limitaremos a una exposición muy elemental de tales espacios que se limitará al caso unidimensional, centrándonos además en el caso de intervalos acotados.

2.1. El espacio de Sobolev $W^{1,p}(I)$

Definición 2.1 *Dado $I = (a,b)$ un intervalo acotado de $\mathbb{R}$ y $1 < p < +\infty$. Se define el espacio de Sobolev $W^{1,p}(I)$ por*

$$W^{1,p}(I) := \left\{ u \in L^p(I);\ \exists v \in L^p(I) \text{ tal que } \int_I u\varphi'\,dx = -\int_I v\varphi,\ \forall \varphi \in C_0^1(\bar{I}) \right\}.$$

En particular, notaremos

$$H^1(I) := W^{1,2}(I).$$

Dado $u \in W^{1,p}(I)$ a la función $v \in L^p(I)$ en las condiciones de la definición anterior (que se prueba es única), la llamaremos derivada débil de u. A las funciones φ se les suele llamar funciones test.

Definición 2.2 *En el espacio $W^{1,p}(I)$ se define la norma*

$$\|\cdot\|_{W^{1,p}(I)} : W^{1,p}(I) \to \mathbb{R}^+$$

por

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} = \left(\|u\|^p_{L^p(I)} + \|u'\|^p_{L^p(I)} \right)^{1/p} = \left(\int_a^b |u(t)|^p\,dt + \int_a^b |u'(t)|^p\,dt \right)^{1/p}.$$

El espacio $H^1(I)$ está dotado del producto escalar

$$(u,v)_{H^1(I)} = (u,v)_{L^2(I)} + (u',v')_{L^2(I)} = \int_a^b u(t)v(t)\,dt + \int_a^b u'(t)v'(t)\,dt.$$

y por tanto, de la norma correspondiente

$$\|u\|_{H^1(I)} = \Big(\|u\|^2_{L^2(I)} + \|u'\|^2_{L^2(I)}\Big)^{1/2} = \Big(\int_a^b |u(t)|^2\,dt + \int_a^b |u'(t)|^2\,dt\Big)^{1/2}.$$

Observación 2.1 *Decir que una sucesión $\{u_n\}$ converge fuertemente a u en $W^{1,p}(I)$ es equivalente a decir que $\{u_n\}$ y $\{u_n'\}$ convergen fuertemente en $L^p(I)$ a u y u' respectivamente.*

Se tiene los siguientes resultados:

Proposición 2.1 *Dada una función $v \in L^p(I)$, podemos encontrar una función $u \in C^0(\bar{I})$ definida por*

$$u(t) = \int_a^t v(s)\,ds, \quad \forall t \in \bar{I}$$

que está en $W^{1,p}(I)$ y $u' = v$ en I, siendo u' la derivada débil de u. Recíprocamente, si tenemos una función $u \in W^{1,p}(I)$, entonces existe una constante que notamos por $u(a)$ tal que se verifica

$$u(t) = u(a) + \int_a^t u'(s)\,ds, \quad \text{e.c.t el intervalo } I. \tag{2.1}$$

Es decir en el caso unidimensional, todas las funciones de $W^{1,p}(I)$ se obtienen integrando la derivada, y en particular, son continuas.

Observación 2.2 *Este resultado prueba que para un elemento $u \in W^{1,p}(I)$ existe un único representante continuo en $\bar{I}$ y por tanto que $W^{1,p}(I) \subset C^0(\bar{I})$, es decir, todas las funciones de $W^{1,p}(I)$ son continuas.*

También se deduce que, si $u \in W^{1,p}(I)$ y $u' \in C^0(\bar{I})$ entonces $u \in C^1(\bar{I})$ y la derivada débil coincide con la usual.

Proposición 2.2 *En el espacio $W^{1,p}(I)$ se verifica la fórmula de integración por partes*

$$\int_a^b uv'\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'v\,dx, \quad \forall u,v \in W^{1,p}(I),\ \forall\, a,b \in \bar{I}.$$

Observación 2.3 *En lugar de definir el espacio de Sobolev* $W^{1,p}(I)$ *como lo hemos hecho anteriormente (ver Definición 2.1), se puede definir tal espacio en el caso unidimensional como el conjunto de las funciones continuas* $u \in C^0(\bar{I})$ *tales que existe una función* $v \in L^p(I)$ *verificando* (2.1) $\forall t \in \bar{I}$*, siendo ambas definiciones equivalentes.*

Proposición 2.3 *Dado* $u \in W^{1,p}(I)$*,* $1 < p < +\infty$*, siendo* $I = (a, b)$ *un intervalo acotado de* $\mathbb{R}$*. Se verifican las siguientes desigualdades:*

$$(1) \quad |u(x_2) - u(x_1)| \leq |x_2 - x_1|^{1/p'} \, \|u'\|_{L^p(I)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(I), \, \forall \, x_1, x_2 \in \bar{I}.$$

$$(2) \quad \|u - u(x_0)\|_{C^0(\bar{I})} \leq (b-a)^{1/p'} \, \|u'\|_{L^p(I)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(I), \, \forall \, x_0 \in \bar{I}.$$

$$(3) \quad \|u\|_{C^0(\bar{I})} \leq \left[(b-a) + (b-a)^{-p'/p}\right]^{1/p'} \|u\|_{W^{1,p}(I)}, \quad \forall \, u \in W^{1,p}(I).$$

A continuación, pasamos a probar cada una de las desigualdes anteriores.

Demostración. Comenzamos probando la desigualdad (1).
Supongamos $x_1 < x_2$. Como la regla de Barrow sigue siendo cierta en dimensión uno, se tiene

$$|u(x_2) - u(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} u'(s) \, ds \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |u'(s)| \, ds.$$

Aplicando ahora la desigualdad de Hölder y teniendo en cuenta que la integral entre dos puntos cualesquiera x_1, x_2 del intervalo I siempre va a ser menor que la integral en todo el intervalo, tenemos

$$\int_{x_1}^{x_2} |u'(s)| \, ds \leq \left(\int_{x_1}^{x_2} |u'(s)|^p \, ds \right)^{1/p} \left(\int_{x_1}^{x_2} 1^{p'} \, ds \right)^{1/p'} \leq$$

$$\leq \left(\int_{x_1}^{x_2} |u'(s)|^p \, ds \right)^{1/p} (x_2 - x_1)^{1/p'} = \|u\|_{L^p(I)} \, (x_2 - x_1)^{1/p'}.$$

Por tanto, se tiene la desigualdad pedida.

A continuación, probamos la segunda desigualdad. Usamos que

$$\|u - u(x_0)\|_{C^0(\bar{I})} = \max_{x \in \bar{I}} |u - u(x_0)|. \tag{2.2}$$

Sea $x \in \bar{I}$. Por la desigualdad (1) y considerando que la distancia entre los puntos x y x_0 va a ser siempre más pequeña que la longuitud del intervalo $\bar{I}$,

$$|u(x) - u(x_0)| \leq |x - x_0|^{1/p'} \, \|u'\|_{L^p(I)} \leq (b-a)^{1/p'} \|u'\|_{L^p(I)}.$$

Luego,

$$\|u - u(x_0)\|_{C^0(\bar{I})} = \max_{x\in\bar{I}} |u - u(x_0)| \leq (b-a)^{1/p'} \|u'\|_{L^p(I)}.$$

como queríamos probar.

Finalmente, pasamos a probar la última desigualdad (3). Para probar esta, vamos a utilizar las desigualdades que ya conocemos.
En particular, la desigualdad (2.2) nos permite acotar la función u menos su media. Más concretamente,

$$\left|u(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b u(x_0)dx_0\right| = \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b (u(x) - u(x_0))dx_0\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b |u(x) - u(x_0)|dx_0 \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \|u'\|_{L^p(I)}\,(b-a)^{1/p'}dx_0 =$$

$$= (b-a)^{1/p'}\,\|u'\|_{L^p(I)}.$$

Por tanto,

$$\left|u(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b u(x_0)\,dx_0\right| \leq (b-a)^{1/p'}\,\|u'\|_{L^p(I)}. \tag{2.3}$$

Ahora bien, lo que nos interesa es acotar la norma en $C^0(\bar{I})$. Utilizando (2.3) y aplicando la desigualdad de Hölder,

$$|u(x)| \leq \left|u(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b u(x_0)\,dx_0\right| + \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b u(x_0)\,dx_0\right| \leq$$

$$\leq (b-a)^{1/p'}\,\|u'\|_{L^p(I)} + \frac{1}{b-a}\int_a^b |u(x_0)|\,dx_0 \leq$$

$$\leq (b-a)^{1/p'}\,\|u'\|_{L^p(I)} + \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b |u(x_0)|^p\,dx_0\right)^{1/p}\left(\int_a^b 1^{p'}\,dx_0\right)^{1/p'} =$$

$$= (b-a)^{1/p'}\,\|u'\|_{L^p(I)} + \frac{(b-a)^{1/p'}}{(b-a)}\|u\|_{L^p(I)} =$$

$$= (b-a)^{1/p'}\,\|u'\|_{L^p(I)} + (b-a)^{-1/p}\,\|u\|_{L^p(I)}.$$

Luego,

$$|u(x)| \leq (b-a)^{1/p'}\,\|u'\|_{L^p(I)} + (b-a)^{-1/p}\,\|u\|_{L^p(I)}. \tag{2.4}$$

Como buscamos la norma en $W^{1,p}(I)$, a continuación, aplicamos la desigualdad de Hölder bidimensional (i.e. $a_1\,b_1 + a_2\,b_2 \leq ({a_1}^{p'} + {a_2}^{p'})^{1/p'}\,({b_1}^p + {b_2}^p)^{1/p}$) al segundo miembro de (2.4). En efecto,

$$
\begin{aligned}
&(b-a)^{1/p'}\|u'\|_{L^p(I)} + (b-a)^{-1/p}\|u\|_{L^p(I)} \leq \\
&\leq \left[(b-a) + (b-a)^{-p'/p}\right]^{1/p'} \left[\|u'\|^p_{L^p(I)} + \|u\|^p_{L^p(I)}\right]^{1/p} = \\
&= \left[(b-a) + (b-a)^{-p'/p}\right]^{1/p'} \|u\|_{W^{1,p}(I)}.
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

Luego, tomando máximo en la desigualdad (2.4) y teniendo en cuenta (2.5), se tiene la desigualdad que se quería probar.
Esto concluye la demostración de la Proposición 2.3.

□

Observación 2.4 *La desigualdad* (3) *nos dice que la inyección*

$$
\begin{aligned}
F \,: W^{1,p}(I) &\longrightarrow C^0(\bar{I}) \\
u &\longmapsto F(u) = u
\end{aligned}
$$

es continua, ya que existe $C > 0$ tal que

$$\|F(u)\|_{C^0(\bar{I})} = \|u\|_{C^0(\bar{I})} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(I)},$$

donde una posible elección de C es

$$C = \left[(b-a) + (b-a)^{-p'/p}\right]^{1/p'}.$$

A continuación, recordamos el Teorema de Ascoli-Arzelà, para ello necesitamos la siguiente definición:

Definición 2.3 *Un subconjunto $U \subset C^0(\bar{I})$ se dice equicontinuo si para $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda $u \in U$ y para todo $x_1, x_2 \in \bar{I}$ con $|x_1 - x_2| < \delta$, se tiene que $|u(x_1) - u(x_2)| < \varepsilon$.*

Teorema 2.1 (Teorema de Ascoli-Arzelà) *Un conjunto $U \subset C^0(\bar{I})$ es relativamente compacto en $C^0(\bar{I})$ (es decir, su clausura es compacta) si y sólo si es acotado y equicontinuo.*

Podemos reescribir el teorema de Ascoli-Arzelà de la siguiente manera:

Corolario 2.1 *Dada una sucesión $\{u_n\} \subset C^0(\bar{I})$, si $\{u_n\}$ es acotada y equicontinua, entonces existe una subsucesión $\{u_{nk}\}$ de $\{u_n\}$ que converge a u en $C^0(\bar{I})$.*

Teorema 2.2 *Los conjuntos acotados de $W^{1,p}(I)$ son relativamente compactos en $C^0(\bar{I})$, equivalentemente: La inyección de $W^{1,p}(I)$ en $C^0(\bar{I})$ es compacta.*

Observación 2.5 *Sabemos que por la Observación 2.1, una sucesión $\{u_n\}$ converge fuertemente en $W^{1,p}(I)$ si y sólo si $\{u_n\}$ y $\{u'_n\}$ convergen fuertemente en $L^p(I)$ a u y u' respectivamente. Teniendo en cuenta la Observación 2.4 se tiene que $\{u_n\}$ no sólo converge fuertemente en $L^p(I)$ sino que converge fuertemente en $C^0(\bar{I})$. Análogamente también esta claro, que si u_n converge débilmente a u en $W^{1,p}(I)$ entonces $\{u'_n\}$ converge a u' en $L^p(I)$ y $\{u_n\}$ converge débilmente a u en $C^0(\bar{I})$. De hecho, vamos a ver que esta última convergencia es fuerte em $C^0(\bar{I})$.*

Observación 2.6 *Dada una sucesión $\{u_n\}$ que está acotada en $W^{1,p}(I)$, por la Observación 2.4 sabemos que $\{u_n\}$ también esta acotada en $C^0(\bar{I})$. Observar que como el espacio $W^{1,p}(I)$ es reflexivo se puede extraer una subsucesión $\{u_{nk}\}$ de $\{u_n\}$ que converge débilmente a u en $W^{1,p}(I)$ (ver Teorema 1.6).*
Por otra parte, la subsucesión $\{u_{nk}\}$ está acotada en $W^{1,p}(I)$, por tanto lo está en $C^0(\bar{I})$. Luego, por el Teorema de Ascoli-Árzela se puede extraer una subsucesión $\{u_{nkj}\}$ de $\{u_{nk}\}$ que converge a $\tilde{u}$ fuertemente en $C^0(\bar{I})$. En realidad, $\{u_{nkj}\}$ converge a u en $W^{1,p}(I)$, luego se deduce que $u = \tilde{u}$ independiente de la subsucesión que tomemos. Por tanto, la subsucesión $\{u_{nk}\}$ de $\{u_n\}$ que converge débilmente u en $W^{1,p}(I)$ va a converger fuertemente a u en $C^0(\bar{I})$.

Esto da a lugar al siguiente resultado que será de especial importancia para probar la existencia de solución de problemas de Cálculo de Variaciones que veremos en capítulos posteriores.

Teorema 2.3 *Si una sucesión $\{u_n\}$ converge débilmente en $W^{1,p}(I)$ hacia una funcion u, entonces $\{u_n\}$ converge fuertemente a u en $C^0(\bar{I})$ y en particular, ésta converge puntualmente en I.*

El siguiente teorema muestra las propiedades fundamentales de $W^{1,p}(I)$.

Teorema 2.4 *El espacio $W^{1,p}(I)$ verifica :*

1. *Es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq +\infty$.*

2. *Es reflexivo para $1 < p < +\infty$.*

3. *Es separable para $1 \leq p < \infty$.*

4. *$W^{1,2}(I) = H^1(I)$ es un espacio de Hilbert separable.*

Finalmente veamos una representación de los elementos del dual de $W^{1,p}(I)$.

Proposición 2.4 *Sea $f \in (W^{1,p}(I))'$, entonces existen $u_0, u_1 \in L^{p'}(I)$ tales que se tiene la representación*

$$f(w) = \int_I u_0 w \, dx + \int_I u_1 w' \, dx, \quad \forall w \in W^{1,p}(I), \tag{2.6}$$

y además se tiene la igualdad

$$\|f\|_{(W^{1,p}(I))'} = \text{mín}\left\{\|u_0\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)} + \|u_1\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)} \;:\; (u_0, u_1) \text{ satisfacen } (2.6)\right\}.$$

2.2. El espacio $W^{1,p}_0(I)$

Otro espacio que va a ser importante en lo que sigue viene dado por la siguiente definición.

Definición 2.4 *Se define $W^{1,p}_0(I)$ como el subespacio de $W^{1,p}(I)$ formado por las funciones que se anulan en los extremos a, b de I, es decir*

$$W^{1,p}_0(I) := \{u \in W^{1,p}(I) \,/\, u(a) = u(b) = 0\}.$$

Se denota

$$H^1_0(I) := W^{1,2}_0(I).$$

Uno de los resultados mas importantes acerca del espacio $W^{1,p}_0(I)$ es la desigualdad de Poincaré que resulta de gran utilidad para resolver problemas de ecuaciones diferenciales con condiciones de contorno.

Teorema 2.5 (Desigualdad de Poincaré) *Si $I = (a, b)$ es un intervalo acotado de $\mathbb{R}$ y $1 < p < +\infty$, entonces existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^p(I)} \le C\|u'\|_{L^p(I)}, \quad \forall\, u \in W^{1,p}_0(I).$$

Demostración. Sea $u \in W^{1,p}_0(I)$ entonces, por definición $(u(a) = 0, u(b) = 0)$ y por (2.1), se tiene

$$u(t) = \int_a^t u'(s)\, ds$$

Tomando valor absoluto y aplicando la desigualdad de Hölder, se tiene

$$|u(t)| = \left|\int_a^t u'(s)\, ds\right| \le \int_a^t |u'(s)|\, ds \le \|u'\|_{L^p(I)}\, (t-a)^{1/p'}.$$

Si $p = \infty$, se tiene

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \le \|u'\|_{L^\infty(I)}\, (b-a).$$

En el caso $1 \le p < +\infty$, elevando a p e integrando en I obtenemos

$$\int_a^t |u(t)|^p\, dt \le \|u'\|^p_{L^p(I)} \int_a^b (t-a)^{p-1}\, dt \le$$

$$\le \|u'\|^p_{L^p(I)}(b-a)^{p-1} \int_a^b dt = \|u'\|^p_{L^p(I)}(b-a)^p.$$

Con esto se concluye la prueba de la desigualdad de Poincaré, donde se puede tomar $C = (b - a)$.

$\square$

Observación 2.7 *Para obtener la constante en la prueba anterior, sólo hemos utilizado la hipótesis de que la función $u \in W_0^{1,p}(I)$ se anule en uno de los extremos del intervalo I (i.e $u(a) = 0$). Se tiene un resultado análogo utilizando la condición sobre los dos extremos del intervalo I, es decir, $u(a) = u(b) = 0$. En ese caso, se puede tomar $C = (b - a)/2$.*

Como consecuencia de la desigualdad Poincaré, se tiene

Teorema 2.6 *Sea $I = (a, b)$ un intervalo acotado de $\mathbb{R}$ y $1 < p < +\infty$, se define la norma $\|\cdot\|_{W_0^{1,p}} : W_0^{1,p}(I) \to \mathbb{R}^+$ por*

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(I)} = \|u'\|_{L^p(I)}, \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(I),$$

Las propiedades principales del espacio $W_0^{1,p}(I)$ se resumen en el siguente teorema.

Teorema 2.7 *Se tiene:*

1. *El espacio $W_0^{1,p}(I)$ es cerrado en $W^{1,p}(I)$ y por tanto es un espacio de Banach separable y reflexivo para $1 < p < +\infty$.*

2. *El espacio $H_0^1(I) := W_0^{1,2}(I)$ es un espacio de Hilbert separable.*

3. *El espacio $C_0^1(\bar{I})$ es denso en $W_0^{1,p}(I)$ si $1 \leq p < +\infty$.*

Capítulo 3

Minimización de funcionales

En lo que sigue vamos a estudiar la existencia de solución a problemas de Optimización de la forma general

$$\inf_{x\in\mathcal{U}} f(x), \tag{3.1}$$

donde $\mathcal{U}$ es un conjunto dado, generalmente un subconjunto de un espacio normado X, y f es un aplicación dada (un funcional) definida sobre $\mathcal{U}$ con valores en $\mathbb{R}$.

Obsérvese que un problema de la forma

$$\sup_{x\in\mathcal{U}} f(x)$$

se convierte en uno de la forma (3.1) sin más que cambiar f por $-f$. Más concretamente, se tiene

$$\sup_{x\in\mathcal{U}} f(x) = \inf_{x\in\mathcal{U}} \left(-f(x)\right),$$

así pues sólo estudiaremos el problema (3.1).

A continuación, recordemos que se entiende por mínimo global y mínimo local, respectivamente.

Definición 3.1 *Sea $f : U \to \mathbb{R}$ con $\mathcal{U}$ un subconjunto de un espacio normado X. Diremos que f tiene un mínimo global o absoluto en un punto $\hat{x}$ si:*

$$\hat{x} \in \mathcal{U} \ \text{y} \ f(\hat{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in \mathcal{U}.$$

En tal caso pondremos

$$f(\hat{x}) = \min_{x\in\mathcal{U}} f(x).$$

Se dice que f tiene un mínimo local o relativo en un punto $\hat{x}$ si:

$$\hat{x} \in \mathcal{U} \ \text{y} \ \exists\, \mathcal{E}(\hat{x}) \ \text{tal que} \ f(\hat{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{E}(\hat{x}),$$

donde $\mathcal{E}(\hat{x})$ denota un entorno del punto $\hat{x}$. Obviamente, todo mínimo global o absoluto es un mínimo local o relativo.

Observación 3.1 *De forma análoga se define los máximos (globales, locales). Diremos que una función tiene un extremo (global, local) en $\hat{x}$ si tiene un mínimo o un máximo (global, local) en $\hat{x}$.*

3.1. Semicontinuidad

El resultado más importante referente a la existencia de mínimos globales es conocido como el Teorema de Weierstrass que dice:

"Si $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ es un funcional continuo y $\mathcal{U}$ es compacto, no vacío, entonces f alcanza un máximo y un mínimo absoluto en $\mathcal{U}$", o su corolario, que en el caso de $\mathbb{R}^N$, dice:

"Si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es continua y verifica que $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty$, entonces f tiene un mínimo absoluto en cualquier conjunto cerrado $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^N$".

Ahora bien, si sólo estamos interesado en la existencia de mínimos globales, podemos disminuir la hipótesis de continuidad. Ello conduce a la siguiente definición.

Definición 3.2 *Sea $\mathcal{U}$ un espacio métrico y $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. Diremos que f es semicontinua inferiormente, y se escribirá f s.c.i., en un punto $x \in \mathcal{U}$ si para toda sucesión $\{x_n\} \subset \mathcal{U}$ que converge a x, se tiene*

$$f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$

Diremos que f es semicontinua inferiormente en $\mathcal{U}$ si lo es en todo punto $x \in \mathcal{U}$.

Observación 3.2 *Si f es continua en $\mathcal{U}$ se tiene que es semicontinua inferiormente en $\mathcal{U}$. Sin embargo, el recíproco no es cierto.*

Se tiene la siguiente caracterización de semicontinuidad inferior.

Proposición 3.1 *Sea $\mathcal{U}$ un espacio métrico. Un funcional $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ es s.c.i. en $\mathcal{U}$ si y sólo si para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ el conjunto de subnivel E_λ definido por*

$$E_\lambda = \{x \in \mathcal{U} \,/ f(x) \leq \lambda\} \tag{3.2}$$

es un subconjunto cerrado de $\mathcal{U}$.

Observación 3.3 *En el resultado anterior hemos utilizado la topología restringida a $\mathcal{U}$. En el caso en que $\mathcal{U}$ es cerrado, se tiene que f es s.c.i. en $\mathcal{U}$ si y sólo si E_λ es cerrado para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Usando el concepto de semicontinuidad inferior se tiene el siguiente teorema sobre la existencia de mínimos.

Teorema 3.1 *Supongamos que $\mathcal{U}$ es un espacio métrico, compacto, no vacío y que la función $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ sea s.c.i. en $\mathcal{U}$, entonces f tiene un mínimo global en $\mathcal{U}$.*

A la hora de aplicar el Teorema anterior surge sin embargo la dificultad de que los conjuntos cerrados y acotados en espacios infinitos-dimensionales no son en general compactos. Para subsanar esta dificultad, usamos la topología débil en lugar de la fuerte. Introducimos por tanto la siguiente definición.

Definición 3.3 *Sea X un espacio normado, $\mathcal{U} \subset X$, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. Diremos que f es secuencialmente débilmente semicontinua inferiormente, y se escribirá f s.d.s.i., en un punto $x \in \mathcal{U}$ si dada cualquier sucesión $\{x_n\} \subset \mathcal{U}$ tal que $\{x_n\}$ converge débilmente a x, se tiene*

$$f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$

Diremos que f es s.d.s.c.i. en $\mathcal{U}$ si lo es en todo punto de $\mathcal{U}$.

Observación 3.4 *Claramente, si f es s.d.s.c.i., entonces es semicontinua inferiormente, pero no recíprocamente. De hecho, existen funcionales continuos que no son s.d.s.c.i.*

De manera análoga a la Proposición 3.1, se tiene

Proposición 3.2 *Sean X un espacio normado, $\mathcal{U} \subset X$ secuencialmente débilmente cerrado y $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. El funcional f es s.d.s.c.i. si y sólo si para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ el conjunto E_λ definido por (3.2) es secuencialmente débilmente cerrado.*

A continuación, recordamos el concepto de función convexa y función estrictamente convexa.

Definición 3.4 *Sean X un espacio vectorial y $\mathcal{U} \subset X$ un subconjunto convexo. Se dice que $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ es convexa si*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y), \quad \forall x, y \in \mathcal{U},\ \forall \alpha \in [0,1].$$

El función f se dice estrictamente convexa si

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y), \quad \forall x, y \in \mathcal{U},\ x \neq y,\ \forall \alpha \in (0,1).$$

Es inmediato comprobar que las funciones convexas verifican la siguiente propiedad:

Proposición 3.3 *Sean X un espacio vectorial, $\mathcal{U} \subset X$ convexo y $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ convexa. Entonces para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ el conjunto E_λ definido por (3.2) es un subconjunto convexo de X.*

De la Proposición 3.2, Proposición 3.3 y el Teorema 1.4, proviene el siguiente resultado.

Proposición 3.4 *Sean X un espacio normado, $\mathcal{U} \subset X$ convexo y cerrado y $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces f es s.c.i. en $\mathcal{U}$ si y sólo si es s.d.c.i. en $\mathcal{U}$.*

3.2. Resultado general de existencia

El resultado principal que usaremos para la existencia de solución de un problema de minimización en un espacio infinito-dimensional es el siguiente:

Teorema 3.2 *Sean X un espacio reflexivo, $\mathcal{U} \subset X$ un subconjunto secuencialmente débilmente cerrado, no vacío, y $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ una función s.d.s.c.i. Suponemos además que se verifica una de las siguientes condiciones:*

(i) El conjunto $\mathcal{U}$ es acotado.

(ii) El conjunto $\mathcal{U}$ no es acotado, pero

$$\lim_{\substack{\|x\|\to\infty \\ x\in\mathcal{U}}} f(x) = +\infty. \tag{3.3}$$

En esas condiciones, f alcanza un mínimo global en $\mathcal{U}$.

Demostración. Consideremos primero el caso de que el conjunto $\mathcal{U}$ es acotado. Sea $\mu = \inf_{x\in\mathcal{U}} f(x)$ y tomemos una sucesión $\{x_n\} \subset \mathcal{U}$ minimizante, i.e. tal que

$$\exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \inf_{x\in\mathcal{U}} f(x) = \mu.$$

Como $\mathcal{U}$ es acotado, la sucesión $\{x_n\}$ será por tanto acotada, luego por el Teorema 1.6, existe entonces una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ y un elemento $\hat{x} \in X$ tales que $\{x_{n_k}\}$ converge débilmente a $\hat{x}$. Como $\mathcal{U}$ es secuencialmente débilmente cerrado tendremos que $\hat{x} \in \mathcal{U}$ y como f es s.d.c.i., se tendrá

$$f(\hat{x}) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \mu.$$

Además, se tiene que

$$f(\hat{x}) \geq \inf_{x\in\mathcal{U}} f(x) = \mu.$$

Luego, de las desigualdades anteriores, se deduce que $f(\hat{x}) = \mu$, como queríamos probar.

Consideramos ahora el caso en que $\mathcal{U}$ no es acotado pero se verifica (3.3). Sabemos entonces que dado $M > 0$ existe $R > 0$ tal que si $x \in \mathcal{U}$ y $\|x\| > R$, se tiene $f(x) > M$, siendo $M = \max\{\mu + 1, 0\}$ (μ definido como en el caso anterior, que podría ser $-\infty$). En particular, denotando $\bar{B}_R$ a la bola cerrada de centro 0 y radio R, se tiene

$$\mu = \inf_{x \in \mathcal{U}} f(x) = \inf_{x \in \mathcal{U} \cap \bar{B}_R} f(x).$$

Por otra parte, como el conjunto $\bar{B}_R$ es convexo y cerrado, se deduce (ver Teorema 1.4) que es secuencialmente débilmente cerrado y por tanto, es fácil ver que la intersección $\mathcal{U} \cap \bar{B}_R$ es secuencialmente débilmente cerrado. Claramente este es acotado, luego podemos aplicar el caso anterior y obtener la existencia de $\hat{x} \in \mathcal{U} \cap \bar{B}_R \subset \mathcal{U}$ tal que

$$f(\hat{x}) = \inf_{x \in \mathcal{U} \cap \bar{B}_R} f(x) = \mu,$$

lo que concluye la demostración del resultado.

$\square$

Corolario 3.1 *Sea X un espacio reflexivo, $\mathcal{U} \subset X$ convexo, cerrado, no vacío y $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ una función convexa y s.c.i. Suponemos además que se verifica una de las condiciones i) o ii) del Teorema 3.2. Entonces f tiene un mínimo en $\mathcal{U}$.*

Observación 3.5 *El método de la demostración del teorema anterior, es lo que se conoce como método directo del Cálculo de Variaciones. Este consiste en elegir una sucesión minimizante $\{x_n\} \subset \mathcal{U}$ y probar que alguna subsucesión de $\{x_n\}$ converge a un mínimo global $\hat{x}$ de f en $\mathcal{U}$.*

Observación 3.6 *Cuando una función verifica* (3.3) *se dice que es coercitiva.*

Recordemos que también se tiene el siguiente concepto de coercitividad:

Definición 3.5 *Sea $a : H \times H \to \mathbb{R}$ una aplicación bilineal, se dice que a es coercitiva si existe una constante $\alpha > 0$ tal que*

$$a(x, x) \geq \alpha \|x\|_H^2, \quad \forall x \in H.$$

Proposición 3.5 *Dada una aplicación $a : H \times H \to \mathbb{R}$ bilineal, son equivalentes:*

a) Existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(x, x) \geq \alpha \|x\|_H^2, \quad \forall x \in H.$$

b) La función $f : H \to H$ definida por

$$f(x) = a(x, x), \quad \forall x \in H.$$

verifica (3.3).

Respecto a la unicidad de solución al problema de minimización (3.1), se tiene:

Proposición 3.6 *Sean X un espacio vectorial, $\mathcal{U} \subset X$ convexo y $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, estrictamente conveva. Entonces existe a lo más una solución del problema* (3.1).

Observación 3.7 *El resultado anterior no garantiza la existencia de solución, tan sólo el hecho de que si existe solución entonces tal solución es única.*

A continuación, veamos un ejemplo de carácter general como aplicación del Teorema 3.2.

Ejemplo 3.6
Sea H un espacio de Hilbert y una aplicación $a \in \mathcal{L}_2(H)$ coercitiva. Si $\mathcal{C} \subset H$ es un subconjunto convexo y cerrado, entonces para todo $g \in H'$ existe una única solución del problema

$$\min_{x\in\mathcal{C}} \left\{ \frac{1}{2}a(x,x) - \langle g, x\rangle \right\}. \tag{3.4}$$

Demostración. Para ver que existe solución del problema (3.4), veremos que se satisface cada una de las hipótesis del Teorema 3.2.

En este caso, H es un espacio reflexivo por ser de Hilbert. Además, por el Teorema 1.4 como $\mathcal{C} \subset H$ es un subconjunto convexo y cerrado, se tiene que $\mathcal{C}$ es secuencialmente débilmente cerrado. Tenemos el funcional,

$$f(x) = \frac{1}{2}a(x,x) - \langle g, x\rangle, \tag{3.5}$$

que lo podemos escribir como

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

siendo

$$f_1(x) := \frac{1}{2}a(x,x), \quad f_2(x) = -\langle g, x\rangle. \tag{3.6}$$

Comenzamos probando que la función $f_2(x)$ es convexa. Esto es evidente por ser la función g lineal.

Respecto a $f_1(x)$. Si probamos que esta es convexa, tendremos que $f(x)$ es convexa por ser suma de dos funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ convexas. De hecho, si probamos que $f_1(x)$ es estrictamente convexa entonces la función $f(x)$ sería estrictamente convexa.

A continuación, pasamos a probar que $f_1(x)$ es estrictamente convexa. No es restrictivo suponer que a es una aplicación simétrica. Por la Definición 3.4 tenemos que ver que se verifica lo siguiente

$$f_1(\alpha x+(1-\alpha)y) < \alpha f_1(x)+(1-\alpha)f_1(y), \quad \forall x, y \in H,\, x \neq y,\, \forall\alpha \in (0,1). \tag{3.7}$$

Teniendo en cuenta la definición de $f_1(x)$ dada en (3.6) y que a es una aplicación bilineal, se tiene

$$\begin{aligned} f_1(\alpha x+(1-\alpha)y) &= a(\alpha x+(1-\alpha)y,\, \alpha x+(1-\alpha)y) = \\ &= \alpha^2 a(x,x)+2\alpha(1-\alpha)a(x,y)+(1-\alpha)^2 a(y,y) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Observar que se verifica la desigualdad de Cauchy-Schwarz ya que la aplicación a define un producto escalar. Aplicando esta y la desigualdad de Young a (3.8), obtenemos

$$\begin{aligned} & f_1(\alpha x+(1-\alpha)y) = \alpha^2 a(x,x)+2\alpha(1-\alpha)a(x,y)+(1-\alpha)^2 a(y,y) \\ & \overset{C-S}{\leq} \alpha^2 a(x,x)+2\alpha(1-\alpha)\sqrt{a(x,x)}\sqrt{a(y,y)}+(1-\alpha)^2 a(y,y) \\ & \overset{Young}{\leq} \alpha^2 a(x,x)+2\left(\frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)a(x,x)+\frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)a(y,y)\right)+(1-\alpha)^2 a(y,y) = \\ & = \left[\alpha^2+\alpha(1-\alpha)\right]a(x,x)+\left[\alpha(1-\alpha)+(1-\alpha)^2\right]a(y,y) = \\ & = \alpha f_1(x)+(1-\alpha)f_1(y), \quad \forall x,y\in H,\ x\neq y,\ \forall\alpha\in(0,1). \end{aligned} \tag{3.9}$$

En principio, esto prueba que $f_1(x)$ es convexa. Ahora bien, nuestro interés es probar que la función $f_1(x)$ es estrictamente convexa, i.e. que alguna de las desigualdades en (3.9) es estricta.
Razonamos por reducción al absurdo. Bajo las hipótesis (3.7), supongamos que todas las desigualdades que hemos aplicado en (3.9) son igualdades. Sabemos que la condición de alineamiento en la desigualdad de Cauchy-Schwarz viene dada por

$$a(x,y)=\sqrt{a(x,x)}\sqrt{a(y,y)} \Longleftrightarrow y=\lambda x \text{ con } \lambda\geq 0,\ \text{ si } x\neq 0. \tag{3.10}$$

Por otro lado, tenemos que la desigualdad de Young viene dada por

$$ab\leq\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}, \quad \forall a,b\geq 0,$$

cuya igualdad se tiene para $a=b$.
Ahora bien, anteriormente aplicamos la desigualdad de Young en (3.9) a $\sqrt{a(x,x)}$ y $\sqrt{a(y,y)}$, respectivamente. Luego, la igualdad de Young nos lleva

$$\sqrt{a(x,x)}=\sqrt{a(y,y)}, \tag{3.11}$$

Por otra parte, aplicamos Cauchy-Schwarz a $a(x,y)$, luego $y=\lambda x$ con $\lambda\geq 0$ que junto con la igualdad anterior se deduce

$$\sqrt{a(y,y)}=\sqrt{\lambda^2 a(x,x)}=\lambda\sqrt{a(x,x)}. \tag{3.12}$$

Por (3.11) y (3.12), obtenemos

$$\sqrt{a(x,x)} = \lambda\sqrt{a(x,x)} \Longleftrightarrow \lambda = 1.$$

Esto implicaría que $x = y$, lo cuál es una contradicción, pues hemos supuesto que x e y son dos números distintos. Luego, se tiene que la desigualdad es estricta.
Por tanto, $f_1(x)$ es estrictamente convexa como queríamos probar, en particular $f_1(x)$ es convexa.
Hemos probado entonces que la función $f(x)$ definida por (3.5) es estrictamente convexa. Por otra parte, como $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son continuas entonces $f(x)$ es continua y en particular s.c.i.

Finalmente, dado que $\mathcal{C}$ no es acotado, nos falta probar que se verifica (3.3). Teniendo en cuenta, que a es coercitiva (por hipótesis) y que se verifica que $|\langle f, x\rangle| \leq \|f\|_H\|x\|_H$,

$$f(x) = \frac{1}{2}a(x,x) - \langle f, x\rangle \geq \frac{1}{2}\|x\|_H^2 - \|f\|_H\|x\|_H. \tag{3.13}$$

Observar que el miembro de la derecha de (3.13) es un polinomio de segundo grado en $\|x\|_H$, donde el coeficiente cuadrático del polinomio es positivo.
Pasando al limite en $\|x\|$, se tiene entonces

$$\frac{1}{2}a(x,x) - \langle f, x\rangle \longrightarrow +\infty.$$

como queríamos probar.
Gracias al Corolario 3.1 y a la Proposición 3.6 se tiene que existe una única solución del problema (3.4).

$\square$

Observación 3.8 *Observar que una forma más sencilla de probar que la función $f_1(x)$ es estrictamente convexa, es utilizando una relación entre convexidad y derivabilidad que veremos más adelante.*

Capítulo 4

Diferenciabilidad en espacios normados

Una de las más importantes motivaciones para el desarrollo del Cálculo Diferencial en espacios de dimensión infinita proviene de la teoría clásica del Cálculo de Variaciones.

La necesidad de desarrollar una teoría de la diferenciación en espacios de dimensión infinita, parece ser que, la puso de manifiesto J. Hadamard. Esta tarea la iniciaron sus discípulos M. Fréchet y M.R. Gâteaux.

La propuesta de este capítulo consiste en dar una exposición del Cálculo diferencial en dimensión infinita que posteriormente será de utilidad para el estudio del Cálculo de Variaciones.

El único concepto que va a ser necesario para manejar la mayoría de los procedimientos considerados en este trabajo, es esencialmente la derivada direccional. Por completitud, recordamos también los conceptos de derivada Gâteaux y derivada Fréchet.

4.1. Definiciones

Comenzamos definiendo qué se entiende por derivada direccional en espacios normados.

Definición 4.1 *Sean X, Y espacios normados, $\mathcal{U} \subset X$ abierto, $F : \mathcal{U} \to Y$ una función. Fijado un vector no nulo $h \in X$ y $x_0 \in \mathcal{U}$, diremos que F es diferenciable en el sentido de Gâteaux (o G-diferenciable) en x_0 y en la dirección h si existe el límite en Y*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(x_0 + \varepsilon h) - F(x_0)}{\varepsilon}.$$

En tal caso, se denota

$$\delta F(x_0, h) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(x_0 + \varepsilon h) - F(x_0)}{\varepsilon}, \tag{4.1}$$

y al elemento $\delta F(x_0, h) \in Y$*, se le denomina la G-diferencial de* F *en el punto* x_0 *y en la dirección* h*.*

Si existe $\delta F(x_0, h)$ *para toda* $h \in X$*, diremos que* F *es G-diferenciable en* x_0*, y a la aplicación* $\delta F(x_0)$ *definida por*

$$\delta F(x_0) : h \in X \longmapsto \delta F(x_0, h) \in Y \tag{4.2}$$

la denominaremos la G-diferencial (o diferencial Gâteaux) de F *en el punto* x_0*.*

Observación 4.1 *En la práctica, para los problemas de Cálculo de Variaciones, vamos a considerar que el espacio* $Y = \mathbb{R}$*, donde sabemos que todas las normas son equivalentes y como consecuencia el cálculo del límite anterior va a resultar más sencillo. Además, observar que el valor* $\delta F(x_0, h)$*, no es otra cosa que la derivada direccional de* F *en el punto* x_0 *y en la dirección* h*.*

Observación 4.2 *Si* F *es G-diferenciable en* x_0 *entonces la G-diferencial es homogénea en la variable* h*, es decir*

$$\delta F(x_0, \alpha h) = \alpha \delta F(x_0, h), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},\, \forall h \in X.$$

Además, la aplicación $t \longmapsto F(x_0 + th)$ *es continua en* $t = 0$*.*

Al igual que se ha definido anteriormente el concepto de derivada direccional de primer orden, podemos definir la derivada direccional segunda en una dirección de la siguiente manera:

Definición 4.2 *Sean* X*,* Y *espacios normados,* $\mathcal{U} \subset X$ *abierto,* $F : \mathcal{U} \to Y$ *una función. Dados* $x_0 \in \mathcal{U}$ *y* $h \in X$*, supongamos que existe* $\delta F(x_0, h)$ *definida por* (4.1)*, se dice que* F *es dos veces G-diferenciable en* x_0 *en la dirección* h*, si existe el límite en* Y

$$\delta^2 F(x_0, h, h) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta F(x_0 + \varepsilon h, h) - \delta F(x_0, h)}{\varepsilon}.$$

y al elemento $\delta^2 F(x_0, h, h) \in Y$ *así definido lo denominaremos la G-diferencial segunda de* F *en el punto* x_0 *en la dirección* h*.*

Observación 4.3 *Observar que para obtener la G-diferencial segunda de* F*, se puede derivar la G-diferencial de* F *en otras direcciones. Por el interés de la memoria, basta derivar esta última en la misma dirección.*

Observación 4.4 *Es evidente que si existe* $\delta^2 F(x_0, h, h)$ *para ciertos* $x_0 \in \mathcal{U}$ *y* $h \in X$*, entonces existe* $\delta^2 F(x_0, \alpha h, \alpha h)$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *y se verifica*

$$\delta^2 F(x_0, \alpha h, \alpha h) = \alpha^2 \delta^2 F(x_0, h, h).$$

Observación 4.5 *Observar que en el caso de que espacio de llegada de la función F sea $\mathbb{R}$, si definimos*

$$\Phi(\varepsilon) = F(x_0 + \varepsilon h)$$

se tendrá

$$\delta F(x_0, h) = \Phi'(0) := \frac{d}{d\varepsilon} F(x_0 + \varepsilon h)_{|\varepsilon=0}$$

$$\delta^2 F(x_0, h, h) = \Phi''(0) := \frac{d^2}{d\varepsilon^2} F(x_0 + \varepsilon h)_{|\varepsilon=0}.$$

A continuación, recordamos los conceptos de derivada Gâteaux y derivada Fréchet

Definición 4.3 *Sean X, Y espacios normados, $\mathcal{U} \subset X$ abierto, $x_0 \in \mathcal{U}$ y una función $F : \mathcal{U} \to Y$ G-diferenciable en x_0. Si la aplicacion $\delta F(x_0)$ definida por* (4.2) *pertenece a $\mathcal{L}(X, Y)$, entonces se dice que F es G-derivable en x_0, y tal aplicación se le llama derivada Gâteaux (o G-derivada) de F en x_0.*

Observación 4.6 *Observar que si F es G-derivable en x_0 entonces F es G-diferenciable en x_0 y entonces F es G-diferenciable en x_0 en la dirección h. En general, no se tienen las implicaciones contrarias, salvo si $X = \mathbb{R}$.*

Definición 4.4 *Sean X, Y espacios normados, $\mathcal{U} \subset X$ abierto, $x_0 \in \mathcal{U}$, $h \in X$ y una función $F : \mathcal{U} \to Y$. Diremos que F es diferenciable en el sentido de Fréchet (o F-derivable) en x_0, si existe una aplicación $T(x_0) \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|F(x_0 + h) - F(x_0) - T(x_0)h\|_Y}{\|h\|_X} = 0$$

donde en tal caso la aplicación $T(x_0)$ es única.

Definición 4.5 *Llamaremos derivada Fréchet (o F-derivada) de F en el punto x_0 a la única aplicación lineal y continua $T(x_0)$ que verifica la definición anterior. Se denotará por $F'(x_0)$.*

Se tiene la siguiente relación entre la derivada Gâteaux y la derivada Fréchet.

Proposición 4.1 *Sea $F : \mathcal{U} \to Y$ una funcion F-derivable en x_0 entonces, F es G-derivable en ese punto, y además $F'(x_0) = \delta F(x_0)$.*

Proposición 4.2 *Si $F : \mathcal{U} \to Y$ es una funcion F-derivable en x_0 entonces F es continua en x_0.*

Observación 4.7 *Existen funciones G-derivables en un punto que no son continuas en dicho punto, es decir, la proposición anterior no es cierta si cambiamos la condición F-derivable por G-derivable.*

4.2. Derivación y convexidad

En esta sección presentaremos resultados que muestran como se puede aplicar la G-diferenciabilidad para estudiar la convexidad de una función.

Proposición 4.3 *Sea X un espacio normado, $\mathcal{U} \subset X$ abierto, convexo y una función $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. Supongamos que para todo par de puntos x_1 y x_2 del abierto $\mathcal{U}$ existe $\delta F(x_1, x_2 - x_1)$, la G-diferencial de F. Entonces se tiene*

1. *F es convexa si y sólo si se verifica*

$$F(x_2) - F(x_1) \geq \delta F(x_1, x_2 - x_1), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{U}. \tag{4.3}$$

2. *F es estrictamente convexa si y sólo si se verifica*

$$F(x_2) - F(x_1) > \delta F(x_1, x_2 - x_1), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{U},\ x_1 \neq x_2. \tag{4.4}$$

Demostración. Supongamos que F es convexa, hay que probar que se verifica (4.3). Para ello, dado $\varepsilon \in (0, 1)$, se tiene

$$\frac{F(x_1 + \varepsilon(x_2 - x_1)) - F(x_1)}{\varepsilon} \leq \frac{\varepsilon F(x_2) + (1 - \varepsilon)F(x_1) - F(x_1)}{\varepsilon} = F(x_2) - F(x_1).$$

Tomando límite cuando $\varepsilon \to 0$, se obtiene

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(x_1 + \varepsilon(x_2 - x_1)) - F(x_1)}{\varepsilon} \leq F(x_2) - F(x_1).$$

y entonces teniendo en cuenta (4.1) en lo anterior, sigue (4.3) como queríamos probar.

Recíprocamente, si se satisface (4.3), entonces para todo par $x_1, x_2 \in \mathcal{U}$ y todo $\alpha \in [0, 1]$ se tiene

$$F(x_1) \geq F(x_1 + \alpha(x_2 - x_1)) + \delta F(x_1 + \alpha(x_2 - x_1), -\alpha(x_2 - x_1)), \tag{4.5}$$

$$F(x_2) \geq F(x_1 + \alpha(x_2 - x_1)) + \delta F(x_1 + \alpha(x_2 - x_1), (1 - \alpha)(x_2 - x_1)). \tag{4.6}$$

Por la homogeneidad de la G-diferencial en dirección h, multiplicando la desigualdad (4.5) por $(1 - \alpha)$, la desigualdad (4.6) por α y sumando, se tiene

$$(1 - \alpha)F(x_1 + \alpha(x_2 - x_1) + \alpha F(x_1 + \alpha(x_2 - x_1)) \leq (1 - \alpha)F(x_1) + \alpha F(x_2)$$

o equivalentemente,

$$F((1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2) \leq (1 - \alpha)F(x_1) + \alpha F(x_2).$$

y por tanto F es convexa. El argumento anterior sirve también para probar que (4.4) implica que F es estrictamente convexa.

Nos falta probar el recíproco. Supongamos que F es estrictamente convexa hay que probar que se verifica (4.4). Por hipótesis F es estrictamente convexa, en particular F es convexa, se tendrá por tanto (4.3). Si ahora $x_1, x_2 \in \mathcal{U}$, $x_1 \neq x_2$ y $\alpha \in (0,1)$ entonces, por el carácter estrictamente convexo de F se tiene

$$F(x_2) - F(x_1) > \frac{F(x_1 + \alpha(x_2 - x_1)) - F(x_1)}{\alpha} \geq$$

$$\geq \frac{\delta F(x_1, \alpha(x_2 - x_1)}{\alpha} = \delta F(x_1, x_2 - x_1).$$

Por tanto, se concluye

$$F(x_2) - F(x_1) > \delta F(x_1, x_2 - x_1)$$

como queríamos probar.

$\square$

Proposición 4.4 *Sea X un espacio normado, $\mathcal{U} \subset X$ abierto, convexo y una función $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. Supongamos que para todo par de puntos x_1 y x_2 de $\mathcal{U}$, F es G-diferenciable en $[x_1, x_2]$ y en la dirección $x_2 - x_1$. Entonces se tiene que F es convexa si y sólo si*

$$\delta F(x_2, x_2 - x_1) - \delta F(x_1, x_2 - x_1) \geq 0, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{U}. \tag{4.7}$$

Demostración. Supongamos que F es convexa. De (4.3), se tiene

$$F(x_2) - F(x_1) \geq \delta F(x_1, x_2 - x_1).$$

$$F(x_1) - F(x_2) \geq \delta F(x_2, x_1 - x_2).$$

Sumando estas desigualdades y teniendo en cuenta la homogenidad de la G-diferencial en la dirección, se obtiene

$$\delta F(x_1, x_2 - x_1) + \delta F(x_2, x_1 - x_2) = \delta F(x_1, x_2 - x_1) - \delta F(x_2, x_2 - x_1) \leq 0,$$

de donde se sigue (4.7).

Recíprocamente, sean $x_1, x_2 \in \mathcal{U}$ y consideremos la función

$$\varphi(t) = F(x_1 + t(x_2 - x_1))$$

que es derivable en $[0,1]$ y con derivada $\varphi'(t) = \delta F(x_1 + t(x_2 - x_1), x_2 - x_1)$.

Sea ahora $0 \leq s < t \leq 1$, llevando $x_s = x_1 + s(x_2 - x_1)$ y $x_t = x_1 + t(x_2 - x_1)$ a (4.7) en lugar de x_1 y x_2, se tiene

$$\delta F(x_t, x_1 + t(x_2 - x_1) - (x_1 + s(x_2 - x_1)))-$$
$$- \delta F(x_s, x_1 + t(x_2 - x_1) - (x_1 + s(x_2 - x_1))) \geq 0.$$

Simplificando, teniendo en cuenta la homogenidad de la G-diferencial en la dirección y dividiendo por $(t - s)$, se obtiene

$$\delta F(x_t, x_2 - x_1) \geq \delta F(x_s, x_2 - x_1).$$

Luego, deducimos que $\varphi'(t) \geq \varphi'(s)$, i.e. $\varphi'(s)$ es creciente ya que $s < t$ y por tanto φ es convexa, es decir, se verifica

$$\varphi(\alpha \cdot 1 + (1 - \alpha) \cdot 0) = \varphi(\alpha) \leq \alpha\varphi(1) + (1 - \alpha)\varphi(0).$$

Como $\varphi(\alpha) = F(x_1 + \alpha(x_2 - x_1))$, $\varphi(1) = F(x_2)$, y $\varphi(0) = F(x_1)$, se tiene que

$$F(x_1 + \alpha(x_2 - x_1)) \leq \alpha F(x_2) + (1 - \alpha)F(x_1),$$

es decir, F es convexa.

□

Proposición 4.5 *Sean X un espacio normado, $\mathcal{U} \subset X$ abierto, convexo y sea $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. Supongamos que existe la G-diferencial segunda $\delta^2 F(x, h, h)$ para todo $x \in \mathcal{U}$ y para toda $h \in X$, entonces se tiene*

1. *F es convexa si y sólo si se verifica*

$$\delta^2 F(x, h, h) \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{U},\ \forall h \in X. \tag{4.8}$$

2. *Si se verifica*

$$\delta^2 F(x, h, h) > 0, \quad \forall x \in \mathcal{U},\ \forall h \in X. \tag{4.9}$$

   entonces F es estrictamente convexa.

Demostración. Suponemos que existe $\delta^2 F(x, h, h) \geq 0,\ \forall x \in \mathcal{U}, \forall h \in X$. Por la Proposición 4.4 basta probar que se verifica (4.7). Consideremos, $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{U}$ y $t \in (0, 1)$,

$$\delta F(x_1 + t(x_2 - x_1), x_2 - x_1) = \delta F(x_1, x_2 - x_1) + \delta^2 F(x_1 + t(x_2 - x_1), x_2 - x_1).$$

Sea $\varphi(t) = \delta F(x_1 + t(x_2 - x_1), x_2 - x_1)$. Por el Teorema del valor medio, se tiene

$$\delta F(x_2, x_2 - x_1) - \delta F(x_1, x_2 - x_1) = \delta^2 F(x_1 + t_0(x_2 - x_1), x_2 - x_1, x_2 - x_1)$$

de donde se sigue (4.7) y por tanto, F es convexa.

Para terminar la demostración basta probar que si F es convexa entonces se verifica (4.8). Para ello, sean x_1, $x_2 \in \mathcal{U}$ con $x_1 \neq x_2$. Como F es convexa, gracias a la Proposición 4.4, se verifica

$$\delta F(x_2, x_2 - x_1) - \delta F(x_1, x_2 - x_1) \geq 0, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{U}.$$

Remplazando x_2 por $x_1 + t(x_2 - x_1)$ para cada $t \in (0, 1)$, se tiene

$$\delta F(x_1 + t(x_2 - x_1), x_1 + t(x_2 - x_1) - x_1) - \delta F(x_1, x_1 + t(x_2 - x_1) - x_1) =$$

$$= \delta F(x_1 + t(x_2 - x_1), t(x_2 - x_1)) - \delta F(x_1, t(x_2 - x_1)) \geq 0.$$

Diviendo por t^2 y teniendo en cuenta la homogeneidad de la G-diferencial en la dirección, nos queda

$$\frac{\delta F(x_1 + t(x_2 - x_1), x_2 - x_1) - \delta F(x_1, x_2 - x_1)}{t} \geq 0,$$

donde haciendo $t \to 0$, se obtiene

$$\delta F(x_1, x_2 - x_1, x_2 - x_1) := \lim_{t \to 0} \frac{\delta F(x_1 + t(x_2 - x_1), x_2 - x_1) - \delta F(x_1, x_2 - x_1)}{t} \geq 0$$

lo que concluye la prueba.

□

Observación 4.8 *Existen funciones estrictamente convexas que no verifican la condición* (4.9).

Por último, observar que los resultados anteriores permiten probar de una manera más rápida y sencilla en el **Ejemplo 3.6** que la función

$$f_1 : (x, x) \in H \times H \longmapsto a(x, x) \in \mathbb{R}$$

es estrictamente convexa.

Demostración. Para probar que $f_1(x)$ es estrictamente convexa, tenemos que probar que satisface (4.9). Para ello, definimos

$$F(x_0 + \varepsilon h) = f_1(x_0 + \varepsilon h, x_0 + \varepsilon h) = a(x_0 + \varepsilon h, x_0 + \varepsilon h)$$

donde por ser a una aplicación bilineal, se obtiene

$$F(x_0 + \varepsilon h) = a(x_0, x_0) + 2\varepsilon a(x_0, h) + \varepsilon^2 a(h, h).$$

Por la Observación 4.5, se tiene

$$\Phi(\varepsilon) = a(x_0, x_0) + 2\varepsilon a(x_0, h) + \varepsilon^2 a(h, h)$$

y además,

$$\delta F(x_0, h) = \Phi'(0) = 2a(x_0, h) + 2\varepsilon a(h, h)|_{\varepsilon=0} = 2a(x_0, h),$$
$$\delta^2 F(x_0, h, h) = \Phi''(0) = 2a(h, h).$$

Ahora bien, como a es una aplicación coercitiva se satisface que $a(x, x) \geq \alpha \|x\|_H^2$, para toda $x \in H$, con $\alpha > 0$. Luego, se tiene que

$$\delta^2 F(x_0, h, h) = 2a(h, h) \geq \alpha \|x\|_H^2$$

y por tanto, esto implica que

$$\delta^2 F(x_0, h, h) > 0, \quad \forall h \neq 0$$

lo que concluye que $f_1(x)$ es estrictamente convexa.

□

4.3. Condiciones necesarias de extremo

Usando la derivación en espacios normados que hemos visto en la sección anterior, vamos ahora a obtener algunas condiciones necesarias y suficientes que debe verificar un punto en el cual se alcanza el mínimo de una función. Para ello, el lector debe de recordar la Definición 3.4.

Obviamente, todo mínimo global de f en $\mathcal{U}$, es mínimo local. El siguiente resultado muestra que de hecho, en el caso de funcionales convexos ambos conceptos de mínimos son equivalentes.

Proposición 4.6 *Sean X un espacio normado, $\mathcal{U} \subset X$ convexo y $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ convexa. En estas condiciones, f alcanza mínimo global en $\hat{x} \in \mathcal{U}$ si y sólo si alcanza mínimo local en $\hat{x}$.*

Demostración. Supongamos que f alcanza mínimo local en $\hat{x} \in \mathcal{U}$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(\hat{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in \mathcal{U} \cap B(\hat{x}, \varepsilon).$$

Por la convexidad de $\mathcal{U}$, dado $\hat{x} \in \mathcal{U}$, se tiene que para todo $\alpha \in (0, 1)$, el segmento $\alpha x + (1-\alpha)\hat{x} \in \mathcal{U}$, o lo que es lo mismo, $\hat{x} + \alpha(x - \hat{x}) \in \mathcal{U}$. Tomando α suficientemente pequeño, se tiene $\|\alpha(x-\hat{x})\| < \varepsilon$ y por tanto $\hat{x}+\alpha(x-\hat{x}) \in B(\hat{x}, \varepsilon)$. Por tanto, para dicho α se tiene

$$f(\hat{x}) \leq f(\hat{x} + \alpha(x - \hat{x})) \leq (1-\alpha) f(\hat{x}) + \alpha f(x),$$

o de forma equivalente

$$f(\hat{x}) - (1-\alpha)f(\hat{x}) = \alpha f(\hat{x}) \leq \alpha f(x)$$

lo que implica $f(\hat{x}) \leq f(x),\ \forall x \in \mathcal{U}$. Luego, $\hat{x}$ es un mínimo global de f en $\mathcal{U}$. El recíproco es evidente pues todo mínimo global f en $\mathcal{U}$ es mínimo local de f en $\mathcal{U}$.

□

Para las funciones reales de variable real se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4.1 *Sean X un espacio normado, $\mathcal{U} \subset X$ con $\overset{\circ}{\mathcal{U}} \neq \emptyset$ y $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. En estas condiciones se tiene*

1. *Si f alcanza un mínimo local en $\hat{x} \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}$ y es G-diferenciable en $\hat{x}$, entonces*

$$\delta f(\hat{x}, h) = 0, \quad \forall h \in X. \tag{4.10}$$

2. *Si $\mathcal{U}$ es convexo y f es convexa en $\mathcal{U}$ y G-diferenciable en un punto $\hat{x} \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}$, entonces f alcanza un mínimo global en $\hat{x}$ si y sólo si satisface* (4.10).

Demostración. Comenzamos probando 1), consideremos $h \in X$ fijado. Como $\hat{x}$ es un mínimo local de f en $\mathcal{U}$, entonces existe ε_0 tal que para todo ε con $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, se satisface $f(\hat{x}) \leq f(\hat{x} + \varepsilon h)$, con lo cual

$$f(\hat{x} + \varepsilon h) - f(\hat{x}) \geq 0, \quad \forall \varepsilon \text{ tal que } 0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0.$$

Si dividimos por ε en la desigualdad anterior y tomamos límite cuando $\varepsilon \to 0$, se tiene

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{f(\hat{x} + \varepsilon h) - f(\hat{x})}{\varepsilon} \geq 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^-} \frac{f(\hat{x} + \varepsilon h) - f(\hat{x})}{\varepsilon} \leq 0.$$

Por tanto, se prueba $\delta f(\hat{x}, h) \geq 0$ y $\delta f(\hat{x}, h) \leq 0$, con lo cual se deduce (4.10).

A continuación, pasamos a probar 2), observar que si $\hat{x} \in \mathcal{U}$ se satisface (4.10). Además, por ser f convexa en $\mathcal{U}$, gracias a la Proposición 4.3, se tiene

$$f(x) - f(\hat{x}) \geq \delta f(\hat{x}, x - \hat{x}), \quad \forall x \in \mathcal{U}.$$

Por tanto,

$$f(x) \geq f(\hat{x}) + \delta f(\hat{x}, x - \hat{x}) = f(\hat{x}),\ \forall x \in \mathcal{U}.$$

lo que concluye $\hat{x}$ es un mínimo global de f en $\mathcal{U}$.

□

Para terminar, en el caso de funciones dos veces diferenciable se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4.2 *Sean X un espacio normado, $\mathcal{U} \subset X$ y $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. Supongamos que f alcanza un mínimo local en $\hat{x} \in \mathring{\mathcal{U}}$, y que f es dos veces G-diferenciable en $\hat{x}$ en la dirección h. Entonces, se verifica*

$$\delta^2 f(\hat{x}, h, h) \geq 0.$$

Demostración. Basta considerar la función φ definida en un entorno de $0 \in \mathbb{R}$ por $\varphi(t) = f(\hat{x} + th)$ y observar que $\varphi'(0) = \delta f(\hat{x}, h)$, $\varphi''(0) = \delta^2 f(\hat{x}, h, h)$ y que φ alcanza mínimo local en $t = 0$.

$\square$

Capítulo 5

Existencia para un problema del Cálculo de variaciones

En el presente Capítulo utilizaremos el Teorema abstracto de existencia que obtuvimos en el capítulo 3 para probar la existencia de solución de un problema de Cálculo de Variaciones bastante general planteado para un espacio de Sobolev $W^{1,p}(a,b)$ sometido a varias restricciones. Como aplicación obtenemos un resultado de existencia para la existencia de solución de un problema de contorno para una ecuación diferencial ordinaria no lineal con condiciones de tipo Dirichlet.

5.1. Resultado de existencia de solución

Comenzamos definiendo qué entendemos por función de Caratheodory en la presente memoria.

Definición 5.1 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, y $f : (a,b) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Se dice que f es una función de Carathéodory si*

1. *$f(x, \cdot)$ es continua en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, e.c.t. $x \in (a,b)$,*

2. *$f(\cdot, w)$ es medible en (a,b), $\forall w \in \mathbb{R}^N$.*

El Teorema principal de este capítulo es el siguiente:

Teorema 5.1 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $p \in (1, +\infty)$, $n, I \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{O} \subset W^{1,p}(a,b)^n$ secuencialmente débilmente cerrado, no vacío. Para cada $i \in \{0, \ldots, I\}$, sean $g_i, h_i \in C^0(\mathbb{R}^N)$ y $f_i : (a,b) \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ una función de Carathéodory. Suponemos que*

(i) $f_i(x, s, \cdot)$ es convexa en $\mathbb{R}^n$, $\forall s \in \mathbb{R}^n$, e.c.t. $x \in (a,b)$, $\forall i \in \{0, \ldots, I\}$.

(ii) Para cada $M > 0$ existen $C_M > 0$ y $h_M \in L^1(a,b)$ tales que

$$|f_i(x,s,\xi)| \leq h_M(x) + C_M|\xi|^p, \quad e.c.t.\ x \in (a,b), \quad \forall (s,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

$$con\ |s| \leq M, \quad \forall i \in \{0,\dots,I\}.$$

(iii) Para cada $M > 0$, existe $r_M \in L^1(a,b)$ tal que: Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ satisfaciendo

$$|f_i(x,s,\xi) - f_i(x,t,\xi)| \leq \varepsilon\,(|\xi|^p + r_M(x)), \quad e.c.t\ x \in (a,b),\ \forall s,t,\xi \in \mathbb{R}^n,$$

$$con\ |s|,|t| \leq M,\ |s-t| < \delta, \quad \forall i \in \{0,\dots,I\}.$$

Sea $F_i : W^{1,p}(a,b)^n \longrightarrow \mathbb{R}$ el funcional definido por

$$F_i(u) = \int_a^b f_i(x,u,u')\,dx + g_i(u(a)) + h_i(u(b)), \quad \forall u \in W^{1,p}(a,b)^n, \forall i \in \{0,\dots,I\}. \tag{5.1}$$

Denotemos por $\mathcal{U}$ el subconjunto de $W^{1,p}(a,b)^n$ dado por

$$\mathcal{U} = \Big\{ u \in \mathcal{O} \mid F_i(u) \leq 0,\ \forall i \in \{1,\dots I\} \Big\}. \tag{5.2}$$

Supongamos que $\mathcal{U}$ es no vacío, y consideremos el problema de minimización

$$\min_{u \in \mathcal{U}} F_0(u). \tag{5.3}$$

Supongamos que se verifica una de la siguientes condiciones:

1. *El conjunto $\mathcal{U}$ es acotado.*
2. *El conjunto $\mathcal{U}$ no es acotado, pero*

$$\lim_{\substack{\|u\|_{W^{1,p}(a,b)^n} \to \infty \\ u \in \mathcal{U}}} F_0(u) = +\infty. \tag{5.4}$$

Entonces existe $u \in \mathcal{U}$ solución del problema (5.3).

Para demostrar el Teorema anterior, necesitaremos algunos lemas previos. El siguiente Lema es fundamental para ver que el funcional F_i está bien definido, pues asegura que el integrando en (5.1) es medible.

Lema 5.1.1 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, $f : (a,b) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función de Carathéodory, y $v : (a,b) \to \mathbb{R}^N$ una función medible. Entonces la función $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$g(x) := f(x, v(x)) \quad e.c.t.\ x \in (a,b),$$

es medible.

Demostración. En primer lugar, veamos que el resultado es cierto cuando v es una función simple medible, es decir, cuando v sólo toma un número finito de valores. En ese caso, podremos representar v como

$$v(x) = \sum_{i=1}^{M} v_i \, \chi_{A_i}(x),$$

con $v_i \in \mathbb{R}^N$ y $A_i \subset (a,b)$ conjuntos medibles disjuntos entre sí. Entonces

$$g(x) = \sum_{i=1}^{M} f(x, v_i) \, \chi_{A_i}(x),$$

Gracias a que f es una función de Carathéodory, se tiene que $f(\cdot, v_i)$ es medible, para todo $i \in \{1, \ldots, M\}$. Por tanto, se concluye que g es una función medible.

Supongamos ahora que v es una función medible arbitraria. Sabemos que existen $N_0 \subset (a,b)$ de medida nula y una sucesión de funciones simples medibles, $v_n : (a,b) \to \mathbb{R}^N$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} v_n(x) = v(x), \quad \forall x \in (a,b) \setminus N_0.$$

También existe $N_1 \subset (a,b)$ de medida nula tal que $f(x,\cdot)$ es continua para todo $x \in (a,b) \setminus N_1$. Entonces se sigue

$$g(x) = f(x, v(x)) = \lim_{n\to\infty} f(x, v_n(x)), \quad \forall x \in (a,b) \setminus (N_0 \cup N_1).$$

Como v_n es una sucesión de funciones simples medibles, sabemos que $f(\cdot, v_n(\cdot))$ es una función medible para cada $n \in \mathbb{N}$, y gracias a que $N_0 \cup N_1$ es un conjunto de medida nula, se sigue de la última igualdad que g es una función medible por ser el límite en casi todo de funciones medibles.

□

Al estudiar propiedades de continuidad de F_i, tendremos que pasar al límite en sucesiones de la forma $F_i(u_n)$, y para ello será de utilidad el siguiente Lema, el cual es una generalización del Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue.

Lema 5.1.2 *Sean w_n y $g_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ dos sucesiones de funciones medibles que convergen en casi todo (a,b), y denotemos sus límites por w y g e.c.t (a,b), respectivamente. Supongamos que g_n, para todo $n \in \mathbb{N}$, y g pertenecen a $L^1(a,b)$, y*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n \, dx = \int_a^b g \, dx. \tag{5.5}$$

Supongamos también que para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$|w_n(x)| \le g_n(x), \quad e.c.t \ x \in (a,b). \tag{5.6}$$

Entonces $w \in L^1(a,b)$ y w_n converge a w fuertemente en $L^1(a,b)$.

Demostración. De (5.6) y teniendo en cuenta que w_n y g_n convergen a w y g, respectivamente, e.c.t (a,b), se deduce $|w| \leq g$, y por tanto $|w_n - w| \leq g_n + g$ e.c.t (a,b). Es decir, $g_n + g - |w_n - w|$ es una sucesión de funciones no negativa e.c.t (a,b). Aplicando, el Lema de Fatou, se obtiene

$$\int_a^b \liminf_{n\to\infty}(g_n + g - |w_n - w|)\, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b (g_n + g - |w_n - w|)\, dx. \tag{5.7}$$

Usando nuevamente las convergencias e.c.t (a,b) de w_n y de g_n se sigue

$$\int_a^b \liminf_{n\to\infty}(g_n + g - |w_n - w|)\, dx = 2\int_a^b g\, dx. \tag{5.8}$$

Por otra parte, gracias a (5.5) se tiene

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \int_a^b (g_n + g - |w_n - w|)\, dx &= \limsup_{n\to\infty} \int_a^b (g_n + g - |w_n - w|)\, dx = \\ &= 2\int_a^b g\, dx - \limsup_{n\to\infty} \int_a^b |w_n - w|\, dx.\end{aligned} \tag{5.9}$$

De (5.7), (5.8) y (5.9), se deduce

$$\limsup_{n\to\infty} \int_a^b |w_n - w|\, dx \leq 0,$$

lo que prueba que w_n converge a w en $L^1(a,b)$.

□

A partir de los dos lemas anteriores podemos probar que los funcionales F_i están bien definidos y son secuencialmente débilmente semicontinuos inferiormente en $W^{1,p}(a,b)$. Ese es el objeto del siguiente lema.

Lema 5.1.3 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $p \in (1, +\infty)$, $g, h \in C^0(\mathbb{R})$ y una función $f : (a,b) \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ de Carathéodory. Suponemos que*

(i) $f(x, s, \cdot)$ es convexa en $\mathbb{R}^n$, $\forall s \in \mathbb{R}^n$, e.c.t. $x \in (a,b)$.

(ii) Para cada $M > 0$ existen $C_M > 0$ y $h_M \in L^1(a,b)$ tales que

$$|f(x,s,\xi)| \leq h_M(x) + C_M|\xi|^p, \quad \text{e.c.t. } x \in (a,b), \quad \forall (s,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

con $|s| \leq M$.

(iii) Para cada $M > 0$, existe $r_M \in L^1(a,b)$ tal que: Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ satisfaciendo

$$|f(x,s_1,\xi) - f(x,s_2,\xi)| \leq \varepsilon\,(|\xi|^p + r_M(x)), \qquad \text{e.c.t. } x \in (a,b),$$

$$\forall s_1, s_2, \xi \in \mathbb{R}^n, \ \text{con } |s_1|, |s_2| \leq M, \ |s_1 - s_2| < \delta.$$

Entonces el funcional $F : W^{1,p}(a,b)^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$F(u) = \int_a^b f_i(x,u,u')\,dx + g_i(u(a)) + h_i(u(b)), \quad \forall u \in W^{1,p}(a,b)^n,$$

está bien definido y es secuencialmente débilmente semicontinuo inferiormente en el espacio $W^{1,p}(a,b)^n$.

Demostración. Comenzamos probando que el funcional F está bien definido, para ello tenemos que ver que cada uno de sus sumandos lo están. Gracias a que $W^{1,p}(a,b)^n$ se inyecta de manera compacta en $C^0([a,b])^n$, los valores $g(u(a))$ y $h(u(b))$ está bien definidos para toda $u \in W^{1,p}(a,b)^n$. Por otra parte, como $u \in W^{1,p}(a,b)^n$ tenemos que u es continua en $[a,b]$, y por tanto u está acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que $-M \leq u(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$. Utilizando la hipótesis *(ii)* con $M = \|u\|_{C^0([a,b])}$ se tiene la existencia de $C_M > 0$ y $h_M \in L^1(a,b)$ tales que

$$|f(x,u(x),u'(x)| \leq h_M(x) + C_M|u'(x)|^p, \quad \text{e.c.t } x \in (a,b).$$

Como el miembro de la derecha de esta igualdad está en $L^1(a,b)$, esta estimación junto con el Lema 5.1.1 prueba que $f(\cdot,u,u') \in L^1(a,b)$, para toda $u \in W^{1,p}(a,b)^n$, y con ello se concluye que F está bien definido.

Pasamos a probar que F es secuencialmente débilmente semicontinuo inferiormente. Consideremos una sucesión u_n que converge débilmente a cierta u en $W^{1,p}(a,b)^n$. Entonces por el Teorema 2.3 se tiene que u_n converge uniformente a u en $[a,b]$. En particular, $u_n(a)$ y $u_n(b)$ convergen a $u(a)$ y $u(b)$ en $\mathbb{R}^n$, respectivamente. Por tanto,

$$\liminf_{n\to\infty} F(u_n) = \liminf_{n\to\infty} \int_a^b f(x,u_n,u_n')\,dx + g(u(a) + h(u(b)). \tag{5.10}$$

Para estimar el límite inferior que aparece en el miembro derecho, escribimos

$$\int_a^b f(x,u_n,u_n')\,dx = \int_a^b (f(x,u_n,u_n') - f(x,u,u_n'))\,dx + \int_a^b f(x,u,u_n')\,dx. \tag{5.11}$$

Como u_n converge uniformemente a u, deducimos que existe $M > 0$ tal que $|u_n| \leq M$ en $[a,b]$ y por tanto $|u| \leq M$ en $[a,b]$. Sea r_M dado por *(iii)*. Tomemos $\varepsilon > 0$ y sea $\delta > 0$ el valor dado por la hipótesis *(iii)*. De la convergencia fuerte de u_n a u en $C^0([a,b])^n$, deducimos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|u_n(x) - u(x)| \leq \delta, \quad \forall x \in [a,b], \quad \forall n \geq n_0,$$

y entonces gracias a la hipótesis *(iii)* con dicho valor de M y a la acotación de u_n' en $L^p(a,b)^n$ obtenemos

$$\left|\int_a^b (f(x,u_n,u_n') - f(x,u,u_n'))\,dx\right| \leq \varepsilon \int_a^b (|u_n'|^p + r_M)\,dx \leq C\varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

para cierta constante $C > 0$ independiente de ε. Por la arbitrariedad de ε, de aquí se deduce

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_a^b (f(x,u_n,u_n') \,-\, f(x,u,u_n'))\,dx = 0. \tag{5.12}$$

A continuacion veremos que el funcional

$$v \in L^p(a,b)^n \longmapsto G(v) := \int_a^b f(x,u,v)\,dx$$

es secuencialmente débilmente semicontinuo inferiormente en $L^p(a,b)^n$. Eso en particular dará

$$\liminf_{n\to\infty} G(u_n') = \int_a^b f(x,u,u_n')\,dx \geq \int_a^b f(x,u,u')\,dx = G(u'),$$

que junto a (5.10), (5.11) y (5.12) probará que F es secuencialmente débilmente semicontinuo inferiormente en $W^{1,p}(a,b)^n$. Para ver que G es s.d.c.i. en $L^p(a,b)^n$, basta probar que G es convexo y continuo en $L^p(a,b)^n$. La convexidad de G resulta inmediata a partir de la hipótesis de convexidad *(i)* impuesta a f:

$$\begin{aligned}
G(\alpha v_1 + (1-\alpha)v_2) &= \int_a^b f(x,u,\alpha v_1 + (1-\alpha)v_2)\,dx \\
&\leq \int_a^b (\alpha f(x,u,v_1) + (1-\alpha)f(x,u,v_2))\,dx \\
&= \alpha \int_a^b f(x,u,v_1)\,dx + (1-\alpha)\int_a^b f(x,u,v_2)\,dx = \alpha G(v_1) + (1-\alpha)G(v_2),
\end{aligned}$$

para todo $v_1, v_2 \in L^p(a,b)^n$ y todo $\alpha \in [0,1]$. Para probar la continuidad de G, consideremos una sucesión v_n que converge fuertemente a una cierta v en $L^p(a,b)^n$. Entonces existe una subsucesión de v_n, que denotamos por v_{n_k}, que converge a v en casi todo (a,b), y gracias a que f es de Carathéodory, se sigue

$$\lim_{n\to\infty} f(x,u(x),v_{n_k}(x)) = f(x,u(x),v(x)), \qquad \text{e.c.t } x \in (a,b). \tag{5.13}$$

Nuevamente la propiedad *(ii)* con $M = \|u\|_{C^0([a,b])^n}$ da la existencia de $C_M > 0$ y $h_M \in L^1(a,b)$ tales que

$$|f(x,u(x),v_{n_k})| \leq h_M(x) \,+\, C_M|v_n(x)|^p, \qquad \text{e.c.t. } x \in (a,b). \tag{5.14}$$

La convergencia fuerte de v_n a v en $L^p(a,b)^n$ junto a (5.13), (5.14) y el Lema 5.1.2 prueban

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x,u(x),v_{n_k}(x))\,dx = \int_a^b f(x,u(x),v(x))\,dx.$$

Como el valor del límite en la expresión anterior es independiente de la subsucesión v_{n_k}, de aquí se sigue que $G(v_n)$ converge a $G(v)$ sin necesidad de extraer una subsucesión, y por tanto prueba la continuidad de G.

$\square$

Una vez visto estos dos lemas, pasamos a probar el Teorema 5.1.

Demostración del Teorema 5.1. Por el Lema 5.1.3, sabemos que el funcional F_i es s.d.s.c.i. para cada $i \in \{0, \ldots, I\}$. En particular, el funcional F_0 lo es. Por otro lado, sabemos que el espacio $W^{1,p}(I)$ es reflexivo para $p \in (1, +\infty)$. Luego, para poder aplicar nuestro resultado general de existencia, es decir el Teorema 3.2, basta con probar que el conjunto de estados admisibles $\mathcal{U}$ es secuencialmente débilmente cerrado.
Consideremos una sucesión $u_n \subset \mathcal{U}$ que converge débilmente a u en $W^{1,p}(a,b)^n$, hay que ver que u pertenece a $\mathcal{U}$. Como $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ y $\mathcal{O}$ es secuencialmente débilmente cerrado, se tiene que $u \in \mathcal{O}$, y gracias a que F_i es s.d.c.i. y a que $F_i(u_n) \leq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$F_i(u) \leq \liminf_{n\to\infty} F_i(u_n) \leq 0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, I\}.$$

donde teniendo en cuenta (5.2), se deduce que $u \in \mathcal{U}$.

$\square$

Observación 5.1 *El Teorema 5.1 es un resultado de existencia de solución para el problema* (5.3) *de minimización del funcional $F_0(u)$ sujeto a $u \in \mathcal{O}$ y a las restricciones de desigualdad $F_i(u) \leq 0$, para todo $i \in \{1, \ldots, I\}$. Obviamente para aplicar el resultado a problemas con restricciones del tipo $F_i(u) \geq 0$ (o del tipo $F_i(u) = 0$), basta reescribirlas en la forma $-F_i(u) \leq 0$ (o en la forma $F_i(u) \leq 0$, $-F_i(u) \leq 0$), y entonces la hipótesis (i) supone exigir a la función $f_i(x, s, \cdot)$ el ser cóncava (o el ser lineal). Análogamente para tratar el problema*

$$\max_{u\in\mathcal{U}} F_0(u),$$

basta considerar el problema

$$\min_{u\in\mathcal{U}} (-F_0(u)),$$

donde para aplicar el Teorema 5.1 es necesario pedir que $f_0(x, s, \cdot)$ sea cóncava.

Corolario 5.1 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $p \in (1, +\infty)$, $n, I \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{O} \subset W^{1,p}(a,b)^n$ secuencialmente débilmente cerrado, no vacío. Para cada $i \in \{0, \ldots, I\}$, sean $g_i, h_i \in C^0(\mathbb{R}^n)$ y $f_i : (a,b) \times \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de Carathéodory. Supongamos que las funciones f_i, con $i \in \{0, \ldots, I\}$, satisfacen las condiciones (i), (ii) y (iii) del Teorema 5.1. Sean $F_i : W^{1,p}(a,b)^n \longrightarrow \mathbb{R}$, con $i \in \{0, \ldots, I\}$, los funcionales definidos por* (5.1)*, y sea $\mathcal{U}$ el subconjunto de $W^{1,p}(a,b)^n$ dado por* (5.2)*, que suponemos no vacío. Denotemos por C una constante positiva tal que*

$$\|u\|_{C^0([a,b])^n} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(a,b)^n}, \quad \forall u \in W^{1,p}(a,b)^n. \tag{5.15}$$

Supongamos también que existe $i \in \{0, \dots, I\}$*, y tres constantes* $\alpha, \mu, \nu \in \mathbb{R}$*, con*

$$\alpha > C^p(|\mu| + |\nu|), \tag{5.16}$$

tales que

$$\left.\begin{array}{l} f_i(x, s, \xi) \geq \alpha\,(|s|^p + |\xi|^p) - \gamma(x) \ \ con\ \gamma \in L^1(a, b) \\ g_i(s) \geq \mu|s|^p, \quad h_i(s) \geq \nu|s|^p \end{array}\right\} \tag{5.17}$$

e.c.t. $x \in (a, b)$ *y para todo* $s, \xi \in \mathbb{R}^n$*.*
Entonces existe $u \in \mathcal{U}$ *solución del problema* (5.3)*.*

Demostración. Gracias a (5.15) y (5.17), el funcional F_i definido por (5.1) satisface

$$F_i(u) \geq \alpha \int_a^b (|u|^p + |u'|^p)\, dx - \int_a^b \gamma(x)\, dx + \mu|u(a)|^p + \nu|u(b)|^p$$

$$\geq \alpha \int_a^b (|u|^p + |u'|^p)\, dx - \int_a^b \gamma(x)\, dx - \mu C^p \|u\|^p_{W^{1,p}(a,b)^n} - \nu C^p \|u\|^p_{W^{1,p}(a,b)^n} =$$

$$= (\alpha - C^p(|\mu| + |\nu|))\, \|u\|^p_{W^{1,p}(a,b)^n} - \rho, \quad \forall u \in W^{1,p}(a, b)^n,$$

siendo

$$\rho = \int_a^b \gamma(x)\, dx = cte.$$

Gracias a (5.16), se deduce entonces

$$\lim_{\|u\|_{W^{1,p}(a,b)^n} \to \infty} F_i(u) = +\infty.$$

Si $i \in \{0, \dots, I\}$, esto prueba que el conjunto $\mathcal{U}$ definido por (5.2) es acotado. Ahora bien, si $i = 0$, esta condición prueba que si $\mathcal{U}$ no es acotado, entonces se tiene (5.4). En cualquier caso, estamos en una de las condiciones del Teorema 5.1 que nos asegura la existencia $u \in \mathcal{U}$ solución del problema (5.3).

□

De manera similar se puede demostrar el siguiente resultado.

Corolario 5.2 *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $a < b$*,* $p \in (1, +\infty)$*,* $n, I \in \mathbb{N}$ *y* $\mathcal{O} \subset W^{1,p}(a, b)^n$ *secuencialmente débilmente cerrado, no vacío. Para cada* $i \in \{0, \dots, I\}$*, sean* $g_i, h_i \in C^0(\mathbb{R}^n)$ *y* $f_i : (a, b) \times \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función de Carathéodory. Supongamos que las funciones* f_i*, con* $i \in \{0, \dots, I\}$*, satisfacen las condiciones* (*i*)*,* (*ii*) *y* (*iii*) *del Teorema 5.1. Sean* $F_i : W^{1,p}(a, b)^n \longrightarrow \mathbb{R}$*, con* $i \in \{0, \dots, I\}$*, los funcionales definidos por* (5.1)*, y sea* $\mathcal{U}$ *el subconjunto de* $W^{1,p}(a, b)^n$ *dado por* (5.2)*, que suponemos no vacío. Supongamos que* $\mathcal{U}$ *está contenido en* $W^{1,p}_0(a, b)^n$ *y sea* C *una constante positiva tal que*

$$\|u\|_{L^p([a,b])^n} \leq C\|u'\|_{L^p(a,b)^n}, \quad \forall u \in \mathcal{U}. \tag{5.18}$$

Supongamos también que existe $i \in \{0, \ldots, I\}$, y dos constantes $\alpha, \beta > 0$ con

$$\beta < \frac{\alpha}{C^p}$$

y una función $\gamma \in L^1(a,b)$ tales que

$$f_i(x,s,\xi) \geq \alpha|\xi|^p - \beta|s|^p - \gamma(x), \quad \forall s, \xi \in \mathbb{R}^n, \text{ e.c.t } x \in (a,b).$$

Entonces existe $u \in \mathcal{U}$ solución del problema (5.3).

Observación 5.2 *Se tiene un resultado análogo al Corolario 5.2, suponiendo que los elementos de $\mathcal{U}$ se anulan sólo en uno de los extremos del intervalo (a,b).*

A continuación probamos un resultado relacionado con la existencia de la derivada Gâteaux de los funcionales que aparecen en el problema de Cálculo de Variaciones considerado en el Teorema 5.1. Este resultado jugará un papel importante en la próxima sección para obtener las correspondientes condiciones de optimalidad.

Lema 5.1.4 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, $p \in (1, +\infty)$, $g, h \in C^1(\mathbb{R})$ y $f : (a,b) \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ una función de Carathéodory tal que*

(i) $f(\cdot, 0, 0) \in L^1(a,b)$.

(ii) $f(x, \cdot) \in C^1(\mathbb{R}^{2n})$, *e.c.t.* $x \in (a,b)$.

(iii) $\nabla_s f(\cdot, s, \xi)$, $\nabla_\xi f(\cdot, s, \xi)$ *son medibles en* (a,b), $\forall (s,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

(iv) Para cada $M > 0$ existen $\alpha_M, \beta_M > 0$ y $k_M \in L^1(a,b)$ tales que

$$\left.\begin{array}{l} |\nabla_s f(x,s,\xi)| \leq k_M(x) \,+\, \alpha_M\,|\xi|^p \\ |\nabla_\xi f(x,s,\xi)| \leq r_M(x) \,+\, \beta_M\,|\xi|^{p-1} \end{array}\right\} \tag{5.19}$$

para toda $(s,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ con $|s| \leq M$, e.c.t $x \in (a,b)$.

Sea $F : W^{1,p}(a,b)^n \longrightarrow \mathbb{R}$ el funcional dado por

$$F(u) = \int_a^b f(x,u,u')\,dx, \quad \forall u \in W^{1,p}(a,b)^n.$$

Entonces,

$$\exists \delta F(u,\varphi) = \int_a^b \Big[\nabla_s f(x,u,u') \cdot \varphi + \nabla_\xi f(x,u,u') \cdot \varphi'\Big]\,dx, \tag{5.20}$$

para toda $u, \varphi \in W^{1,p}(a,b)^n$.

Demostración. Consideramos $u, \varphi \in W^{1,p}(a,b)^n$, y calculamos la G-diferencial de F en u en la dirección φ, que denotamos por $\delta F(u,\varphi)$. Si denotamos

$$g(x,\varepsilon) = f(x, u+\varepsilon\varphi, u'+\varepsilon\varphi'), \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \text{ e.c.t } x \in (a,b),$$

se tiene

$$\delta F(u,\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(u+\varepsilon\varphi)-F(u)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^b \frac{g(x,\varepsilon)-g(x,0)}{\varepsilon}\, dx. \tag{5.21}$$

Tomamos una sucesión ε_n. Por el Teorema fundamental del límite, para toda $\varepsilon_n \to \infty$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \frac{g(x,\varepsilon_n)-g(x,0)}{\varepsilon_n}\, dx.$$

Gracias a la hipótesis *(ii)*, se tiene que $g(x,\cdot) \in C^1(\mathbb{R})$, para todo $x \in (a,b) \setminus N$, con N un conjunto de medida nula, y entonces el límite de lo que hay dentro del integrando en (5.21), viene dado por

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{g(x,\varepsilon_n)-g(x,0)}{\varepsilon} = \partial_\varepsilon g(x,0) = (\nabla_s f(x,u,u')\cdot\varphi + \nabla_\xi f(x,u,u')\cdot\varphi'), \tag{5.22}$$

para todo $x \in (a,b) \setminus N$. Por otra parte, aplicando el Teorema del valor medio se tiene que: para todo $x \in (a,b)\setminus N$ y todo $\varepsilon \in \mathbb{R}$, existe $\theta = \theta(x,\varepsilon) \in \mathrm{L}^\infty(a,b)$ con $0 \le \theta \le 1$ tal que

$$|g(x,\varepsilon_n)-g(x,0)| = |\nabla_s f(x, u+\varepsilon_n\theta\varphi, u'+\varepsilon_n\theta\varphi')\cdot\varphi + \nabla_\xi f(x, u+\varepsilon_n\theta\varphi, u'+\varepsilon_n\theta\varphi')\cdot\varphi') \tag{5.23}$$

Como

$$|u(x)+\varepsilon_n\theta\varphi(x)| \le |u(x)| + |\varphi(x)| \le \|u\|_\infty + \|\varphi\|_\infty.$$

e.c.t. $x \in (a,b)$, $\forall \varepsilon_n$ con $|\varepsilon| \le 1$. Aplicando la hipótesis *(iv)* con $M = \|u\|_\infty + \|\varphi\|_\infty$ a (5.23) se obtiene

$$\begin{aligned} |g(x,\varepsilon_n)-g(x,0)| &\le \big(k_M + \alpha_M|u'+\varepsilon_n\theta\varphi'|^p\big)|\varphi| + \big(r_M + \beta_M|u'+\varepsilon_m\theta\varphi'|^{p-1}\big)|\varphi'| \\ &\le \Big(k_M + \alpha_M\left(|u'|+|\varphi'|\right)^p\Big)|\varphi| + \Big(r_M + \beta_M\left(|u'|+|\varphi'|\right)^{p-1}|\varphi|\Big). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el miembro de la derecha de esta última desigualdad pertenece a $L^1(a,b)$, a partir de (5.21) y (5.22), usando el teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, se obtiene

$$\delta F(u,\varphi) = \int_a^b (\nabla_s f(x,u,u')\cdot\varphi + \nabla_\xi f(x,u,u')\cdot\varphi')\, dx, \quad \forall u,\varphi \in W^{1,p}(a,b)^n.$$

como queríamos probar.

□

5.2. Aplicación. Caso problema de contorno

El objetivo de la aplicación es obtener un resultado de existencia de solución de un problema de contorno para una ecuación diferencial ordinaria no lineal, con condiciones de Dirichlet. Para ello, introduciremos hipótesis adecuadas con el fin de aplicar el Teorema 5.1 y el Lema 5.1.4 (con n=1). Más concretamente, consideramos el problema

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\Theta(x,u(x),u'(x)) = \Lambda(x,u(x),u'(x)) \\ u(a)=u_a, \quad u(b)=u_b \end{cases} \tag{5.24}$$

donde $a,b,u_a,u_b \in \mathbb{R}$, con $a<b$, y $\Theta,\Lambda : (a,b)\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones de Carathéodory cuyas propiedades aparecerán más abajo. Por una solución de (5.24) entenderemos una función $u \in W^{1,p}(a,b)$, para $p \geq 1$ que fijamos más adelante, tal que $u(a)=u_a$, $u(b)=u_b$, y

$$\int_a^b \Theta(x,u,u')\varphi'\,dt + \int_a^b \Lambda(x,u,u')\varphi\,dt = 0, \qquad \forall\varphi \in W_0^{1,p}(a,b).$$

Teorema 5.2 *Sean $a,b,u_a,u_b \in \mathbb{R}$, con $a<b$, $p\in(1,+\infty)$, y las funciones de Carathéodory $\Theta,\Lambda : (a,b)\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que*

(i) $\Theta(x,\cdot,\cdot), \Lambda(x,\cdot,\cdot) \in C^1(\mathbb{R}^2)$, e.c.t. $x\in(a,b)$.

(ii) $\partial_\xi\Theta(x,s,\xi)\geq 0$, $\partial_s\Theta(x,s,\xi) = \partial_\xi\Lambda(x,s,\xi)$, e.c.t. $x\in(a,b)$, $\forall(s,\xi)\in\mathbb{R}^2$.

(iii) Sea $\widehat{C}$ una constante positiva tal que

$$\int_a^b |u|^p\,dx \leq \widehat{C}\int_a^b |u'|^p\,dx, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(a,b).$$

Existen $\alpha,\beta>0$, con $\beta\widehat{C}<\alpha$ y $k\in L^{p'}(a,b)$ tales que

$$\Theta(x,s,\xi)\xi \,+\, \Lambda(x,s,\xi)s \geq \alpha|\xi|^p - k(x)\,(|s| \,+\, |\xi|) - \beta\,|s|^p,$$

e.c.t $x\in(a,b)$ y para todo $(s,\xi)\in\mathbb{R}^2$.

(iv) Para cada $M>0$ existen C_M, $\theta_M\in L^{p'}(a,b)$, y $\lambda_M\in L^1(a,b)$ tales que

$$\left.\begin{aligned} |\Theta(x,s,\xi)| &\leq \theta_M(x) + C_M|\xi|^{p-1}, \\ |\Lambda(x,s,\xi)| &\leq \lambda_M(x) + C_M|\xi|^{p}, \end{aligned}\right\}$$

e.c.t $x\in(a,b)$, y para todo $(s,\xi)\in\mathbb{R}^2$ con $|s|\leq M$.

Entonces el problema de contorno (5.24) *admite una solución* u *en* $W^{1,p}(a,b)$.

Demostración. Denotamos por $\mathcal{O}$ el conjunto dado por

$$\mathcal{O} = \left\{ u \in W^{1,p}(a,b) \,|\, u(a) = u_a,\ u(b) = u_b \right\}.$$

Teniendo en cuenta que la inyección de $W^{1,p}(a,b)$ en $C^0([a,b])$ es compacta, es fácil ver que $\mathcal{O}$ es un conjunto no vacío, secuencialmente débilmente cerrado en $W^{1,p}(a,b)$. De hecho, es una variedad afín cerrada.

Definimos $f_0 : (a,b) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_0(x,s,\xi) = \int_0^1 \Big(\Theta(x,rs,r\xi)\xi + \Lambda(x,rs,r\xi)s \Big)\, dr, \quad \text{e.c.t } x \in (a,b),\ \forall (s,\xi) \in \mathbb{R}^2.$$

Gracias a la hipótesis *(i)*, se tiene que $f_0(x,s,\xi)$ está bien definida. Además de las hipótesis *(i)* y *(ii)* se obtiene fácilmente

$$\begin{aligned} \partial_\xi f_0(x,s,\xi) &= \int_0^1 \Big(\partial_\xi \Theta(x,rs,r\xi)\xi r \;+\; \Theta(x,rs,r\xi) \;+\; \partial_\xi \Lambda(x,rs,r\xi)sr \Big)\, dr \\ &= \int_0^1 \Big(\partial_\xi \Theta(x,rs,r\xi)\xi r \;+\; \Theta(x,rs,r\xi) \;+\; \partial_s \Theta(x,rs,r\xi)sr \Big)\, dr \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dr}\Big(\Theta(x,rs,r\xi) r \Big)\, dr = \Theta(x,s,\xi), \quad \text{e.c.t } x \in (a,b),\ \forall (s,\xi) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Análogamente se prueba

$$\partial_s f_0(x,s,\xi) = \Lambda(x,s,\xi), \quad \text{e.c.t. } x \in (a,b),\ \forall (s,\xi) \in \mathbb{R}^2. \tag{5.26}$$

Luego, ya hemos encontrado la función $f_0(x,s,\xi)$ que cumple

$$\left.\begin{aligned} \partial_\xi f_0(x,s,\xi) &= \Theta(x,s,\xi) \\ \partial_s f_0(x,s,\xi) &= \Lambda(x,s,\xi) \end{aligned}\right\} \quad \text{e.c.t. } x \in (a,b),\ \forall s,\xi \in \mathbb{R}^2.$$

De (5.25) se sigue que $\partial^2_{\xi\xi} f_0(x,s,\xi) = \partial_\xi \Theta(x,s,\xi)$ que junto con $\partial_\xi \Theta(x,s,\xi) \geq 0$, implica

$$f_0(x,s,\cdot) \text{ es convexa en } \mathbb{R}, \quad \text{e.c.t } x \in (a,b),\ \forall s \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado, fijado $M > 0$, se obtiene a partir de *(iv)*

$$
\begin{aligned}
|f_0(x,s,\xi)| &\le \int_0^1 \Big(|\Theta(x,rs,r\xi)|\,|\xi| \;+\; |\Lambda(x,rs,r\xi)|\,|s| \Big)\,dr \\
&\le \int_0^1 \Big(\big(\theta_M(x) + C_M|r\xi|^{p-1}\big)\,|\xi| \;+\; \big(\lambda_M(x) + C_M|r\xi|^p\big)\,|s| \Big)\,dr \\
&\le \left(\frac{\theta_M^{p'}(x)}{p'} + \frac{|\xi|^p}{p} + \frac{C_M}{p}|\xi|^p \right) \;+\; \Big(M\lambda_M(x) + MC_M|\xi|^p \Big) \\
&\le \left(\frac{\theta_M^{p'}(x)}{p'} + M\lambda_M(x) \right) \;+\; \left(\frac{1+C_M}{p} + MC_M \right)|\xi|^p,
\end{aligned}
$$

e.c.t $x \in (a,b)$, y todo $s,\xi \in \mathbb{R}$, con $|s| \le M$.
Por otra parte, de nuevo fijado $M > 0$, de (5.26) y utilizando la hipótesis *(iv)* se tiene

$$
\begin{aligned}
|f_0(x,s,\xi) - f_0(x,t,\xi)| &= \left| \int_t^s \partial_s f_0(x,\sigma,\xi)\,d\sigma \right| = \left| \int_t^s \Lambda(x,\sigma,\xi)\,d\sigma \right| \\
&\le \left| \int_t^s (\lambda_M(x) + C_M|\xi|^p)\,d\sigma \right| \le |s-t|\,(\lambda_M(x) + C_M|\xi|^p),
\end{aligned}
$$

e.c.t $x \in (a,b)$, y todo $s,t,\xi \in \mathbb{R}$ con $|s|,|t| \le M$.
De la hipótesis *(iii)* se sigue que f_0 satisface la siguiente propiedad

$$
\begin{aligned}
f_0(x,s,\xi) &= \int_0^1 \frac{1}{r}\Big(\Theta(x,rs,r\xi)r\xi \;+\; \Lambda(x,rs,r\xi)rs \Big)\,dr \\
&\ge \int_0^1 \frac{1}{r}\Big(\alpha\,|r\xi|^p - k(x)\,(|rs| + |r\xi|) - \beta\,|rs|^p \Big)\,dr \qquad (5.27)\\
&= \frac{\alpha}{p}\,|\xi|^p - k(x)(|s| + |\xi|) - \frac{\beta}{p}\,|s|^p, \quad \text{e.c.t } x \in (a,b),\ \forall (s,\xi) \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned}
$$

Definimos ahora el funcional $F_0 : \mathcal{O} \subset W^{1,p}(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$
F_0(u) = \int_a^b f_0(x,u,u')\,dx, \quad \forall u \in W^{1,p}(a,b).
$$

Finalmente, veamos la coercitividad. Sea

$$
\varphi(x) = \frac{(b-x)u_a + (x-a)u_b}{b-a},
$$

la recta que une (a, u_a) con (b, u_b) y observemos que $u \in \mathcal{O}$ si y sólo si

$$u(x) = v(x) + \varphi(x) \text{ con } v \in W_0^{1,p}(a,b).$$

Además, u converge a infinito si y sólo si v tiende a infinito. Razonando por convexidad, se tiene

$$|u'|^p \geq |v'|^p - p|v'|^{p-2}v' \cdot \varphi' \geq |v'|^p - p|v'|^{p-1}|\varphi'|$$

mientras que por el Teorema del valor medio obtenemos

$$\Big| |u|^p - |v|^p \Big| \leq p\,(|u| + |v|)^{p-1}\,|\varphi|,$$

y por tanto

$$|u|^p \leq |v|^p + p(|\varphi| + |v|)^{p-1}|\varphi|.$$

A partir de (5.27), con ayuda de las desigualdades anteriores, se prueba que F_0 satisface

$$\begin{aligned} F_0(u) &\geq \int_a^b \left(\frac{\alpha}{p}|u'|^p - k(x)\,(|u| + |u'|) - \frac{\beta}{p}|u|^p \right) dx \\ &\geq \int_a^b \left(\frac{\alpha}{p}|v'|^p - k(x)\,(|v| + |v'|) - \frac{\beta}{p}|v|^p \right) dx - \\ &- \int_a^b \left[\alpha|v'|^{p-1}|\varphi'| + k\,(|\varphi| + |\varphi'|) + \beta\,(|\varphi| + 2|v|)^{p-1}\,|\varphi| \right] dx. \end{aligned}$$

Para $\varepsilon > 0$, aplicando la desigualdad de Young, se tiene

$$\begin{aligned} F_0(u) \geq \int_a^b \left(\frac{\alpha}{p}|v'|^p - \frac{\beta}{p}|v|^p \right) dx - \int_a^b \left[\frac{\varepsilon^p}{p}\,(|v^p| + |v'|^p) + \frac{\varepsilon^{p'}}{p'}\,(|v'|^p + 2|v|^p) \right] dx \\ - \int_a^b \left[\frac{\alpha^p}{\varepsilon^p}|\varphi'|^p + k\,(|\varphi| + |\varphi'|) + \left(\frac{1}{p'\varepsilon^p} + \frac{\beta^p\varepsilon^p}{p} \right) |\varphi|^p \right] dx \end{aligned}$$

que gracias a la desigualdad de Poincaré, se obtiene

$$F_0(u) \geq \int_a^b \left[\left(\frac{\alpha}{p} - \frac{\varepsilon^p}{p} - \frac{\varepsilon^{p'}}{p'} \right) - \widehat{C} \left(\frac{\beta}{p} + \frac{\varepsilon^p}{p} + \frac{2\varepsilon^{p'}}{p'} \right) \right] |v'|^p\,dx + R_\varepsilon$$

con $R_\varepsilon \in \mathbb{R}$ dependiendo de ε. Tomando ε lo suficientemente pequeño para que el factor que multiplica a $|v'|^p$ en el primer sumando sea positivo, se tiene entonces

$$\lim_{\substack{|u| \to \infty \\ u \in \mathcal{O}}} F_0(u) = +\infty.$$

Hemos probado entonces que se verifican cada una de las hipótesis *(i)*, *(ii)*, *(iii)* y *(iv)* del Teorema 5.1. Por tanto existe una solución del problema de minimización

$$\min_{u \in \mathcal{O}} \int_a^b f_0(x, u, u')\, dx. \tag{5.28}$$

Además, gracias al Lema 5.1.4 sabemos que dicha solución satisface

$$\delta F(u, \varphi) = \int_a^b \Big(\partial_s f_0(x, u, u')\varphi \;+\; \partial_\xi f_0(x, u, u')\varphi' \Big)\, dx = 0, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(a, b).$$

es decir,

$$\delta F(u, \varphi) = \int_a^b \Big(\Lambda(x, u, u')\varphi \;+\; \Theta(x, u, u')\varphi' \Big)\, dx = 0, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(a, b).$$

lo que por definición de derivada débil es equivalente a

$$\Theta(x, u, u') \in W^{1,p}(a, b), \quad \frac{\partial}{\partial t}\Theta(x, u, u') = \Lambda(x, u, u').$$

Luego, concluimos que la solución u del problema de mínimos (5.28), es solución del problema de contorno (5.24).

$\square$

Bibliografía

[1] V. M. Alexeev-V.M. Tikhomirov-S.V. Fomin: *Optimal Control*, Consultants Bureau, (1987).

[2] H. Brézis: *Análisis Funcional. Teoría y aplicaciones*, Alianza Editorial, (1984).

[3] J.Jost-X. Li-Jost: *Calculus of Variations*, Cambridge Univ. Press, (2003).

[4] M. L. Krasnov-G. I. Makarenko-A. I. Kiseliov: *Cálculo variacional (ejemplos y problemas)*, Mir, (1976).

[5] P.L. Lax *Functional Analysis*, John Wiley & Sons, (2002).

[6] L. A. Liusternik-V. J. Sobolev: *Elements of Functional Analysis*, F. Ungar Publ. Co. , (1965).

[7] L. P. Lebedev-M. J. Cloud: *The Calculus of Variations and Functional Analysis*, World Sci. Pub Co. , (2003).

[8] E. R. Pinch: *Optimal control and the calculus of variations*, Oxford Science Publications, (1993).

[9] V. A. Trenoguin: *Analyse Fonctionnelle*, Mir, (1985).