

Trabajo Fin de Master  
Máster de Diseño Avanzado en Ingeniería Mecánica

# Modelización Numérica de los Fenómenos de Propagación del Oleaje.

## Aplicación del Método de los Elementos Finitos a la Ecuación de la Pendiente Suave (Mild-Slope Equation).

Autor: Gabriel Chamorro Sosa

Tutor: José Manuel Galán Fernández

**Dep. de Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería**  
**Escuela Superior de Ingeniería**  
**Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2016





Trabajo Fin de Master  
Diseño Avanzado en Ingeniería Mecánica

# Modelización Numérica de los Fenómenos de Propagación del Oleaje.

Aplicación del Método de los Elementos Finitos a la  
Ecuación de la Pendiente Suave (Mild-Slope Equation).

Autor:

Gabriel Chamorro Sosa

Tutor:

José Manuel Galán Fernández

Profesor titular

Departamento de Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería

Escuela Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2016

Trabajo Fin de Master: Modelización Numérica de los Fenómenos de Propagación del Oleaje.

Autor: Gabriel Chamorro Sosa

Tutor: José Manuel Galán Fernández

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2016

El Secretario del Tribunal

*A Mamá Isabela, maestra de las tortillas de patatas sin huevos ni patatas. Gracias por tus interminables horas de costura, por sacarnos a los cinco adelante,...*

*A Laura, por tu templanza y tu paciencia todas las horas que le dedico a mis libros en lugar de a las cosas importantes, que sois tú y nuestra hija María.*

*A José Manuel Galán, porque eres muy grande y me encanta echar esos ratillos en la escuela contigo. Siempre tienes tiempo para todo y para todos.*

*A Gregorio Gómez, por despertar en mí la vocación marítima y convertirme en un ingeniero no sólo de caminos y canales.*



# Agradecimientos

En la primavera de 2012, por pura alineación esotérica de los astros, fui contratado como profesor sustituto interino en el Departamento de Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de la Universidad de Sevilla. Gracias a ello, he podido culminar un sueño y una vocación: la docencia universitaria.

Tras años de crisis económica y de valores, he encontrado en la E.T.S.I. de la Universidad de Sevilla ese lugar de refugio donde me aparto de la rutina y el desenfreno del trabajo diario como ingeniero consultor de ingeniería civil. El mero hecho de impartir mis clases de Ingeniería Marítima y el contacto continuo con mis alumnos de la escuela me han impregnado de esa dosis de juventud, energía positiva y motivación que me ayudan a atravesar los malos momentos por los que pasa España; la Escuela también me ha “obligado” a permanecer en mi país, justo cuando casi todos mis amigos y compañeros de profesión, Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, salían en estampida de mi querida España hacia otros países para buscarse la vida... *“Caminante, son tus huellas el camino y nada más...”*.

Tengo que agradecer a todos mis compañeros del Departamento de Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería, sin excepción, su amistad y ánimo para cursar este Máster a los 44 años de edad. En especial a José Manuel Galan, tutor de este TFM, por su entrega incondicional y constante ayuda.

No puedo olvidar a mis alumnos de Grado de Ingeniería Civil y Máster de Caminos, Canales y Puertos a los que imparto clases en la ETSI. Vosotros sois los artífices de mi ímpetu y motivación para sacar horas de donde no las hay y para ser cada día mejor profesional y mejor docente. Gracias de corazón.



*Gabriel Chamorro Sosa*

*Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos*

*Sevilla, 2016*



# Resumen

---

En este TFM se presenta una visión general de los fenómenos de propagación del oleaje y su implementación numérica mediante el método de los elementos finitos. Dado el carácter docente de su autor, el presente trabajo tiene una marcada componente didáctica y pedagógica enfocada hacia la docencia y fruto de la experiencia acumulada en los cinco años en los que se han estado impartiendo las asignaturas de Obras Marítimas (Grado de Ingeniería Civil) e Ingeniería de Puertos y Costas (Máster de Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos) en la E.T.S.I. de la Universidad de Sevilla.

La modelización matemática del oleaje en el presente TFM se realiza mediante la conocida ecuación de la pendiente suave o "*Mild-Slope Equation*" (MSE), desarrollada por Berkhoff en la década de los 70. El método numérico elegido es el de los elementos finitos (MEF), por ser éste el método numérico más efectivo y conocido por nuestros alumnos de Grado y Máster de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería.

La Mild-Slope Equation es una ecuación de tipo elíptico que requiere para su resolución de la imposición de condiciones en todo el contorno del dominio de integración. Es precisamente de las condiciones de contorno de donde provienen las mayores fuentes de errores numéricos que se observan en los resultados. Esto es debido fundamentalmente a que necesitamos truncar un dominio semi-infinito, como es el mar abierto, para obtener un dominio ficticio acotado y finito que sea computacional.

En estos contornos abiertos "ficticios" debemos imponer la condición de que las ondas reflejadas dentro del dominio y que lo abandonan a través de este contorno abierto, no vuelvan a reflejarse hacia el interior creando oscilaciones espurias que dan "ruido" a la solución numérica. Es decir, deben imponerse condiciones de contorno absorbentes que aseguren que las ondas reflejadas que lo atraviesen lo hagan sin sentir su presencia.

Esto puede parecer sencillo a primera vista, pero encierra una complicación importante al no ser conocido a priori el ángulo con el que estas ondas reflejadas llegan al contorno, necesitándose por ello el empleo de diferentes técnicas numéricas que nos permitan simular correctamente esta "transparencia" del contorno a las ondas reflejadas que lo alcanzan.

Por ello, se resolverán numéricamente problemas clásicos de propagación de oleaje de los cuales conocemos su solución analítica. De esta forma, un mismo problema será resuelto aplicando diferentes técnicas de simulación de las condiciones de contorno: aproximación de primer orden (Sommerfeld), segundo orden y aplicación de esponjas numéricas como la "*Perfectly Matched Layer*" (PML), que serán explicadas y desarrolladas en los próximos capítulos del presente TFM. La comparación de las diferentes soluciones numéricas con las soluciones analíticas nos permitirá discutir sobre la bondad de cada una de las técnicas numéricas empleadas en cada caso.



# Abstract

---

In this MSc Thesis an overview of wave propagation phenomena and their numerical implementation is presented using the finite element method (FEM). Given the educational profile of its author, this work shows a remarkable pedagogical component due to the work and experience acquired during the five academic courses the author teaches the subjects Marine Works (Degree of Civil Engineering), and Ports and Coastal Engineering (Master of Civil Engineering) at the University of Seville.

Mathematical modeling of waves in this MSc Thesis is performed using the "Mild-Slope Equation" (MSE) developed in the 70's by Berkhoff. The FEM has been chosen since this is the most effective numerical method known by our undergraduate students in the School of Engineering at the University of Seville.

The Mild-Slope Equation is of the elliptic kind, which requires for its resolution conditions all along the domain of integration boundary. It is precisely because of the boundary conditions that the largest numerical errors are observed in the results. The main reason is that we need to truncate a semi-infinite domain (open sea) for a limited and finite computational domain. In these artificial open boundaries, we impose the condition that the reflected waves generated within the domain are not reflected back inward, creating spurious oscillations that give "noise" to the numerical solution. Therefore we are after an absorbing boundary condition that ensures that the reflected waves that pass through the boundary do not "feel" its presence.

This may seem simple at first glance, but it contains an important complication since the angle at which these reflected waves reach the boundary is unknown, a priori. Thus, we require the use of different numerical techniques which allow us to properly simulate this "boundary transparency" to the reflected-scattered waves that reach the boundary.

Some classical problems of wave propagation will be solved where the analytical solution is known from the technical literature. These same problems will be solved numerically too by applying different simulations based on different boundary condition approximation technics, such as first order (Sommerfeld-like), second order and the application of numerical sponges like the "Perfectly Matched Layer" (PML). All of these procedures will be thoroughly studied in the next chapters of this MSc Thesis. The comparison of different numerical solutions with the analytical one will allow us to discuss which numerical approach is best.

# Índice

<b>Agradecimientos</b>	<b>vii</b>
<b>Resumen</b>	<b>ix</b>
<b>Abstract</b>	<b>xi</b>
<b>Índice</b>	<b>xii</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>xvii</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>20</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>25</b>
1.1. <i>Objetivos</i>	26
1.2. <i>Motivación del presente TFM</i>	27
1.3. <i>Resumen de contenidos del TFM</i>	27
1.4. <i>Punto de partida del TFM</i>	29
<b>2 Introducción al Problema de Propagación del Oleaje</b>	<b>31</b>
2.1. <i>Un poco de historia y “números gordos”</i>	32
2.2. <i>Un repaso rápido a los fenómenos de propagación del oleaje</i>	36
2.2.1. <i>Asomeramiento o shoaling</i>	37
2.2.2. <i>Refracción</i>	39
2.2.3. <i>Difracción</i>	40
2.2.4. <i>Reflexión</i>	42
2.3. <i>Ejemplo de cálculo.</i>	46
2.4. <i>Conclusiones</i>	49
<b>3 Fundamentos de Mecánica de Fluidos</b>	<b>51</b>
3.1. <i>Conservación de la masa</i>	52
3.2. <i>Conservación de la cantidad de movimiento</i>	54
3.2.1. <i>Fuerzas gravitatorias</i>	54
3.2.2. <i>Fuerzas presión</i>	55
3.2.3. <i>Fuerzas viscosas</i>	56
3.3. <i>Ecuaciones de Navier-Stokes</i>	57
3.4. <i>Ecuaciones de Euler</i>	58
3.5. <i>Ecuación de Bernoulli</i>	58
3.6. <i>Resumen</i>	60
<b>4 Teoría Lineal de Ondas de Airy</b>	<b>61</b>
4.1. <i>Elementos de una onda</i>	62
4.2. <i>La Onda de Airy</i>	63
4.2.1. <i>Hipótesis básicas</i>	63
4.2.2. <i>Ecuaciones de gobierno del problema</i>	65
4.2.3. <i>Condiciones de contorno en la frontera del dominio</i>	66
4.2.3.1. <i>CCC en la superficie libre</i>	67
4.2.3.2. <i>CCC en el fondo</i>	67
4.2.3.3. <i>CCC en laterales</i>	67
4.2.3.4. <i>CCD en la superficie libre</i>	67
4.2.4. <i>Planteamiento del problema</i>	68
4.2.5. <i>Solución analítica del problema de contorno</i>	69
4.3. <i>Función de potencial de velocidad</i>	72
4.4. <i>Función de desplazamiento de la superficie libre <math>\eta</math></i>	73
4.5. <i>Ecuación de dispersión</i>	74
4.6. <i>Aplicación práctica de la ecuación de dispersión.</i>	76
4.6.1. <i>Concepto de aguas profundas</i>	77
4.6.2. <i>Concepto de aguas reducidas o someras (shallow water)</i>	77
4.7. <i>Celeridad de grupo</i>	78
4.8. <i>Energía de la onda</i>	80

<b>5</b>	<b>La Mild-Slope Equation</b>	<b>83</b>
5.1.	<i>Hipótesis básicas</i>	83
5.1.1.	Hipótesis de Rayleigh o de fondo suave	84
5.2.	<i>Deducción de la Mild-Slope Equation</i>	85
5.3.	<i>Condiciones de contorno del problema</i>	86
<b>6</b>	<b>Aplicación del M.E.F. a la Mild-Slope Equation Unidimensional (1-D)</b>	<b>89</b>
6.1.	<i>La Mild-Slope Equation 1-D</i>	89
6.2.	<i>Formulación débil de la Mild-Slope Equation 1-D</i>	90
6.3.	<i>Condiciones de contorno del problema</i>	91
6.3.1.	Condición de contorno de borde cerrado	91
6.3.2.	Condición de contorno de borde abierto	94
6.3.3.	Condición de contorno de potencial prescrito, esencial o tipo Dirichlet	96
6.3.4.	Condición de contorno de flujo potencial prescrito, natural o tipo Neumann	97
6.4.	<i>Discretización del dominio</i>	97
6.5.	<i>Funciones de forma o interpolación</i>	98
6.5.1.	Transformación a coordenadas naturales.	100
6.6.	<i>Función de peso. Método de Galerkin</i>	101
6.7.	<i>Discretización de la forma débil de la MSE</i>	101
6.7.1.	Integrales de dominio.	103
6.7.2.	Aplicación de la condiciones de contorno.	105
6.7.2.1.	<u>Condición de Contorno de Borde Cerrado</u>	106
6.7.2.2.	<u>Condición de Contorno de Borde Abierto</u>	107
6.7.2.3.	<u>Condición de Contorno de Potencial Prescrito (C.C. Esencial o Dirichlet)</u>	109
6.7.2.4.	Condición de Contorno de flujo de potencial prescrito (C.C. Natural o Neumann):	113
6.8.	<i>Procedimiento de ensamblaje del sistema de ecuaciones.</i>	114
6.8.1.	Ensamblaje de la matriz de rigidez global.	114
6.8.2.	Ensamblaje de las condiciones de contorno.	115
6.9.	<i>Implementación en Matlab®</i>	119
6.10.	<i>SIMULACIÓN MSE-1D-000. Propagación de Onda Monocromática en Batimetría Constante</i>	120
6.10.1.	Descripción física del problema.	120
6.10.2.	Solución analítica del problema.	120
6.10.3.	Solución numérica del problema.	120
6.10.4.	Código de elementos finitos en Matlab®.	123
6.11.	<i>SIMULACIÓN MSE-1D-001. Shoaling Puro</i>	124
6.11.1.	Descripción física del problema.	124
6.11.2.	Solución analítica del problema.	124
6.11.3.	Solución numérica del problema.	126
6.11.4.	Código de elementos finitos en Matlab®.	129
6.12.	<i>SIMULACIÓN MSE-1D-002. Frecuencias propias de oscilación de dársena unidimensional</i>	130
6.12.1.	Descripción física del problema.	130
6.12.2.	Solución analítica del problema.	131
6.12.3.	Solución numérica del problema.	133
6.12.4.	Código de elementos finitos en Matlab®.	138
6.13.	<i>SIMULACIÓN MSE-1D-003. Problema de reflexión de ondas por inclinación del fondo</i>	139
6.13.1.	Descripción física del problema.	139
6.13.2.	Solución analítica del problema.	140
6.13.3.	Solución numérica del problema.	141
6.13.4.	Código de elementos finitos en Matlab®.	142
6.14.	<i>SIMULACIÓN MSE-1D-004. Frecuencias de Resonancia de una dársena unidimensional</i>	143
6.14.1.	Descripción física del problema.	143
6.14.2.	Solución analítica del problema.	144
6.14.3.	Solución numérica del problema.	145
6.14.4.	Código de elementos finitos en Matlab®.	146
<b>7</b>	<b>Aplicación del M.E.F. a la Mild-Slope Equation Bidimensional (2-D)</b>	<b>147</b>
7.1.	<i>La Mild-Slope Equation 2-D</i>	148
7.2.	<i>Teorema de Green-Gauss</i>	148
7.3.	<i>Formulación débil de la Mild-Slope Equation 2-D</i>	149
7.4.	<i>Condiciones de contorno del problema</i>	151

7.4.1.	Condición de contorno de borde cerrado	151
7.4.2.	Condición de contorno de borde abierto	154
7.4.3.	Condición de contorno de potencial prescrito, esencial o tipo Dirichlet	155
7.4.4.	Condición de contorno de flujo potencial prescrito, natural o tipo Neumann	155
7.5.	<i>Discretización del dominio</i>	156
7.6.	<i>Funciones de forma o interpolación</i>	157
7.6.1.	Transformación a coordenadas naturales.	159
7.7.	<i>Función de peso. Método de Galerkin</i>	161
7.8.	<i>Discretización de la forma débil de la MSE</i>	162
7.8.1.	Integrales de dominio.	163
7.8.2.	Aplicación de la condiciones de contorno.	165
7.9.	<i>Procedimiento de ensamblaje del sistema de ecuaciones.</i>	176
7.9.1.	Ensamblaje de la matriz de rigidez global.	176
7.9.2.	Ensamblaje de las condiciones de contorno.	178
7.10.	<i>Implementación en Matlab®</i>	181
7.11.	<i>SIMULACIÓN MSE2D_00. Propagación en fondo de profundidad constante</i>	183
7.11.1.	Descripción física del problema.	183
7.11.2.	Solución analítica del problema.	184
7.11.3.	Solución numérica del problema.	184
7.11.4.	Código de elementos finitos en Matlab®.	188
7.12.	<i>SIMULACIÓN MSE2D_01. Refracción y shoaling sobre batimetría recta y paralela</i>	189
7.12.1.	Descripción física del problema.	189
7.12.2.	Solución analítica del problema.	189
7.12.3.	Solución numérica del problema.	192
7.12.4.	Código de elementos finitos en Matlab®.	194
7.13.	<i>SIMULACIÓN MSE2D_02. Difracción en dique</i>	195
7.13.1.	Descripción física del problema.	195
7.13.2.	Solución analítica del problema.	196
7.13.3.	Solución numérica del problema.	197
7.13.3.1.	Simulación con dominio rectangular	198
7.13.3.2.	Simulación con dominio circular	199
7.13.3.3.	Simulación de bocana estrecha	200
7.13.4.	Código de elementos finitos en Matlab®.	201
7.14.	<i>Modelización de una dársena portuaria</i>	202
<b>8</b>	<b>Empleo de Esponjas Numéricas “Perfectly Matched Layer”</b>	<b>205</b>
8.1.	<i>Perfectly Matched Layer</i>	206
8.1.1.	Cambio de variable al campo complejo.	207
8.2.	<i>Forma fuerte de la MSE</i>	208
8.3.	<i>Formulación débil de la Mild-Slope Equation 1-D</i>	209
8.4.	<i>Condiciones de contorno del problema</i>	210
8.4.1.	Condición de contorno de borde reflejante.	210
8.4.2.	Condición de contorno el borde abierto.	210
8.5.	<i>Discretización de la forma débil de la MSE</i>	211
8.5.1.	Integrales de dominio.	211
8.5.2.	Aplicación de la condiciones de contorno.	212
8.5.2.1.	<u>Condición de Contorno de Borde Cerrado</u>	213
8.5.2.2.	<u>Condición de Contorno de Borde Abierto</u>	214
8.6.	<i>Implementación en Matlab®</i>	215
8.7.	<i>SIMULACIÓN MSE-1D-PML-01. Propagación de Onda Monocromática Sobre Constante y PML en Borde <math>x = l</math>.</i>	215
8.7.1.	Descripción física del problema.	215
8.7.2.	Solución analítica del problema.	216
8.7.3.	Solución numérica del problema.	216
8.7.4.	Código de elementos finitos en Matlab®.	219
8.8.	<i>SIMULACIÓN MSE-1D-PML-02. Propagación de Onda Monocromática Sobre Constante y PML en Borde <math>x = 0</math>.</i>	219
8.8.1.	Descripción física del problema.	219
8.8.2.	Solución analítica del problema.	220
8.8.3.	Solución numérica del problema.	220
8.8.4.	Código de elementos finitos en Matlab®.	224

<b>9 Conclusiones y Desarrollos Futuros</b>	<b>225</b>
9.1. Conclusiones	225
9.2. Trabajos y desarrollos futuros	226
<b>Referencias</b>	<b>228</b>



# ÍNDICE DE TABLAS

---

Tabla 4–1 Comportamiento de las funciones hiperbólicas.	77
Tabla 6–1 Datos numéricos del problema de Propagación en Fondo Constante	121
Tabla 6–2 Datos numéricos del problema de Shoaling Puro	126
Tabla 6–3 Datos numéricos del problema de frecuencias naturales en dársena 1-D	133
Tabla 6–4 Comparación de los valores de $T_n$ numéricos vs. analíticos y error absoluto	137
Tabla 6–5 Datos numéricos del problema de Cálculo del Coeficiente de Reflexión por fondo	141
Tabla 6–6 Datos numéricos del problema de Resonancia en dársena 1-D	146
Tabla 7–1 Datos numéricos del problema de Propagación en Fondo Constante	184
Tabla 7–2 Datos numéricos del problema de shoaling y refracción con batimetría recta y paralela	193
Tabla 7–3 Datos numéricos del problema de Difracción	197
Tabla 8–1 Datos numéricos de la simulación MSE-1D-PML-01	216
Tabla 8–2 Datos numéricos de la simulación MSE-1D-PML-02	221





# ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1-1. Vista aérea del Puerto de Tarifa (Cádiz).	25
Figura 2-1. El fenómeno de propagación del oleaje.	31
Figura 2-2. El podio de las olas del Mar Cantábrico. Datos de boyas de Puertos del Estado.	32
Figura 2-3. D. Ramón Iribarren Cabanilles. Irún, Guipuzcoa (1900 – 1967). Planos de Oleaje.	33
Figura 2-4. Ábaco de coeficiente de propagación $K_R$ - $K_S$ del Shore Protection Manual (SPM) del U.S. Army Corps of Engineers (1984) para el caso de batimetría recta y paralela	34
Figura 2-5. Ábaco de difracción de Weigel del SPM.	34
Figura 2-6. Modelo de Isla “circular parabolic shoal” sobre fondo plano.	35
Figura 2-7. Fenómenos de resonancia en dársenas portuarias. Caso del Puerto de Ciudadela (Menorca).	36
Figura 2-8. Fenómenos de propagación del oleaje. Figura extraída de [8]	36
Figura 2-9. Oleaje swell aproximándose a la costa.	37
Figura 2-10. Fenómeno de shoaling. Plumer et al. (2001).	38
Figura 2-11. Los tsunamis son una muestra del fenómeno de shoaling llevado al extremo, con consecuencias catastróficas, como el terrible Tsumami de Japón en 2011.	38
Figura 2-12. El proceso de aperaltamiento de la ola al llegar a la costa es el preámbulo de su rotura.	39
Figura 2-13. Fenómeno de refracción.	39
Figura 2-14. Hipótesis de conservación del flujo de energía durante la propagación.	40
Figura 2-15. Fenómeno de difracción. Una imagen vale más que mil palabras (Por cortesía de Vicente Negro).	40
Figura 2-16. Formaciones costeras (tómbolos) debidas a la difracción.	41
Figura 2-17. Principio de Huygens para la luz y su analogía al caso del oleaje.	41
Figura 2-18. Explicación intuitiva del Profesor Baker del fenómeno de difracción del oleaje.	42
Figura 2-19. Efecto de abrigo portuario producido por la difracción del oleaje.	42
Figura 2-20. Fenómeno de reflexión del oleaje.	43
Figura 2-21. Reflexión del oleaje en diques verticales	43
Figura 2-22. Diseño de dique vertical no reflejante de última generación.	45
Figura 2-23. Ejemplo de fenómenos de reflexión en la Bahía de Algeciras. A la derecha se observa el modelo físico del CEDEX donde se aprecia la el fenómeno de reflexión del nuevo dique vertical.	45
Figura 2-24. Puerto de la Alcadesa en la Bahía de Algeciras (Cádiz).	46
Figura 2-25. Vista aérea del Puerto de Chipiona (Cádiz).	50
Figura 3-1. Temporales del Mar Cantábrico	51
Figura 3-2. Claude-Louis Navier (1785-1836) y a Sir George Gabriel Stokes (1819-1903).	52
Figura 3-3. Balance de masas.	53
Figura 3-4. Capa límite y desprendimiento de la misma en el caso de flujo alrededor de una esfera lisa.	58
Figura 3-5. Flujo rotacional vs. Flujo irrotacional.	58
Figura 4-1. George Biddell Airy (1801-1892)	61
Figura 4-2. Elementos de una onda	62

Figura 4-3. Visualización del Modelo de onda sinusoidal.	62
Figura 4-4. Flujo rotacional e irrotacional.	64
Figura 4-5. Modelo de onda lineal (sinusoidal) que se propaga sobre fondo plano	64
Figura 4-6. Dominio de integración. Figura extraída de la referencia [9]	66
Figura 4-7. Desplazamiento de la superficie libre del fluido al paso de la onda.	74
Figura 4-8. Comparación del perfil de onda real “no lineal” frente a la onda de Airy.	74
Figura 4-9. Comparación de un Sea (izquierda) y un Swell (derecha).	75
Figura 4-10. Las ondas son dispersivas en frecuencia. Los trenes de onda se ordenan cuando salen del área de generación (fetch) y se propagan hacia las costas.	75
Figura 4-11. Funciones hiperbólicas.	76
Figura 4-12. Visualización de los grupos de olas.	78
Figura 5-1. Dominio de integración y contorno.	86
Figura 5-2. Contornos abiertos y cerrados.	87
Figura 5-3. Contornos con $\partial\phi/\partial n$ prescrito. Caso de pala generadora de oleaje en túnel de oleaje	88
Figura 6-1. Dominio de integración 1-D.	90
Figura 6-2. Ejemplo de condición de borde cerrado en $x = 1$ .	92
Figura 6-3. Condición de borde cerrado en $x = 0$ .	92
Figura 6-4. Condición de borde abierto en $x = 0$ .	94
Figura 6-5. Anidamiento de mallas.	96
Figura 6-6. Condición de contorno tipo natural o de Neumann. Pala generadora de oleaje.	97
Figura 6-7. Discretización del dominio de integración 1-D.	97
Figura 6-8. Discretización del dominio de integración 1-D.	98
Figura 6-9. Funciones de interpolación lineales del elemento e (dos nodos i-j).	99
Figura 6-10. Integración numérica por cuadratura de Gauss.	104
Figura 6-11. Ejemplo de dominio con borde abierto en $x = 0$ y cerrado en $x = 1$ , con coeficiente de reflexión R.	106
Figura 6-12. Proceso de ensamblaje de la matriz de rigidez K (elemento e entre los nodos i-j).	115
Figura 6-13. Topología de la malla de elementos finitos en el caso 1-D.	115
Figura 6-14. Geometría del modelo MSE1D-000.	121
Figura 6-15. Máximo valor absoluto del error en el modelo frente al tamaño de la malla.	121
Figura 6-16. Máximo valor absoluto del error en el modelo frente al tamaño de la malla.	122
Figura 6-17. Comparativo de solución Analítica vs. Numérica con malla de 100 elementos.	122
Figura 6-18. Comparación de resultados para diferente número de elementos.	123
Figura 6-19. Playa de planta rectilínea con batimetría aproximadamente recta y paralela.	124
Figura 6-20. Conservación del flujo de energía de la onda.	125
Figura 6-21. Geometría del modelo MSE-1D-001.	126
Figura 6-22. Valor analítico del coeficiente de shoaling $K_s$ . Fuente USACE “Shore Protection Manual”.	127
Figura 6-23. Comparativa del coeficiente de shoaling puro $K_s$ – analítico vs. $K_s$ – numérico.	128
Figura 6-24. Perfil de la superficie libre $\eta$ en $t = 0$ . Se corresponde con la parte real de $\phi$ .	128
Figura 6-25. Graficos comparativos de la solución Numérica vs. Analítica.	129

Figura 6-26. Dársena 1-D abierta por un extremo y cerrada por el otro. Extraído de “Waves, Tides and Shallow Water Processes” (Open University) [12].	130
Figura 6-27. Dársena portuaria de geometría sencilla rectangular, abierta por un extremo y cerrada por el otro.	130
Figura 6-28. Modos naturales de vibración para el caso de dársena abierta.	131
Figura 6-29. Primer modo de oscilación de la dársena.	131
Figura 6-30. Segundo modo de oscilación de la dársena.	132
Figura 6-31. Potencial incidente y reflejado en $x = 0$ .	132
Figura 6-32. Valor absoluto del potencial en la bocana de la dársena $x = 0$ .	135
Figura 6-33. Comparativo de la solución Numérica vs. Analítica.	135
Figura 6-34. Representación de los tres primeros modos naturales de oscilación de la dársena.	136
Figura 6-35. Representación de los cuatro primeros modos naturales de oscilación de la dársena obtenidos del problema de autovalores: $K - \omega^2 M \phi = 0$ .	137
Figura 6-36. Representación del error absoluto en cada modo de oscilación.	138
Figura 6-37. Resultados del coeficiente de reflexión por pendiente de fondo de N. Booij.	139
Figura 6-38. Geometría del problema.	140
Figura 6-39. Resultado numérico del Coeficiente de Reflexión por fondo.	141
Figura 6-40. Resonancia del Puente Tacoma (1940).	143
Figura 6-41. Rissages en el Puerto de Ciutadela. Isla de Menorca.	143
Figura 6-42. Dársena portuaria de geometría sencilla rectangular, abierta por un extremo y cerrada por el otro.	144
Figura 6-43. Periodos de resonancia.	146
Figura 7-1. Modelo de propagación de ondas con elementos finitos 2-D.	147
Figura 7-2. Dominio de integración 2-D.	148
Figura 7-3. Dominio de integración $\Omega$ de contorno $\Gamma$ y normal exterior $n$ .	149
Figura 7-4. Condiciones de contorno del problema.	151
Figura 7-5. Condición de contorno cerrado.	152
Figura 7-6. Condición de contorno abierto.	154
Figura 7-7. Pala generadora de oleaje. Condición de contorno tipo natural o de Neumann.	156
Figura 7-8. Discretización del dominio de integración 2-D.	156
Figura 7-9. Triangulación de Delaunay.	157
Figura 7-10. Funciones de interpolación del elemento $e$ (nodos $i-j-k$ ).	158
Figura 7-11. Coordenadas triangulares $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$	160
Figura 7-12. Discretización del contorno en elementos lineales de dos nodos.	165
Figura 7-13. Funciones de forma lineales.	166
Figura 7-14. Proceso de ensamblaje de la matriz de rigidez $K$ (elemento $e$ , nodos $i-j-k$ ).	177
Figura 7-15. Ejemplo de matriz de topología de malla de elementos finitos.	177
Figura 7-16. Montaje de la condición de contorno cerrado.	179
Figura 7-17. Montaje de la condición de contorno abierto.	180
Figura 7-18. Esquema del dominio de integración en función del ángulo $\alpha$ .	183
Figura 7-19. Ejemplo de mallado triangular para $\alpha = 20^\circ$ . Aristas de triángulos de 2,00 m.	184
Figura 7-20. Comparación de la solución analítica y numérica	187

Figura 7-21. Refracción de oleaje en playa de alineación recta	189
Figura 7-22. Conservación del flujo de energía de la onda. Figura extraída de [8]	189
Figura 7-23. Conservación del flujo de energía de la onda. Figura extraída de [8]	190
Figura 7-24. Ley de Snell	191
Figura 7-25. Solución analítica de propagación de ondas en fondo con batimetría recta y paralela a la línea de costa (izquierda). Coeficientes de propagación KRKS	192
Figura 7-26. Malla de elementos finitos. Aristas de triángulos de 3,00 m.	193
Figura 7-27. Solución numérica del problema de shoaling-refracción en fondo con batimetría recta y paralela (izquierda), comparada con la solución analítica (derecha).	194
Figura 7-28. Difracción provocada por un dique (Por cortesía de Vicente Negro).	195
Figura 7-29. Efecto de abrigo portuario producido por la difracción del oleaje.	195
Figura 7-30. Ábaco de difracción de Weigel del SPM.	196
Figura 7-31. Ábaco de difracción de del SPM para caso de bocana estrecha $B=2L$ .	196
Figura 7-32. Modelo de difracción con dominio rectangular (izquierda) y rectangular truncado con sector circular de radio 150 m (derecha).	197
Figura 7-33. Deformación de la superficie libre $\eta = Re(\phi)$ en $t = 0$ .	198
Figura 7-34. Comparación de resultados numéricos con los del ábaco de Wiegel.	198
Figura 7-35. Malla de elementos finitos triangulares	199
Figura 7-36. Deformación de la superficie libre $\eta = Re(\phi)$ en $t = 0$ .	199
Figura 7-37. Comparación de resultados numéricos con los del ábaco de Wiegel.	199
Figura 7-38. Deformación de la superficie libre $\eta = Re(\phi)$ en $t = 0$ .	200
Figura 7-39. Valores del coeficiente de difracción analíticos del SPM para bocana $B=2L$ .	200
Figura 7-40. Resultados numéricos del coeficiente de difracción.	201
Figura 7-41. Comparación de Resultados analíticos y numéricos del coeficiente de difracción.	201
Figura 7-42. Geometría del modelo de dársena portuaria y batimetría.	202
Figura 7-43. Malla de elementos finitos triangulares de tres nodos. Arista 3,00 m.	203
Figura 7-44. Mapa de superficie libre del fluido en $t = 0$ . Vista cenital.	203
Figura 7-45. Mapa de superficie libre del fluido en $t = 0$ . Vista lateral.	204
Figura 7-46. Coeficiente de propagación (valor absoluto de $\phi$ )	204
Figura 8-1. Analogía del sistema masa-muelle con amortiguamiento "c".	205
Figura 8-2. Onda radial producida por un impacto puntual en una masa de agua en reposo.	205
Figura 8-3. Empleo de "esponjas numéricas" para eliminar ondas reflejadas espúreas.	206
Figura 8-4. Colocación del PML en el dominio.	206
Figura 8-5. Ejemplo de dominio con borde abierto en $x = 0$ y cerrado en $x = l$ , con coeficiente de reflexión R.	212
Figura 8-6. Caso de dominio con borde abierto en $x = 0$ (donde se situa el PML) y cerrado en $x = l$ , con coeficiente de reflexión R.	213
Figura 8-7. Geometría del problema MSE-1D-PML-01	215
Figura 8-8. Geometría del modelo.	217
Figura 8-9. Representación de la superficie libre del fluido. Observar que la onda llega a $x = l$ sin estar completamente atenuada, por lo que es reflejada hacia la izquierda.	217
Figura 8-10. Representación del valor absoluto del potencial. Observar que la onda no atenuada en $x = l$ vuelve	

---

reflejada hacia la izquierda contaminando la solución en el dominio $\Omega_{int}$ .	218
Figura 8-11. Representación de la superficie libre del fluido. Observar que la onda llega a $x = l$ completamente atenuada, por lo que no es reflejada hacia la izquierda.	218
Figura 8-12. Representación del valor absoluto del potencial. Observar que la onda casi totalmente atenuada en $x = l$ no vuelve reflejada hacia la izquierda.	219
Figura 8-13. Geometría del problema MSE-1D-PML-02	220
Figura 8-14. Geometría del modelo.	221
Figura 8-15. Representación de la superficie libre del fluido en $t = 0$ .	222
Figura 8-16. Representación del valor absoluto del potencial. Observar como la onda reflejada es la atenuada a su paso por el PML.	222
Figura 8-17. Representación de la superficie libre del fluido.	223
Figura 8-18. Representación del valor absoluto del potencial.	223

# 1 INTRODUCCIÓN

*La ciencia puede divertirnos y fascinarnos, pero es la Ingeniería la que cambia el mundo.*

- Isaac Asimov -



Figura 1-1. Vista aérea del Puerto de Tarifa (Cádiz).

**E**n este TFM se presenta una visión general de los fenómenos de propagación del oleaje y su implementación numérica mediante el método de los elementos finitos. Dado el carácter docente de su autor, el presente trabajo tiene una marcada componente didáctica y pedagógica enfocada hacia la docencia y es fruto de la experiencia acumulada en los cinco años en los que se han estado impartiendo las asignaturas de Obras Marítimas (Grado de Ingeniería Civil) e Ingeniería de Puertos y Costas (Máster de Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos) en la E.T.S.I. de la Universidad de Sevilla.

La modelización matemática del oleaje en el presente TFM se realiza mediante la conocida **ecuación de la pendiente suave** o "*Mild-Slope Equation*" (MSE), desarrollada por Berkhoff [1] en la década de los 70. El método numérico elegido es el de los elementos finitos (MEF), por ser éste el método numérico más efectivo, versátil y conocido por nuestros alumnos de Grado y Máster de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería.

La Mild-Slope Equation es una ecuación de tipo elíptico que requiere para su resolución de la imposición de condiciones en todo el contorno del dominio de integración. Es precisamente de las condiciones de contorno de donde provienen las mayores fuentes de errores numéricos que se observan en los resultados de los modelos matemáticos. Esto es debido fundamentalmente a que necesitamos truncar un dominio semi-infinito, como es el mar abierto, para obtener un dominio ficticio acotado y finito que sea computacional.

En estos contornos abiertos "ficticios" debemos imponer la condición de que las ondas reflejadas dentro del dominio y que lo abandonan a través de este contorno abierto, no vuelvan a reflejarse hacia el interior creando oscilaciones espúrias que dan "ruido" a la solución numérica. Es decir, deben imponerse condiciones de contorno absorbentes que aseguren que las ondas reflejadas que lo atraviesen lo hagan sin sentir su presencia.

Esto puede parecer sencillo a primera vista, pero encierra en el caso de dominio bidimensional 2-D una complicación importante, al no ser conocido a priori el ángulo con el que estas ondas reflejadas dentro del dominio llegan al contorno, necesiándose por ello el empleo de diferentes técnicas y aproximaciones numéricas que nos permitan simular correctamente esta “transparencia” del contorno a las ondas reflejadas que lo alcanzan [2].

Por ello, se resolverán numéricamente problemas clásicos de propagación de oleaje de los cuales conocemos su solución analítica. De esta forma, un mismo problema será resuelto aplicando diferentes técnicas de simulación de las condiciones de contorno: aproximación de primer orden (Sommerfeld-like), segundo orden y aplicación de esponjas numéricas como la “*Perfectly Matched Layer*” (PML), que serán explicadas y desarrolladas en los próximos capítulos del presente TFM. La comparación de las diferentes soluciones numéricas con las soluciones analíticas nos permitirá discutir sobre la bondad de cada una de las técnicas numéricas empleadas.

## 1.1. Objetivos

El objetivo principal de este TFM es el desarrollo de un modelo numérico de propagación de oleaje mediante la aplicación del método de los elementos finitos (MEF) a la Ecuación de la Pendiente Suave (Mild-Slope Equation). La implementación numérica del modelo se realiza mediante un código programado en Matlab®.

Se pretende que la implementación del código numérico sea muy sencilla, facilitando la introducción de datos y la obtención de resultados por parte del usuario del código y dando completa generalidad al tipo de condición de contorno a introducir:

- **Codiciones de contorno esenciales** (Dirichlet) o de potencial impuesto.
- **Condiciones de contorno naturales** (Neumann) o de flujo de potencial impuesto.
- **Condiciones de contorno mixtas** (Robin) para contornos cerrados con cierto grado de reflexión de las ondas incidentes o bordes abiertos con entrada de potencial conocido desde el exterior.

Se implementarán códigos para la resolución del problema de propagación unidimensional (1-D) y bidimensional (2-D). A pesar de la limitada aplicación práctica de los modelos unidimensionales, éstos se han introducido debido a su extraordinario valor pedagógico para comprender el funcionamiento del modelo.

El problema del desconocimiento del ángulo de aproximación de los potenciales reflejados en el interior del dominio a los contornos de éste nos obliga a realizar una serie de aproximaciones, más o menos plausibles según el caso, que serán introducidas en los códigos del programa. Se revisarán e implementarán en los códigos del programa las tres aproximaciones numéricas al problema más habitualmente empleadas [3] [4], que de menos a más precisión, estiman el ángulo de aproximación del potencial reflejado a los contornos:

- Aproximación de **primer orden** (Sommerfeld-Like), que supone que el ángulo de incidencia del potencial reflejado respecto de la dirección normal al contorno es cero por resultar de un truncamiento de primer orden del desarrollo en serie de Taylor del coseno del ángulo centrado en cero.
- Aproximación de **segundo orden**, que aproxima el coseno del ángulo de incidencia del potencial reflejado respecto de la dirección normal al contorno mediante un truncamiento de segundo orden del desarrollo en serie de Taylor del coseno del ángulo centrado en cero.
- Empleo de esponjas numéricas, como la **Perfectly Matched Layer** (PML), que son capaces de atenuar de forma exponencial los potenciales reflejados que llegan a la capa PML dejando inalterados los potenciales entrantes desde el exterior del dominio de integración, independientemente del ángulo de aproximación de los potenciales reflejados al contorno.

En el caso de la PML, sólo se introduce el método numérico para el problema 1-D, dejando el desarrollo de esta técnica numérica en 2-D para futuros desarrollos.

Los códigos de programación se verificarán con una serie de problemas de propagación de oleajes con solución analítica conocida. Se emplearán, por lo general, ejemplos de verificación sencillos que permitan observar con claridad la física que se esconde tras el problema de propagación y que de forma muy visual muestren que los

resultados numéricos obtenidos reproducen con precisión el fenómeno observado.

Por último, cabe reincidir en el carácter pedagógico del presente trabajo. El autor se ha marcado como objetivo clave que el contenido del documento sea claro, conciso y no dar casi nada por sentado. Siguiendo la secuencia de capítulos del trabajo y con un poco de dedicación, esfuerzo y conocimientos básicos de Matlab®, puede seguirse el desarrollo matemático de un problema de por sí muy complejo, sin que el lector deba o tenga que documentarse en otros textos específicos. Es decir, se ha fijado como objetivo que esta tesis sea lo más autocontenida posible, no obviándose ninguna de las bases en las que se sustenta el modelo numérico.

## 1.2. Motivación del presente TFM

La idea y motivación que subyace en este TFM es la de aproximar “sin dolor” a un alumno de la asignatura de Obras Marítimas, al ingeniero consultor o constructor, no académicos, a la modelización del oleaje en zonas costeras y portuarias mediante la Ecuación de la Pendiente Suave (Mild-Slope Equation), aplicando para ello el método de los elementos finitos (MEF).

No se pretende que sea éste un tratado exhaustivo sobre el MEF, pero sí un documento ameno y accesible en donde, con un poco de dedicación, se pueda ver de forma general cómo funciona el método y cómo se implementa numéricamente. Si tras la lectura de este TFM el lector se siente atraído por el tema, éste puede introducirse en la consulta de los tratados clásicos en la materia, como el de Zienkiewicz [5], pero ya con cierta base teórica que le permita una lectura productiva de dicha bibliografía.

Con este TFM se pretende que el lector, no académico, se dé cuenta que el MEF no es tan sólo un método numérico aplicable a la resolución de problemas de mecánica de sólidos y elasticidad, sino una herramienta numérica muy potente para resolver cualquier tipo de problema ingenieril que tenga tras de sí una ecuación diferencial en derivadas parciales (ecuación de gobierno) para la que sea difícil, por no decir imposible, obtener una solución analítica.

Como autor del presente TFM, una vez esbozado el alcance y el índice de los temas que conforman el presente documento, me hice la siguiente pregunta: “¿Cómo voy a contar a otros un tema tan complejo como es la modelización numérica de los fenómenos del oleaje...?” La conclusión y respuesta a esta pregunta fue clara: “Intentaré hacerlo como a mi mismo me hubiera gustado que mis profesores me lo hubieran enseñado”. Si finalmente logro el objetivo que me he marcado me daré por satisfecho.

## 1.3. Resumen de contenidos del TFM

El presente TFM sigue una secuencia de exposición de los temas que parte de los principios básicos del fenómeno físico en cuestión y desde ahí se va construyendo poco a poco, añadiendo progresivamente más materia y nuevos conceptos que se sustentan en lo estudiado con anterioridad.

El trabajo se ha desarrollado en **9 capítulos** cuyo contenido se resume a continuación.

El **capítulo 1** presenta los objetivos, alcance y motivación del presente TFM.

El **capítulo 2** contiene un breve resumen histórico de cómo se hacía ingeniería marítima en la época previa a los años 70, cuando irrumpen los métodos numéricos y los ordenadores en el ejercicio cotidiano de la profesión de ingeniero civil marítimo. Se habla de “números gordos” con respeto reverencial, como excelentes aproximaciones ingenieriles a problemas muy complicados y de su vital importancia en la formación de futuros ingenieros civiles. A su vez, se realiza una explicación física de los fenómenos de propagación del oleaje: shoaling, refracción, difracción y reflexión, y su relación con el diseño de las obras marítimas.

En el **capítulo 3** se repasan los conceptos fundamentales de mecánica de fluidos necesarios para la deducción de las ecuaciones de la Teoría Lineal de Ondas de Airy. Partiendo de los principios básicos de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento, se deducen las ecuaciones de Navier-Stokes para el caso de un fluido incompresible y newtoniano. Posteriormente se supone que el fluido es ideal y no viscoso, obteniéndose las

ecuaciones de Euler. Finalmente, de la consideración de la hipótesis de fluido irrotacional para el caso del problema de ondas en un fluido, se deduce que el campo de velocidades es conservativo y, por tanto, existe una función de potencial de velocidad  $\Phi$  cuyo gradiente  $\nabla\Phi$  es precisamente el campo de velocidades del fluido. Con estas hipótesis se obtiene que la ecuación de conservación de la masa es el Laplaciano de dicha función potencial y que la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento es la conocida ecuación de Bernoulli.

Las ecuaciones del Laplaciano y Bernoulli son las ecuaciones de gobierno de donde se deduce toda la Teoría Lineal de Ondas de Airy.

En el **capítulo 4** se estudia el origen y desarrollo matemático de la teoría lineal de ondas o de Airy, basada en una serie de hipótesis de partida fundamentales: fluido incompresible, ideal (no viscoso), irrotacional, propagándose sobre fondo de profundidad constante y onda de pequeña amplitud.

Con las anteriores hipótesis, se obtiene una solución analítica del problema de ondas mediante integración de la ecuación de gobierno (Laplaciano de la función potencial de velocidad) por el método de separación de variables. La condición de onda de pequeña amplitud  $\varepsilon = \frac{H}{L} \ll 1$  nos permite linealizar las condiciones de contorno del problema, pues en este caso los términos de orden superior resultan despreciables:  $\mathcal{O}\{\varepsilon^2\} \approx 0$ .

Se deducen las ecuaciones de la superficie libre del fluido, el potencial de velocidad y la ecuación de dispersión de ondas. Esta última de importantísimas consecuencias prácticas en ingeniería marítima. Se explican los conceptos fundamentales de profundidad relativa (aguas profundas, intermedias y someras) y de la celeridad de los grupos de olas, por ser éste uno de los aspectos fundamentales en los fenómenos de propagación de ondas; la energía del oleaje se transmite precisamente a la velocidad de grupo.

En el **capítulo 5** se introducen las hipótesis básicas y se deduce la forma fuerte de la MSE en el dominio de la frecuencia. Se explica en detalle cómo partiendo del modelo de onda de Airy, deducido con fondo de profundidad constante, puede obtenerse un modelo bidimensional de propagación de oleaje que tiene en cuenta la variación del fondo aplicando la hipótesis fundamental de Rayleigh o del fondo suave, en la cual se sustenta el modelo MSE. Todo ello, desacoplando la variable  $z$  de la ecuación diferencial de gobierno.

Se trata de una ecuación diferencial de tipo elíptico, lo que significa que para su resolución es necesario imponer condiciones de contorno en toda la frontera del dominio. Por ello, se introducen los distintos tipos de condiciones de contorno que es posible aplicar al problema: fundamentales (Dirichlet), naturales (Neumann) y mixtas (Robin), según sean contornos de tipo abierto o cerrados (bordes físicos del dominio) con cierto grado de reflexión.

En el **capítulo 6** se obtiene la solución numérica de la MSE 1-D mediante el método de los elementos finitos (MEF). Se presenta una explicación muy detallada de cómo se obtiene la forma débil de la ecuación de gobierno y de cómo se implementa el MEF para el caso unidimensional. Partiendo de la discretización del problema en nodos y elementos lineales, se explican las funciones de forma empleadas en la interpolación de la solución, el proceso numérico de ensamblaje de las matrices elementales de "rigidez y fuerzas" y cómo se implementan numéricamente las condiciones de contorno del problema.

Por sencillez en la exposición y por el carácter pedagógico del presente TFM, se ha empleado una discretización del dominio en elementos finitos lineales de dos nodos con funciones de forma lineales, aunque el proceso seguido es completamente general para aproximaciones polinómicas de mayor orden.

Finalmente se presentan varios problemas clásicos de propagación que pueden resolverse numéricamente con el modelo de MSE 1-D y los resultados obtenidos se comparan con las soluciones analíticas obtenidas de la bibliografía técnica especializada.

En el **capítulo 7** se obtiene la solución numérica de la MSE para el caso bidimensional 2-D mediante el método de los elementos finitos (MEF). Conceptualmente es idéntico al caso unidimensional 1-D del capítulo 6, pero aquí se da el salto a la solución bidimensional y se expone el proceso de implementación del MEF en 2-D, que obviamente es más complicado y laborioso que en el caso 1-D, pero totalmente análogo. El motivo de no atacar directamente el problema 2-D desde el principio es puramente pedagógico y didáctico. Una vez que el lector ha asentado los conocimientos básicos del problema 1-D puede dar el paso al problema 2-D de una forma más natural y segura.

Se explica en detalle el problema del ángulo de aproximación de los potenciales reflejados a los contornos del dominio, que es desconocido a priori, y se tratan diferentes técnicas para aproximar el valor de este ángulo, evitando soluciones espúrias contaminadas por potenciales reflejados por los contornos que se alejan de la solución real del problema.

El **capítulo 8** está dedicado al empleo e implementación numérica de la técnica de las “esponjas numéricas” en los contorno abiertos exteriores del dominio. En concreto, se trata la “Perfectly Matched Layer” (PML) desarrollada por Berenger [6] para problemas de electromagnetismo en la década de los 90.

A grandes rasgos se trata de un algoritmo numérico que absorbe y atenúa de forma exponencial las ondas reflejadas dentro del dominio a medida que la onda se propaga dentro del PML; por el contrario, esta capa es totalmente permeable a las ondas entrantes en el dominio desde el exterior.

Se realizan varios experimentos numéricos solo en el caso de propagación unidimensional 1-D en los que se aprecia su eficacia comparada con otras técnicas de aplicación de condiciones de contorno absorbentes en los contornos abiertos y con las soluciones analíticas del problema obtenidas de la bibliografía técnica.

Finalmente, en el **capítulo 9** se resumen las conclusiones más importantes del trabajo y se exponen varias posibles líneas de trabajo e investigación en el campo de la modelización numérica del oleaje para futuros TFM.

## 1.4. Punto de partida del TFM

En este TFM vamos a introducir un modelo numérico de elementos finitos sencillo que nos permitirá modelizar los fenómenos típicos de propagación del oleaje (shoaling, refracción, difracción y reflexión) en áreas costeras y portuarias con batimetría del fondo marino irregular pero “suave y sin variaciones bruscas” (no olvidar esto último). Para ello emplearemos la conocida ecuación de la pendiente suave o “**Mild-Slope Equation**”, desarrollada en la década de los 70 por J.C.W. Berkhoff [1] en su conocida tesis doctoral en la Universidad de Delft (Holanda).

Como su propio nombre indica, se trata de un modelo aproximado que da resultados precisos cuando la batimetría del fondo marino es suave y poco inclinada. A esta hipótesis se la conoce como **hipótesis de pendiente suave o de Rayleigh**. Según esta hipótesis, cuando la pendiente del fondo marino es suave pueden despreciarse los fenómenos de reflexión del oleaje producidos por la propia pendiente del fondo. Además, se supone que la onda durante su propagación se adapta de forma instantánea a la profundidad en cada punto, de forma que sus características cinemáticas y dinámicas son idénticas a las de una onda que se propaga sobre un fondo horizontal con dicha profundidad (onda lineal o de Airy).

Desde la década de los 70 la Mild-Slope Equation (MSE) se ha empleado con mucha difusión en todo el mundo como modelo matemático de propagación de oleaje en zonas costeras y dársenas portuarias, simulando con suficiente precisión ingenieril los fenómenos de propagación de ondas para su uso en el diseño de obras marítimas.

A continuación se muestra el aspecto de la ecuación MSE, con la única intención de que se convierta, de aquí en adelante, en algo cotidiano que no se teme de una forma irracional (actitud típica de cualquier ser humano normal cuando ve por primera vez una ecuación en derivadas parciales). En próximos capítulos de este trabajo se profundizará en cómo se obtuvo esta ecuación.

$$\nabla \cdot (cc_g \nabla \phi) + k^2 cc_g \phi = 0 \quad (1-1)$$

Esta es la ecuación diferencial en derivadas parciales o **formulación fuerte** de la Mild-Slope Equation (MSE), siendo los términos que aparecen en la ecuación:

- $c$  es la celeridad de fase de la onda.
- $c_g$  es la celeridad de grupo.

- $k$  es el número de onda.
- $\phi = \phi(x, y)$  es el potencial escalar reducido de velocidades del fluido.
- $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$  es el conocido operador vectorial Nabla en el plano 2D. Cuando  $\nabla$  actúa sobre una función escalar da como resultado un vector que llamamos **gradiente**, y cuando actúa sobre un vector da lugar a un escalar (producto escalar) y lo llamamos **divergencia**. Hablaremos de esto más adelante.

Esta ecuación modeliza los fenómenos de propagación de una **onda lineal o de Airy monocromática** (una única frecuencia o periodo) con fondo irregular pero suave. En este TFM se modelizará la MSE en su **formulación frecuencial**, no temporal; significa esto que la solución obtenida es estacionaria, no estamos interesados en soluciones transitorias de la solución (dependientes del tiempo).

## 2 INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA DE PROPAGACIÓN DEL OLAJE

---

*La ciencia no es solo una disciplina de razón, sino también de romance y pasión.*

- Stephen Hawking -

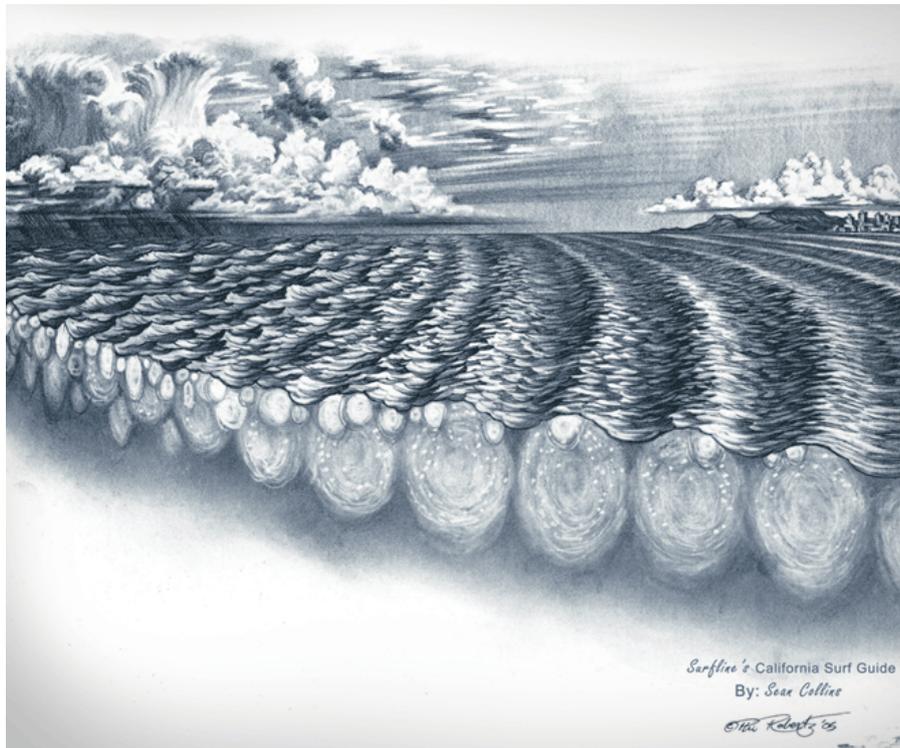


Figura 2-1. El fenómeno de propagación del oleaje.

Como estudiante de ingeniería a principios de los años 90 y posteriormente como ingeniero de Caminos, Canales y Puertos senior consultor, siempre me he sentido fascinado y atraído por el mar y las realizaciones humanas en el medio Marino. La simple idea de lidiar con un medio tan salvaje y cotidiano, en el que los ingenieros civiles construimos obras portuarias de defensa y abrigo ante el azote continuo de olas de más de 10 m de altura y periodos superiores a los 20 segundos en los temporales del Mar Cantábrico, me sigue produciendo un escalofrío.

Yo fui estudiante de Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos en la Universidad Politécnica de Madrid durante los años 90. Aunque ya en aquella época disponíamos de ordenadores (pocos) y los alumnos comenzábamos a realizar prácticas de laboratorio con programas de elementos finitos (Ansys, SAP90) y a programar con lenguajes como FORTRAN, no podemos considerarnos, en absoluto, "nativos digitales". De hecho, las generaciones de ingenieros de aquella época y anteriores hemos tenido que hacer un considerable esfuerzo de adaptación a un mundo nuevo, donde no se concibe el trabajo cotidiano de un técnico sin el empleo masivo de herramientas informáticas y modelos matemáticos, sin duda muy potentes y eficaces.

Nada mejor que un ejemplo cotidiano; cualquier niño de tres o cuatro años de hoy en día es capaz de manejar

con soltura el smartphone de sus padres sin necesidad de enseñarle. Sin embargo, el pobre abuelito (nacido en la posguerra) sólo es capaz de usarlo, a duras penas, como terminal de teléfono, no sin antes haber tenido que pelearse hasta la desesperación con el endemoniado aparato y la agenda de contactos.

## El Podio de las olas españolas



Figura 2-2. El podio de las olas del Mar Cantábrico. Datos de boyas de Puertos del Estado.

Los “números gordos” con los que se manejaban los ingenieros viejos (y no tan viejos) y que han dado lugar al proyecto y diseño de los grandes puertos españoles de hoy, han dado paso a una oleada de modelos matemáticos muy sofisticados y precisos que nos permiten afinar el diseño y seguridad de las obras marítimas. El problema clave aflora cuando el usuario de dichos programas “friendly” no tiene inculcado a sangre y fuego el sentido físico de los fenómenos costeros de propagación del oleaje que pretende simular. Además, se cree como dogma de fe los resultados de un espectacular mapa de colores, obtenido mediante un potente software comercial de elementos finitos.

Indudablemente, el conocimiento y empleo de métodos numéricos, como el método de los elementos finitos, es esencial para el desempeño profesional del ingeniero del siglo XXI, pero su empleo sin sentido crítico y sin una intuición, aun grosera, del resultado final esperado, puede convertirlo en un arma perversa, sobre todo para ingenieros jóvenes recién titulados, con altas capacidades y conocimientos de programación de algoritmos numéricos pero sin experiencia en diseño y construcción de obras civiles de enorme responsabilidad social y económica, como es el caso concreto de las obras marítimas.

### 2.1. Un poco de historia y “números gordos”

No ha pasado tanto tiempo desde que los ingenieros portuarios, como el gran D. Ramón Iribarren (antes de la década de los 60), no tenían más remedio que resolver problemas ingenieriles complejos con mucho ingenio, intuición y “números gordos”. Una muestra de ello son sus maravillosos planos de oleaje que permiten obtener los coeficientes de propagación y la deformación de los frentes de onda con batimetrías irregulares, empleando para ello un método gráfico que merece la calificación de obra de arte y legado de la ingeniería civil española.

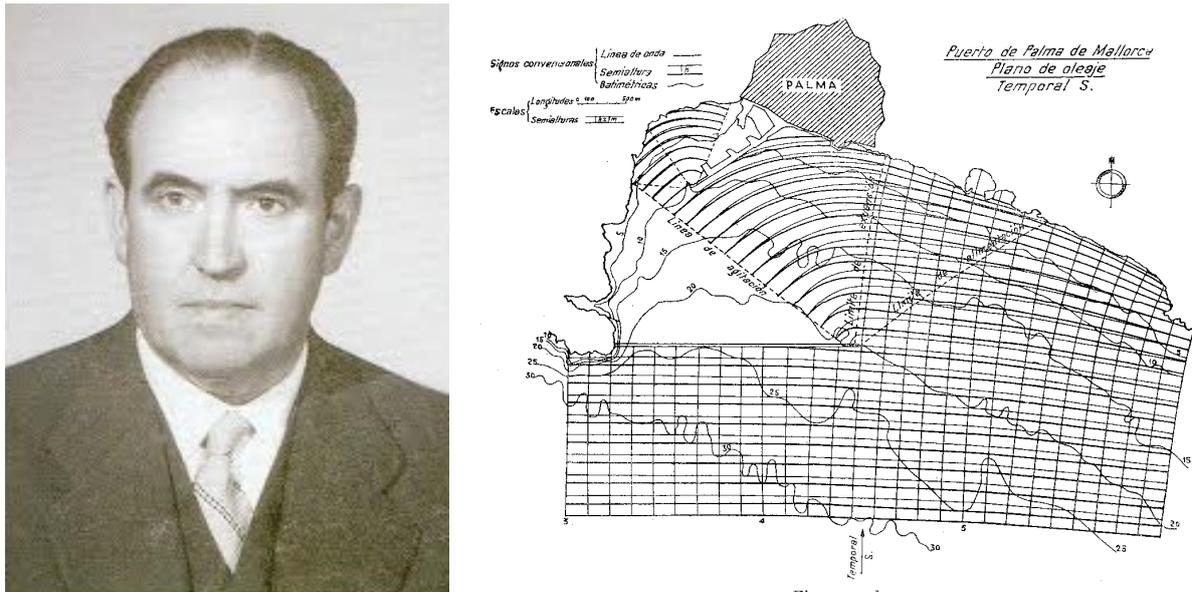


Figura 2-3. D. Ramón Iribarren Cabanilles. Irún, Guipuzcoa (1900 – 1967). Planos de Oleaje.

En alguna charla con colegas y profesores que imparten la asignatura de obras marítimas en otras universidades españolas, he recibido comentarios y opiniones muy dispares acerca de incluir o no esta materia en los temarios de la asignatura.

Algunos tachan el método de los planos de oleaje de R. Iribarren como una materia obsoleta y fuera de lugar en nuestros días, y no puedo estar en más desacuerdo; en los cinco años de experiencia docente en la E.T.S.I. de la Universidad de Sevilla impartiendo la asignatura de Obras Marítimas, no he encontrado un método más claro e intuitivo para que el alumno comprenda por qué los frentes de onda sufren deformaciones durante su propagación hacia la costa.

Otra cosa distinta es que este método deba seguir o no siendo usado en proyectos profesionales hoy en día. No obstante, nada más hay que mirar atrás un poco y recordar que aun hoy seguimos utilizando modelos simplificados de batimetría recta y paralela para obtener los coeficientes de propagación (refracción y shoaling) de oleajes desde aguas profundas hasta nuestras obras de abrigo y defensa portuaria. Con esta simple aproximación se obtienen resultados suficientemente afinados para encajes y diseños preliminares o anteproyectos; y algo muy importante, **nos permiten calibrar los resultados de modelos numéricos.**

Como ejemplo práctico, se muestra a continuación el ábaco del USACE "Shore Protection Manual" de 1984 [7] para la obtención de los coeficientes de refracción y shoaling  $K_R \cdot K_S$  en caso de propagación de oleajes en fondos de batimetría recta y paralela. Este ábaco ha sido usado extensivamente por ingenieros civiles de todo el mundo para diseño de grandes puertos en épocas pasadas. Incluso hoy en día, resulta ser una excelente herramienta para su empleo en encajes preliminares y anteproyectos. Conocido el periodo de la onda y el ángulo de los frentes de oleaje respecto de la batimetría (recta y paralela) en aguas profundas, el ábaco permite obtener en coeficientes de propagación  $K_R \cdot K_S$  y el ángulo respecto a las batimétricas a cualquier profundidad.

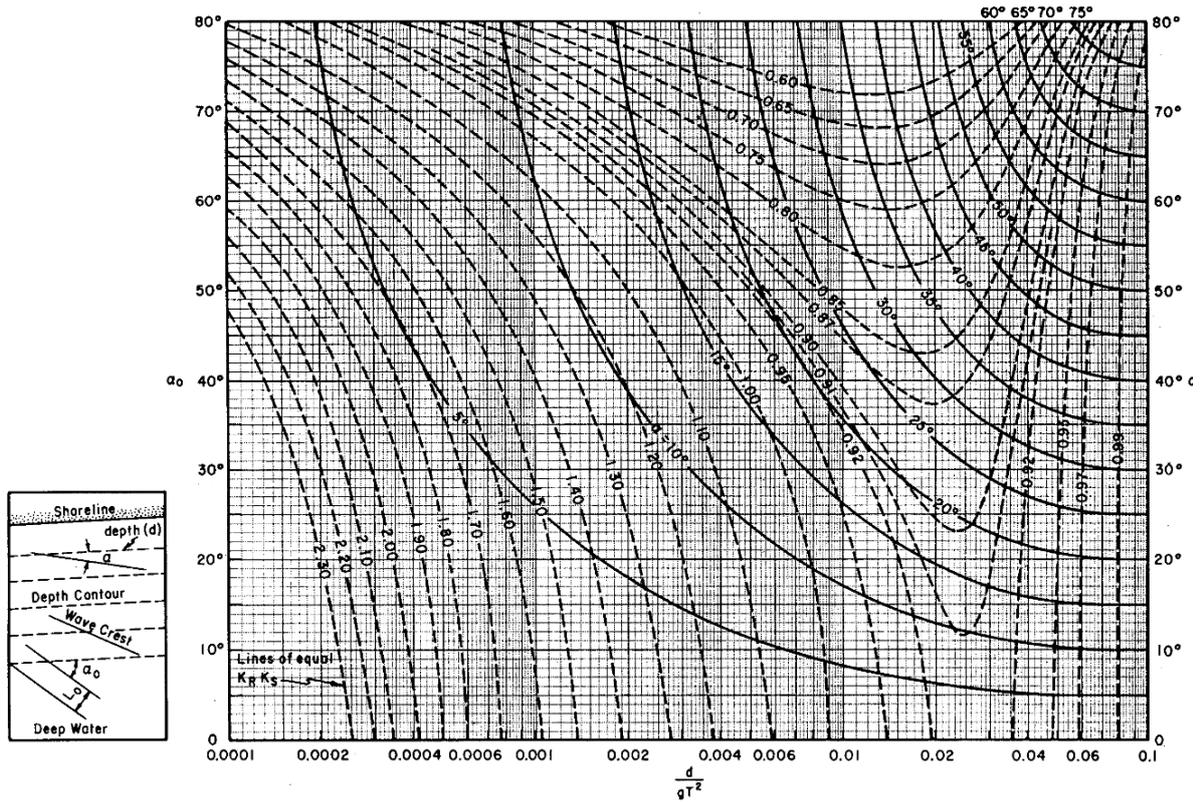


Plate C-6. Change in Wave Direction and Height Due to Refraction on Slopes with Straight, Parallel Depth Contours Including Shallowing

Figura 2-4. Ábaco de coeficiente de propagación  $K_R \cdot K_S$  del Shore Protection Manual (SPM) del U.S. Army Corps of Engineers (1984) para el caso de batimetría recta y paralela

Tampoco podemos olvidarnos de los modelos de difracción con fondo plano y dique semi-infinito, como los ábacos de Weigel, que aparecen también en el "Shore Protection Manual", y otros modelos de difracción en bocanas portuarias recogidos en el imprescindible libro "Random Seas and design of Maritime Structures" de Y. Goda [8].

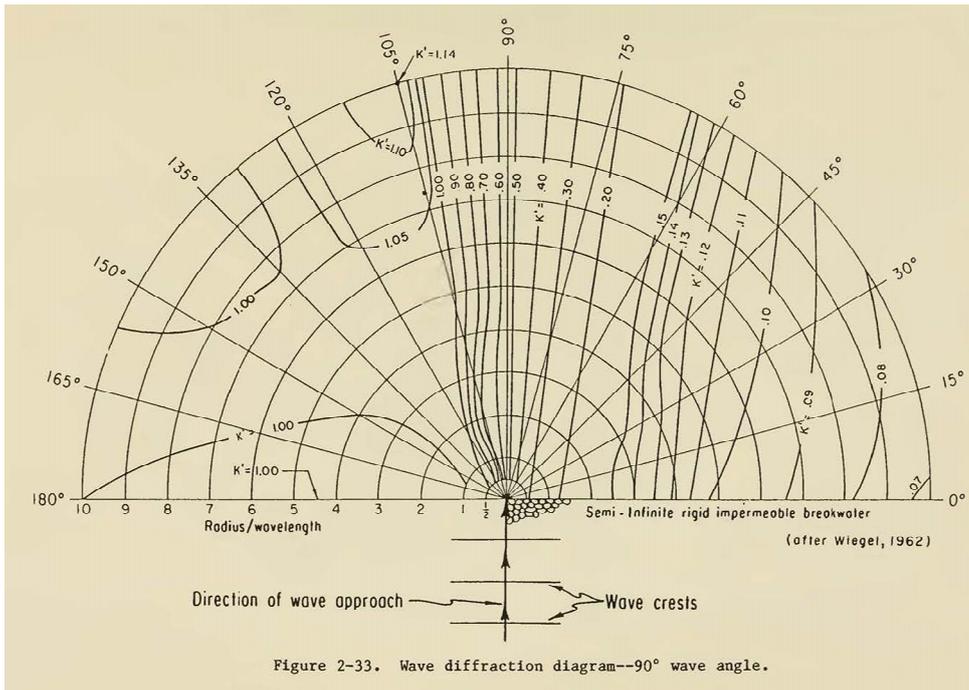


Figure 2-33. Wave diffraction diagram--90° wave angle.

Figura 2-5. Ábaco de difracción de Weigel del SPM.

Observe el lector que estos ábacos dan los coeficientes de difracción en **dársenas portuarias con fondo plano**, pues en este caso puede obtenerse una solución analítica del problema. Aunque pueda parecer una aproximación grosera, debe tenerse en cuenta que normalmente las dársenas portuarias presentan cotas de calado constante por dragado, precisamente para asegurar la navegación y maniobra interior del buque de diseño dentro del área de abrigo del puerto. Por tanto, su empleo suele ser una excelente aproximación al problema de la difracción en dársenas portuarias.

Estas herramientas de cálculo pueden resultar para algunos como antiguallas obsoletas, pero en realidad reflejan el conocimiento y el ingenio de un puñado de portentos de una época en la que el ingeniero civil no disponía de un PC para realizar cálculos con Matlab®. No debe olvidar el lector que los grandes puertos españoles de hoy fueron diseñados con estas herramientas y ahí siguen... **Su valor técnico, científico y pedagógico es innegable.**

Por poner un ejemplo, con este ábaco de Weigel el alumno ve claramente una de las consecuencias del fenómeno de la difracción de la onda en fondo plano, y es que el coeficiente de difracción  $K_D$  en la línea que pasa por el morro del dique en la dirección de avance del frente de ondas vale  $K_D = 0.50$ , lo cual no es algo evidente a priori.

El motivo por el que se comentan aquí estos resultados y herramienta del pasado es porque conociéndolas el ingeniero civil dispone de una excelente herramienta para contrastar y calibrar los resultados que arroje un modelo matemático de elementos finitos; en definitiva, nos sirven para saber si lo que hemos obtenido del modelo no es resultado erróneo o fuera de rango.

En la literatura científica se emplean a veces multitud de modelos teóricos de los cuales se dispone de una solución analítica que permiten calibrar los resultados y precisión de los modelos numéricos. En mi humilde opinión, son tremendamente artificiosos y alejados de física de los fenómenos de propagación de oleajes o del diseño de una obra portuaria. Se expone, por ejemplo, el caso del "*circular parabolic Shoal*" empleado por Vastano and Reid (1967) para verificar su modelo numérico de propagación con diferencias finitas, dado que para este modelo de isla disponemos de solución analítica del problema.

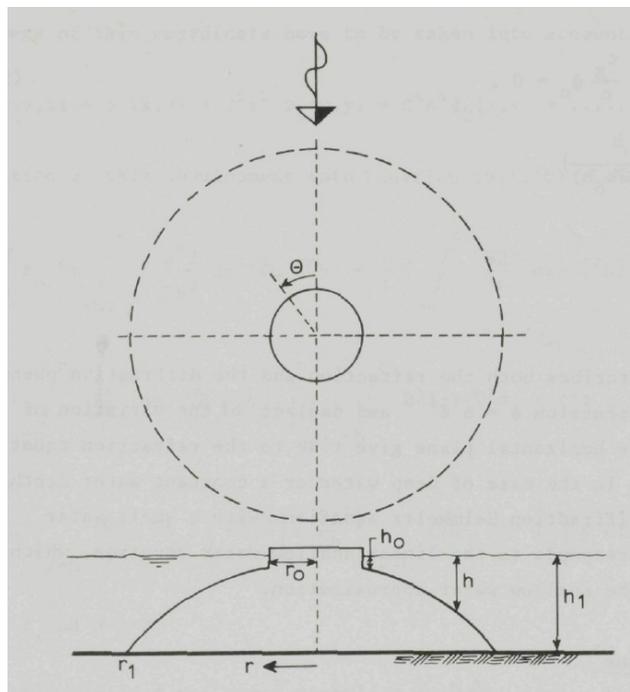


Figura 2-6. Modelo de Isla "circular parabolic shoal" sobre fondo plano.

Como conclusión final a este apartado de introducción histórica, los modelos y "números gordos" anteriores no dejan de ser una buena aproximación ingenieril al problema de propagación del oleaje, pero evidentemente pueden obtenerse resultados más precisos y seguros empleando con criterio y mucho sentido común los modelos matemáticos cuando la batimetría del fondo marino no sea ni recta ni paralela.

Además, estos “números gordos” del pasado nos permiten conocer con suficiente aproximación ingenieril los estados límites de operatividad por agitación en el interior de dársenas portuarias de geometría irregular en planta y fondo variable, así como las frecuencias propias de oscilación de dichas dársenas ante la entrada de ondas largas, que dan lugar a los espectaculares fenómenos de resonancia, como las conocidas “rissages” del puerto de Ciudadela en la Isla de Menorca.



Figura 2-7. Fenómenos de resonancia en dársenas portuarias. Caso del Puerto de Ciudadela (Menorca).

## 2.2. Un repaso rápido a los fenómenos de propagación del oleaje

A continuación se presenta un gráfico obtenido de la bibliografía clásica [9] donde, en opinión del autor, mejor se resumen y sintetizan los principales fenómenos que sufren los trenes de onda en su aproximación a la costa y ante la presencia de obstáculos naturales o artificiales.

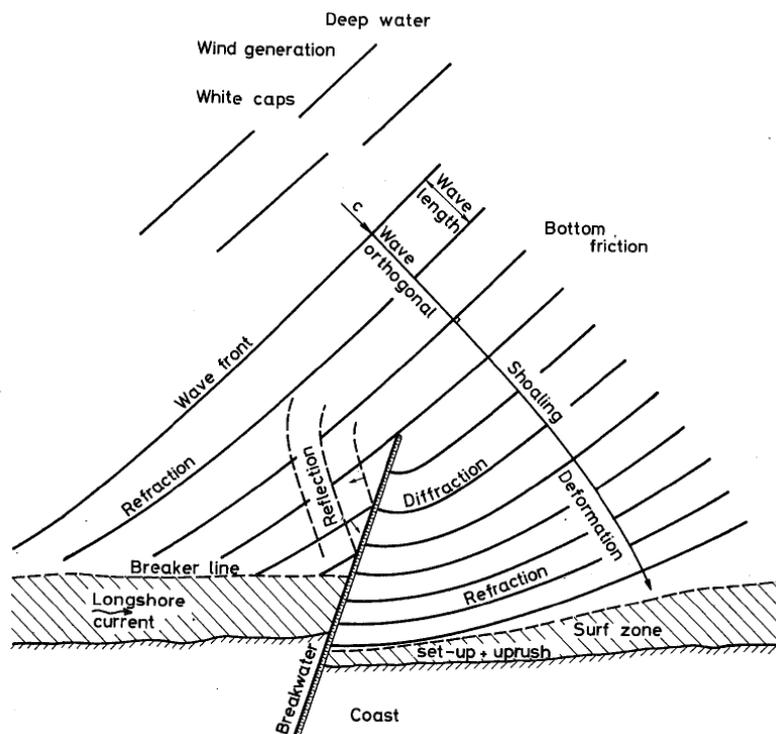


Figura 2-8. Fenómenos de propagación del oleaje. Figura extraída de [9]

La ecuación de la pendiente suave o “Mild-Slope Equation” (MSE) es capaz de simular los fenómenos de propagación de los trenes de onda cuando avanzan hacia la costa desde la zona de generación (fetch):

- Asomeramiento o “shoaling”.
- Refracción.
- Difracción.
- Reflexión.

Como es bien sabido, los dos primeros fenómenos (shoaling y refracción) dependen de la profundidad de fondo marino (batimetría) y muestran el conocido fenómeno físico por el cual la onda al propagarse “siente” la presencia del fondo. La difracción y la reflexión, en cambio, son fenómenos que no dependen de la profundidad y sólo aparecen ante la presencia de un obstáculo que se interpone al propagarse la ola.



Figura 2-9. Oleaje swell aproximándose a la costa.

### 2.2.1. Asomeramiento o shoaling

Una de las conclusiones de la teoría lineal de ondas, de importantísimas consecuencias prácticas en ingeniería marítima, es que **el periodo de la onda se mantiene constante durante su propagación** desde aguas profundas hasta aguas someras.

No obstante, a medida que la onda se aproxima a la costa y disminuye la profundidad, los efectos de rozamiento con el fondo se hacen más y más evidentes, causando que la onda disminuya de celeridad pero conservando el

periodo constante. Si lo miramos desde un punto de vista energético, la disminución de celeridad de la onda (energía cinética) se debe compensar con un aumento de altura de la onda (energía potencial). Esta explicación del fenómeno del asomeramiento o shoaling no es muy ortodoxa ni rigurosa, pero en cambio sí resulta muy intuitiva.

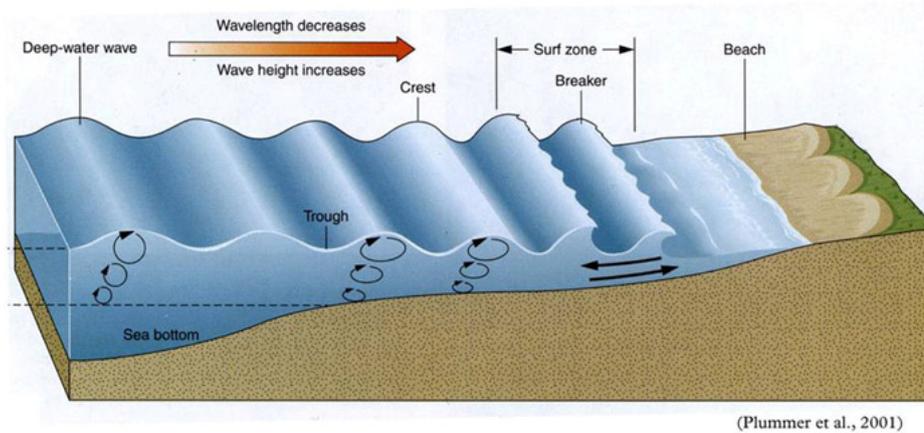


Figura 2-10. Fenómeno de shoaling. Plumer et al. (2001).

En resumen, el shoaling es el fenómeno físico por el cual la onda al propagarse a aguas más someras disminuye su celeridad, aumentando su altura y disminuyendo su longitud de onda. Este fenómeno es precisamente el causante del inmenso poder destructivo de los **tsunamis** (ondas largas de cientos de kilómetros de longitud y reducida amplitud o altura en alta mar).

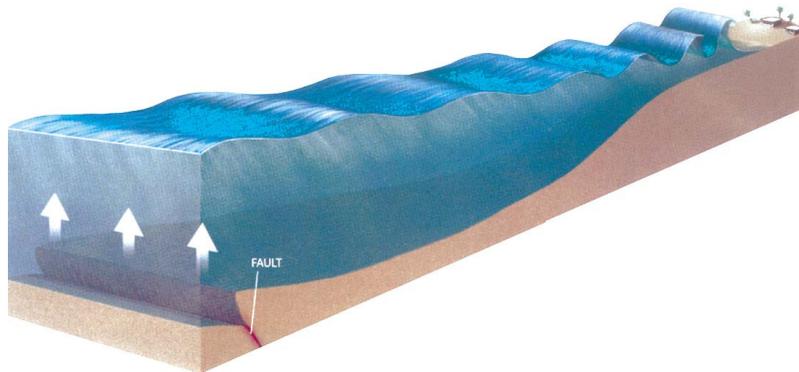


Figura 2-11. Los tsunamis son una muestra del fenómeno de shoaling llevado al extremo, con consecuencias catastróficas, como el terrible Tsumami de Japón en 2011.

El proceso de shoaling produce un **peraltamiento de la ola** que se hace inestable y finalmente rompe; por eso se dice que el shoaling es un preámbulo de la rotura de la ola.



Figura 2-12. El proceso de aperaltamiento de la ola al llegar a la costa es el preámbulo de su rotura.

### 2.2.2. Refracción

Cuando los frentes de oleaje se propagan sobre fondos de profundidad variable, dos puntos distintos de un mismo frente de onda “sienten” profundidades diferentes y, por tanto, la onda se propaga con distinta celeridad en puntos distintos de un mismo frente de onda.

Si nos centramos en el caso habitual de una costa recta con batimetría aproximadamente recta y paralela a la línea de costa, a la cual llega un frente de onda que forma un ángulo  $\theta$  con las líneas batimétricas, el efecto de la refracción ocasiona que los frentes de onda se incurven intentando ponerse paralelos a la línea de costa, aunque no lo consiguen del todo (ver foto adjunta).

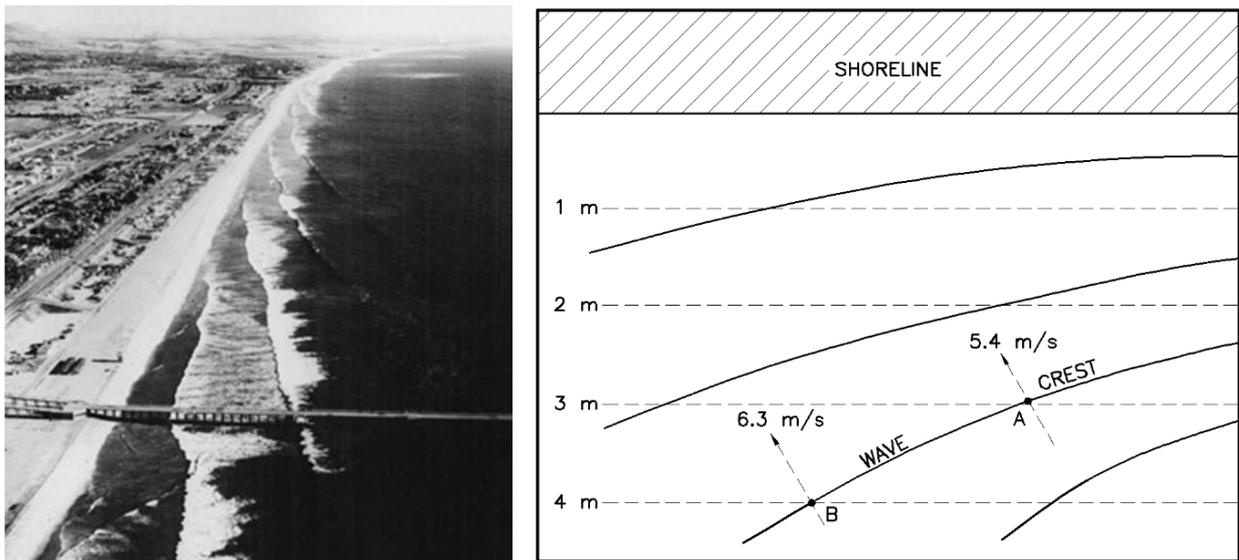


Figura 2-13. Fenómeno de refracción.

Es precisamente este fenómeno el que asegura que las playas de arena existan y que no sean literalmente barridas por los oleajes incidentes a la costa.

Pero no sólo el efecto de la refracción es la incurvación de los frentes de onda. La conservación del flujo de

energía entre dos rayos de avance del frente de onda (tubo de energía) ocasiona también una variación de la altura de ola durante la propagación, que se manifiesta como un crecimiento de la altura de ola en zonas costeras de cabos (concentración de líneas de energía) y una disminución en bahías (expansión de líneas de energía).

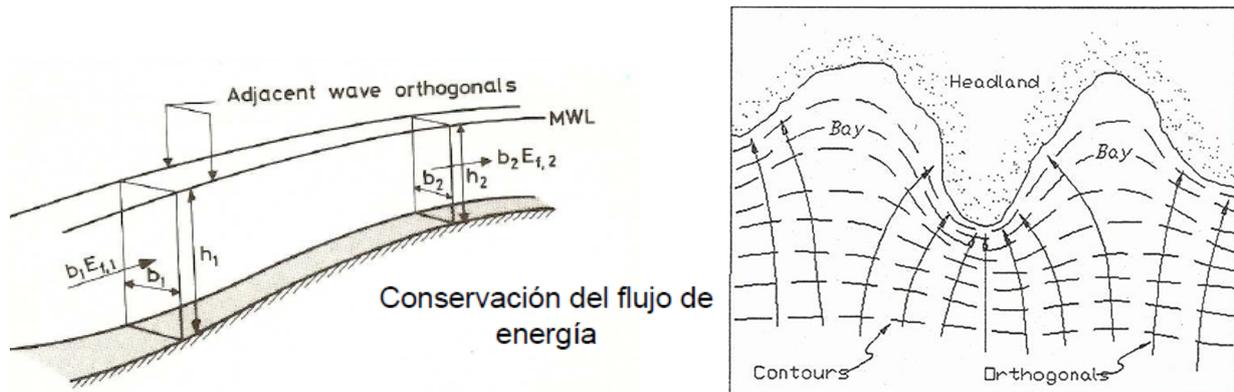


Figura 2-14. Hipótesis de conservación del flujo de energía durante la propagación.

Por último, decir que tanto en el fenómeno de la refracción como en el shoaling, la energía del oleaje se transmite frontalmente; es decir, no hay flujo de energía a través del contorno lateral del tubo de energía que aparece en la anterior figura. Se hace aquí esta puntualización, pues en el próximo epígrafe veremos el fenómeno de la difracción, donde sí se produce una cesión o flujo lateral de energía cuando el frente de onda se encuentra con un obstáculo natural o artificial (dique).

### 2.2.3. Difracción

El fenómeno de difracción se caracteriza por una cesión o flujo lateral de energía cuando el frente de onda se encuentra con un obstáculo natural o artificial (dique). De esta forma, el frente de onda penetra en la parte situada a resguardo del obstáculo como se observa en la siguiente fotografía.



Figura 2-15. Fenómeno de difracción. Una imagen vale más que mil palabras (Por cortesía de Vicente Negro).

El fenómeno de la difracción tiene diferentes consecuencias en ingeniería marítima. Para el ingeniero de puertos es un fenómeno fundamental para conseguir las **condiciones de abrigo y operatividad** dentro de las dársenas

portuarias. Para el ingeniero de costas, en cambio, el fenómeno de difracción tiene consecuencias drásticas en la **forma en planta de las playas** a resguardo de obstáculos naturales o artificiales, siendo causa, por ejemplo, de la formación de tómbolos (ver figuras adjuntas).

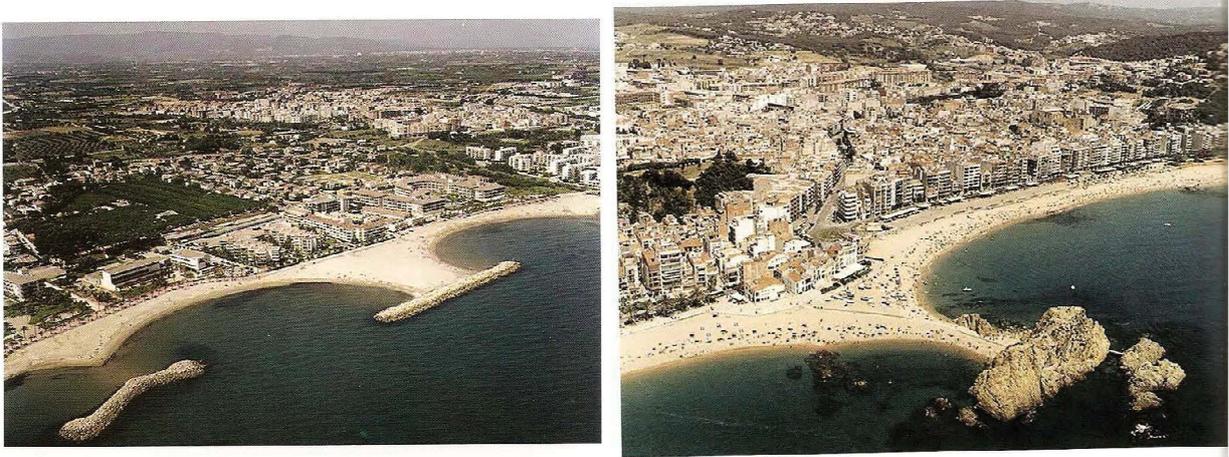


Figura 2-16. Formaciones costeras (tómbolos) debidas a la difracción.

Cuando el frente de onda se encuentra con un obstáculo y se difracta, la onda penetra en la zona de resguardo pero desciende drásticamente su altura. En la siguiente figura se explica de una forma muy intuitiva qué le ocurre a una onda cuando se difracta al paso de un orificio; se hace un símil con la propagación de la luz y el principio de Huygens, según el cual cada punto de un frente de onda es a su vez un foco de emisión de ondas.

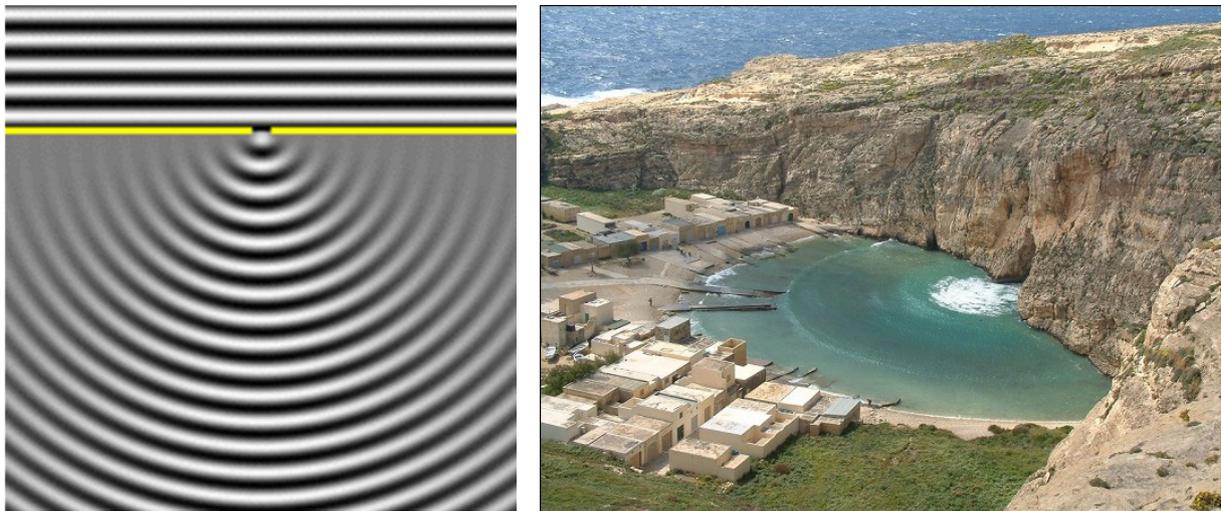


Figura 2-17. Principio de Huygens para la luz y su analogía al caso del oleaje.

Obsérvese en la siguiente figura como la presencia del obstáculo, por ejemplo un dique de defensa portuario, es el responsable de que desaparezca la emisión de un rayo desde uno de los puntos P de la figura, causando de este modo que la altura de onda en la línea M-M' sea la mitad de la onda incidente. Esta explicación física tan elegante la explicaba el Profesor Baker a sus alumnos (Referencia personal del Dr. Gregorio Gómez Pina) en sus clases de Master in Ocean Engineering en Hawaii (USA). Resulta tan sencilla, elegante, evidente y pedagógica, que en opinión del autor es un referente imprescindible en la docencia de las clases introductorias de los fenómenos de propagación de oleaje para los alumnos de grado.

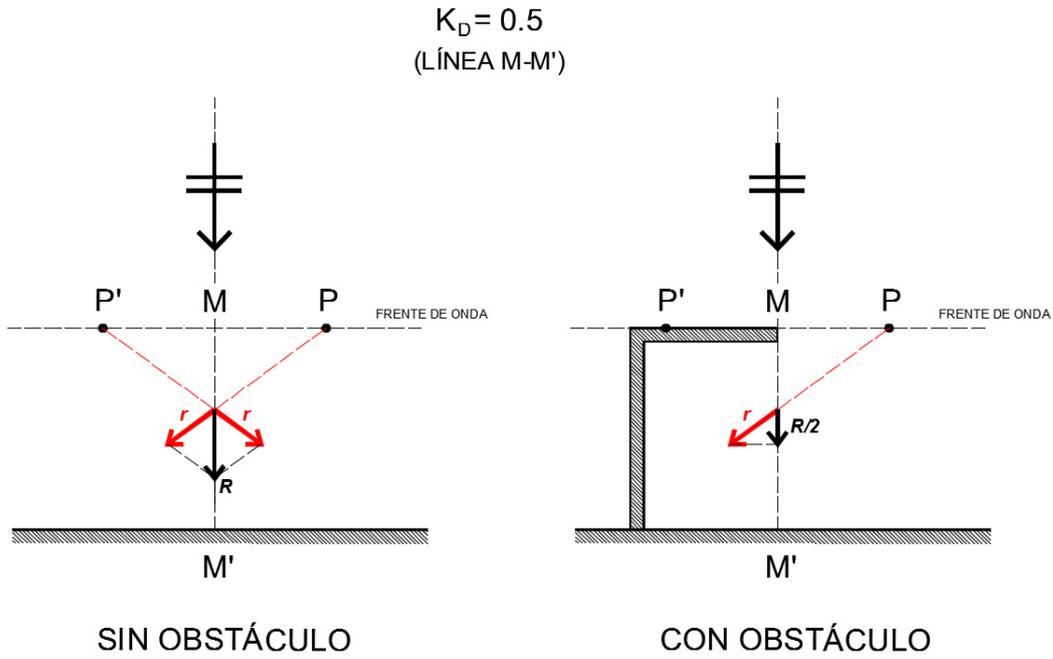


Figura 2-18. Explicación intuitiva del Profesor Baker del fenómeno de difracción del oleaje.

Como consecuencia del fenómeno de la difracción se producen zonas de abrigo portuario que dependerán evidentemente de la dirección de aproximación de los frentes de onda dominantes de la zona de ubicación de un puerto y que condicionan cuál debe ser la orientación óptima de la bocana de acceso a la dársena portuaria desde un punto de vista de la agitación y operatividad del atraque de buques.

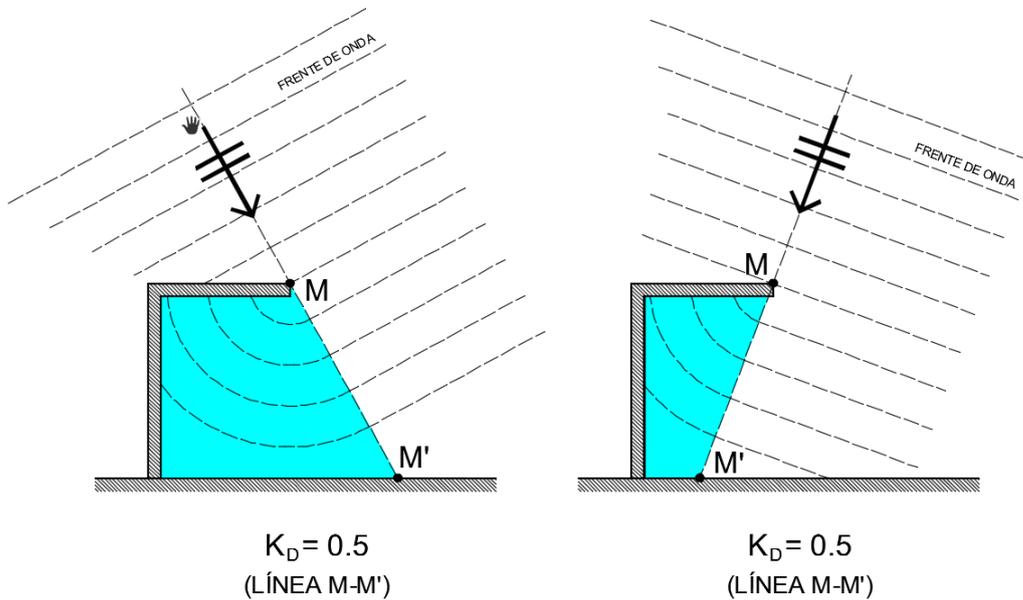


Figura 2-19. Efecto de abrigo portuario producido por la difracción del oleaje.

### 2.2.4. Reflexión

Cuando una onda incide sobre un obstáculo con un ángulo “i”, éste devuelve la onda (reflejada) con un ángulo “r” igual y simétrico según la normal al obstáculo (ver la siguiente figura).

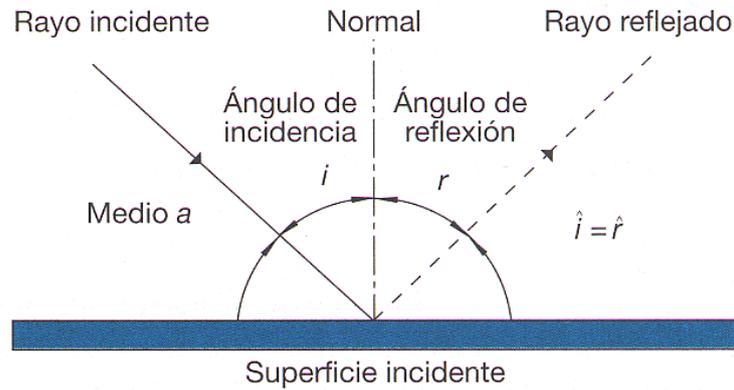


Figura 2-20. Fenómeno de reflexión del oleaje.

En la siguiente foto puede visualizarse el fenómeno de la reflexión de un oleaje en un dique vertical; obsérvese que las olas incidentes y reflejadas en la superficie agitada frente al dique forman una especie de cuadrícula producida por la interacción o superposición de la onda incidente y la reflejada.

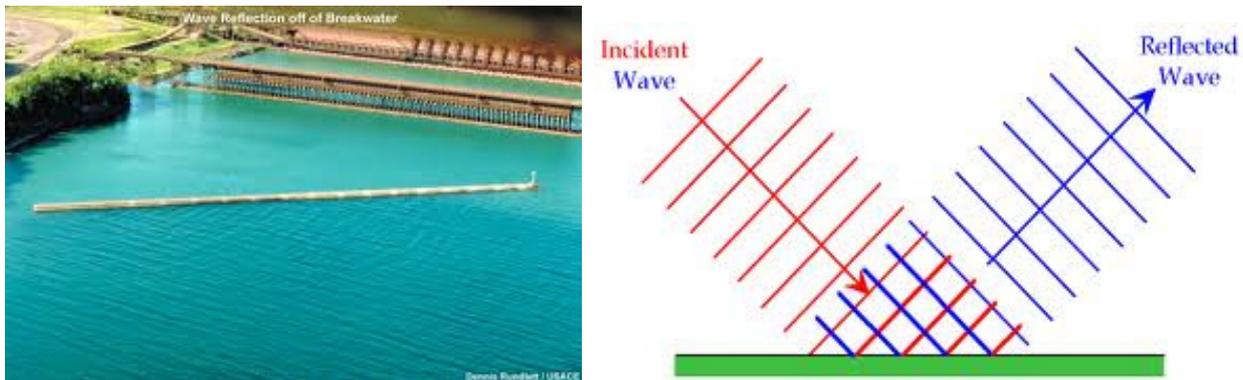


Figura 2-21. Reflexión del oleaje en diques verticales

Pero claro, los obstáculos no son completamente reflejantes; imagine el lector la diferencia entre un oleaje llegando a una playa de arena fina o a una pared lisa vertical (dique). Es evidente, desde un punto de vista cualitativo, que la playa es “**poco reflejante**” mientras que la pared es “**muy reflejante**”.

Los conceptos mucho-poco resultan aquí ambiguos. Necesitamos saber cuál es la altura de ola reflejada ( $H_r$ ) conocida la altura incidente ( $H_i$ ). Para ello, empleamos el coeficiente de reflexión  $K_R$  que nos indica la fracción de altura que es capaz de reflejar un determinado obstáculo:

$$H_r = K_R \cdot H_i$$

El cálculo del coeficiente de reflexión, que emplearemos en próximos capítulos para la imposición de las condiciones de contorno de nuestros modelos de elementos finitos, no es sencillo ni trivial. Diferentes autores e investigadores recomiendan valores para diseño. No obstante, vamos a dar aquí órdenes de magnitud que nos sirvan para hacer “números gordos”. De menor a mayor coeficiente de reflexión nos encontramos:

- **Las playas:** suelen ser muy poco reflejantes, por lo que los valores de  $K_R$  son próximos o iguales a cero.

$$K_R \approx 0 - 0,05$$



- **Los diques rompeolas:** son poco reflejantes con valores habituales medios de  $K_R$  de 0,30-0,50.

$$K_R \approx 0,30 - 0,50$$



- **Los diques verticales:** son muy reflejantes con valores de  $K_R$  próximos a la unidad.

$$K_R \approx 0,90$$



A pesar de que los diques verticales suelen ser estructuras muy reflejantes, se han hecho avances y estudios en modelos reducidos para reducir considerablemente su coeficiente de reflexión; esto se consigue con la disposición de cámaras disipadoras de energía ventiladas que reducen  $K_R$  hasta valores de 0,50 a 0,70. En la siguiente figura se muestra un un ejemplo.

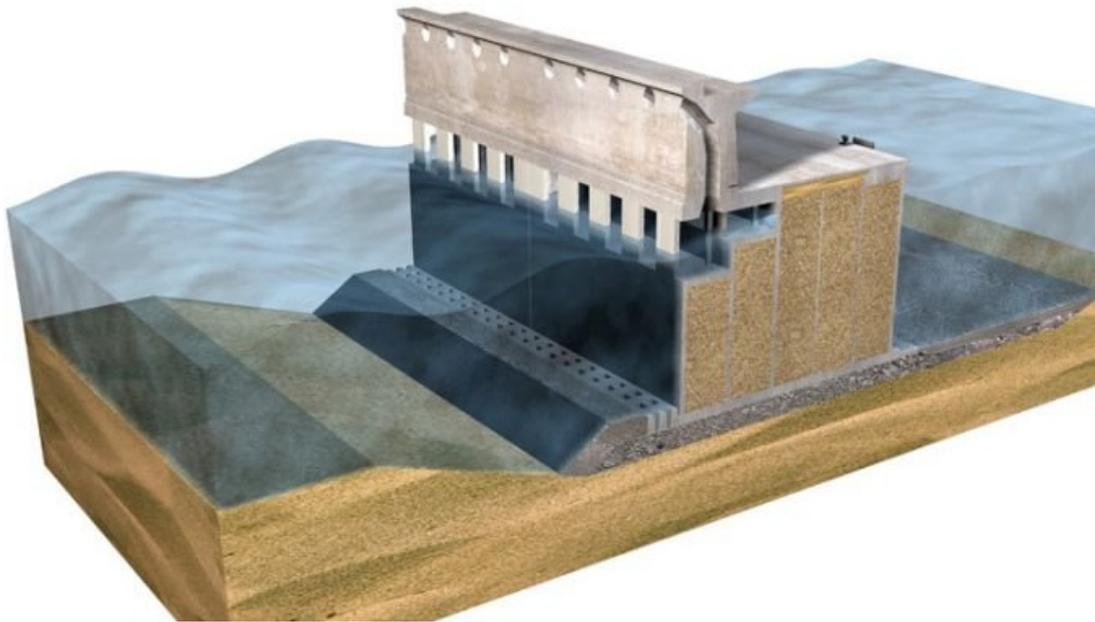


Figura 2-22. Diseño de dique vertical no reflejante de última generación.

El fenómeno de la reflexión del oleaje es el causante de más de un dolor de cabeza para los ingenieros que diseñamos obras portuarias; en más de una ocasión ha sido la responsable de la llegada de ondas indeseables a zonas inicialmente muy protegidas de los oleajes dominantes y que han requerido de refuerzos y obras de abrigo complementarias, con las consecuencias y altos costes económicos que ello conlleva.

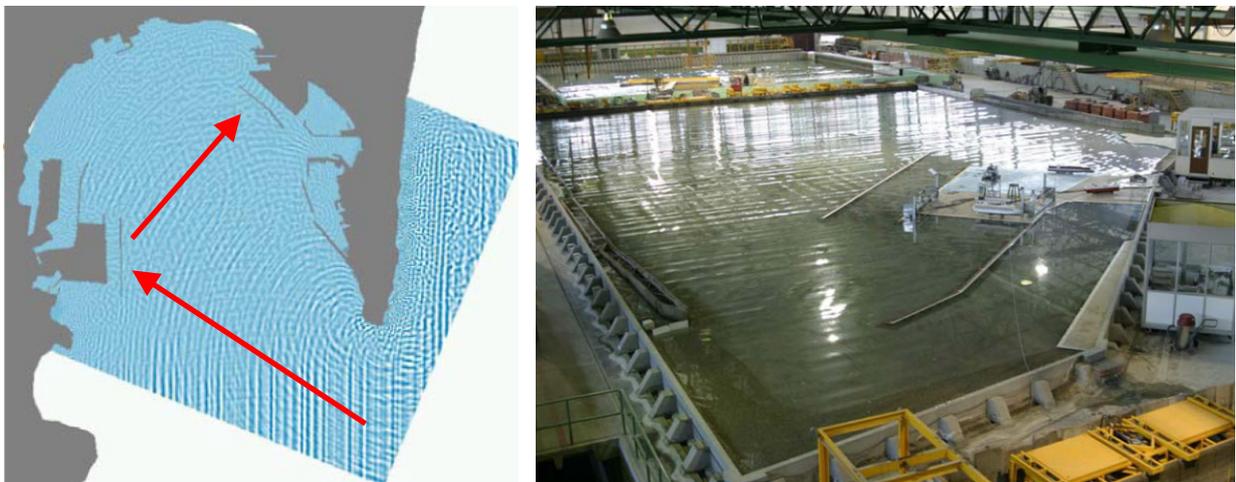


Figura 2-23. Ejemplo de fenómenos de reflexión en la Bahía de Algeciras. A la derecha se observa el modelo físico del CEDEX donde se aprecia el fenómeno de reflexión del nuevo dique vertical.

Como ejemplo de un caso real con consecuencias no deseadas del fenómeno de la reflexión, se expone aquí el caso del Puerto de Algeciras; la reciente construcción de un nuevo dique vertical de atraque (Isla Verde) ha ocasionado que los oleajes dominantes de levante sean reflejados por dicha estructura y enviados a una zona resguardada de la Bahía de Algeciras, como es el puerto deportivo de La Alcáidesa, que ha desmejorado las excelentes condiciones de baja agitación y operatividad que tenía en el pasado, antes de la construcción de las nuevas terminales de Isla Verde.



Figura 2-24. Puerto de la Alcáides en la Bahía de Algeciras (Cádiz).

### 2.3. Ejemplo de cálculo.

Como conclusión de este tema introductorio sobre los fenómenos de propagación de oleaje, vamos a resolver un problema portuario clásico. Para ello, realizaremos un sencillo cálculo manual que nos permita visualizar como se empleaban las herramientas de diseño y números gordos en el diseño portuario de otras épocas. La realización de estos cálculos preliminares por los ingenieros que emplean modelos numéricos avanzados es fundamental, pues en estos números sencillos se esconde la física del problema y se obtienen resultados suficientemente afinados para encajes previos y calibración de modelos.

---

#### Ejemplo 2-1.

*Se va a diseñar un puerto en la costa Atlántica de Andalucía (Golfo de Cádiz). La alineación de la costa se supone recta con dirección Este-Oeste y la batimetría recta y paralela a la costa (ver esquema de planta adjunto).*

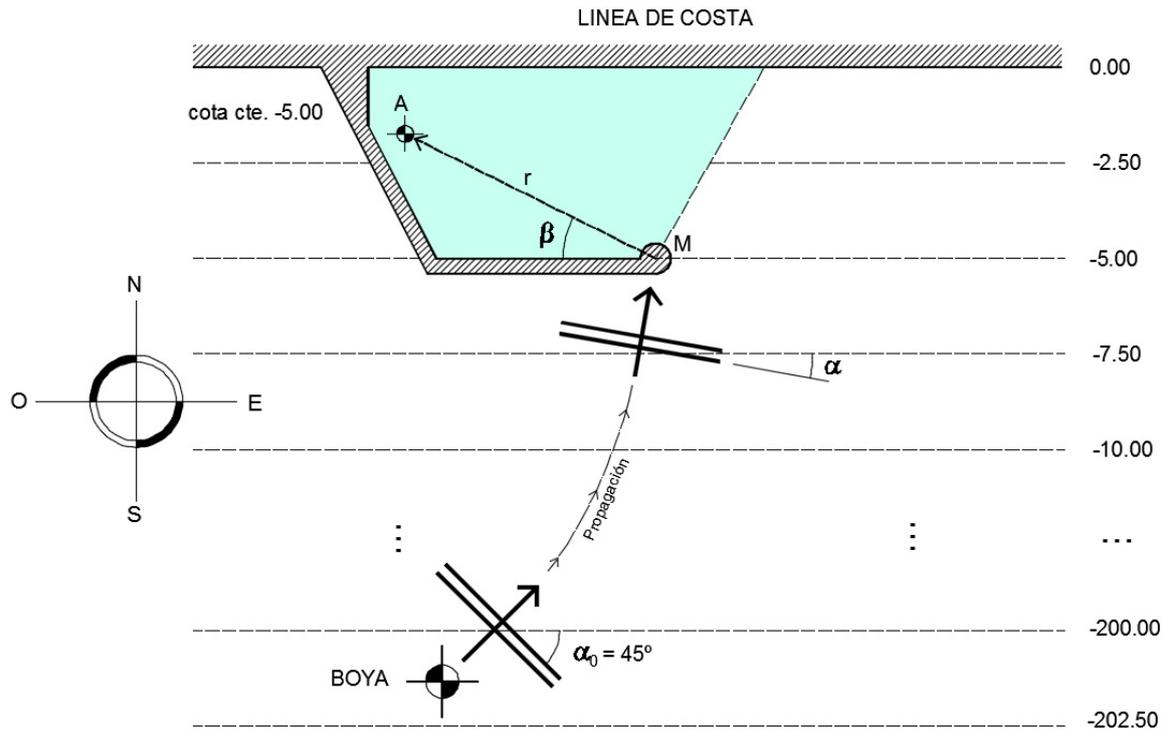
*De los datos registrados por la boya del Golfo de Cádiz de Puertos del Estado, fondeada en aguas profundas, se obtiene que los oleajes de un temporal se caracterizan por un estado del mar de periodo 10 segundos, altura de ola significativa de  $H_0 = 5$  m y dirección de aproximación del SO (oleajes dominantes).*

*La carrera de marea medida por el mareógrafo de Huelva es de 3,75 m. El calado del morro del dique de defensa (punto M) es la -5,00 referido a la BMVE.*

*Se pide obtener, en la situación de marea más desfavorable, la altura de ola propagada al punto A interior de la dársena, dragada con calado constante a la cota -5,00 referida también a la BMVE.*

*En el punto A, que se sitúa a una distancia de 150 m del morro M (radio-vector  $r = 150$  m) formando un ángulo  $\beta = 30^\circ$  con la alineación del dique de defensa, se pretende construir un nuevo atraque por lo que necesitamos conocer su condiciones de agitación ante los oleajes dominantes del SO.*

---



**Solución:**

Los datos de cotas se suelen referir al **cero hidrográfico** del puerto o nivel de la bajamar máxima viva equinoccial (BMVE). La máxima altura de ola que físicamente puede llegar a un punto se produce en las **condiciones de pleamar**, pues se asegura que las olas no sufran la rotura, la cual se produce aproximadamente cuando el cociente  $H/d \approx 0.80$ , según el criterio de rotura de McCowan (1891).

Para un periodo  $T = 10''$ , la longitud de onda en aguas profundas vale:

$$L_0 = \frac{gT^2}{2\pi} = 1,56 T^2 = 156 \text{ m.}$$

El periodo se mantiene constante durante la propagación.

Lo primero que haremos es calcular la longitud de onda en el morro del dique M, que se sitúa en pleamar a la profundidad  $h_M = 5 + 3,75 = 8,75 \text{ m}$ . Para ello aplicamos la **ecuación de dispersión** de ondas en teoría lineal:

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh(kh) = L_0 \tanh(kh)$$

Esta ecuación es implícita y debe ser resuelta mediante iteración, conocidas la profundidad y el periodo. Por tanto, la longitud de onda en el morro del dique M vale:

$$L_M = 87 \text{ m}$$

Se observa como la longitud de onda se reduce cuando nos aproximamos a la línea de costa y decrece la profundidad.

Ahora vamos a obtener el coeficiente de propagación y el ángulo de aproximación del frente de ola cuando se propaga desde aguas profundas hasta el morro del dique M. En este recorrido sólo intervienen los fenómenos de **shoaling y refracción**, por lo que el coeficiente de propagación hasta M será  $K_{prop,M} = (K_R \cdot K_S)_M$ .

Por efecto de la refracción los frentes de onda sufren también un giro que tiende a ponerlos paralelos a la línea de costa.

Emplearemos el ábaco de refracción-shoaling del “Shore Protection Manual” que ya hemos introducido en el apartado 2.1. Para el caso de batimetría recta y paralela; al ábaco se entra en abcisas con  $\frac{d}{gT^2}$  y en ordenadas con el ángulo  $\alpha_0$  que forman los frentes de onda con las batimétricas en aguas profundas.

$$\frac{d}{gT^2} = \frac{8,75}{9,81 \times 10^2} = 0,009 \quad ; \quad \alpha_0 = 45^\circ$$

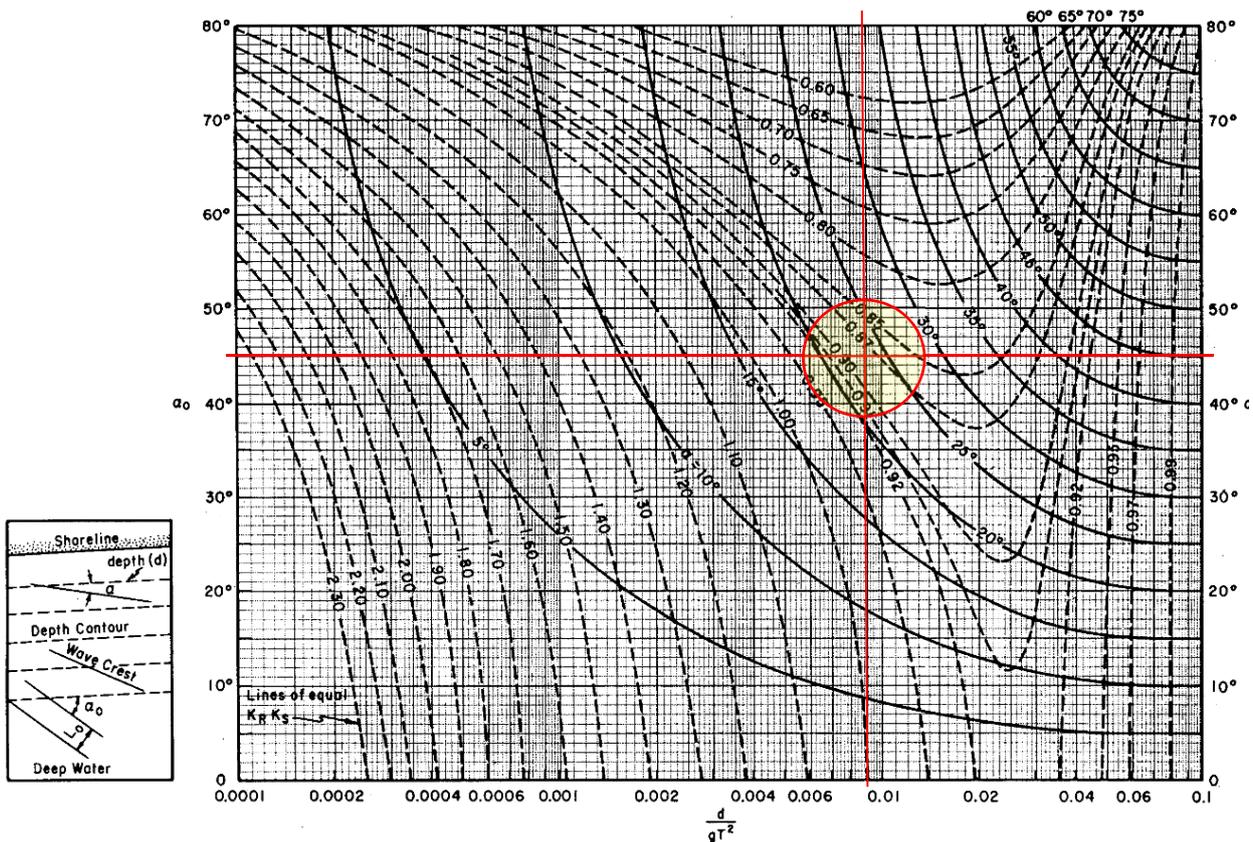


Plate C-6. Change in Wave Direction and Height Due to Refraction on Slopes with Straight, Parallel Depth Contours Including Shoaling

Buscando el punto de intersección obtenemos del ábaco:

$$K_{prop,M} = (K_R \cdot K_S)_M = 0,88 \quad ; \quad \alpha_M = 23^\circ$$

Por tanto, la altura de ola en el morro del dique será:

$$H_M = K_{prop,M} H_0 = 0,88 \times 5,00 = 4,40 \text{ m}$$

Se observa que esta ola no rompe a la profundidad del morro en pleamar, ya que  $\frac{H_M}{d_M} = 0,50 < 0,80$ .

Desde el morro M hasta el punto A sólo se manifiesta el fenómeno de difracción, pues al suponerse que el calado constante a partir de M, la longitud de onda se mantiene constante.

Para el cálculo del **coeficiente de difracción** en el punto A emplearemos los ábacos de Weigel del “Shore Protection Manual”, con un ángulo de ataque del frente de onda de  $120^\circ$ , por ser éste el más cercano a nuestro ángulo:  $23 + 90 = 113^\circ$ .

En este ábaco se entra con el radio-vector adimensionalizado con la longitud de onda el M y el ángulo  $\beta$ .

$$\frac{r}{L_M} = \frac{250}{87} = 2,87 \quad ; \quad \beta = 30^\circ$$

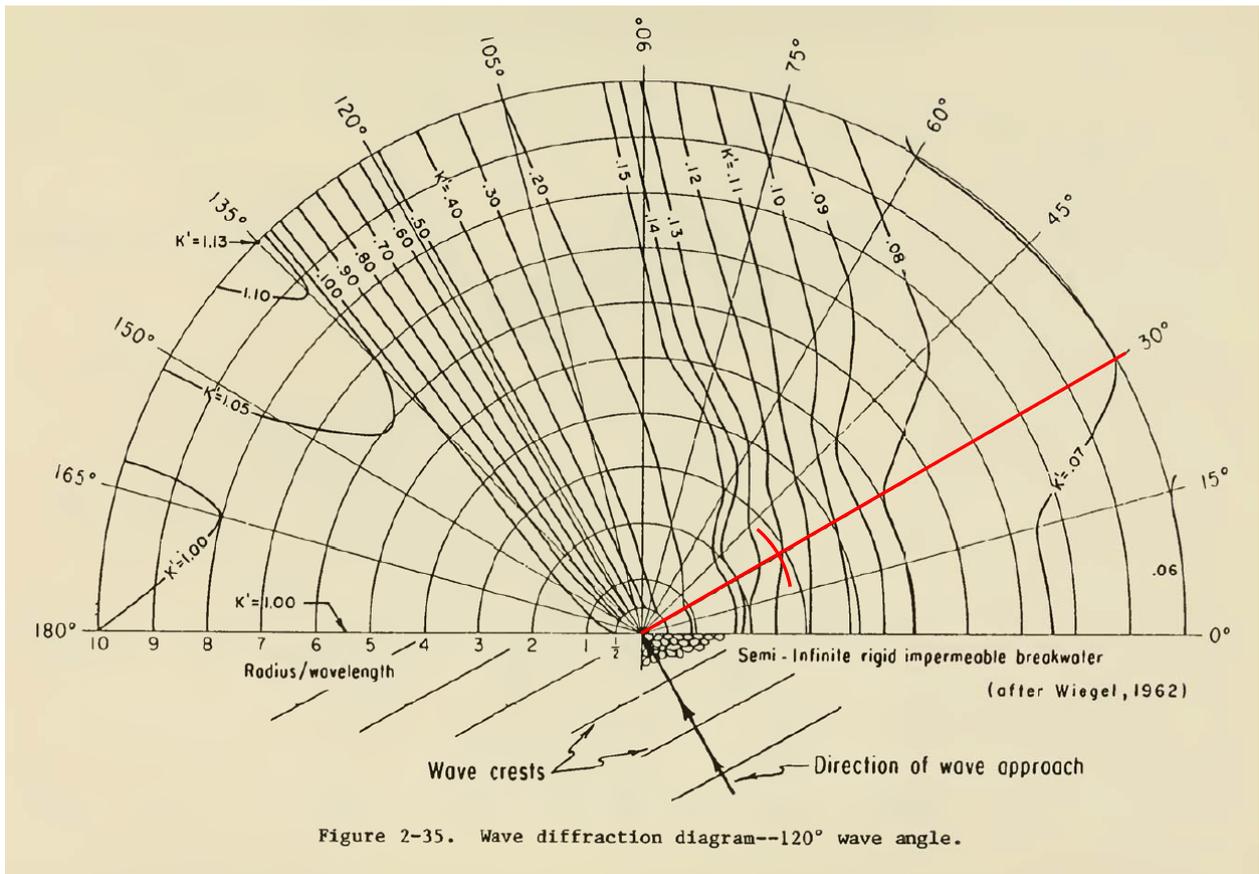


Figure 2-35. Wave diffraction diagram--120° wave angle.

Buscando el punto de intersección obtenemos del ábaco el coeficiente de difracción en  $K_{D,A}$ :

$$K_{D,A} = 0,12$$

Por tanto, la altura propagada al punto A será:

$$H_A = K_{D,A} H_M = 0,12 \times 4,40 = 0,53 \text{ m}$$

En función de la tipología de buque para el que diseña el atraque en A, esta altura puede estar, o no, dentro del rango de operatividad por estado límite de servicio de agitación de la dársena.

Esta sencilla metodología ha sido ampliamente empleada hasta no hace muchos años por los ingenieros marítimos y nos da un excelente orden de magnitud de la solución esperada cuando se emplean métodos numéricos.

## 2.4. Conclusiones

A continuación se recogen las palabras del Profesor Svendsen (Universidad de Delaware USA) en el prefacio de su excelente libro "Introduction to Nearshore Hydrodynamics" [9]:

*If you want to model nature you must copy nature.  
If you want to copy nature you must understand nature.*

Estas sabias palabras sintetizan el mensaje de este capítulo introductorio del TFM. Svendsen fue uno de los grandes nombres en el mundo de la ingeniería marítima y profundo conocedor de los fenómenos de propagación del oleaje en zonas costeras y su aplicación al diseño de obras marítimas. En su reflexión se trasluce

que la aplicación de modelos matemáticos a ciegas, sin un conocimiento y comprensión del funcionamiento físico de los fenómenos costeros, no tiene ningún sentido y puede incluso llegar a ser peligroso.

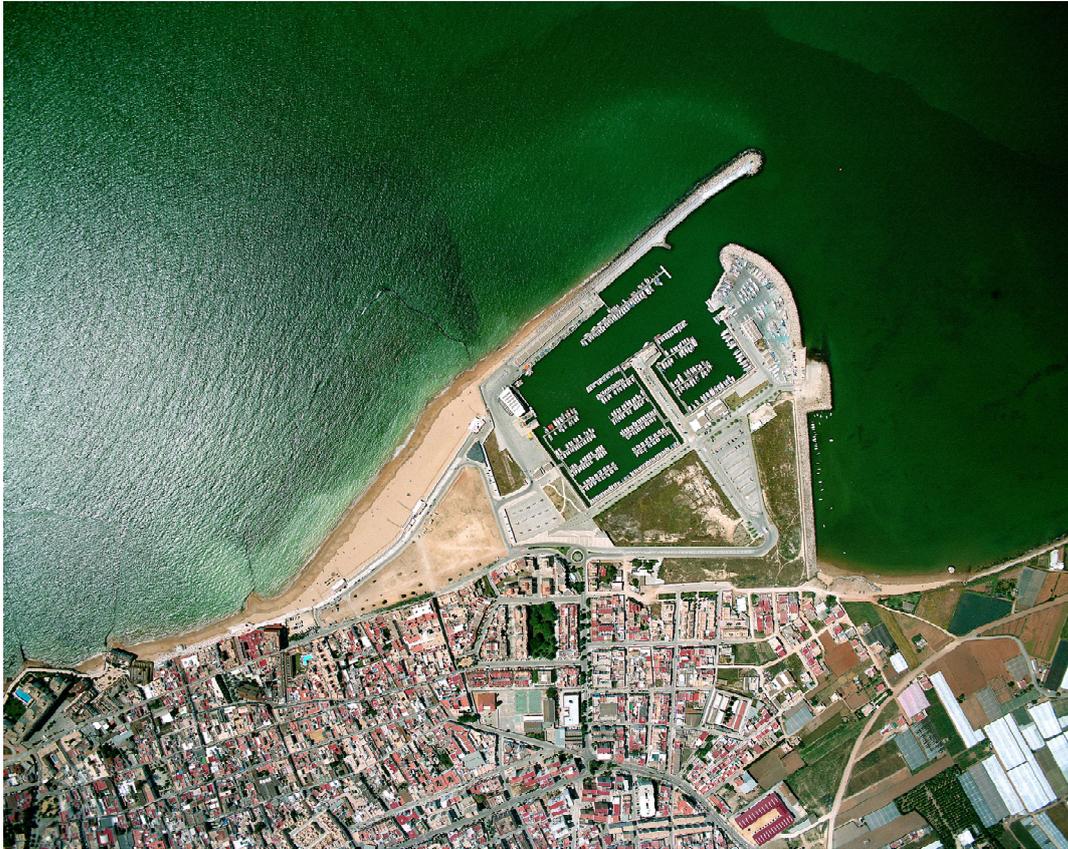


Figura 2-25. Vista aérea del Puerto de Chipiona (Cádiz).

# 3 FUNDAMENTOS DE MECÁNICA DE FLUÍDOS

*Las matemáticas son el alfabeto con el cual Dios ha escrito el universo.*

- Galileo Galilei -

**E**n el presente capítulo se introducen los conceptos básicos de la Mecánica de Fluidos necesarios para poder plantear el problema físico y matemático de propagación de ondas en el mar. La misma palabra oleaje, nos evoca agua, energía, movimiento, turbulencia, belleza, temor... y por encima de todo, mucho respeto.



Figura 3-1. Temporales del Mar Cantábrico

La **mecánica de fluidos** es la rama de la mecánica del medio continuo que estudia el movimiento de los fluidos (gases y líquidos), así como las fuerzas que los provocan. También estudia las interacciones entre el fluido y el contorno que lo limita.

El objetivo de este capítulo será sentar las bases teóricas en las que se sustenta la teoría lineal de ondas, de primer orden o de Airy. Las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos son las **ecuaciones de Navier-Stokes**, las cuales se sustentan en los principios de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento (2ª ley de Newton) particularizados al movimiento de un fluido. Para el caso de fluidos Newtonianos y en su formato vectorial su aspecto es tan espeluznante como bello.

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3-1)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (3-2)$$

Siendo:

- $\rho$  la densidad del fluido.

- $\mathbf{v}$  el campo vectorial de velocidades en el fluido:  $\mathbf{v} = (u, v, w)$ .
- $\mathbf{g}$  es el vector aceleración de la gravedad.
- $p$  es el campo escalar de presiones en el fluido.
- $\mu$  es la viscosidad dinámica del fluido.
- $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  es el operador vectorial Nabla.

Para el caso del problema del oleaje podemos desacoplar de las anteriores ecuaciones la primera y segunda ley de la termodinámica, pues estamos tratando un fluido prácticamente incompresible (el agua del mar) y a temperaturas medias, sin cambios de estado.

Sólo en casos muy especiales y con geometrías de dominio muy simples podemos obtener una solución analítica de las ecuaciones de Navier-Stokes, por lo que nos vemos condenados a emplear métodos aproximados o numéricos para su solución.

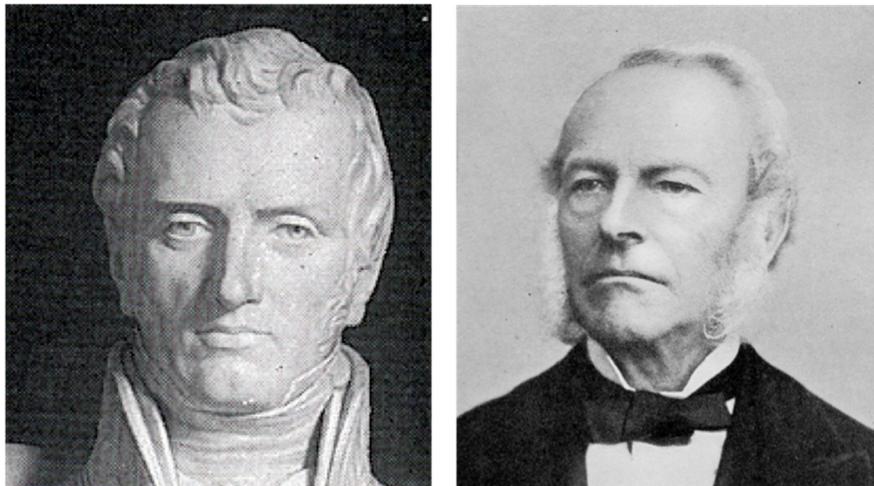
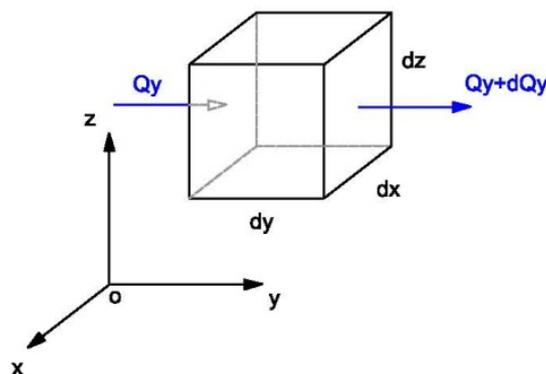


Figura 3-2. Claude-Louis Navier (1785-1836) y a Sir George Gabriel Stokes (1819-1903).

### 3.1. Conservación de la masa

Supongamos que situamos un prisma infinitesimal de aristas  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (diferencial de volumen  $dV$ ) fijo en el espacio en el interior del dominio de un fluido en movimiento. El vector de velocidad  $\mathbf{v}$  (campo de velocidades) tendrá tres componentes según los ejes cartesianos XYZ, a las que llamaremos  $(u, v, w)$ .



Tomemos, por ejemplo, las dos caras del elemento diferencial de volumen que son perpendiculares al eje Y. El

caudal másico ( $Q_{m_y}$ ) o cantidad de masa que atraviesa la cara perpendicular al eje Y por la izquierda, en la unidad de tiempo es:

$$Q_{m_y} = \rho v dx dz \tag{3-3}$$

Mientras que el caudal másico que atraviesa la cara perpendicular al eje Y por la derecha ( $y+dy$ ) en la unidad de tiempo es:

$$Q_{m_{y+dy}} = Q_{m_y} + dQ_{m_y} = \rho v dx dz + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v dx dz) dy \tag{3-4}$$

Por tanto, el caudal másico neto a través de las caras perpendiculares al eje y será la diferencia:

$$Q_{m_y}^{neto} = Q_{m_y} - Q_{m_{y+dy}} = -\frac{\partial}{\partial y}(\rho v) dx dy dz \tag{3-5}$$

Podríamos haber hecho exactamente lo mismo en las otras caras del diferencial de volumen, obteniendo:

$$Q_{m_x}^{neto} = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) dx dy dz \tag{3-6}$$

$$Q_{m_y}^{neto} = -\frac{\partial}{\partial y}(\rho v) dx dy dz \tag{3-7}$$

$$Q_{m_z}^{neto} = -\frac{\partial}{\partial z}(\rho w) dx dy dz \tag{3-8}$$

Ahora veamos cuál es la masa contenida en el elemento  $dV$  y su variación con el tiempo:

$$dm = \rho dV = \rho dx dy dz \tag{3-9}$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d(\rho dV)}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz \tag{3-10}$$

El elemento diferencial de volumen  $dV = dx dy dz$  es fijo en el espacio y el tiempo, por eso su derivada temporal es nula. Llegados a este punto necesitamos hacer un simple **balance de masas** para asegurar que la masa se conserva:

**MASA QUE ENTRA - MASA QUE SALE = VARIACIÓN DE MASA**

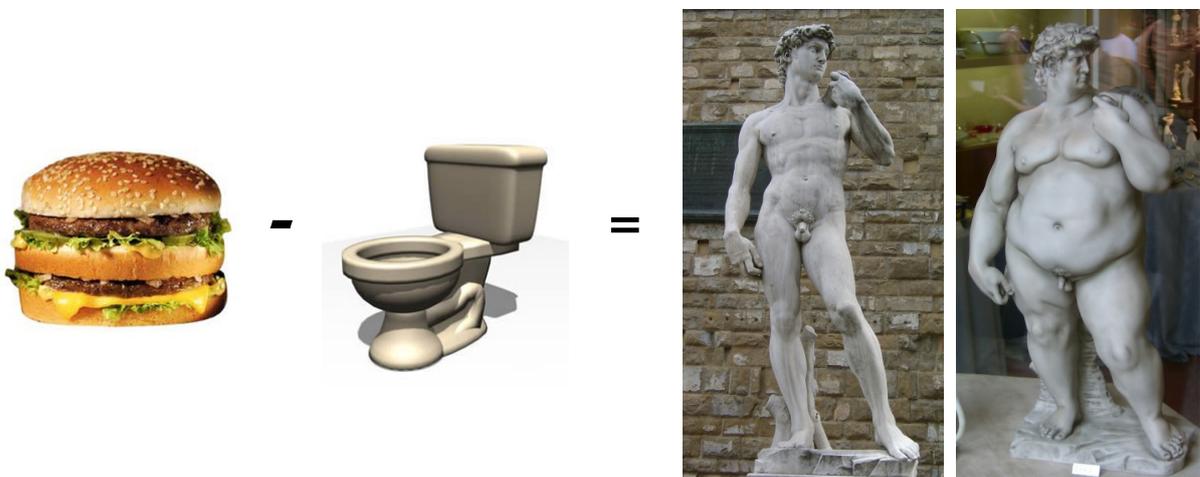


Figura 3-3. Balance de masas.

Es fácil comprobar que la diferencia entre la masa entrante y la saliente del elemento  $dV$  es igual a la suma algebraica de los caudales máscicos netos obtenidos en las ecuaciones (3-6), (3-7), (3-8) multiplicados por  $dt$ , puesto que el caudal máscico es masa por unidad de tiempo. Nos queda, por tanto:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) dx dy dz dt - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) dx dy dz dt - \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) dx dy dz dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt \quad (3-11)$$

Por lo que eliminando factores comunes obtenemos la siguiente ecuación:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3-12)$$

Esta es la ecuación de continuidad o de conservación de la masa. Expresada en formato vectorial nos queda:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3-13)$$

Para aquellos casos en que pueda considerarse que se trata de un **fluido incompresible** ( $\rho = \text{constante}$ ), entonces la ecuación de continuidad se simplifica bastante, pues la derivada temporal de la densidad vale cero y  $\rho$  es un parámetro que sale del operador vectorial nabra, quedando la expresión de la ecuación de conservación de la masa para un fluido incompresible (campo de velocidades solenoidal):

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3-14)$$

## 3.2. Conservación de la cantidad de movimiento

La Segunda Ley de Newton o de conservación de la cantidad de movimiento, establece que la fuerza neta aplicada sobre un cuerpo es proporcional a la aceleración que adquiere dicho cuerpo. Introduciendo el concepto del vector cantidad de movimiento,  $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$ , la 2ª ley de Newton se expresa como:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m \mathbf{v})}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \mathbf{a} \quad (3-15)$$

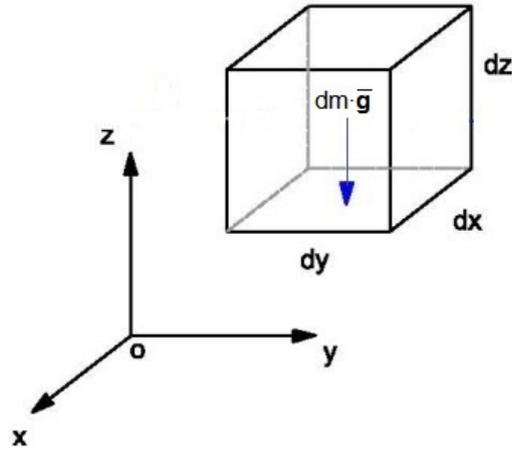
$\sum \mathbf{F}_i$  es la suma vectorial de todas las fuerzas actuantes ¿Qué fuerzas nos encontramos en nuestro fluido agua? Pues son de tres tipos:

- Fuerzas gravitatorias.
- Fuerzas de presión.
- Fuerzas viscosas.

### 3.2.1. Fuerzas gravitatorias

Se trata del peso de un elemento del continuo que consideramos de tamaño diferencial  $dV$  y fijo en el espacio.

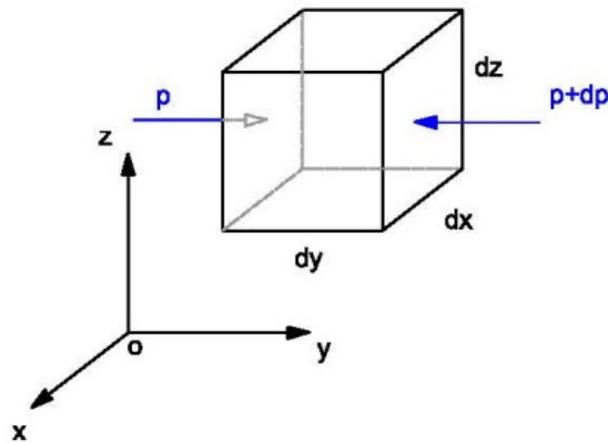
$$d\mathbf{F}_g = dm \mathbf{g} = \rho dV \mathbf{g} = \rho dx dy dz \mathbf{g} \quad (3-16)$$



Siendo  $\mathbf{g}$  el vector aceleración de la gravedad:  $\mathbf{g} = (g_x, g_y, g_z)$ . Normalmente resulta cómodo elegir un sistema de referencia cartesiano con el eje Z según la vertical, por lo que el vector sería:  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ .

### 3.2.2. Fuerzas presión

Consideremos el mismo elemento diferencial de volumen  $dV$  fijo en el espacio interior de un fluido y hagamos el balance de las fuerzas de presión en dos caras paralelas del elemento  $dV$ ; tomemos, por ejemplo, las dos caras perpendiculares al eje Y.



$$dF_p(y) = p dS = p dx dz \tag{3-17}$$

$$dF_p(y + dy) = -(p + dp) dS = -\left(p + \frac{\partial p}{\partial y} dy\right) dx dz \tag{3-18}$$

Por tanto, la componente neta de la fuerza según el eje Y será:

$$dF_{p,y} = -\frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz \tag{3-19}$$

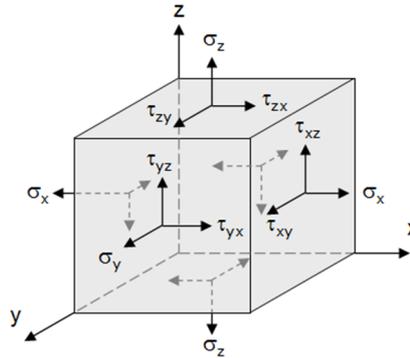
De manera idéntica podríamos haber obtenido las componentes netas de las fuerzas de presión en los ejes X y Z, obteniéndose las tres componentes de fuerzas netas de presión, que en formato vectorial compacto quedarían:

$$d\mathbf{F}_p = -\nabla p \, dx \, dy \, dz \tag{3-20}$$

### 3.2.3. Fuerzas viscosas

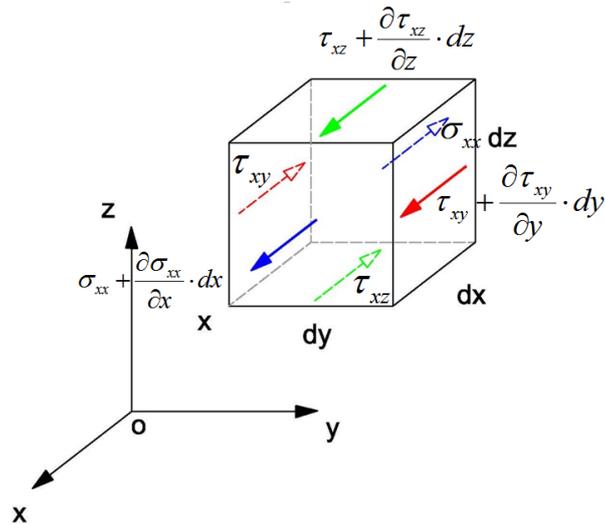
El estado tensional en un punto de un fluido está definido por el **tensor de tensiones**.

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \tag{3-21}$$



El tensor tiene la propiedad de ser simétrico:  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

Con la ayuda de la figura siguiente, consideremos el mismo elemento diferencial de volumen  $dV$  fijo en el espacio interior de un fluido y hagamos balance de las fuerzas de tensión, por ejemplo, con componente según el eje X.



$$dF_{\mu,x} = \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz \tag{3-22}$$

De manera idéntica podríamos haber obtenido las componentes netas de las fuerzas viscosas en los ejes Y y Z. En formato tensorial compacto estas ecuaciones se escribirían:

$$d\mathbf{F}_\mu = \nabla \underline{\sigma} \, dx \, dy \, dz \tag{3-23}$$

Para el caso de fluidos newtonianos como el agua, el tensor de tensiones toma la siguiente forma (en formato de índices de Einstein):

$$\sigma_{ij} = \mu(v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (3-24)$$

Suponiendo a partir de ahora que el comportamiento del agua se asemeja muy bien con el modelo del fluido newtoniano y desarrollando el producto tensorial  $\nabla \underline{\sigma}$ , sin olvidar que para el caso de fluido incompresible se cumple que  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  (ecuación de continuidad), se puede demostrar fácilmente que:

$$dF_{\mu} = \nabla \underline{\sigma} \, dx \, dy \, dz = \mu \nabla^2 \mathbf{v} \, dx \, dy \, dz \quad (3-25)$$

### 3.3. Ecuaciones de Navier-Stokes

Volvamos a la expresión matemática (3-15) de la 2ª Ley de Newton:

$$\sum_i F_i = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m \mathbf{v})}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \, dV \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \, dx \, dy \, dz \quad (3-26)$$

Siendo  $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$  la derivada total del campo vectorial de velocidades  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$  que depende de las tres coordenadas espaciales y del tiempo, por lo que su **derivada total** se obtiene aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} u + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} v + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} w \quad (3-27)$$

La ecuación anterior puede también escribirse en forma vectorial compacta:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (3-28)$$

Por tanto, sustituyendo en la ecuación (3-26) cada uno de los términos de fuerzas (3-16) (3-20) (3-25), obtenidos en los epígrafes anteriores y cancelando los términos comunes  $dx \, dy \, dz$ , obtenemos la siguiente ecuación que corresponde a la 2ª Ley de Newton para fluido incompresible y newtoniano:

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (3-29)$$

Por tanto, Hemos deducido las ecuaciones de Navier-Stokes para el caso de un fluido incompresible y newtoniano. Recordemos que estas ecuaciones no son más que las expresiones de los principios de conservación de la masa y la cantidad de movimiento particularizadas para el movimiento de un fluido.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3-30)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (3-31)$$

### 3.4. Ecuaciones de Euler

Partiendo de las ecuaciones de Navier-Stokes (3-30) (3-31) para un fluido incompresible y newtoniano, y asumiendo como hipótesis adicional que el **fluido es perfecto o ideal** (no viscoso  $\mu = 0$ ), obtenemos las ecuaciones de Euler.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3-32)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \rho \mathbf{g} - \nabla p \quad (3-33)$$

La hipótesis de fluido perfecto o ideal es una excelente aproximación al problema hidrodinámico cuando el fluido que estamos considerando es agua.

### 3.5. Ecuación de Bernoulli

Hagamos ahora una aproximación ingenieril; si suponemos que el fluido que estamos tratando es el agua del mar, no es una hipótesis muy descabellada suponer que se trata de un **fluido ideal** ( $\mu = 0$ ), es decir, no viscoso, o casi. De esta forma hemos eliminado de un plumazo el mecanismo que tiene capacidad de producir rotación (vórtices) de una partícula de fluido fuera de la **capa límite**, la cual se origina en las proximidades de los contornos como se observa en la figura adjunta.

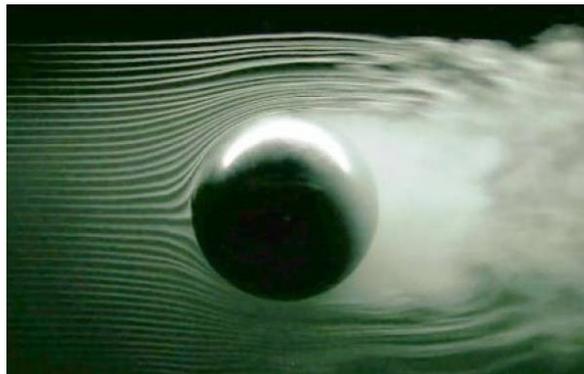


Figura 3-4. Capa límite y desprendimiento de la misma en el caso de flujo alrededor de una esfera lisa.

De cualquier forma, sabemos que los efectos viscosos son predominantes dentro de la capa límite y en nuestras aplicaciones de ingeniería marítima esta capa límite es muy delgada. Por tanto, podemos asumir como hipótesis básica que **el flujo es irrotacional fuera de la capa límite** y que ésta es muy pequeña en espesor, lo cual es muy parecido a imaginar que el fluido desliza por los contornos. Nos olvidamos de la incómoda hipótesis de que la velocidad del fluido en los contornos es igual a la del contorno.

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \quad (3-34)$$

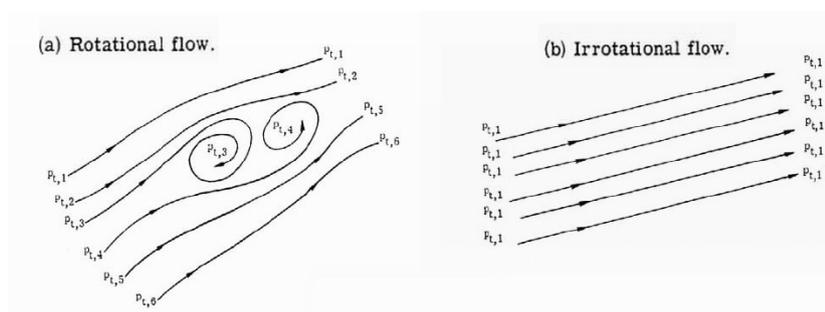


Figura 3-5. Flujo rotacional vs. Flujo irrotacional.

Por tanto, hemos llegado a la conclusión que para el caso de un fluido ideal e incompresible el **campo de velocidades del fluido es irrotacional** ( $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ ) y **solenoidal** ( $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ). Recordando los conceptos básicos de teoría de campos, sabemos que un campo solenoidal e irrotacional es un **campo conservativo**. Es decir, existe una **función potencial escalar de velocidades**  $\Phi$  en el fluido cuyo gradiente es precisamente el campo vectorial de velocidades.

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \rightarrow \Phi \quad (3-35)$$

$$\mathbf{v} = \nabla\Phi = \left( \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) \quad (3-36)$$

$$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial\Phi}{\partial y} \quad w = \frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad (3-37)$$

Si introducimos (3-37) en la ecuación de continuidad (3-32), ésta se convierte en el **Laplaciano**.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3-38)$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3-39)$$

Si ahora introducimos la ecuación (3-36) en la ecuación (3-33) de conservación de la cantidad de movimiento (ecuaciones de Euler) y elegimos un sistema de referencia cartesiano con el eje Z según la vertical, por lo que el vector  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ , nos queda:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \mathbf{g} + \frac{1}{\rho}\nabla p = 0 \quad (3-40)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Phi) + (\nabla\Phi \cdot \nabla)\nabla\Phi + \nabla(-gz) + \frac{1}{\rho}\nabla p = 0 \quad (3-41)$$

La última expresión (3-41) es equivalente si la escribimos de la siguiente forma:

$$\nabla \left( \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi + gz + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad (3-42)$$

Obsérvese que la suma de términos entre paréntesis sólo puede ser una función escalar que depende del tiempo  $E(t)$ :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi + gz + \frac{p}{\rho} = E(t) \quad (3-43)$$

La ecuación (3-43) es la conocida **ecuación de Bernoulli** y establece un balance de energía. Los dos primeros términos representan una energía por movimiento (cinética), el tercero es una energía potencial debida al campo gravitatorio y el último una energía de presión. De manera general este balance puede variar a lo largo del tiempo.

En el caso concreto del fluido ideal, homogéneo e incompresible que estamos analizando, donde no hay disipación ni adición de energía de un instante de tiempo a otro, la función  $E(t)$  permanece constante. Además, una variación temporal o constante  $\tilde{\Phi} = \Phi + f(t)$  del potencial  $\Phi$  no afectaría al campo de velocidades del fluido, pues  $\mathbf{v} = \nabla\Phi = \nabla\tilde{\Phi}$ . Por tanto, sin pérdida de generalidad, se puede considerar a la función  $E(t)$  como una energía de presión constante  $E(t) = \frac{p_o}{\rho}$ , donde  $p_o$  es una presión de referencia (por ejemplo la presión atmosférica). Reescribiendo entonces los términos de (3-43), se obtiene la conocida ecuación de Bernoulli:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi + gz + \frac{p - p_o}{\rho} = 0 \quad (3-44)$$

### 3.6. Resumen

A modo de resumen de las ecuaciones de la mecánica de fluidos obtenidas en los apartados anteriores, sin olvidar las hipótesis de partida que dan lugar a cada una de ellas, se adjunta el siguiente cuadro resumen.

	Conservación de la masa	Conservación Cantidad de Movimiento	Hipótesis Básicas
<b>Navier-Stokes</b>	$\nabla \cdot \vec{v} = 0$	$\rho \cdot \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \cdot \vec{v} \right] = \rho \cdot \vec{g} - \nabla p + \mu \cdot \nabla^2 \cdot \vec{v}$	Hip. Continuo. Fl. incompresible. Fl. Newtoniano.
<b>Euler</b>	$\nabla \cdot \vec{v} = 0$	$\rho \cdot \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \cdot \vec{v} \right] = \rho \cdot \vec{g} - \nabla p$	Hip. Continuo. Fl. incompresible. Fl. Newtoniano. Fl. No Viscoso.
<b>Bernouilli</b>	$\nabla^2 \Phi = 0$	$\frac{1}{2} \cdot (\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi) + g \cdot z + \frac{p}{\rho} + \frac{\partial\Phi}{\partial t} = K(t)$	Hip. Continuo. Fl. incompresible. Fl. Newtoniano. Fl. No Viscoso. Fl. Irrotacional.

Obsérvense las hipótesis básicas simplificativas asumidas en cada caso para llegar a la correspondiente expresión de las ecuaciones de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento.

Para el caso de la teoría lineal de ondas, se avanza que partiremos de las ecuaciones de Laplace y Bernoulli como ecuaciones básicas de gobierno del problema, en las que hemos asumido:

- Fluido incompresible.
- Fluido newtoniano.
- Fluido no viscoso.
- Flujo irrotacional.

# 4 TEORÍA LINEAL DE ONDAS DE AIRY

---

*Es preferible obtener una respuesta razonablemente aproximada pero rápida que le indique si el diseño funciona o no, que invertir más tiempo y obtener el mismo resultado sólo que con más decimales.*

- Robert L. Norton -

El siglo XIX dió inicio a la Revolución Industrial, germen del actual desarrollo tecnológico humano. La necesidad de aproximar los focos de producción industrial de la Inglaterra Victoriana con la materia prima esencial de la época, el carbón, puso en marcha el desarrollo vertiginoso de la ingeniería portuaria y transporte marítimo como cimiento esencial en el desarrollo tecnológico del prodigio de la época, la máquina de vapor. Los ingenieros de la época necesitaban criterios y modelos fiables para el diseño de las nuevas infraestructuras portuarias que demandaba la incipiente industria.

La **teoría lineal de ondas**, también conocida como teoría de **ondas de pequeña amplitud, de primer orden o de Airy**, es un claro ejemplo del ingenio y capacidad de adaptación de los científicos e ingenieros del Siglo XIX. Ya veremos en este y posteriores capítulos cuáles son sus limitaciones. No obstante, podemos decir que es una teoría que describe con suficiente precisión como se propagan las ondas en el mar y que se sigue empleando hoy día como modelo de propagación de oleaje para el diseño de obras marítimas.



Figura 4-1. George Biddell Airy (1801-1892)

El artífice de la teoría lineal de ondas fue **George Biddell Airy** (1801-1892). En esta pequeña introducción se expone cómo se las apañó este hombre del XIX para dar solución a un problema complejísimo y eminentemente no lineal, con los conocimientos y herramientas disponibles en aquella época, que requería una solución práctica.

A modo de resumen, su brillante idea para resolver el problema de la ecuación de la onda fue suponer que el peralte de la onda, cociente entre la altura de la ola ( $H$ ) y su longitud de onda ( $L$ ), es un valor muy pequeño, digamos que despreciable. Con esta hipótesis, que para nada es trivial, se obtuvo el modelo matemático e ingenieril de onda lineal con el que se han diseñado las grandes infraestructuras portuarias que disponemos en

la actualidad y que no ha dejado de estar en vigor a día de hoy para el diseño marítimo.

## 4.1. Elementos de una onda

Vamos a considerar que una onda es un movimiento oscilatorio y periódico de la superficie libre de un fluido en contacto con la atmósfera. En esta onda vamos a definir una serie de **parámetros básicos** que la definen y que se representan gráficamente en la siguiente figura:

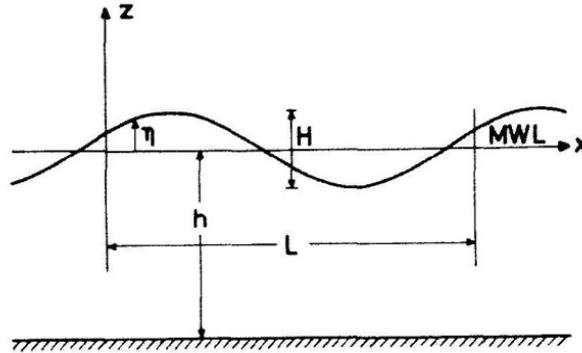


Figura 4-2. Elementos de una onda

- $L$  = Longitud de onda.
- $T$  = Periodo.
- $H$  = Altura de ola (doble de su amplitud).
- $h$  = profundidad.
- $\eta$  = desplazamiento de la superficie libre sobre el nivel medio del fluido en reposo.

El ingeniero civil busca describir el fenómeno del oleaje mediante un modelo matemático sencillo y suficientemente preciso para su uso en el diseño marítimo. El modelo de onda periódica más sencillo es la **onda sinusoidal**. Como avance a lo que veremos en este capítulo, diremos que es precisamente la onda sinusoidal la ecuación de la onda obtenida en la teoría lineal de Airy. Lo deduciremos más adelante.

Si suponemos unos ejes coordenados XYZ con origen en el nivel medio del agua en reposo, de tal forma que el eje X se dispone en la dirección de avance de la onda, con Z en la vertical del punto, podemos olvidarnos del eje Y pues el frente de la onda se considera infinito en la dirección de  $\pm Y$ .



Figura 4-3. Visualización del Modelo de onda sinusoidal.

En el caso de una onda progresiva (avance en el sentido +X) sinusoidal, su ecuación matemática es:

$$\eta(x, t) = \frac{H}{2} \cos(kx - \omega t) \quad (4-1)$$

Al parámetro  $k$  se llama **número de onda** y  $\omega$  es la **frecuencia angular**:

$$k = \frac{2\pi}{L} \quad (4-2)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (4-3)$$

## 4.2. La Onda de Airy

La propagación de una onda en un fluido es un fenómeno complejísimo y eminentemente **no lineal**. No obstante, tenemos la posibilidad de simplificar su análisis físico y matemático introduciendo, con sentido común e ingenio, una serie de simplificaciones, más o menos aceptables, que nos transformen el fenómeno complejo en algo más asequible para su uso ingenieril (linealización del problema).

La **teoría lineal de ondas**, también conocida como **teoría de ondas de pequeña amplitud, de primer orden o de Airy**, es un claro ejemplo del ingenio y capacidad de adaptación de los científicos e ingenieros del Siglo XIX. Ya veremos en este capítulo cuáles son sus limitaciones, pero podemos decir que es una teoría que describe con suficiente precisión como se propagan las ondas en el mar y que se sigue empleando hoy día como modelo de propagación de oleaje para el diseño de obras marítimas.

### 4.2.1. Hipótesis básicas

La Teoría Lineal de Ondas de Airy asume una serie de hipótesis simplificativas que nos permiten obtener una solución analítica de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el fenómeno físico de propagación del oleaje. Es absolutamente fundamental entender cuáles son las hipótesis de partida y las simplificaciones que asume.

Básicamente, las **hipótesis de partida** de la teoría lineal de ondas de Airy son las siguientes:

- a) Fluido incompresible ( $\rho = \text{constante}$ ).
- b) Fluido ideal, no viscoso ( $\mu = 0$ ).
- c) Flujo irrotacional ( $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ )
- d) Profundidad  $h$  constante.
- e) Fondo fijo e impermeable.
- f) Ondas de pequeña amplitud ( $\frac{H}{L} \ll 1$ )

La **hipótesis (a) de fluido incompresible** es una excelente aproximación para las aplicaciones de la ingeniería marítima; no estamos tratando aquí problemas de gases, ni con velocidades del flujo en el entorno del número de Mach. Tampoco de fenómenos transitorios, como el golpe de ariete, en los que no puede considerarse correcta la hipótesis de fluido incompresible.

La **hipótesis (b) de fluido ideal no viscoso** es plausible cuando se trata de agua a temperaturas normales; en el caso del mar en latitudes intermedias con temperaturas medias entre los 0° y 30° C, esta hipótesis es bastante buena.

Con la **hipótesis (c) de flujo irrotacional** hay que tener un poco de cuidado porque no es un concepto tan intuitivo; podríamos decir que un flujo irrotacional es aquel que no presenta vórtices, pero esta no es una definición muy precisa ni ortodoxa.

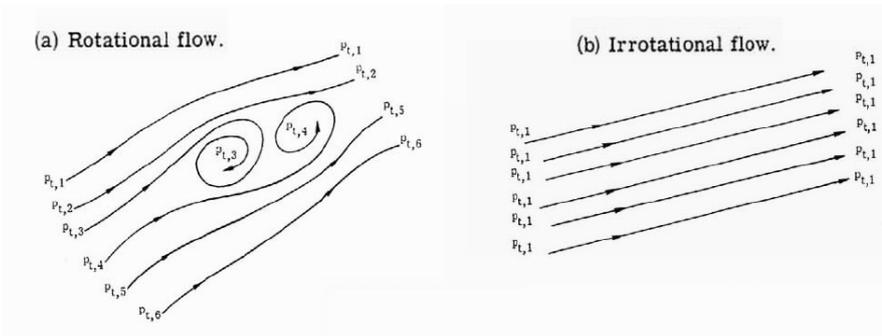


Figura 4-4. Flujo rotacional e irrotacional.

Si suponemos que el fluido es ideal (no viscoso, o casi), hemos eliminado de un plumazo el mecanismo que tiene capacidad de producir rotación (vórtices) de una partícula de fluido fuera de la capa límite, la cual se origina en las proximidades de los contornos. De cualquier forma, los efectos viscosos son predominantes en la capa límite y en nuestras aplicaciones de ingeniería marítima esta capa límite es muy delgada. De hecho, el espesor de la capa límite es del orden de  $\delta = \frac{D}{\sqrt{Re}}$ , siendo  $D$  una longitud característica de nuestro problema (en nuestro caso del oleaje marino puede ser la mitad de la longitud de onda  $D \approx \frac{\lambda}{2}$ ) y  $Re$  el número de Reynolds.

Por tanto, podemos asumir como hipótesis básica que el **flujo es irrotacional fuera de la capa límite** y que el espesor de ésta es muy pequeño, que es muy parecido a imaginar que el fluido desliza por los contornos.

La **hipótesis (d) de profundidad constante** no es muy buena como es evidente, pues los fondos marinos y las plataformas costeras donde se ubican nuestras obras marítimas presentan fondos con batimetrías irregulares. No obstante, como veremos y justificaremos en próximos capítulos de este TFM, tampoco es una hipótesis tan descabellada cuando la onda se propaga sobre fondos con batimetrías suaves y poco inclinadas. Simplifica enormemente la solución del problema, y lo que es más importante, nos **permite obtener una solución analítica "lineal" al problema de ondas**.

Lo primero que vamos a suponer es que, al ser el fondo plano, un frente de onda no sufre deformación en el eje  $Y$ , perpendicular a la dirección de avance de la onda. Por tanto, eliminamos la variable  $Y$  y sus derivadas parciales del problema. Nos quedamos sólo con el eje  $X$  (situado a la cota del nivel del mar en reposo en la dirección de avance de la onda) y el eje  $Z$  en la perpendicular (ver figura adjunta).

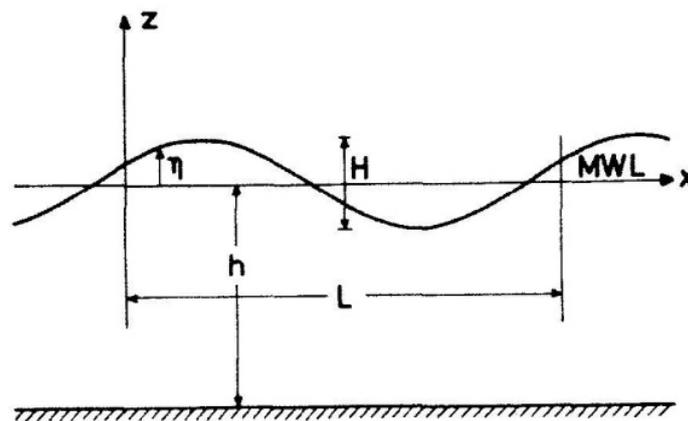


Figura 4-5. Modelo de onda lineal (sinusoidal) que se propaga sobre fondo plano

La **hipótesis (e) de fondo fijo e impermeable** suele ser lo habitual y por tanto es correcta a priori para nuestras aplicaciones de ingeniería marítima. Esta hipótesis supone que si el fondo es plano y no percolable, el vector velocidad en el fondo sólo puede tener componente horizontal:  $\mathbf{v} = (u, v, w) = (u, 0, 0)$  en  $z = -h$ .

La **hipótesis (f) de ondas de pequeña amplitud** es la piedra angular del problema. Suponer que las ondas son de pequeña amplitud es equivalente a admitir que el peralte  $H/L$ , cociente entre la altura de ola ( $H$ ) y su longitud de onda ( $L$ ), es un número muy pequeño  $y$ , por lo tanto, los términos que aparezcan en las ecuaciones que

resulten de orden superior  $(H/L)^2$  son despreciables, permitiéndonos **linealizar el problema**. Esta hipótesis se cumple bastante bien en ciertas ocasiones y no tan bien en otras, según sea el problema de ingeniería marítima que estemos tratando.

Digamos también que los efectos de la fuerza de Coriolis y las pérdidas de energía (rotura, disipación interna, rozamiento,...etc.) son despreciables.

Resumamos todo lo visto hasta el momento. Cuando a las ecuaciones de Navier-Stokes les introducimos las hipótesis básicas de la teoría de Airy, resulta que **el problema resultante tiene solución analítica** ¡Eureka! al admitir que el fluido es ideal, incompresible e irrotacional, resulta que el campo de velocidades es un campo conservativo, por lo que existe una función escalar de velocidades  $\Phi$  y la ecuación de gobierno del problema (ecuación de conservación de la masa) se transforma en la ya presentada y conocidísima **ecuación de Laplace**.

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4-4)$$

Esta ecuación es de tipo **elíptico** y requiere condiciones de contorno en todo el contorno del dominio de integración. En próximos epígrafes se verá en detalle el proceso matemático seguido por la Teoría de Airy para resolver analíticamente esta ecuación mediante el método de **separación de variables**, llegando a la conclusión que la onda tiene forma de una senoide.

$$\eta(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \varphi_1) \quad (4-5)$$

La función potencial  $\Phi$  para la onda progresiva que se desplaza en el sentido positivo del eje X tiene la siguiente expresión matemática (se demostrará más adelante):

$$\Phi(x, z, t) = \frac{gA}{\omega} \frac{\cosh[k(h+z)]}{\cosh(kh)} \sin(kx - \omega t + \varphi_1) \quad (4-6)$$

Finalmente, una de las conclusiones fundamentales de la teoría lineal de ondas es la llamada **ecuación de dispersión**, que relaciona los tres parámetros fundamentales en la propagación de una onda: profundidad ( $h$ ), frecuencia ( $\omega$ ) longitud de onda ( $L$ ).

$$\omega^2 = g k \tanh(kh) \quad (4-7)$$

Siendo:

- $\eta$  la elevación de la superficie libre del fluido al paso de la onda.
- $A$  la amplitud de la onda; en teoría lineal es justo la mitad de la altura de la ola  $H = 2A$ .
- $k = \frac{2\pi}{L}$  es el número de onda.
- $L$  es la longitud de onda.
- $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$  la frecuencia angular; siendo  $T$  el periodo y su inversa  $f$  la frecuencia.
- $\varphi_1$  es un ángulo de fase.
- $h$  es la profundidad.

#### 4.2.2. Ecuaciones de gobierno del problema

Como ya se vió en el capítulo 3, las dos leyes o principios básicos de conservación que gobiernan el fenómeno hidrodinámico de propagación del oleaje son:

- Conservación de la masa (continuidad).

- Conservación de la cantidad de movimiento.

Estas ecuaciones, para el caso del fluido incompresible y newtoniano, son las conocidas ecuaciones de Navier-Stokes (3–30) (3–31). Si además aplicamos todas las hipótesis de partida que hemos asumido en el apartado 4.2.1, entonces las ecuaciones de conservación de la masa y la cantidad de movimiento quedan de la siguiente forma:

- Conservación de la masa: **ECUACIÓN DE LAPLACE**

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4-8)$$

- Conservación de cantidad de movimiento: **ECUACIÓN DE BERNOULLI**

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + gz + \frac{p - p_o}{\rho} = 0 \quad (4-9)$$

La **ecuación de gobierno** del fenómeno de las ondas en los fluidos será la **ecuación de Laplace**, de la que sabemos que es una ecuación diferencial en derivadas parciales de **tipo elíptico**; para su resolución son necesarias condiciones de contorno en toda la frontera del dominio de integración.

A continuación se muestra un esquema con el **dominio de integración** que vamos a emplear en nuestros cálculos. Como se observa en la figura adjunta, se trata de un recinto limitado superiormente por la superficie libre del fluido en contacto con la atmósfera, inferiormente por el fondo y lateralmente por dos planos separados una distancia igual a una longitud de onda (pues impondremos a priori que se trata de un fenómeno periódico).

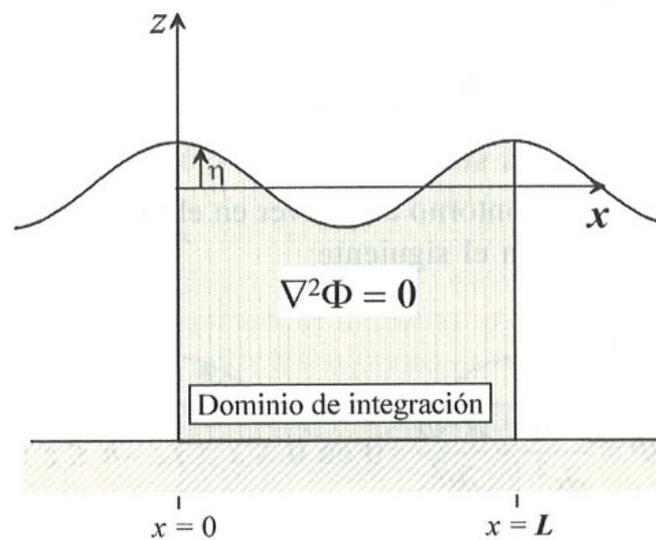


Figura 4-6. Dominio de integración. Figura extraída de la referencia [10]

### 4.2.3. Condiciones de contorno en la frontera del dominio

En los contornos, ya sean fijos o libres, el fluido debe seguir el movimiento de las superficies que los definen. Definimos dos tipos de condiciones de contorno en la frontera del dominio:

- Condiciones de contorno **cinemáticas** (CCC)
- Condiciones de contorno **dinámicas** (CCD)

Las CCC expresan la compatibilidad entre el movimiento de un contorno y el fluido en contacto con éste. Las CCD se refieren a la distribución de fuerzas y presiones en los contornos del dominio de integración.

#### 4.2.3.1. CCC en la superficie libre

La función matemática que define la posición en el espacio y el tiempo de la superficie libre del fluido  $\eta(x, t)$  puede expresarse como:

$$F_1(x, z, t) = z - \eta(x, t) \quad (4-10)$$

La CCC en la superficie libre exige que las partículas de la superficie libre permanezcan en ella y no la abandonen. Matemáticamente esto equivale a decir que:

$$\frac{dF_1}{dt} = 0 \quad (4-11)$$

Se trata de la derivada total de la función  $F_1(x, z, t)$ , por lo que aplicando la regla de la cadena nos quedaría:

$$\frac{dF_1}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x}u + \frac{\partial F_1}{\partial z}w = 0 \quad ; \text{ en } F_1 = 0 \quad (4-12)$$

Desarrollando las derivadas parciales de  $F_1$  en la ecuación (4-12) obtendríamos la CCC en la superficie libre.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x}u - w = 0 \quad ; \text{ en } z = \eta \quad (4-13)$$

#### 4.2.3.2. CCC en el fondo

Suponiendo que el fondo es plano, la CCC en el fondo exige que éste sea impermeable. Es decir, que la la velocidad vertical  $w$  en el fondo sea nula; matemáticamente equivale a:

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad ; \text{ en } z = -h \quad (4-14)$$

#### 4.2.3.3. CCC en laterales

Imponer que la solución a la ecuación de ondas sea **periódica en el tiempo y en el espacio** es lo mismo que decir que la función potencial  $\Phi$  es también una función periódica. Esto equivale a afirmar que si los contornos laterales están espaciados una longitud  $L$ , igual a la longitud de la onda, se cumplirá:

$$\Phi(x, z, t) = \Phi(x + L, z, t) \quad \Phi(x, z, t) = \Phi(x, z, t + T) \quad (4-15)$$

#### 4.2.3.4. CCD en la superficie libre

Recordamos que hemos asumido la hipótesis de fluido ideal, no viscoso. Por tanto, no hay tensiones tangenciales  $\tau_{ij}$  en el fluido y ello conlleva a que en cualquier contorno del fluido sólo actúan fuerzas de presión.

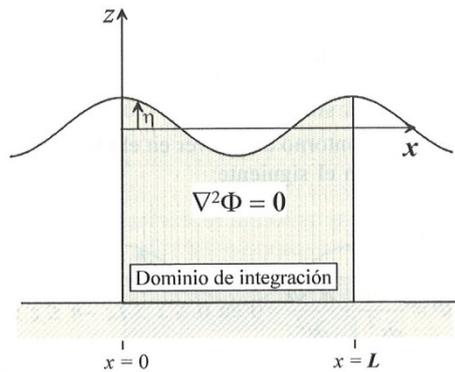
Centrémonos en la superficie libre; en dicha superficie podemos admitir, sin apenas cometer error, que la presión actuante es la presión atmosférica  $p_o$ . Aplicando la ecuación de Bernoulli (4-9) a la superficie libre del fluido ( $z = \eta$ ) tendremos:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + g \eta = 0 \quad ; \quad \text{en } z = \eta \quad (4-16)$$

#### 4.2.4. Planteamiento del problema

Llegados a este punto tenemos la ecuación diferencial del gobierno del problema (Ecuación de Laplace) y las condiciones de contorno CCC y CCD en todos los contornos del dominio de integración considerado. A modo de resumen recapitulemos lo obtenido hasta este momento.

- Dominio de integración:



$$0 \leq x \leq L$$

$$-h \leq z \leq \eta$$

- Ecuación de gobierno (Ecuación de Laplace):
- CCC en la superficie libre:
- CCC en el fondo:
- CCC en laterales:
  - Periodicidad espacial
  - Periodicidad temporal
- CCD en la superficie libre:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} u - w = 0 \quad ; \quad \text{en } z = \eta$$

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \text{en } z = -h$$

$$\Phi(x, z, t) = \Phi(x + L, z, t)$$

$$\Phi(x, z, t) = \Phi(x, z, t + T)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + g z = 0 \quad ; \quad \text{en } z = \eta$$

El problema así planteado tiene un inconveniente: las condiciones de contorno están dadas en la superficie libre  $z = \eta$ , la cual no se conoce a priori. Es necesario buscar una solución a este inconveniente, y aquí precisamente es donde entra en juego la consideración de que **la onda es de pequeña amplitud**; veamos este punto con más detalle.

Dando por válida la hipótesis de que la amplitud de la onda es pequeña comparada con su longitud de onda, podríamos aproximar las condiciones de contorno en  $z = \eta$  por otras similares pero en  $z = 0$ . Esto mismo expresado en forma matemática sería: *aproximamos las condiciones de contorno en  $z = \eta$  mediante un desarrollo en serie de Taylor entorno a  $z = 0$  y despreciamos los términos de orden superior.*

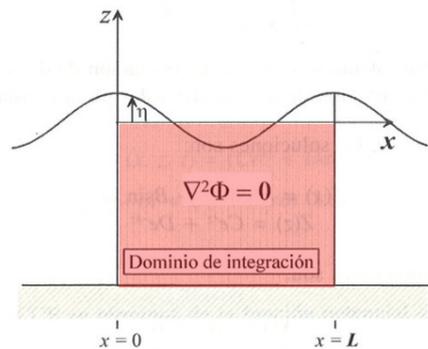
$$f(\eta) \approx f(0)$$

El mero hecho de considerar que las ondas son de pequeña amplitud y que, por lo tanto,  $H/L$  o  $\eta/L$  sean también muy pequeños, trae consigo que otros parámetros como las componentes de la velocidad ( $u, w$ ) también sean pequeños (del orden de  $H/L$ ) y sus respectivos cuadrados  $u^2$  y  $w^2$  (del orden de  $(H/L)^2$ ) aún lo sean más, por lo que podemos despreciarlos y lograr la simplificación buscada: **linealización del problema**.

Puede consultarse la referencia [10], donde se expone de forma muy clara y elegante la demostración matemática de que los términos de velocidad son del orden de  $H/L$ .

Si aplicamos la **hipótesis de onda de pequeña amplitud** a nuestro problema de onda, podemos despreciar los términos de orden superior del orden de  $(H/L)^2$ , por lo que el **problema linealizado** nos quedaría:

- Dominio de integración:



$$0 \leq x \leq L$$

$$-h \leq z \leq 0$$

- Ecuación de gobierno (Ecuación de Laplace):
- CCC en la superficie libre:
- CCC en el fondo:
- CCC en laterales:
  - Periodicidad espacial
  - Periodicidad temporal
- CCD en la superficie libre:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - w = 0 \quad ; \quad \text{en } z = 0$$

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \text{en } z = -h$$

$$\Phi(x, z, t) = \Phi(x + L, z, t)$$

$$\Phi(x, z, t) = \Phi(x, z, t + T)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g \eta = 0 \quad ; \quad \text{en } z = 0$$

Volvemos a insistir que las simplificaciones que hemos asumido nos han permitido despreciar los términos de orden superior del orden de  $\mathcal{O}(H/L)^2$  y linealizar las condiciones de contorno de nuestro problema.

Por último, y antes de resolver la ecuación diferencial, vamos a combinar las CCC y CCD en la superficie libre para dejar planteado el problema sólo en función del potencial escalar de velocidad  $\Phi$ . Para ello despejamos  $\eta$  de la CCD de la superficie libre y la introducimos en la CCC de la superficie libre.

$$\text{CCD en la superficie libre: } \frac{\partial \Phi}{\partial t} + g \eta = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

$$\text{CCC en la superficie libre: } \frac{\partial \eta}{\partial t} - w = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0$$

#### 4.2.5. Solución analítica del problema de contorno

En este apartado obtendremos la solución analítica del problema de onda de Airy mediante el **método de separación de variables**. Para ello, expresaremos la función del potencial escalar de velocidad  $\Phi(x, z, t)$  como el producto de tres funciones, desconocidas a priori, que sólo depende de una de las variables  $(x, z, t)$ :

$$\Phi(x, z, t) = X(x) Z(z) T(t) \tag{4-17}$$

Como estamos buscando una función  $\Phi(x, z, t)$  que sea periódica en  $x$  y  $t$ , la función  $T(t)$  puede expresarse como una combinación lineal de funciones seno y coseno.

$$T(t) = E \cos(\omega t) + F \sen(\omega t) \quad (4-18)$$

Siendo E y F dos constantes de integración. Nos aparece el término  $\omega$  que vamos a comprobar que es efectivamente la **frecuencia angular** del movimiento oscilatorio. Aplicando la condición de periodicidad temporal de la función  $T(t)$  obtenemos:

$$T(t) = T(t + T) \quad (4-19)$$

Siendo T el periodo de la onda. Para cumplir la anterior igualdad debe cumplirse:

$$E \cos(\omega t) + F \sen(\omega t) = E \cos(\omega(t + T)) + F \sen(\omega(t + T)) \quad (4-20)$$

Esta igualdad debe cumplirse término a término.

$$\cos(\omega t) = \cos(\omega(t + T)) \quad (4-21)$$

Como el coseno se repite con periodicidad  $2\pi$

$$\omega t + 2\pi = \omega(t + T) \quad (4-22)$$

Se concluye que  $\omega$  es efectivamente la frecuencia angular.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (4-23)$$

Veamos si ahora somos capaces de buscar expresiones para las funciones  $X(x)$  y  $Z(z)$ . Para ello partimos de la ecuación de Laplace (ecuación de gobierno).

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4-24)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = Z(z) T(t) \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = X(x) T(t) \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \quad (4-25)$$

$$Z(z) T(t) \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X(x) T(t) \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0 \quad (4-26)$$

Si en (4-26) dividimos ambos términos por  $X(x) Z(z) T(t)$  nos queda la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0 \quad (4-27)$$

Obsérvese la ecuación que hemos obtenido; se compone de dos sumandos, cada uno de los cuales sólo depende de una variable y su suma es igual a cero. La conclusión es clara, pues para cumplir la anterior igualdad cada sumando debe ser un valor constante igual y de signo opuesto. Llamemos a esa constante  $k^2$ , simplemente por

comodidad, y en breve obtendremos su valor.

La ecuación diferencial (4-27) se desacopla, por tanto, en dos ecuaciones diferenciales independientes cuya solución depende del valor de la constante  $k$ :

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k^2 \quad (4-28)$$

$$\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = k^2 \quad (4-29)$$

Pueden darse tres situaciones:

- $k^2 > 0$  por lo que  $k$  es un número real
- $k^2 = 0$
- $k^2 < 0$  por lo que  $k$  es un número imaginario

Las anteriores ecuaciones (4-28) y (4-29) tienen solución analítica que depende del valor de  $k$ .

a) Si  $k^2 > 0$  las soluciones de las ecuaciones son:

$$X(x) = A \cos(kx) + B \operatorname{sen}(kx) \quad (4-30)$$

$$Z(z) = C e^{kz} + D e^{-kz} \quad (4-31)$$

b) Si  $k^2 = 0$  las soluciones de las ecuaciones son:

$$X(x) = A x + B \quad (4-32)$$

$$Z(z) = C z + D \quad (4-33)$$

c) Si  $k^2 < 0$  las soluciones de las ecuaciones son:

$$X(x) = A e^{|k|x} + B e^{-|k|x} \quad (4-34)$$

$$Z(z) = C \cos(|k|z) + D \operatorname{sen}(|k|z) \quad (4-35)$$

Cabría preguntarse en este momento cuál podría ser la solución correcta. Como hemos impuesto que la solución en  $x$  debe ser periódica, la única que cumple esta condición es la opción a) cuando  $k^2 > 0$ . Por tanto la solución finalmente será:

$$X(x) = A \cos(kx) + B \operatorname{sen}(kx) \quad (4-36)$$

$$Z(z) = C e^{kz} + D e^{-kz} \quad (4-37)$$

Siendo  $A, B, C, D$  constantes de integración arbitrarias cuyos valores serán obtenidos una vez aplicadas las condiciones de contorno de nuestro problema.

Ahora es el momento de desvelar qué es  $k$ . Para ello aplicamos la condición de periodicidad en  $x$  de la solución obtenida.

$$X(x) = X(x + L) \quad (4-38)$$

$$A \cos(kx) + B \operatorname{sen}(kx) = A \cos(k(x + L)) + B \operatorname{sen}(k(x + L)) \quad (4-39)$$

Esta igualdad debe cumplirse término a término.

$$\cos(kx) = \cos(k(x + L)) \quad (4-40)$$

Como el coseno se repite con periodicidad  $2\pi$

$$kx + 2\pi = k(x + L) \quad (4-41)$$

Se concluye que  $k$  es el **número de onda**.

$$k = \frac{2\pi}{L} \quad (4-42)$$

Por tanto, agrupando las funciones (4-18) (4-36) (4-37) que hemos obtenido, tenemos la forma general de la función potencial de velocidades  $\Phi(x, z, t)$  en función de las cuatro constantes de integración que se obtendrán de aplicar las condiciones de contorno CCC y CCD ya estudiadas en el anterior epígrafe 4.2.4.

$$\Phi(x, z, t) = [A \cos(kx) + B \sin(kx)] [C e^{kz} + D e^{-kz}] [E \cos(\omega t) + F \sin(\omega t)] \quad (4-43)$$

No obstante, vamos a escribir la anterior ecuación en otro formato, aprovechando que el producto de paréntesis 1º y 3º de la ecuación (4-43) es una combinación de productos de senos y coseno, por lo que podemos expresar la función  $\Phi$  de esta otra forma (con otras constantes de integración que no condicionan el resultado final del problema):

$$\Phi(x, z, t) = [B_1 \cos(kx - \omega t + \varphi_1) + B_2 \sin(kx + \omega t - \varphi_2)] [C e^{kz} + D e^{-kz}] \quad (4-44)$$

En este nuevo formato las constantes de integración serán:  $B_1, B_2, C, D$  y los ángulo de desfase en el origen  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ . Llegados a este punto sólo sería necesario aplicar las condiciones de contorno del problema. El desarrollo matemático de aplicar las condiciones de contorno del problema es sencillo pero largo y tedioso, por lo que no se incluye aquí y sólo se muestran los resultados finales. Si el lector está interesado en saber cómo se implementan las condiciones de contorno, éste puede consultar en la bibliografía técnica [10].

### 4.3. Función de potencial de velocidad

Tras aplicar las condiciones de contorno CCC y CCD del problema, finalmente se obtiene la función potencial de velocidades  $\Phi(x, z, t)$ , solución de nuestro problema:

$$\Phi(x, z, t) = \frac{g}{k} \frac{\cosh[k(h+z)]}{\cosh(kh)} [A_1 \cos(kx - \omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(kx + \omega t - \varphi_2)] \quad (4-45)$$

Debe observarse que la solución general de la función de potencial de velocidad incluye dos ondas de amplitudes  $A_1$  y  $A_2$  que se mueven según el eje  $X$  pero en sentido contrario. De momento sólo estamos interesados en las **ondas progresivas**, es decir las que avanzan según la dirección positiva del eje  $+X$ ; en este caso:  $A_1 = A = \frac{H}{2}$  y  $A_2 = 0$ .

$$\Phi(x, z, t) = \frac{g A}{k} \frac{\cosh[k(h+z)]}{\cosh(kh)} \cos(kx - \omega t + \varphi_1) \quad (4-46)$$

Sabemos que la onda avanza en la dirección  $+X$ , pues para que la fase de la onda  $(kx - \omega t + \varphi_1)$  permanezca constante para un incremento del tiempo cualquiera, el valor de la coordenada  $x$  debe crecer hacia  $+\infty$ , por lo que la onda avanza en el sentido  $+X$ .

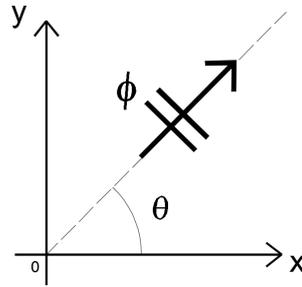
En próximos capítulos emplearemos la **notación compleja** para los desarrollos matemáticos. Esta forma de proceder tiene ventajas computacionales. Entre ellas, nos evita el tener que trabajar con las incómodas funciones trigonométricas. Además, el uso de la notación compleja es la forma más frecuente de trabajar en teoría de ondas. La función de potencial de velocidad expresada en notación compleja  $\tilde{\Phi}(x, z, t)$  tiene la siguiente forma:

$$\tilde{\Phi}(x, z, t) = -\frac{i g A'}{\omega} \frac{\cosh[k(h+z)]}{\cosh(kh)} e^{ikx} e^{-i\omega t} \quad (4-47)$$

Siendo  $A' = A e^{i\varphi_1}$ . Evidentemente, nuestra función potencial de velocidad será la parte real de  $\tilde{\Phi}(x, z, t)$ .

$$\Phi(x, z, t) = \text{Re}\{\tilde{\Phi}(x, z, t)\} = \text{Re}\left\{-\frac{i g A'}{\omega} \frac{\cosh[k(h+z)]}{\cosh(kh)} e^{ikx} e^{-i\omega t}\right\} \quad (4-48)$$

Simplemente por una cuestión de facilidad de exposición de los desarrollos matemáticos hemos considerado que la propagación de la onda sigue la dirección del eje +X. podría haberse empleado cualquier dirección arbitraria en el plano XY, en cuyo caso:



$$\Phi(x, y, z, t) = \text{Re}\{\tilde{\Phi}(x, y, z, t)\} = \text{Re}\left\{-\frac{i g A'}{\omega} \cdot \frac{\cosh[k(h+z)]}{\cosh(kh)} \cdot e^{i(k \cdot x - \omega t)}\right\} \quad (4-49)$$

Siendo en este caso:

- $\mathbf{k} = (k \cos\theta, k \sin\theta)$  el vector número de onda en la dirección  $\theta$
- $\mathbf{x} = (x, y)$  el vector de posición.
- $\text{Re}\{\}$  indica la parte real del número imaginario resultante.
- $\tilde{\Phi}$  representa el potencial de velocidad complejo.

#### 4.4. Función de desplazamiento de la superficie libre $\eta$

Conocida la función de potencial de velocidad  $\Phi(x, z, t)$  puede obtenerse fácilmente la expresión matemática que define la superficie libre del fluido  $\eta(x, t)$  para el caso de la onda progresiva que avanza según +X. Para ello sólo tenemos que aplicar la CCD en la superficie libre e introducir el valor de la derivada temporal de la función potencial  $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + g \eta = 0 \quad ; \quad \text{en } z = 0 \quad (4-50)$$

$$\eta(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \varphi_1) \quad (4-51)$$

$A$  es la amplitud de la onda. En teoría lineal esta amplitud es simétrica respecto del nivel medio del mar en

reposito, por lo que  $A = H/2$ , siendo  $H$  la altura de la ola.

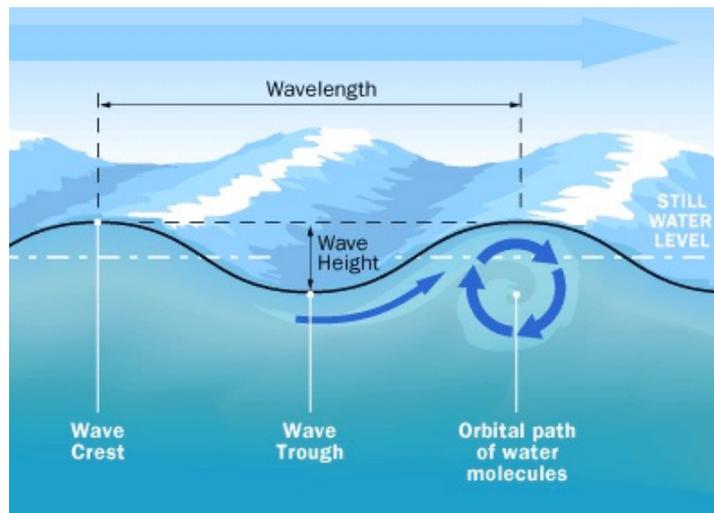


Figura 4-7. Desplazamiento de la superficie libre del fluido al paso de la onda.

Esta simetría del desplazamiento de la superficie libre respecto al nivel en reposo sólo se cumple en la teoría lineal de ondas. Si aplicáramos otras teorías no lineales más complejas, en la que no se desprecian los términos no lineales en los desarrollos en serie de Taylor, veríamos que los perfiles pierden su simetría con predominio de la cresta frente al seno. Esto se puede observar muy bien en un día de playa (ver figura adjunta).

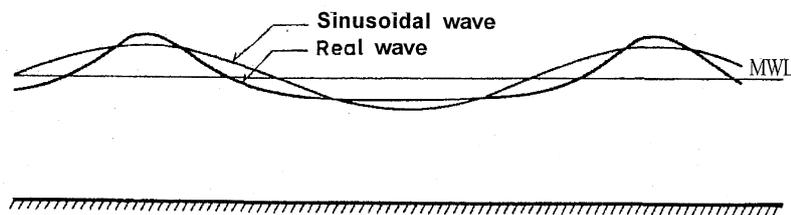


Figura 4-8. Comparación del perfil de onda real "no lineal" frente a la onda de Airy.

A pesar de todo, volvemos a insistir que la Teoría Lineal funciona bastante bien, y para nosotros como ingenieros, su aproximación es más que suficiente para la resolución de la inmensa mayoría de los problemas del día a día en ingeniería marítima.

## 4.5. Ecuación de dispersión

Se avisa al lector que el resultado del presente apartado es crucial desde un punto de vista práctico en ingeniería marítima y para la resolución numérica de los problemas de propagación de oleaje empleando la Mild-Slope Equation.

Hasta ahora hemos obtenido la función potencial de velocidad  $\Phi(x, z, t)$  y la ecuación de la superficie libre del fluido  $\eta(x, t)$ . Consideraremos el caso concreto de una onda progresiva que avanza en el sentido  $+X$ .

Recordamos aquí la CCC en la superficie libre del fluido:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - w = 0 \quad ; \quad \text{en } z = 0 \quad (4-52)$$

Desarrollando la derivada  $\frac{\partial \eta}{\partial t}$  e introduciendo  $w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ , ambos particularizados en  $z = 0$  obtenemos:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = A \omega \operatorname{sen}(kx - \omega t + \varphi_1) \quad (4-53)$$

$$w(0) = \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]_{z=0} = \frac{g A k}{\omega} \tanh(kh) \operatorname{sen}(kx - \omega t + \varphi_1) \quad (4-54)$$

Introduciendo los resultados (4-53) y (4-54) en la ecuación (4-52), obtenemos finalmente la expresión de la **ecuación de dispersión** que relaciona los tres parámetros fundamentales de una onda: **L – T – h**.

$$\omega^2 = g k \tanh(kh) \quad (4-55)$$

De esta forma, conocidos dos de ellos el tercero está determinado. Se trata de una ecuación implícita que debe ser resuelta por iteración. Observe el lector que en la ecuación de dispersión no aparece por ningún sitio la altura de la ola.

Otra consecuencia fundamental de la ecuación de dispersión es que nos dice que **la onda lineal es dispersiva en frecuencia**. Esto equivale a decir que las ondas de mayor periodo tienen mayor celeridad que las de menor periodo, sin intervenir para nada la altura de ola.

Esta es precisamente la explicación del fenómeno por el cual las tempestades en alta mar (SEA) suelen llegar a tierra en trenes de ondas ordenados (mar de fondo o SWELL), pues las propias ondas se ordenan y clasifican espacialmente según su periodo a medida que se alejan de la zona de generación. Obsérvense las siguientes fotografías para una mejor visualización del fenómeno.



Figura 4-9. Comparación de un Sea (izquierda) y un Swell (derecha).

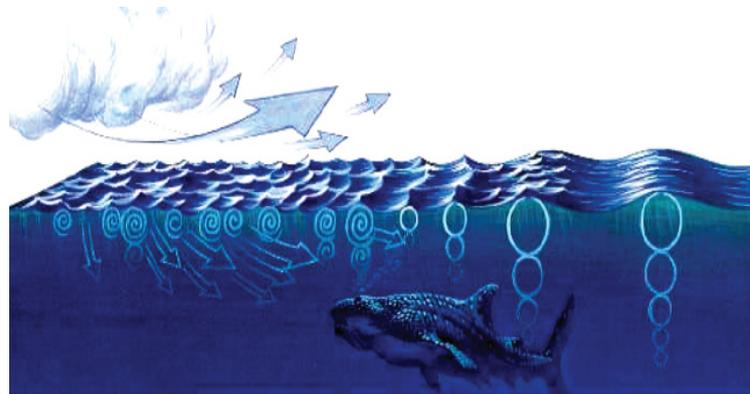


Figura 4-10. Las ondas son dispersivas en frecuencia. Los trenes de onda se ordenan cuando salen del área de generación (fetch) y se propagan hacia las costas.

## 4.6. Aplicación práctica de la ecuación de dispersión.

En ingeniería marítima suele expresarse la ecuación de dispersión en función de los valores  $T$ -  $L$ -  $h$ . Para ello sólo necesitamos sustituir los valores de  $\omega$  y  $k$  en función de la longitud de onda  $L$  y el periodo  $T$ .

$$\omega^2 = g k \tanh(kh) \quad (4-56)$$

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right) \quad (4-57)$$

La anterior ecuación es **implícita**, lo que quiere decir que la longitud de onda  $L$  no puede ser despejada directamente, pues se encuentra dentro del argumento de la tangente hiperbólica. De cualquier forma, observamos que esta ecuación relaciona los principales parámetros del oleaje:  $L$ ,  $T$  y  $h$ .

Analizando el comportamiento matemático de las funciones hiperbólicas, podemos obtener consecuencias prácticas fundamentales para su aplicación en problemas reales de ingeniería marítima. Obsérvese la siguiente figura en la que se han representado gráficamente las **funciones hiperbólicas  $\sinh(x)$ ,  $\cosh(x)$  y  $\tanh(x)$** :

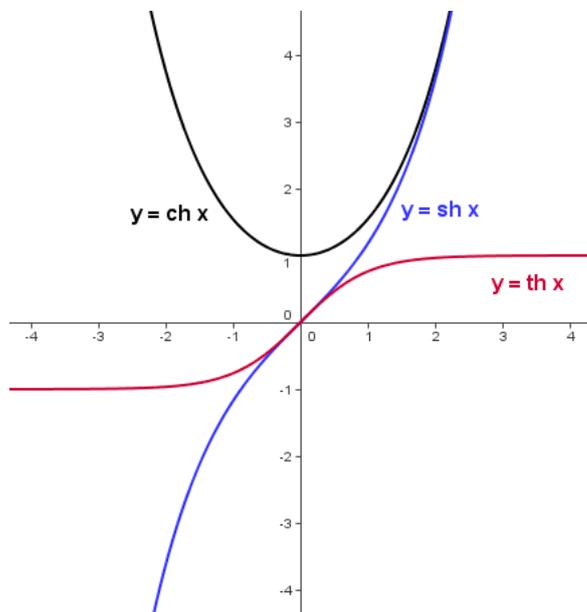


Figura 4-11. Funciones hiperbólicas.

Veamos algunas propiedades de las funciones hiperbólicas que nos resultarán útiles más adelante:

- el  **$\sinh(x)$**  parte de cero en el origen y crece exponencialmente con  $x$ ; además, para valores pequeños de  $x$  se cumple que  $\sinh(x) \approx \tanh(x) \approx x$ .
- El  **$\cosh(x)$**  vale 1 cuando  $x = 0$  y crece exponencialmente con  $x$ . A medida que crece  $x$  el  $\cosh(x)$  y el  $\sinh(x)$  convergen hacia un mismo valor.
- La  **$\tanh(x)$**  parte de cero en el origen y crece hacia un valor asintótico 1 cuando  $x$  tiende a infinito. Además para valores pequeños de  $x$  se cumple que  $\tanh(x) \approx \sinh(x) \approx x$ .

Se introduce en este punto el concepto fundamental de **profundidad relativa**, o cociente entre la profundidad y la longitud de onda  $h/L$ . Cuando en ingeniería marítima hablamos de profundidad relativa no nos estamos refiriendo a cuántos metros de calado real haya en un punto del mar concreto.

Como ejemplo clarificador del concepto de profundidad relativa pongamos el caso de la onda de un tsunami que se desplaza por el océano con longitud de onda de cientos de kilómetros y profundidades enormes; en el caso de la Fosa de las Marianas alcanzaría los 11.034 m. En este caso, el cociente  $h/L$  resulta un valor muy pequeño y diremos que **una onda de Tsunami se desplaza en baja profundidad relativa** (puede parecer

contradictorio, pero sus consecuencias prácticas son enormes como veremos en un momento).

#### 4.6.1. Concepto de aguas profundas

Cuando el valor de  $h/L$  es mayor de 0,50 se observa que la tangente hiperbólica toma valores prácticamente iguales a la unidad. Obsérvese la siguiente tabla:

Tabla 4-1 Comportamiento de las funciones hiperbólicas.

h/L	k·h	senh(kh)	cosh(kh)	th(kh)
0,00	0,000	0,000	1,000	0,000
0,01	0,063	0,063	1,002	0,063
0,02	0,126	0,126	1,008	0,125
0,03	0,188	0,190	1,018	0,186
0,04	0,251	0,254	1,032	0,246
<b>0,05</b>	<b>0,314</b>	<b>0,319</b>	<b>1,050</b>	<b>0,304</b>
0,10	0,628	0,670	1,204	0,557
0,20	1,257	1,614	1,899	0,850
0,30	1,885	3,217	3,369	0,955
0,40	2,513	6,132	6,213	0,987
<b>0,50</b>	<b>3,142</b>	<b>11,549</b>	<b>11,592</b>	<b>0,996</b>
0,60	3,770	21,677	21,700	0,999
0,70	4,398	40,647	40,660	1,000
0,80	5,027	76,200	76,206	1,000
0,90	5,655	142,837	142,841	1,000
1,00	6,283	267,745	267,747	1,000

Por tanto, la ecuación de dispersión quedaría de la siguiente forma:

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh(kh) \approx \frac{gT^2}{2\pi} = 1,56 T^2 \tag{4-58}$$

En el caso en que  $h/L > 0,5$  decimos que nos encontramos en **aguas profundas**. En estas profundidades la onda se propaga sin “sentir” en absoluto la presencia del fondo, pues su efecto estaba incluido dentro de la tangente hiperbólica y hemos concluido que su valor es prácticamente constante ( $\tanh(kh) \approx 1$ ) cuando  $h/L > 0,5$ .

En aguas profundas la longitud de onda  $L$  sólo depende del periodo  $T$ , o lo que es lo mismo, la celeridad de la onda sólo depende del periodo.

#### 4.6.2. Concepto de aguas reducidas o someras (shallow water)

Observese de nuevo la tabla anterior con los valores de las funciones hiperbólicas para distintos valores de  $h/L$ . Los valores de  $kh$ ,  $\sinh(kh)$  y  $\tanh(kh)$  comienzan a ser muy parecidos cuando  $\frac{h}{L} < 0,05$ . Por tanto, la ecuación de dispersión nos queda así:

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh(kh) \approx \frac{gT^2}{2\pi} kh \tag{4-59}$$

La ecuación de dispersión deja de ser una ecuación implícita y podemos despejar directamente el valor de  $L$  en función de  $T$  y  $h$ .

$$L = T \sqrt{gh} \quad (4-60)$$

En este caso decimos que estamos en **aguas reducidas o someras** (shallow water). Ahora la longitud de onda depende del periodo y de la profundidad. Es decir, la onda está sintiendo el efecto de rozamiento del fondo en su propagación. Sabiendo que la celeridad de la onda es el cociente entre  $L$  y  $T$ , obtenemos:

$$c = \frac{L}{T} = \sqrt{gh} \quad (4-61)$$

Este resultado no debe extrañarnos, pues es precisamente la celeridad a la que se desplazan las ondas y las perturbaciones en la superficie de canales abiertos en lámina libre. La conclusión obtenida es que en aguas someras la celeridad de la onda sólo depende de la profundidad.

Ya puede entenderse claramente por qué la onda de un tsunami se desplaza a una celeridad  $c = \sqrt{gh}$ , pues a todos los efectos es una onda que se propaga en aguas reducidas desde un punto de vista relativo, debido a que el cociente  $h/L \ll 0,05$ .

## 4.7. Celeridad de grupo

Imaginemos un día de playa en verano; uno de esos días de sol y calor en los que apetece un baño refrescante en el que nos dejamos arrastrar y revolcar por las olas. Si nos fijamos un poco en qué está ocurriendo en esos momentos podríamos ver claramente que se produce una secuencia regular de varias olas más grandes (aproximadamente 3) seguidas de otras más pequeñas... Este fenómeno tiene hasta su propio nombre en Cádiz. A las tres olas más grandes se las conoce como "**Las tres Marías**".

Esta introducción anecdótica tiene un significado físico fundamental en ingeniería marítima, pues nos está dando una pista sobre como llegan los trenes de onda a la costa durante su propagación. Es decir, nos indica que los trenes de vienen en **grupos de olas**.

Una forma sencilla de visualizar y comprender qué es y por qué se produce este fenómeno es suponer la interacción de dos ondas sinusoidales moviéndose en igual dirección pero con una ligera diferencia en su longitud de onda ( $L_i$ ) y su periodo ( $T_i$ ). Por simplificar supondremos que son de igual altura  $H$ . Podemos aplicar el principio de superposición (onda lineal), de esta forma hemos creado un grupo de olas que podemos visualizar en la siguiente figura.

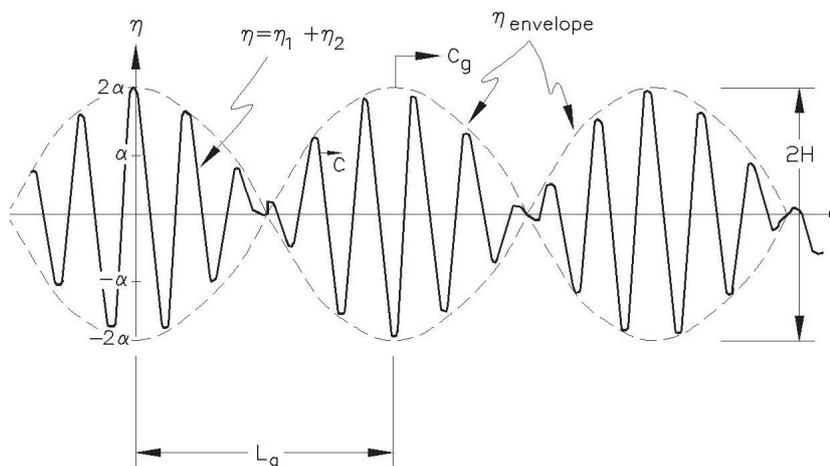


Figura 4-12. Visualización de los grupos de olas.

$$\eta(x, t) = \eta_1(x, t) + \eta_2(x, t) = \frac{H}{2} \cos(k_1 x - \omega_1 t) + \frac{H}{2} \cos(k_2 x - \omega_2 t) \quad (4-62)$$

$$k_i = \frac{2\pi}{L_i} \quad \omega_i = \frac{2\pi}{T_i} \quad (4-63)$$

Usando simples relaciones trigonométricas podemos obtener la ecuación de la onda envolvente del grupo de olas. Pues bien, la **celeridad de grupo** es precisamente la celeridad a la que se desplaza esa onda envolvente y es además la celeridad a la que se transmite la energía del oleaje durante la propagación.

$$\eta(x, t) = H \cos \left[ \pi \left( \frac{L_2 - L_1}{L_1 L_2} \right) x - \pi \left( \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} \right) t \right] \quad (4-64)$$

Observando la ecuación de la onda envolvente podemos identificar los términos de número de onda  $k_g$  y frecuencia angular  $\omega_g$  envolvente del grupo "g" de olas.

$$k_g = \pi \left( \frac{L_2 - L_1}{L_1 L_2} \right) = \pi \left( \frac{1}{L_1} - \frac{1}{L_2} \right) \quad (4-65)$$

$$\omega_g = \pi \left( \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} \right) = \pi \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \quad (4-66)$$

Por tanto la expresión de la celeridad de grupo será:

$$c_g = \frac{\omega_g}{k_g} = \frac{\pi \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)}{\pi \left( \frac{1}{L_1} - \frac{1}{L_2} \right)} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad (4-67)$$

En realidad la celeridad de grupo se obtendrá del anterior cociente incremental tomando límites cuando  $\Delta\omega$  y  $\Delta k$  tienden a cero.

$$c_g = \lim_{\Delta\omega, \Delta k \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk} \quad (4-68)$$

Como conocemos que la ecuación de dispersión relaciona las tres variables L - T - h de la onda, podemos obtener la anterior derivada:

$$\omega^2 = g k \tanh(kh) \Rightarrow \text{ derivar respecto a } k \Rightarrow 2\omega \frac{d\omega}{dk} = g \tanh(kh) + \frac{gkh}{\cosh^2(kh)} \quad (4-69)$$

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{g}{2\omega} \tanh(kh) + \frac{gkh}{2\omega \cosh^2(kh)} \quad (4-70)$$

Si en el primer término de la derecha de la ecuación (4-70) sustituimos el valor de la  $\tanh(kh)$  y en el segundo término el valor de  $gk$ , ambos despejados de la ecuación de dispersión, obtenemos:

$$c_g = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2} \frac{\omega h}{\tanh(kh) \cosh^2(kh)} = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c \frac{kh}{\sinh(kh) \cosh(kh)} \quad (4-71)$$

De la igualdad de las funciones hiperbólicas:  $2 \operatorname{senh}(kh) \cosh(kh) = \operatorname{senh}(2kh)$ , finalmente obtenemos:

$$c_g = \frac{1}{2} c \left[ 1 + \frac{2kh}{\operatorname{senh}(2kh)} \right] \quad (4-72)$$

Una vez obtenida la expresión matemática de la celeridad de grupo, vamos a demostrar dos relaciones de gran importancia en ingeniería marítima, como son los valores de la celeridad de grupo particularizados a los casos de aguas profundas (deep water) y reducidas (shallow water).

Para el caso de **aguas profundas**, donde el cociente  $h/L > 0,5$ , la función  $\operatorname{senh}(2kh)$  toma valores exponencialmente crecientes, por lo que el cociente  $\frac{2kh}{\operatorname{senh}(2kh)} \approx 0$ . En este caso, la celeridad de grupo en aguas profundas  $c_{go}$  toma el valor de:

$$c_{go} = \frac{1}{2} c \left[ 1 + \frac{2kh}{\operatorname{senh}(2kh)} \right] \approx \frac{1}{2} c \quad (4-73)$$

Es decir, **en aguas profundas la celeridad de grupo es la mitad de la celeridad de fase de la onda**. Sin embargo, para el caso de **aguas someras**, donde el cociente  $h/L < 0,05$  la función  $\operatorname{senh}(2kh) \approx 2kh$ , por lo que el cociente  $\frac{2kh}{\operatorname{senh}(2kh)} \approx 1$ . En este caso, la celeridad de grupo en aguas profundas  $c_{go}$  toma el valor de:

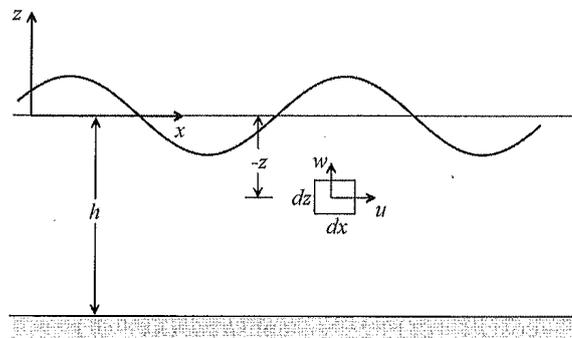
$$c_{go} = \frac{1}{2} c \left[ 1 + \frac{2kh}{\operatorname{senh}(2kh)} \right] \approx c \quad (4-74)$$

Es decir, **en aguas someras la celeridad de grupo es igual a la celeridad de fase de la onda**.

## 4.8. Energía de la onda

La energía de una onda y su flujo o transmisión en la unidad de tiempo, son conceptos fundamentales en el estudio de los fenómenos de propagación del oleaje. En este TFM no se hará una demostración exhaustiva de la obtención de las ecuaciones que definen la energía de la onda, pues se escapa del alcance del presente trabajo. Se remite al lector a la bibliografía técnica donde de forma sencilla, pero bastante tediosa, se llega a las ecuaciones de la energía y flujo de energía de una onda progresiva [10].

El cálculo de la **energía instantánea** de la onda parte de la obtención de los términos de energía cinética ( $dE_c$ ) y potencial ( $dE_p$ ) de un elemento diferencia de masa  $dm$  del fluido al paso de una onda. A partir de ella se obtiene la energía instantánea por integración en toda la columna líquida.



$$dE_{inst} = dE_c + dE_p \quad (4-75)$$

$$E_{inst} = \int_{-h}^{\eta} dE_{inst} \quad (4-76)$$

Se define el **flujo de energía**  $f_e$  como la cantidad de energía que se transmite a través de una sección dada en la unidad de tiempo. En el cálculo del flujo de energía se tienen en cuenta los términos de energía cinética, potencial y el trabajo de las fuerzas de presión que mueven el elemento diferencial de masa. Al igual que en el caso de la energía instantánea, el flujo instantáneo de energía total se obtiene por integración en toda la columna líquida.

No obstante, no estamos interesados en conocer los valores instantáneos de la energía y el flujo de energía. Al tratarse de magnitudes periódicas en el espacio y en el tiempo, nos interesan sus **valores promediados en un periodo o en una longitud de onda**.

Por ejemplo, sea  $f(x, t)$  una función periódica en  $x, t$ . Sus valores promediados en el tiempo y el espacio serán:

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(x, t) dt \quad (4-77)$$

$$\langle f \rangle = \frac{1}{L} \int_x^{x+L} f(x, t) dx \quad (4-78)$$

La energía media de la onda por unidad de superficie horizontal se obtiene como el promedio en una longitud de onda del valor total de la energía instantánea en toda la columna del fluido.

$$E = E_{inst} = \frac{1}{L} \int_x^{x+L} E_{inst} dx = \frac{1}{8} \rho g H^2 \quad (4-79)$$

El flujo medio de la energía de una onda se obtiene como el promedio en un periodo del valor total del flujo instantáneo de energía en toda la columna del fluido.

$$E_f = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f_e dt = E c_g \quad (4-80)$$

De ahí que suele decirse que la energía de la onda progresiva se transmite a la celeridad de grupo.  $E_f$  tiene dimensiones de una energía por unidad de frente de onda y unidad de tiempo, o lo que es lo mismo, potencia por unidad de frente de onda.



# 5 LA MILD-SLOPE EQUATION

---

*Sólo aquellos que tengan la paciencia de hacer perfectamente las cosas simples, adquirirán la habilidad de hacer las difíciles fácilmente.*

- Friedrich Schiller -

**E**n este capítulo vamos a introducir de dónde y cómo se obtiene la ecuación de la pendiente suave o Mild-Slope Equation (MSE). Esta ecuación fue desarrollada en la década de los 70 por J.C.W. Berkhoff [1] en su conocida tesis doctoral en la Universidad de Delft (Holanda). Esta ecuación nos permite simular los fenómenos de propagación del oleaje: shoaling, refracción, difracción y reflexión.

Se trata de un modelo aproximado que da resultados precisos cuando la batimetría del fondo marino es suave y poco inclinada. A esta hipótesis se la conoce como **hipótesis de pendiente suave o de Rayleigh**. Según esta hipótesis, cuando la pendiente del fondo marino es suave, pueden despreciarse los fenómenos de reflexión del oleaje producidos por la propia pendiente del fondo y se supone que la onda durante la propagación se adapta de forma instantánea a la profundidad existente en cada punto, de forma que sus características cinemáticas y dinámicas son idénticas a las de una onda lineal que se propaga sobre un fondo horizontal con dicha profundidad.

Desde la década de los 70 la Mild-Slope Equation (MSE) se ha empleado con mucha difusión en todo el mundo como modelo matemático de propagación de oleaje en zonas costeras y dársenas portuarias, simulando con precisión ingenieril suficiente los fenómenos de propagación de una onda monocromática y lineal.

En este TFM se estudia la **MSE en su formulación frecuencial**, no temporal; significa esto que la solución obtenida es estacionaria, no estamos interesados en soluciones transitorias de la solución (dependientes del tiempo).

El problema que se planteó Berkhoff en su tesis doctoral fue cómo obtener una solución al problema de propagación de ondas cuando del fondo es irregular; no debe olvidarse que el modelo de onda de Airy considera el fondo de profundidad constante como una de sus hipótesis básicas.

Para el caso de profundidad no constante no es posible obtener una solución analítica elegante como la obtenida por la Teoría Lineal de Airy, pero con las hipótesis adecuadas pueden extrapolarse sus resultados para el caso de fondo irregular suave y poco inclinado, como veremos en este capítulo.

No se pretende en este TFM hacer una demostración exhaustiva de cómo se llega a la MSE. De toda la bibliografía consultada al respecto se puede comprobar que la deducción matemática rigurosa de la MSE es bastante tediosa; en algún caso se pueden leer comentarios en artículos técnicos en inglés del tipo: "...straightforward but tedious". Sin embargo, existen publicaciones donde se muestra un desarrollo más asequible e intuitivo de cómo se deduce la MSE [10].

## 5.1. Hipótesis básicas

Berkhoff parte en su formulación de la MSE del hecho evidente de que **la propagación del oleaje es un fenómeno eminentemente 2-D** que se produce en la superficie libre del fluido en contacto con la atmósfera, aunque de alguna forma **acoplado matemáticamente con la profundidad** (batimetría).

De ahí obtiene una ecuación en derivadas parciales formulada en un dominio 2-D contenido en el plano XY que incluye el "efecto del fondo" mediante la introducción de **coeficientes no constantes**, eliminando la variable z

de la ecuación.

Estos coeficientes no constantes, que dependen de la batimetría, se obtienen de forma local mediante la ecuación de dispersión obtenida por la teoría lineal de ondas de Airy ¿Puede hacerse esto? En teoría no, pues la teoría lineal parte de la hipótesis básica de profundidad constante. No obstante, cuando se cumple la condición de fondo suave (**hipótesis de Raileigh**) esta es una muy buena aproximación al problema.

Obsérvese la ecuación del potencial de velocidad (4-49) que obtuvimos en el capítulo anterior como solución de la ecuación de onda de Airy, en su formato complejo.

$$\Phi(x, y, z, t) = \text{Re} \{ \tilde{\Phi}(x, y, z, t) \} = \text{Re} \left\{ -\frac{igA'}{\omega} \cdot \frac{\cosh[k(h+z)]}{\cosh(kh)} \cdot e^{i(kx-\omega t)} \right\} \quad (5-1)$$

A partir de ahora trabajaremos con la forma compleja del potencial  $\tilde{\Phi}(x, y, z, t)$ . Si reordenamos y agrupamos los términos de esta ecuación obtenemos:

$$\tilde{\Phi}(x, y, z, t) = \phi(x, y) \frac{\cosh[k(h+z)]}{\cosh(kh)} e^{-i\omega t} = \phi(x, y) K_p(z, h) e^{-i\omega t} \quad (5-2)$$

Es decir, el potencial se compone del producto de tres funciones:

- $\phi(x, y)$  o potencial reducido de velocidad que solo depende de  $x, y$ . No confundir con el potencial total  $\Phi(x, y, z, t)$ .
- $K_p(z, h)$  o factor de profundidad que depende de  $z$  y  $h$ .
- $e^{-i\omega t}$  factor que controla la evolución temporal de la onda

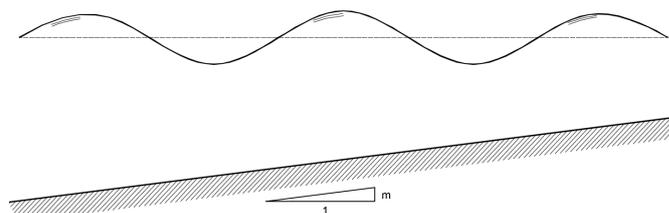
### 5.1.1. Hipótesis de Rayleigh o de fondo suave

La MSE parte de la **Hipótesis de Rayleigh**, que dice aproximadamente lo siguiente: “cuando el fondo es suave y poco inclinado, el coeficiente de reflexión de la onda producido por la propia pendiente del fondo es despreciable, lo cual nos permite aproximar la función de fondo  $K_p(h, z)$  para el caso real de batimetría irregular con el valor obtenido por la Teoría Lineal de Ondas de Airy para fondo de profundidad constante”.

Con esta hipótesis simplificativa hemos logrado un gran avance, pues ya sabemos que no es posible obtener una solución analítica de  $K_p(h, z)$  cuando el fondo es irregular.

$$K_p(z, h) = \frac{\cosh[k(h+z)]}{\cosh(kh)} \quad (5-3)$$

¿Cómo se sabe cuantitativamente cuando un fondo es suave? Hasta ahora hemos introducido conceptos intuitivos de una forma cualitativa pero que no nos marcan un límite de cuándo un fondo marino es suave y cuándo no lo es. La condición de fondo suave de Rayleigh se establece en función del parámetro de pendiente adimensional  $S_R$ :



$$S_R = \frac{m}{kh} \ll 1 \Rightarrow \text{fondo suave} \quad (5-4)$$

A efectos prácticos puede considerarse que la aproximación es aceptable para valores de  $S_R < 0,10$ .

## 5.2. Deducción de la Mild-Slope Equation

La MSE se puede obtener mediante un **promedio ponderado en la columna de agua de la ecuación de gobierno** (Ecuación de Laplace en notación compleja), tomando como función de ponderación el factor de profundidad  $K_p(h, z)$  obtenido en la teoría lineal de ondas de Airy para fondo constante.

$$\text{Ecuación de Gobierno:} \quad \nabla^2 \tilde{\Phi} = \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial z^2} = 0 \quad (5-5)$$

$$\int_{-h}^0 K_p(z, h) \nabla^2 \tilde{\Phi} dz = \int_{-h}^0 K_p(z, h) \left[ \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial z^2} \right] dz = 0 \quad (5-6)$$

Esta ecuación es equivalente a la ecuación de gobierno en forma integral. Sabiendo que el potencial de velocidad en notación compleja tiene la expresión obtenida en (5-2):

$$\tilde{\Phi}(x, y, z, t) = \phi(x, y) \frac{\cosh[k(h+z)]}{\cosh(kh)} e^{-i\omega t} = \phi(x, y) K_p(z, h) e^{-i\omega t} \quad (5-7)$$

La ecuación (5-6) puede escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} \int_{-h}^0 [K_p(z, h)]^2 dz \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial y} \int_{-h}^0 [K_p(z, h)]^2 dz \right] + k^2 \phi \int_{-h}^0 [K_p(z, h)]^2 dz = 0 \quad (5-8)$$

Obsérvese que el término  $e^{-i\omega t}$  se cancela, pues aparece multiplicando en todos los sumandos de la ecuación (5-8) y sólo depende del tiempo, por lo que sale fuera de las derivadas e integrales.

La integral que aparece en los tres sumandos puede resolverse analíticamente, pues conocemos la función  $K_p(z, h)$  y podemos obtener su primitiva de forma sencilla:

$$\int_{-h}^0 [K_p(z, h)]^2 dz = \int_{-h}^0 \left[ \frac{\cosh[k(h+z)]}{\cosh(kh)} \right]^2 dz = \frac{\tanh(kh)}{k} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right) \right] \quad (5-9)$$

De la ecuación de dispersión sabemos que:

$$\omega^2 = g k \tanh(kh) \Rightarrow \frac{\tanh(kh)}{k} = \frac{\omega^2}{gk^2} = \frac{c^2}{g} \quad (5-10)$$

Además, sabemos que el valor de la celeridad de grupo es:

$$c_g = \frac{c}{2} \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right) \quad (5-11)$$

Por lo que finalmente obtenemos el valor de la integral (5-9).

$$\int_{-h}^0 [K_p(z, h)]^2 dz = \frac{cc_g}{g} \quad (5-12)$$

Si introducimos el resultado (5-12) en la ecuación (5-8) nos queda que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{cc_g}{g} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{cc_g}{g} \right] + k^2 \phi \frac{cc_g}{g} = 0 \quad (5-13)$$

El término  $g$  de la aceleración de la gravedad se cancela. Empleando notación vectorial compacta obtenemos finalmente la ecuación de la pendiente suave o "Mild-Slope Equation" en su forma frecuencial (en el dominio de la frecuencia).

$$\nabla \cdot (cc_g \nabla \phi) + k^2 cc_g \phi = 0 \quad (5-14)$$

El lector debe haberse dado cuenta ya que la MSE es una ecuación definida en la variable escalar  $\phi(x, y)$ , potencial reducido de velocidad (no confundir con el potencial total  $\Phi(x, y, z, t)$ ), en un dominio de integración 2D definido en el plano XY. Hemos, por tanto, **desacoplado la variable z del problema**. Nos quedan unos coeficientes "no constantes":  $cc_g$  y  $k^2 cc_g$ , que pueden obtenerse localmente a través de la ecuación de dispersión (4-55).

Se trata de una ecuación de tipo elíptico, lo que significa que se requieren condiciones de contorno en todo el contorno  $\Gamma$  del dominio de integración  $\Omega$ .

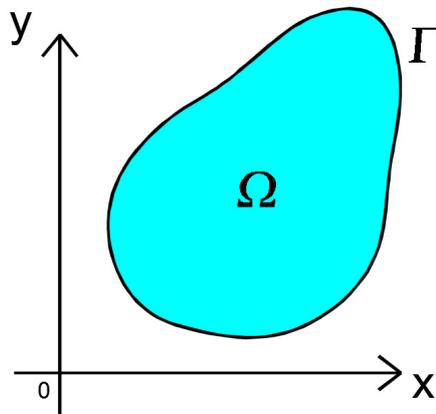


Figura 5-1. Dominio de integración y contorno.

A la ecuación diferencial (5-14) de la MSE se le denomina **forma fuerte** del problema, en contraposición a la denominada **forma débil** o integral que será la que emplearemos en próximos capítulos para su integración numérica mediante el método de los elementos finitos. Estos conceptos, forma fuerte y débil, sólo son introducidos aquí. Serán convenientemente aclarados en su momento.

### 5.3. Condiciones de contorno del problema

Ya se ha comentado, y volvemos a insistir aquí, que la MSE es una ecuación diferencial en derivadas parciales de **tipo elíptico**. Es decir, para su resolución se requieren condiciones en todo el contorno cerrado  $\Gamma$  del dominio de integración  $\Omega$ .

Los contornos del dominio en el problema de propagación de ondas se pueden clasificar en dos grupos:

- **Contornos cerrados  $\Gamma_1$ :** son bordes físicos del dominio (costa, dique, muelle, ... etc.) con cierta capacidad de reflexión del oleaje incidente.
- **Contornos abiertos  $\Gamma_2$ :** son contornos ficticios “no físicos” que necesitamos imponer para cerrar el dominio y que éste sea computacional. Este contorno produce un truncamiento del dominio semiinfinito (mar abierto) en el que debemos garantizar condiciones de “total permeabilidad”, tanto a las ondas que llegan a él desde el exterior, como de las reflejadas desde los contornos físicos del dominio y que salen del dominio. Es decir, las ondas no deben “sentir” su presencia.

Esta clasificación es de enorme transcendencia a la hora de resolver numéricamente la MSE, pues es precisamente de la aplicación de las condiciones de contorno de donde proceden los mayores errores numéricos que se observan en los modelos y donde se encuentran las mayores dificultades a la hora de implementar los modelos numéricos.

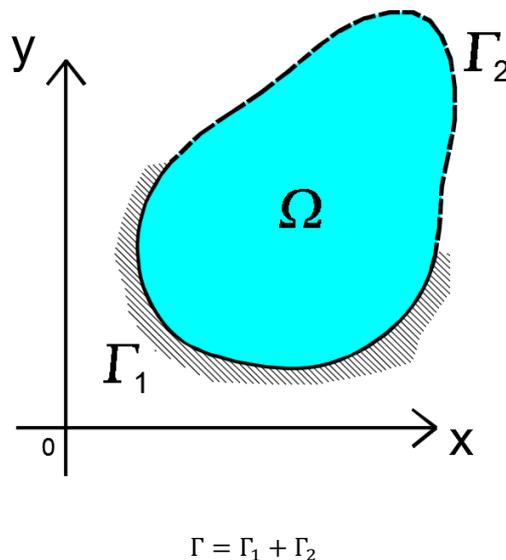


Figura 5-2. Contornos abiertos y cerrados.

Conseguir que el contorno abierto sea totalmente permeable será principalmente nuestro reto en este TFM. De otra forma produciría ondas espúreas reflejadas hacia el interior del dominio que dan “ruido” a la solución numérica, pudiendo invalidar los resultados de nuestro modelo numérico en ciertas circunstancias, como veremos en próximos capítulos del presente TFM.

Habitualmente, en problemas prácticos de ingeniería marítima, las **condiciones de contorno del problema son de tipo mixto o Robin**. Esto significa que en la condición de contorno aparecen juntos los términos de potencial  $\phi$  y flujo  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ . No obstante, para dar completa generalidad a las condiciones de contorno del problema en este TFM, vamos a introducir también condiciones de contorno tipo esenciales (Dirichlet) y naturales (Neumann).

- **C. C. Esencial o Dirichlet:** prescribe un valor fijo del potencial  $\phi$  en el contorno. Esta condición de contorno no tiene un símil físico que permita visualizarla. No obstante, es interesante pues nos permite obtener frecuencias de resonancia en algunos casos de dársenas abiertas, como veremos en alguna de las simulaciones realizadas en próximos capítulos.
- **C. C. Natural o Neumann:** prescribe un valor fijo del flujo de potencial  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$  en el contorno. Este tipo de condición de contorno define una velocidad prescrita del fluido en el contorno en la dirección definida por el vector normal al contorno  $\mathbf{n}$ ; podríamos encontrarnos este tipo de condición de contorno en un túnel de oleaje en laboratorio, donde una paleta móvil genera el movimiento ondulatorio del fluido en un extremo.

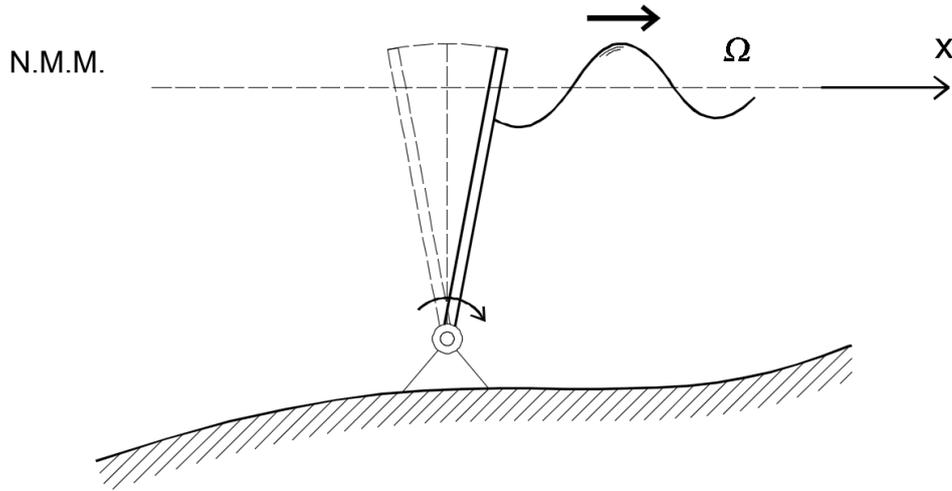


Figura 5-3. Contornos con  $\frac{\partial\phi}{\partial n}$  prescrito. Caso de pala generadora de oleaje en túnel de oleaje

Dejaremos para próximos capítulos la obtención e implementación de cada uno de los cuatro tipos de condición de contorno planteados.

# 6 APLICACIÓN DEL M.E.F. A LA MILD-SLOPE EQUATION UNIDIMENSIONAL (1-D)

*El experimentador que no sabe lo que está buscando no comprenderá lo que encuentra.*

- Claude Bernard -

Establecidas previamente las bases teóricas fundamentales del fenómeno de propagación de ondas, iniciamos con este capítulo nuestro periplo por el fascinante mundo de los métodos numéricos en ingeniería marítima. Buscamos una solución numérica de la “Mild-Slope Equation” (MSE) mediante el Método de los Elementos Finitos (MEF) con aproximación de Galerkin Continua.

Siguiendo el espíritu pedagógico de este TFM, iniciaremos la implementación numérica del modelo de propagación de ondas empleando la forma más sencilla y básica de la MSE, que es su forma 1-D, es decir, planteada únicamente en la variable espacial  $x$  (problema unidimensional).

Evidentemente las aplicaciones de la MSE 1-D son muy limitadas desde un punto de vista práctico. En el ejercicio profesional de la ingeniería marítima estamos más interesados en la resolución de dominios planos 2-D que simulen problemas costeros y portuarios con dominio y variación de la batimetría en el plano X-Y. No obstante, la resolución numérica del problema unidimensional tiene una importancia crucial desde el punto de vista pedagógico en la aplicación de los modelos numéricos de propagación de oleaje para nuestros alumnos de grado y máster.

En este capítulo resolveremos numéricamente varios problemas clásicos de propagación de oleajes mediante un código de elementos finitos programado en Matlab®. La solución numérica se comparará, en todos los casos, con la solución analítica. De esta forma podremos calibrar la bondad del modelo numérico empleado.

## 6.1. La Mild-Slope Equation 1-D

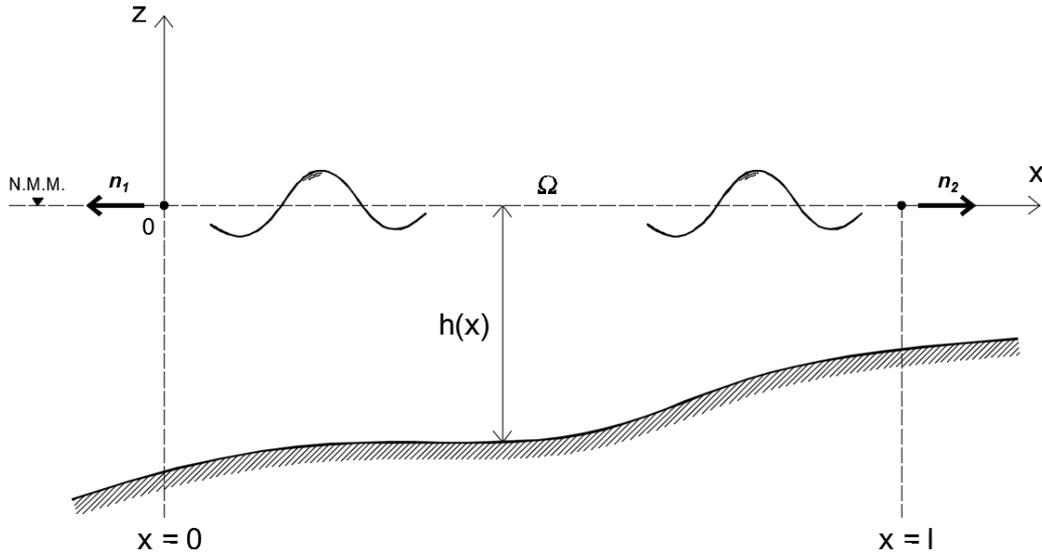
En el capítulo 5 obtuvimos la forma general vectorial de la MSE en 2D.

$$\nabla(cc_g \nabla \phi) + k^2 cc_g \phi = 0 \quad (6-1)$$

En el caso unidimensional el operador vectorial-diferencial Nabla  $\nabla$  se transforma en la derivada espacial  $\frac{d}{dx}$ , por lo que la ecuación MSE en su forma 1-D se expresa como:

$$\frac{d}{dx} \left( cc_g \frac{d\phi}{dx} \right) + k^2 cc_g \phi = 0 \quad (6-2)$$

El **dominio de integración**  $\Omega$ , por tanto, está definido en el eje  $X$ , considerándose que los frentes de onda son infinitos en la dirección  $\pm Y$ . Los contornos del dominio  $\Omega$  se sitúan en los extremos  $x = 0$  y  $x = l$ , en cada uno de ellos definimos un vector unitario normal exterior del dominio  $\mathbf{n}_i$ , tal y como se observa en la siguiente figura:



Dominio  $\Omega$ :  $0 \leq x \leq l$

Figura 6-1. Dominio de integración 1-D.

## 6.2. Formulación débil de la Mild-Slope Equation 1-D

Para obtener la **forma integral o débil** de la MSE 1-D, primero elegimos una función de peso o ponderal  $\psi(x)$  arbitraria y planteamos la siguiente igualdad:

$$\psi \left[ \frac{d}{dx} \left( cc_g \frac{d\phi}{dx} \right) + k^2 cc_g \phi \right] = 0 \quad (6-3)$$

Ahora integramos en todo el dominio  $\Omega$ :  $0 \leq x \leq l$ , obteniéndose:

$$\int_0^l \psi \left[ \frac{d}{dx} \left( cc_g \frac{d\phi}{dx} \right) + k^2 cc_g \phi \right] dx = 0 \quad (6-4)$$

$$\int_0^l \psi \frac{d}{dx} \left( cc_g \frac{d\phi}{dx} \right) dx + \int_0^l k^2 cc_g \psi \phi dx = 0 \quad (6-5)$$

Si aplicamos la regla de integración por partes a la primera integral de la ecuación (6-5) se obtiene el siguiente resultado:

$$\text{Regla de integración por partes: } \int_a^b u dv = u v \Big|_a^b - \int_a^b v du = 0 \quad (6-6)$$

$$u = \psi \quad du = \frac{d\psi}{dx} dx$$

$$dv = \frac{d}{dx} \left( cc_g \frac{d\phi}{dx} \right) dx \quad v = cc_g \frac{d\phi}{dx}$$

$$\int_0^l \psi \frac{d}{dx} \left( cc_g \frac{d\phi}{dx} \right) dx = cc_g \psi \frac{d\phi}{dx} \Big|_0^l - \int_0^l cc_g \frac{d\psi}{dx} \frac{d\phi}{dx} dx$$

Por tanto, introduciendo la ecuación (6-6) en (6-5) obtenemos la forma débil de la MSE en 1-D:

$$cc_g \psi \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=0}^{x=l} - \int_0^l cc_g \frac{d\psi}{dx} \frac{d\phi}{dx} dx + \int_0^l k^2 cc_g \phi \psi dx = 0 \quad (6-7)$$

Esta ecuación es totalmente equivalente a la **forma fuerte** (6-2) de la MSE 1-D. El motivo por el que se le llama **forma débil**, es precisamente porque se le exige a la variable de campo  $\phi(x)$  un orden menos de derivación que en la forma fuerte, a costa de aumentar el orden de la derivada de la función arbitraria de peso  $\psi(x)$ . Lo veremos con detalle un poco más adelante.

El MEF emplea el método de los **residuos ponderados de Galerkin**. Este método toma como funciones  $\psi(x)$  de **ponderación de los residuos** las propias funciones de forma empleadas para interpolar la solución.

Cuando en la ecuación de gobierno de nuestro problema (6-2) introducimos una aproximación  $\bar{\phi}(x) \approx \phi(x)$  de la solución para la variable de estado, en lugar de su valor exacto  $\phi(x)$ , es evidente que la ecuación no se cumple exactamente:

$$\frac{d}{dx} \left( cc_g \frac{d\bar{\phi}}{dx} \right) + k^2 cc_g \bar{\phi} = r \neq 0 \quad (6-8)$$

Aparece entonces el **concepto de residuo**  $r$ . El método de Galerkin se basa en minimizar este residuo mediante un reparto ponderado del error en todo el dominio de integración. Para ello, Galerkin emplea las funciones de forma (interpolación) como funciones de ponderación del residuo.

$$\int_0^l \psi \left[ \frac{d}{dx} \left( cc_g \frac{d\bar{\phi}}{dx} \right) + k^2 cc_g \bar{\phi} \right] dx = \int_0^l \psi r dx = 0 \quad (6-9)$$

### 6.3. Condiciones de contorno del problema

En la forma débil de la ecuación de gobierno (6-7) necesitamos conocer los valores del flujo de potencial:  $\frac{d\phi}{dx}$  ó  $\frac{d\phi}{dn}$  en los dos extremos del dominio de integración  $\Omega$ :  $0 \leq x \leq l$ . Estas serán precisamente las condiciones de contorno de nuestro problema 1-D.

Como ya introdujimos en el epígrafe 5.3, tendremos cuatro tipos de condición de contorno:

- C. C. de **Borde cerrado** reflejante ( $0 \leq R \leq 1$ ).
- C. C. de **Borde abierto** con potencial entrante conocido.
- C. C. de **potencial prescrito**, esencial o tipo Dirichlet.
- C. C. de **flujo de potencial prescrito**, natural o tipo Neumann.

Para el caso 1-D todos los potenciales, tanto entrantes como salientes al dominio, se propagan perpendiculares al contorno. Por tanto, no tendremos el problema de conocer el ángulo  $\theta$  de aproximación del potencial desconocido al contorno, como ocurre en el caso de la MSE 2-D. Este problema crucial en la resolución numérica de la MSE será tratado en profundidad en el capítulo 7.

#### 6.3.1. Condición de contorno de borde cerrado

Como ya sabemos, son bordes físicos del dominio (costa, dique, muelle,...etc.) con cierta capacidad de reflexión

del oleaje incidente, el cual se mide a través del coeficiente de reflexión  $R$ :  $0 \leq R \leq 1$ . Un borde totalmente absorbente tendría un coeficiente de reflexión  $R = 0$ , mientras que uno totalmente reflejante tendría  $R = 1$ .

Supongamos como ejemplo el caso de un dominio 1-D como el que se indica en la figura adjunta. El borde cerrado puede estar en cualquiera de los dos extremos del dominio. Veremos en su momento que consecuencias tiene la posición  $x$  del borde en la implementación de la condición de contorno cerrado.

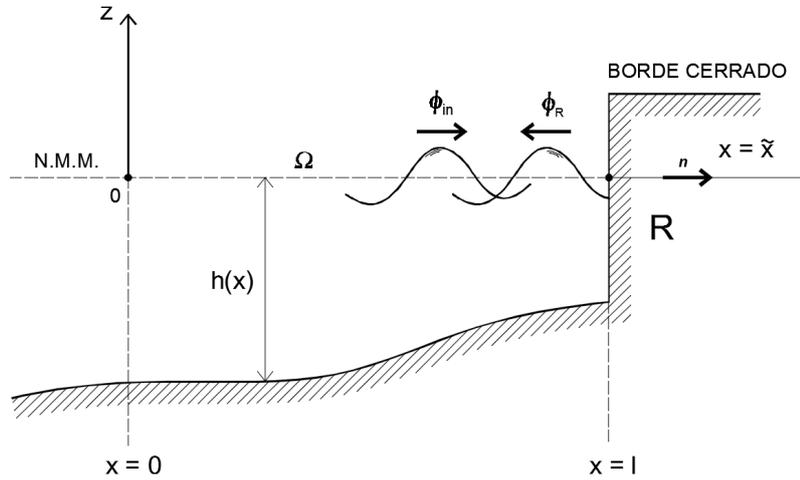


Figura 6-2. Ejemplo de condición de borde cerrado en  $x = l$ .

Consideremos un sistema de ejes local  $\tilde{x}$  cumpliendo la condición de que el eje  $+\tilde{x}$  se orienta según la dirección del vector  $n$  normal exterior al dominio. Este eje local no debe ser confundido con el eje global  $x$  que aparecen en la anterior figura. Para dar la máxima generalidad a la exposición, estudiaremos primero el caso en que el borde cerrado se encuentra a la izquierda  $x = 0$ . De esta forma visualizamos claramente la diferencia entre el eje global  $x$  y el eje local  $\tilde{x}$ .

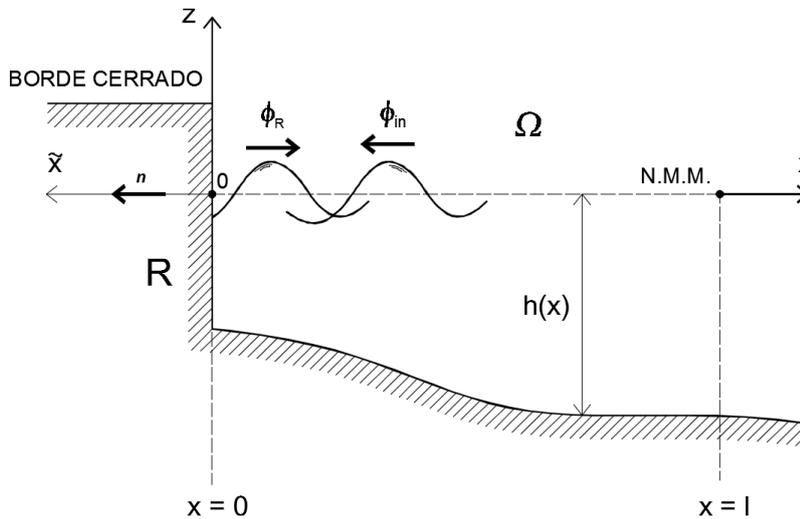


Figura 6-3. Condición de borde cerrado en  $x = 0$ .

Hacia el contorno cerrado se aproxima una onda de potencial  $\phi_{in}$  que es reflejada  $\phi_R$ . La capacidad de reflexión del contorno está definida por el valor del coeficiente de reflexión  $R$ . A continuación se muestran las expresiones de los potenciales complejos reducidos de las ondas incidente y reflejada referidos al sistema local  $\tilde{x}$ :

$$\phi_{in} = \tilde{\varphi} e^{ik\tilde{x}} \tag{6-10}$$

$$\phi_R = R \tilde{\varphi} e^{-ik\tilde{x}} \quad (6-11)$$

Siendo  $\tilde{\varphi}$  la amplitud de la onda incidente al contorno.

El valor total del potencial en el contorno será la suma del potencial incidente y el reflejado:

$$\phi = \phi_{in} + \phi_R = \tilde{\varphi} (e^{ik\tilde{x}} + R e^{-ik\tilde{x}}) \quad (6-12)$$

La cantidad de potencial que atraviesa el contorno  $\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}$  será:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = \frac{d\phi}{d\tilde{x}} = \tilde{\varphi} (ike^{ik\tilde{x}} - R ik e^{-ik\tilde{x}}) \quad (6-13)$$

En nuestro caso concreto, justo en el contorno se cumple que  $\tilde{x} = 0$ , por lo que las ecuaciones (6-12) y (6-13) nos quedan:

$$\phi]_{\tilde{x}=0} = \tilde{\varphi} (1 + R) \quad (6-14)$$

$$\left. \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} \right]_{\tilde{x}=0} = \left. \frac{d\phi}{d\tilde{x}} \right]_{\tilde{x}=0} = ik \tilde{\varphi} (1 - R) \quad (6-15)$$

Combinando las anteriores ecuaciones (6-14) y (6-15) obtenemos la expresión general de la condición de contorno cerrado:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = \frac{d\phi}{d\tilde{x}} = ik \frac{1-R}{1+R} \phi \quad \text{en } \tilde{x} = 0 \quad (6-16)$$

El resultado (6-16) es completamente general cuando trabajamos en el sistema de ejes local  $\tilde{x}$ ; de hecho, habríamos obtenido la misma expresión si el borde cerrado estuviera situado en  $x = l$ . Si se observa la ecuación de la condición de contorno (6-16), vemos que está planteada en el eje local  $\tilde{x}$ . Podemos transformarla al eje global  $x$  con un simple cambio de variable y aplicando la regla de derivación de la cadena:

$$x = -\tilde{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = \frac{d\phi}{d\tilde{x}} = \frac{d\phi}{dx} \frac{dx}{d\tilde{x}} = -\frac{d\phi}{dx} = ik \frac{1-R}{1+R} \phi \quad (6-17)$$

$$\frac{d\phi}{dx} = -ik \frac{1-R}{1+R} \phi \quad \text{en el borde cerrado } x = 0 \quad (6-18)$$

Para el caso en que el borde cerrado se sitúe a la derecha ( $x = l$ ) podemos hacer un desarrollo similar al anterior. En este caso el cambio de variable sería:

$$x = \tilde{x} + l \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = \frac{d\phi}{d\tilde{x}} = \frac{d\phi}{dx} \frac{dx}{d\tilde{x}} = \frac{d\phi}{dx} = ik \frac{1-R}{1+R} \phi \quad (6-19)$$

$$\frac{d\phi}{dx} = ik \frac{1-R}{1+R} \phi \quad \text{en el borde cerrado } x = l \quad (6-20)$$

Se observa pues como la posición del borde cerrado influye en la condición de contorno, cambiando el signo del flujo  $\frac{d\phi}{dx}$  referido a la coordenada global  $x$ .

Otra alternativa de obtener el cambio de signo del flujo  $\frac{d\phi}{dx}$  en función de donde se imponga la condición de contorno sería plantear la ecuación (6-16) en formato vectorial y dejar que el signo de la condición de contorno salga del simple producto escalar del vector normal  $\mathbf{n}$  y gradiente  $\nabla\phi$ , de la siguiente forma:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \nabla\phi \quad (6-21)$$

Calculemos el valor de  $\mathbf{n} \cdot \nabla\phi$  en cada borde del dominio:

$$\text{en } x = 0 \rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = \nabla\phi \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \frac{d\phi}{dx} & \frac{d\phi}{dy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{d\phi}{dx} = i k \frac{1-R}{1+R} \phi \quad (6-22)$$

$$\text{en } x = l \rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = \nabla\phi \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \frac{d\phi}{dx} & \frac{d\phi}{dy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{d\phi}{dx} = i k \frac{1-R}{1+R} \phi \quad (6-23)$$

Por tanto, concuerda con los resultados expresados en las ecuaciones (6-18) y (6-20).

### 6.3.2. Condición de contorno de borde abierto

Se trata de contornos ficticios “no físicos” que necesitamos imponer para cerrar el dominio y que éste sea computacional. Este contorno produce un truncamiento del dominio semi-infinito (mar abierto) en el que debemos garantizar condiciones de “total permeabilidad”, tanto a las ondas que llegan a él desde el exterior, como a las reflejadas desde los contornos físicos que salen del dominio. Es decir, las ondas no deben “sentir” su presencia.

Supongamos el caso de un dominio 1-D como el que se indica en la figura adjunta. El borde abierto puede estar en cualquiera de los dos extremos del dominio. Veremos en su momento que consecuencias tiene la posición  $x$  del borde en la implementación de la condición de contorno.

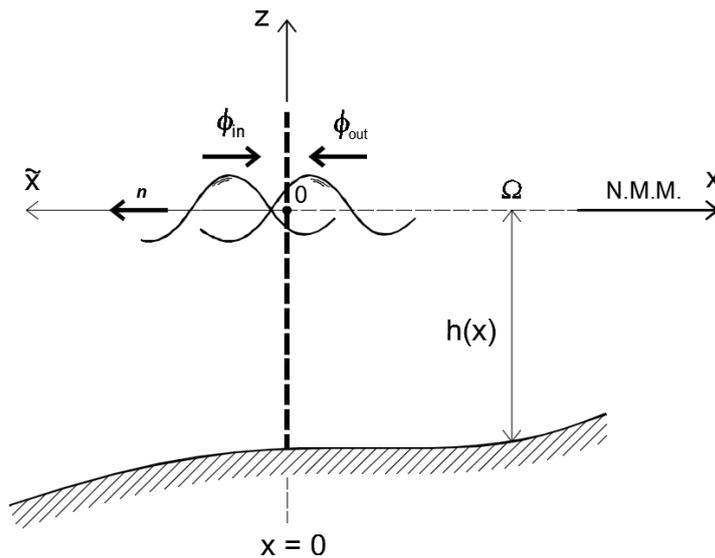


Figura 6-4. Condición de borde abierto en  $x = 0$ .

Consideremos un sistema de ejes local  $\tilde{x}$  cumpliendo la condición de que el eje  $+\tilde{x}$  se orienta según la dirección del vector  $\mathbf{n}$  normal exterior al dominio. Este eje local no debe ser confundido con el eje global  $x$  que aparecen en la anterior figura.

Para dar la máxima generalidad a la exposición emplearemos el caso en que el borde cerrado se encuentra a la izquierda  $x = 0$ , de esta forma visualizamos claramente la diferencia entre el eje global  $x$  y el eje local  $\tilde{x}$ .

Desde el exterior del dominio se aproxima una onda de potencial  $\phi_{in}$  conocido (dato de nuestro problema), mientras que desde el interior sale una onda reflejada por los contornos físicos del dominio  $\phi_{out}$ , que es desconocida a priori.

$$\phi_{in} = \tilde{\varphi} e^{-ik\tilde{x}} \quad (6-24)$$

$\tilde{\varphi}$  es la amplitud de la onda incidente conocida. La derivada del potencial entrante respecto a la dirección normal será:

$$\frac{\partial \phi_{in}}{\partial \mathbf{n}} = \frac{d\phi_{in}}{d\tilde{x}} = -ik\tilde{\varphi} e^{-ik\tilde{x}} = -ik\phi_{in} \quad (6-25)$$

Ahora bien, la onda  $\phi_{out}$  tiene que salir del dominio sin ser reflejada por el contorno abierto ficticio. Retomando la condición de contorno (6-16) ya estudiada para el contorno cerrado, este caso es idéntico a asumir una condición de absorción total ( $R = 0$ ) de la onda saliente desconocida  $\phi_{out}$ :

$$\frac{\partial \phi_{out}}{\partial \mathbf{n}} = \frac{d\phi_{out}}{d\tilde{x}} = ik \frac{1-R}{1+R} \phi = ik\phi_{out} \quad \text{en } \tilde{x} = 0 \quad (6-26)$$

El potencial existente en el contorno será la suma de los potenciales entrante y saliente del dominio

$$\phi = \phi_{in} + \phi_{out} \quad (6-27)$$

Por tanto:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \phi_{in}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial \phi_{out}}{\partial \mathbf{n}} \quad (6-28)$$

Finalmente, la condición de contorno en el borde abierto será:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = -ik\phi_{in} + ik\phi_{out} = -ik\phi_{in} + ik(\phi - \phi_{in}) = -2ik\phi_{in} + ik\phi \quad \text{en } \tilde{x} = 0 \quad (6-29)$$

Si se observa la ecuación de la condición de contorno (6-29), vemos que está planteada en el eje local  $\tilde{x}$ . Podemos transformarla al eje global  $x$  con un simple cambio de variable y aplicando la regla de derivación de la cadena:

$$x = -\tilde{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{d\phi}{d\tilde{x}} = \frac{d\phi}{dx} \frac{dx}{d\tilde{x}} = -\frac{d\phi}{dx} = -2ik\phi_{in} + ik\phi \quad (6-30)$$

$$\frac{d\phi}{dx} = 2ik\phi_{in} - ik\phi \quad \text{en borde abierto } x = 0 \quad (6-31)$$

Para el caso en que el borde abierto se situara a la derecha ( $x = l$ ), entrando el potencial  $\phi_{in}$  por dicho borde, la condición de contorno sería:

$$x = \tilde{x} + l \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{d\phi}{d\tilde{x}} = \frac{d\phi}{dx} \frac{dx}{d\tilde{x}} = \frac{d\phi}{dx} = -2ik\phi_{in} + ik\phi \quad \text{en borde abierto } x = l \tag{6-32}$$

$$\frac{d\phi}{dx} = -2ik\phi_{in} + ik\phi \quad \text{en borde abierto } x = l \tag{6-33}$$

Otra alternativa de obtener el cambio de signo del flujo  $\frac{d\phi}{dx}$  en función de donde se imponga la condición de contorno sería plantear la ecuación (6-16) en formato vectorial y dejar que el signo de la condición de contorno salga del simple producto escalar del vector normal  $\mathbf{n}$  y gradiente  $\nabla\phi$ , de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \nabla \phi \tag{6-34}$$

Calculemos el valor de  $\mathbf{n} \cdot \nabla \phi$  en cada borde del dominio:

$$\text{en } x = 0 \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \nabla \phi \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \frac{d\phi}{dx} & \frac{d\phi}{dy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{d\phi}{dx} = -2ik\phi_{in} + ik\phi \tag{6-35}$$

$$\text{en } x = l \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \nabla \phi \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \frac{d\phi}{dx} & \frac{d\phi}{dy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{d\phi}{dx} = -2ik\phi_{in} + ik\phi \tag{6-36}$$

Por tanto, concuerda con los resultados expresados en las ecuaciones (6-31) y (6-33).

### 6.3.3. Condición de contorno de potencial prescrito, esencial o tipo Dirichlet

Esta condición de contorno prescribe un valor conocido del potencial  $\phi_i = \bar{\phi}_i$  en alguno de los extremos del dominio de integración. Esta condición de contorno no tiene un símil físico que permita visualizarla de forma evidente. No obstante, es bastante interesante desde un punto de vista práctico, pues nos permite obtener frecuencias naturales y simular fenómenos de resonancia en algunos casos de dársenas abiertas, como veremos en las simulaciones realizadas al final del presente capítulo.

Además, esta condición de contorno puede ser útil para simular condiciones de borde que han sido obtenidas mediante mallas anidadas de aproximación a la costa mediante otros modelos de propagación (WAM, SWAM, MSE parabólica,..., etc.).

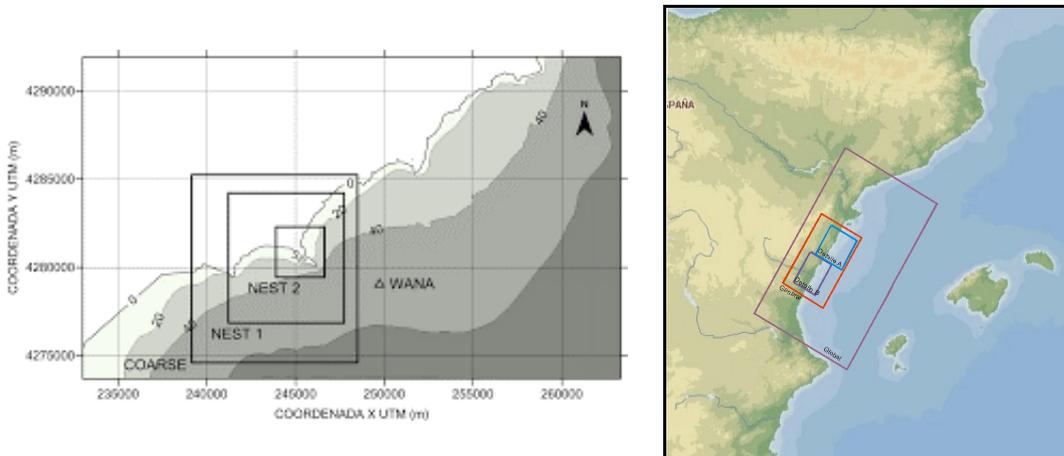


Figura 6-5. Anidamiento de mallas.

### 6.3.4. Condición de contorno de flujo potencial prescrito, natural o tipo Neumann

Esta es la condición de contorno más fácil de implementar, pues nos da directamente el valor de  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$  en uno de los bordes del dominio. Podría representar físicamente la generación de una onda por una pala generadora de oleaje en un túnel de oleaje en laboratorio o en una piscina de olas en un parque acuático.

El valor de  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$  representa una velocidad en la superficie del fluido que es producida por la pala en movimiento (ver figura adjunta).

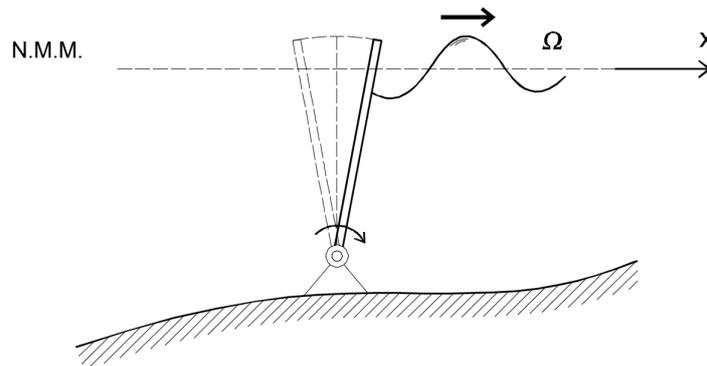


Figura 6-6. Condición de contorno tipo natural o de Neumann. Pala generadora de oleaje.

### 6.4. Discretización del dominio

Mediante la aplicación de métodos numéricos, como el MEF, renunciamos a obtener una solución analítica continua del problema  $\phi(x)$  en todo el dominio de integración. En su lugar, nos conformaremos con una aproximación a la solución en un número  $N$  discreto de puntos (nodos):  $\phi_i = \phi(x_i)$ , con  $i = 1, 2, 3 \dots, N$ .

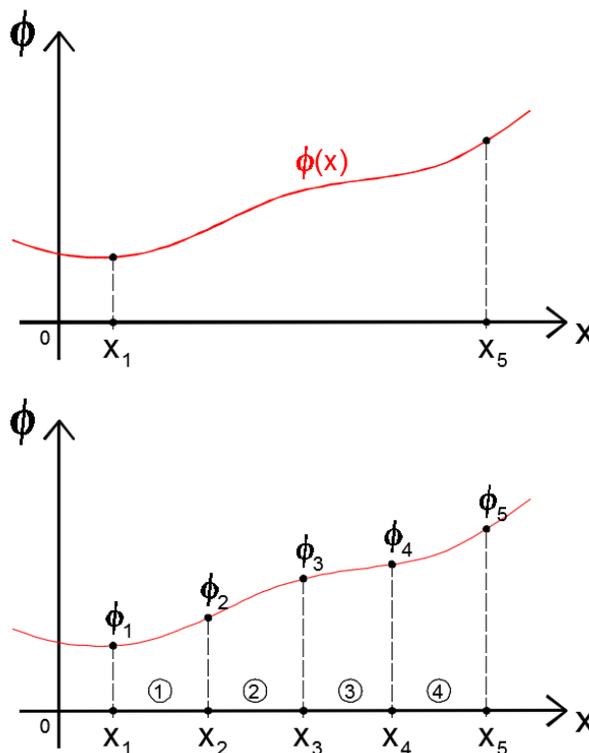


Figura 6-7. Discretización del dominio de integración 1-D.

En el ejemplo de la figura anterior hemos discretizado el dominio  $\Omega$ :  $x_1 \leq x \leq x_5$  mediante 5 nodos y cuatro elementos. Una vez obtenida la solución numérica en los nodos de la discretización  $\phi_i = \phi(x_i)$ , los valores de la función en cualquier otro punto  $\phi(x)$  del dominio se obtendrían por interpolación.

En este TFM se ha optado por una **discretización del dominio mediante elementos lineales de dos nodos**, en aras de la simplicidad y por su carácter pedagógico. En el apartado 6.5 hablaremos de las funciones de forma o interpolación elegidas, pero se intuye ya que serán funciones polinómicas de grado 1 (rectas) al tener el elemento solamente dos nodos.

Para nuestro problema de propagación de ondas, la discretización del dominio elegida (número de nodos y tipo de elementos) tiene gran incidencia en la calidad de la solución. Al tratarse de un fenómeno periódico, debemos asegurarnos que existan un número mínimo de elementos de 10 a 20 por longitud de onda para que el modelo numérico represente adecuadamente la solución.

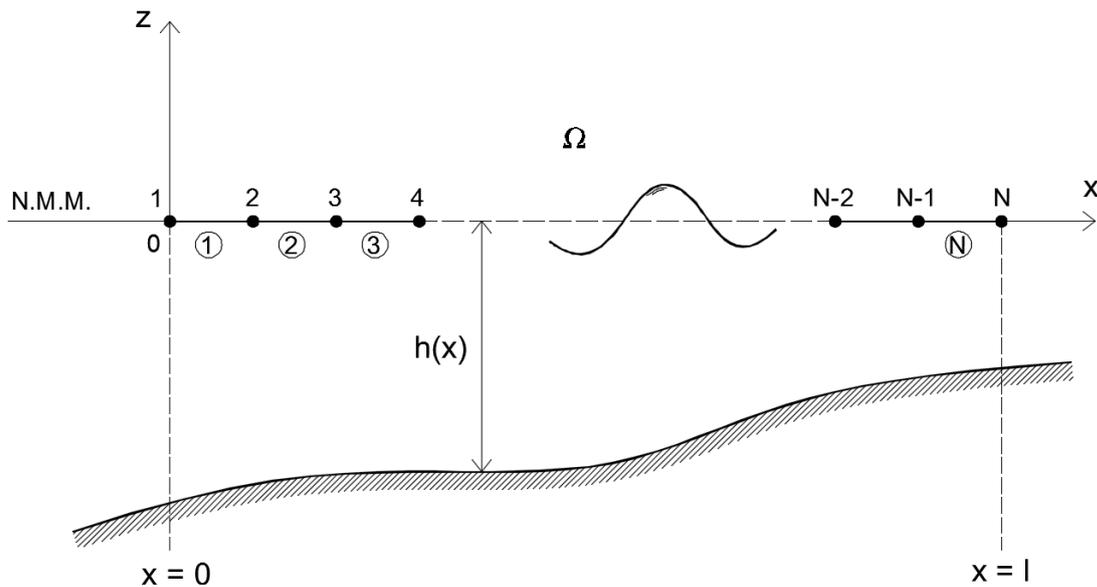


Figura 6-8. Discretización del dominio de integración 1-D.

En el caso 1-D, no hay duda de que la forma más sencilla y eficiente computacionalmente para la numeración de nodos y elementos del modelo es la correlativa comenzando por el extremo  $x = 0$ , como se observa en la figura anterior. De esta forma se simplifica el ensamblaje de la matriz de rigidez del sistema de ecuaciones, resultado una matriz con los elementos no nulos concentrados en la banda central, lo cual tiene consecuencias numéricas muy importantes, medidas en términos del esfuerzo computacional necesario a la hora de invertir dicha matriz.

El periodo  $T$  de la onda incidente será siempre un dato del problema. Conocido  $T$  (constante durante la propagación) y la profundidad local, aplicando la ecuación de dispersión de la onda (4-55), podemos obtener fácilmente el valor de la longitud de onda local en cada elemento de la malla. El valor de longitud de onda local mínimo se producirá en el elemento de menor profundidad de la malla, lo cual nos dará una medida preliminar del tamaño de la discretización que debemos emplear en cada caso.

## 6.5. Funciones de forma o interpolación

Por cuestiones pedagógicas y de simplicidad de la exposición, se emplearán funciones de interpolación (funciones de forma) polinómicas de grado 1 (rectas), aunque podrían emplearse polinomios de grado superior 2, 3, ...,  $n$  sin pérdida de generalidad.

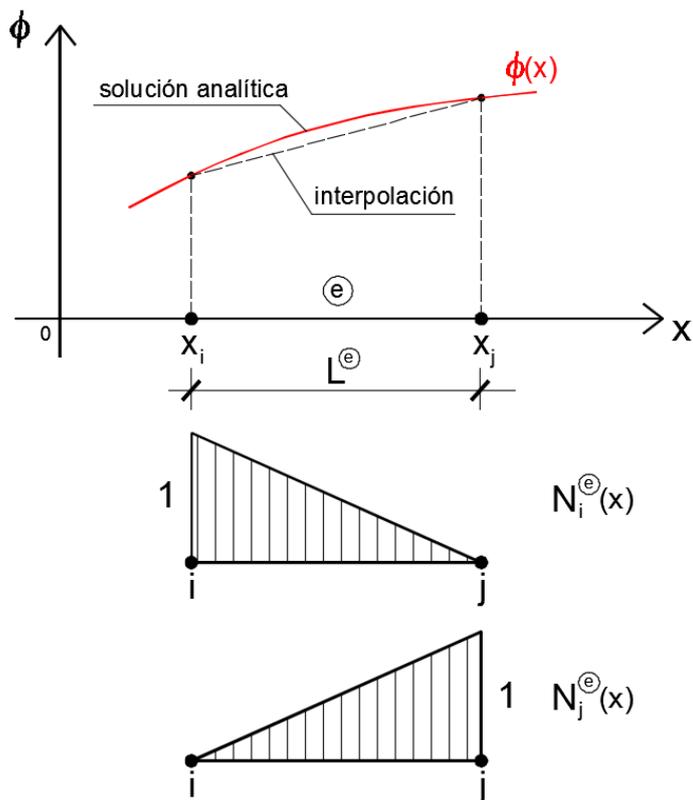


Figura 6-9. Funciones de interpolación lineales del elemento e (dos nodos i-j).

Una vez elegida la discretización del dominio  $\Omega$ , conoceremos la posición (coordenada  $x_i$ ) de todos los nodos de la malla de elementos finitos:  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ . Para el elemento general (e), formado por los nodos  $i - j$ , las funciones de interpolación serán:

$$N_i^e(x) = -\frac{1}{L^e}(x - x_j) \tag{6-37}$$

$$N_j^e(x) = \frac{1}{L^e}(x - x_i) \tag{6-38}$$

Siendo  $L^e = x_j - x_i$  la longitud del elemento (e). La función de interpolación lineal  $N_i^e(x)$  tienen la propiedad de tomar valor unidad en el nodo  $i$  y cero en el nodo  $j$ , por lo que la interpolación de los valores de  $\phi$  dentro del elemento se obtiene como:

$$\phi = \phi_i N_i^e(x) + \phi_j N_j^e(x) \tag{6-39}$$

Comenzaremos desde este momento a utilizar la notación matricial, por ser ésta la habitualmente empleada en el MEF. Así la anterior ecuación (6-39) podemos expresarla como:

$$\phi^e = \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{bmatrix} ; \quad N^e = [N_i^e(x) \quad N_j^e(x)] \tag{6-40}$$

$$\phi = N^e \phi^e \tag{6-41}$$

Veamos ahora como se obtiene el valor  $\frac{d\phi}{dx}$ :

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{d}{dx} [N^e \phi^e] = \frac{dN^e}{dx} \phi^e = B^e \phi^e \quad (6-42)$$

Siendo  $B^e$  el vector de derivadas de las funciones de forma:

$$B^e = \frac{dN^e}{dx} = \left[ \frac{dN_i^e}{dx} \quad \frac{dN_j^e}{dx} \right] \quad (6-43)$$

Las derivadas  $\frac{dN_i^e}{dx}$  se obtienen fácilmente, pues conocemos las expresiones de las funciones de forma  $N_i^e(x)$ . En el caso concreto de uso de funciones de interpolación lineal, el vector  $B^e$  es de términos constantes:

$$B^e = \left[ -\frac{1}{L^e} \quad \frac{1}{L^e} \right] = \frac{1}{L^e} [-1 \quad 1] \quad (6-44)$$

Por tanto,

$$\frac{d\phi}{dx} = B^e \phi^e = \frac{1}{L^e} [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{bmatrix} \quad (6-45)$$

### 6.5.1. Transformación a coordenadas naturales.

En la aplicación del MEF es muy común el empleo de transformaciones de coordenadas para trabajar en un sistema de coordenadas naturales ( $\xi$ ) que simplifica muchísimo el cálculo de integrales numéricas empleando cuadraturas de Gauss. En el caso general, transformaremos el sistema de coordenadas cartesiano a un sistema de coordenadas natural a través del jacobiano de la transformación J.



En el sistema de coordenadas naturales ( $\xi$ ) las funciones de forma tienen la siguiente expresiones:

$$N_i^e(\xi) = -\frac{1}{2}(\xi - 1) \quad (6-46)$$

$$N_j^e(\xi) = \frac{1}{2}(\xi + 1) \quad (6-47)$$

La coordenada espacial  $x$  puede ser expresada en coordenadas naturales mediante la siguiente ecuación:

$$x = x_i N_i^e(\xi) + x_j N_j^e(\xi) = -\frac{x_i}{2}(\xi - 1) + \frac{x_j}{2}(\xi + 1) \quad (6-48)$$

Es decir, a cada punto del espacio en coordenadas cartesianas  $x$  le corresponde un único punto en el espacio de coordenadas naturales  $\xi$ , y viceversa. Si calculamos el diferencial de  $x$  empleando la ecuación (6-48) y aplicamos la regla de la cadena, obtenemos:

$$dx = \frac{dx}{d\xi} d\xi = \left(-\frac{x_i}{2} + \frac{x_j}{2}\right) d\xi = \frac{L_e}{2} d\xi \quad (6-49)$$

Por tanto, para el caso 1-D el factor  $\frac{L_e}{2}$  es el jacobiano de la transformación de coordenadas cartesianas  $x$  al espacio de coordenadas naturales  $\xi$ .

$$J = \frac{L_e}{2} \quad (6-50)$$

## 6.6. Función de peso. Método de Galerkin

Llegados a este punto es el momento de preguntarnos quién es la función de ponderación del residuo o peso  $\psi(x)$ . Hasta el momento sólo hemos dicho de ella que es una función arbitraria con derivada primera.

El MEF emplea el **método de los residuos ponderados de Galerkin**, el cual toma como función de peso  $\psi(x)$  una combinación lineal arbitraria de las funciones de forma  $N_i^e(x)$ , por tanto:

$$\psi = \mathbf{N}^e \mathbf{c} = \mathbf{c}^T \mathbf{N}^{eT} \quad (6-51)$$

Siendo  $\mathbf{c}$  un vector de coeficientes constantes arbitrarios. El superíndice  $T$  indica el vector o matriz traspuesto.

Necesitamos también conocer el valor de su derivada.

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d}{dx} [\mathbf{c}^T \mathbf{N}^{eT}] = \mathbf{c}^T \frac{d\mathbf{N}^{eT}}{dx} = \mathbf{c}^T \mathbf{B}^{eT} \quad (6-52)$$

Aunque lo veremos en próximos epígrafes, el vector  $\mathbf{c}^T$  va a aparecer en todos los términos integrales de la forma débil o integral de la MSE, por lo que puede ser extraído como un factor común. Como se trata de un vector arbitrario y su producto matricial por el resto de términos de la forma débil (llamémoslo  $\mathbf{Q}$ ) está igualado a cero, podemos olvidarnos de él en lo que sigue, puesto que:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{Q} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q} = 0 \quad (6-53)$$

## 6.7. Discretización de la forma débil de la MSE

Volvamos ahora a la ecuación integral (6-7) o forma débil de la MSE.

$$cc_g \psi \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=0}^{x=l} - \int_0^l cc_g \frac{d\psi}{dx} \frac{d\phi}{dx} dx + \int_0^l k^2 cc_g \phi \psi dx = 0 \quad (6-54)$$

Sabiendo que  $c = \frac{\omega}{k}$  podemos expresar la forma integral (6-54) de esta otra forma que nos resultará útil cuando trabajemos con problemas de autovalores para obtención de modos y frecuencias naturales de oscilación de dársenas:

$$cc_g \psi \left. \frac{d\phi}{dx} \right]_{x=0}^{x=l} - \int_0^l cc_g \frac{d\psi}{dx} \frac{d\phi}{dx} dx + \omega^2 \int_0^l \frac{c_g}{c} \phi \psi dx = 0 \quad (6-55)$$

$\omega^2$  sale de la integral pues es un valor constante y conocido (dato de partida), por ser la MSE un modelo monocromático de propagación de ondas lineales (el periodo se conserva durante la propagación).

El primer sumando de (6-55) contiene las **condiciones de contorno** del problema que estudiaremos en el apartado 6.7.2.

$$cc_g \psi \left. \frac{d\phi}{dx} \right]_{x=0}^{x=l} = cc_g \psi \left. \frac{d\phi}{dx} \right]_{x=l} - cc_g \psi \left. \frac{d\phi}{dx} \right]_{x=0} \quad (6-56)$$

De forma alternativa y más general, podemos expresar (6-56) en función del flujo  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ :

$$cc_g \psi \left. \frac{d\phi}{dx} \right]_{x=0}^{x=l} = cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right]_{x=l} + cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right]_{x=0} \quad (6-57)$$

Los dos restantes sumandos son **integrales de dominio**  $\Omega$ , que pueden expresarse como un sumatorio de integrales en cada elemento  $\Omega_e$ .

$$\int_0^l cc_g \frac{d\psi}{dx} \frac{d\phi}{dx} dx = \sum_e \int_{\Omega_e} cc_g \frac{d\psi}{dx} \frac{d\phi}{dx} dx \quad (6-58)$$

$$\int_0^l \frac{c_g}{c} \phi \psi dx = \sum_e \int_{\Omega_e} \frac{c_g}{c} \phi \psi dx \quad (6-59)$$

Nos centraremos ahora en las integrales de dominio a nivel de elemento; posteriormente se explicará el proceso de sumatorio de las integrales de dominio elementales; expresado de forma matricial este sumatorio supone un **proceso de ensamblaje** del cual se obtiene la matriz de rigidez global del sistema.

Vamos a suponer, a priori, que nuestra discretización va a ser lo suficientemente fina como para admitir que los valores de  $c$  y  $c_g$  son aproximadamente constantes en cada elemento ( $e$ ), por lo que pueden sacarse de las integrales como valores constantes; insistimos, a nivel de elemento  $\Omega_e$ .

$$\int_{\Omega_e} cc_g \frac{d\psi}{dx} \frac{d\phi}{dx} dx = (cc_g)_e \int_{x_i}^{x_j} \frac{d\psi}{dx} \frac{d\phi}{dx} dx \quad (6-60)$$

$$\int_{\Omega_e} \frac{c_g}{c} \phi \psi dx = \left(\frac{c_g}{c}\right)_e \int_{x_i}^{x_j} \phi \psi dx \quad (6-61)$$

Los valores de  $k_e$ ,  $c_e$  y  $c_{ge}$  son en realidad parámetros no constantes, pero que consideramos constantes a nivel local de cada elemento; se calculan mediante la ecuación de dispersión  $\omega^2 = gk \tanh(kh)$ , tomando un valor promedio de la profundidad  $\bar{h}_e$  en el elemento ( $e$ ) y conocido el periodo  $T$  de la onda, que siempre será un dato de nuestro problema.

### 6.7.1. Integrales de dominio.

Vamos a introducir en las anteriores ecuaciones los valores interpolados de  $\phi$ ,  $\frac{d\phi}{dx}$ ,  $\psi$ ,  $\frac{d\psi}{dx}$  obtenidos en las ecuaciones (6-41), (6-42), (6-51) y (6-52), respectivamente.

$$(cc_g)_e \int_{x_i}^{x_j} \frac{d\psi}{dx} \frac{d\phi}{dx} dx = (cc_g)_e \mathbf{c}^T \left[ \int_{x_i}^{x_j} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e dx \right] \boldsymbol{\phi}^e = \mathbf{c}^T \mathbf{K}^e \boldsymbol{\phi}^e \quad (6-62)$$

$$\left(\frac{c_g}{c}\right)_e \int_{x_i}^{x_j} \phi \psi dx = \left(\frac{c_g}{c}\right)_e \mathbf{c}^T \left[ \int_{x_i}^{x_j} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e dx \right] \boldsymbol{\phi}^e = \mathbf{c}^T \mathbf{M}^e \boldsymbol{\phi}^e \quad (6-63)$$

Siendo:

$$\mathbf{K}^e = (cc_g)_e \left[ \int_{x_i}^{x_j} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e dx \right] \quad (6-64)$$

$$\mathbf{M}^e = \left(\frac{c_g}{c}\right)_e \left[ \int_{x_i}^{x_j} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e dx \right] \quad (6-65)$$

El vector  $\mathbf{c}^T$  de términos constantes arbitrarios, va a aparecer como factor común en todos los sumandos de la ecuación integral o forma débil (6-55), tanto en los términos de integrales de dominio como en las condiciones de contorno. Ya fue explicada en el epígrafe 6.6 la razón por la cual podemos olvidarnos de él en todos los desarrollos que siguen.

Calcularemos ahora las integrales que aparecen en las anteriores ecuaciones. Recordemos que la matriz  $\mathbf{B}^e$  resultó ser una matriz de términos constantes cuando las funciones de forma  $N_i^e(x)$  son lineales (elemento lineal de dos nodos).

$$\mathbf{B}^e = \frac{1}{L^e} [-1 \quad 1]$$

$$\int_{x_i}^{x_j} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e dx = \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e \int_{x_i}^{x_j} dx = L_e \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e = \frac{1}{L^e} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} [-1 \quad 1] = \frac{1}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6-66)$$

Por tanto, la integral de dominio elemental  $\mathbf{K}^e$  quedaría finalmente como:

$$\mathbf{K}^e = (cc_g)_e \frac{1}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6-67)$$

Veamos ahora la otra integral de dominio:  $\int_{x_i}^{x_j} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e dx$ . Para el cálculo de esta integral si va a resultar útil e instructivo hacer la transformación a coordenadas naturales, aunque veremos que las integrales que siguen podrían ser resueltas analíticamente.

$$\int_{x_i}^{x_j} \mathbf{N}^{eT}(x) \mathbf{N}^e(x) dx = \int_{-1}^{+1} \mathbf{N}^{eT}(\xi) \mathbf{N}^e(\xi) \frac{L_e}{2} d\xi \quad (6-68)$$

$$\int_{-1}^{+1} \mathbf{N}^{eT}(\xi) \mathbf{N}^e(\xi) \frac{L_e}{2} d\xi = \frac{L_e}{2} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) \\ \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} d\xi = \quad (6-69)$$

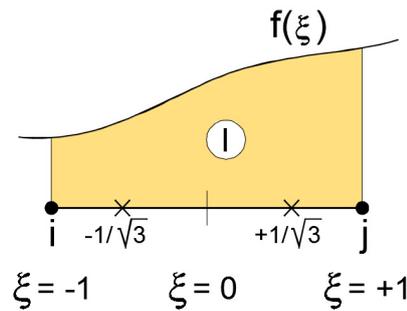
$$= \frac{L_e}{8} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} (1-\xi)^2 & 1-\xi^2 \\ 1-\xi^2 & (1+\xi)^2 \end{bmatrix} d\xi$$

Esta integral puede calcularse numéricamente de forma muy sencilla mediante **cuadratura de Gauss** con, por ejemplo, dos puntos de integración (puntos de Gauss). Además, **en este caso la integral numérica resultante es exacta**.

Para  $n$  puntos de integración, la cuadratura o integración numérica de Gauss da soluciones de integración exactas para polinomios de orden  $2n - 1$ .

Para el caso de  $n = 2$ , las posiciones ( $\xi_i$ ) y pesos ( $w_i$ ) correspondientes a los dos puntos de Gauss son:

$$\xi_i = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad ; \quad w_i = 1.$$



$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = f(\xi_1) w_1 + f(\xi_2) w_2$$

Figura 6-10. Integración numérica por cuadratura de Gauss.

Del cálculo numérico por cuadratura de Gauss, la anterior integral resulta:

$$\int_{x_i}^{x_j} \mathbf{N}^{eT}(x) \mathbf{N}^e(x) dx = \frac{L_e}{8} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} (1-\xi)^2 & 1-\xi^2 \\ 1-\xi^2 & (1+\xi)^2 \end{bmatrix} d\xi = \frac{L_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (6-70)$$

Finalmente, sustituyendo (6-70) en la ecuación (6-65), obtenemos la matriz  $\mathbf{M}^e$ :

$$\mathbf{M}^e = \left( \frac{c_g}{c} \right)_e \frac{L_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (6-71)$$

Una vez obtenidas las matrices  $\mathbf{K}^e$  y  $\mathbf{M}^e$  y reordenando términos de la ecuación (6-55), veamos como queda finalmente nuestra forma débil de la MSE:

$$c c_g \psi \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=0}^{x=l} - \int_0^l c c_g \frac{d\psi}{dx} \frac{d\phi}{dx} dx + \omega^2 \int_0^l \frac{c_g}{c} \phi \psi dx = 0 \quad (6-72)$$

$$\int_0^l c c_g \frac{d\psi}{dx} \frac{d\phi}{dx} dx - \omega^2 \int_0^l \frac{c_g}{c} \phi \psi dx = c c_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x=0} + c c_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x=l} \quad (6-73)$$

$$\sum_e \mathbf{K}^e \boldsymbol{\phi}^e - \omega^2 \sum_e \mathbf{M}^e \boldsymbol{\phi}^e = \mathbf{f} \quad (6-74)$$

$$\left[ \sum_e \mathbf{K}^e - \omega^2 \sum_e \mathbf{M}^e \right] \boldsymbol{\phi} = \mathbf{f} \quad (6-75)$$

$$\sum_e [\mathbf{K}^e - \omega^2 \mathbf{M}^e] \boldsymbol{\phi} = \mathbf{f} \quad (6-76)$$

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{f} \quad (6-77)$$

Siendo  $\mathbf{K}$  la matriz de "rigidez" global,  $\boldsymbol{\phi}$  el vector de incógnitas para todos los nodos del dominio y  $\mathbf{f}$  el vector de "fuerzas". La Matriz  $\mathbf{K}$  se obtiene por un sencillo procedimiento de ensamblaje que se explicará en próximos apartados.

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_{N-1} \\ \phi_N \end{bmatrix} \quad (6-78)$$

### 6.7.2. Aplicación de las condiciones de contorno.

El primer sumando de la ecuación (6-55) de la forma débil de la MSE contiene las **condiciones de contorno** del problema. En el caso 1-D necesitamos conocer los flujos de potencial  $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}$  en ambos extremos del dominio de integración.

$$c c_g \psi \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=0}^{x=l} = c c_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x=0} + c c_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x=l} \quad (6-79)$$

Hemos supuesto un dominio de integración de longitud  $l$  cuyos bordes o contornos se sitúan en  $x = 0$  y  $x = l$ , respectivamente. En la siguiente figura se presenta el caso de un borde abierto al mar, donde situamos el origen de nuestro sistema de referencia a la cota del mar en reposo, y un borde cerrado con coeficiente de reflexión  $R$ . No obstante, las condiciones de contorno en cada borde pueden ser absolutamente generales.

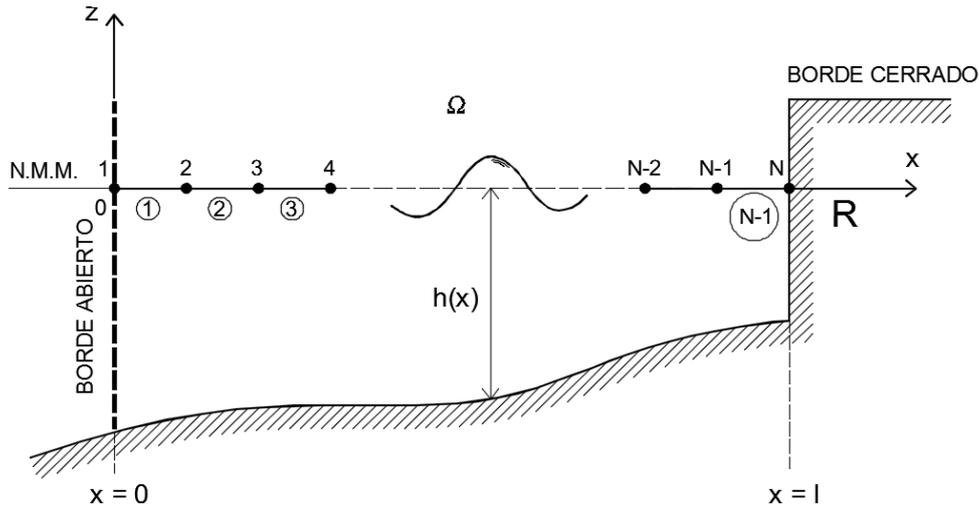


Figura 6-11. Ejemplo de dominio con borde abierto en  $x = 0$  y cerrado en  $x = l$ , con coeficiente de reflexión  $R$ .

### 6.7.2.1. Condición de Contorno de Borde Cerrado

Recordemos que las condiciones de contorno de borde cerrado de nuestro problema, en función de dónde se sitúe esta condición de borde, venían expresadas por la ecuación (6-16):

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = i k \frac{1-R}{1+R} \phi \Rightarrow \frac{d\phi}{dx} = -i k \frac{1-R}{1+R} \phi \quad \text{en el borde cerrado } x = 0 \quad (6-80)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = i k \frac{1-R}{1+R} \phi \Rightarrow \frac{d\phi}{dx} = i k \frac{1-R}{1+R} \phi \quad \text{en el borde cerrado } x = l \quad (6-81)$$

Veamos el caso en que el borde cerrado se sitúe, por ejemplo, en el borde derecho del dominio  $x = l$ . En este caso tenemos:

$$cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right]_{x=l} = i k cc_g \left. \frac{1-R}{1+R} \psi \phi \right]_{x=l} \quad (6-82)$$

Ahora tenemos que incluir las interpolaciones de las funciones  $\psi$  y  $\phi$ , teniendo en cuenta que debemos particularizar sus valores en el extremo  $x = l$  del dominio: nodo  $N$ , donde se sitúa el elemento  $(N-1)$ .

$$cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right]_{x=l} = i (k cc_g)_{x=l} \left( \frac{1-R}{1+R} \right)_{x=l} [\mathbf{N}^{(N-1)T} \mathbf{N}^{(N-1)}] \begin{bmatrix} \phi_{N-1} \\ \phi_N \end{bmatrix} \quad (6-83)$$

Veamos cuanto vale el vector  $\mathbf{N}^{(N-1)}$  en  $x = l$ . Este vector contiene las funciones de forma del elemento  $(N - 1)$ .

$$\mathbf{N}^{(N-1)}]_{x=l} = [N_{N-1}^{N-1} \quad N_N^{N-1}]_{x=l} = [0 \quad 1] \quad (6-84)$$

El resultado anterior (6-84) es evidente teniendo en cuenta cómo son las funciones de forma. Finalmente obtenemos:

$$cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x=l} = i (kcc_g)_{x=l} \left( \frac{1-R}{1+R} \right)_{x=l} \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_N \end{bmatrix} \quad (6-85)$$

Si tuviéramos el borde cerrado en el borde  $x = 0$ , en lugar del borde  $x = l$ , y haciendo un desarrollo similar al anterior obtendríamos:

$$cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x=0} = i (kcc_g)_{x=0} \left( \frac{1-R}{1+R} \right)_{x=0} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6-86)$$

Expresado en forma matricial global para insertar la condición de contorno cerrado, podemos escribir las ecuaciones (6-85) y (6-86) de la siguiente forma genérica:

- Borde cerrado en  $x = 0$ :

$$cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x=0} = i (kcc_g)_{x=0} \left( \frac{1-R}{1+R} \right)_{x=0} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6-87)$$

- Borde cerrado en  $x = l$ :

$$cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x=l} = i (kcc_g)_{x=l} \left( \frac{1-R}{1+R} \right)_{x=l} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \phi_N \end{bmatrix} \quad (6-88)$$

Los términos de la derecha de las ecuaciones (6-88) y (6-87) son vectores columna que contienen el potencial desconocido en cada uno de los extremos del dominio. Por ello, estos términos pasan cambiados de signo al primer término de la ecuación  $\mathbf{K} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{f}$ , modificando la matriz de rigidez  $\mathbf{K} \Rightarrow \mathbf{K}_{mod}$  y el vector de fuerzas  $\mathbf{f} \Rightarrow \mathbf{f}_{mod}$ . Esto nos permite obtener un sistema lineal de ecuaciones que puede resolverse fácilmente.

$$\mathbf{K}_{mod} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{f}_{mod} \quad (6-89)$$

$$\boldsymbol{\phi} = (\mathbf{K}_{mod})^{-1} \mathbf{f}_{mod} \quad (6-90)$$

### 6.7.2.2. Condición de Contorno de Borde Abierto

Recordemos que las condiciones de contorno de borde abierto de nuestro problema, en función de dónde se sitúe esta condición de borde, venían expresadas por las ecuaciones (6-31) y (6-32):

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = -2ik\phi_{in} + ik\phi \Rightarrow \frac{d\phi}{dx} = 2ik\phi_{in} - ik\phi \quad \text{en borde abierto } x = 0 \quad (6-91)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = -2ik\phi_{in} + ik\phi \Rightarrow \frac{d\phi}{dx} = -2ik\phi_{in} + ik\phi \quad \text{en borde abierto } x = l \quad (6-92)$$

Veamos el caso en que el borde abierto se sitúe, por ejemplo, en el borde izquierdo del dominio  $x = 0$ . En este caso tenemos:

$$cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right]_{x=0} = -2i kcc_g \phi_{in} \psi \Big|_{x=0} + i k cc_g \psi \phi \Big|_{x=0} \quad (6-93)$$

Ahora tenemos que incluir las interpolaciones de las funciones  $\psi$  y  $\phi$ , teniendo en cuenta que debemos particularizar sus valores en el extremo  $x = 0$  del dominio: nodo 1, donde se sitúa el elemento (1).

$$cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right]_{x=0} = -2i (kcc_g)_{x=0} \phi_{in} [\mathbf{N}^{(1)T}]_{x=0} + i (kcc_g)_{x=0} [\mathbf{N}^{(1)T} \mathbf{N}^{(1)}]_{x=0} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad (6-94)$$

Veamos cuanto vale el vector  $\mathbf{N}^{(1)}$  en  $x = 0$ . Este vector contiene las funciones de forma del elemento (1).

$$\mathbf{N}^{(1)} \Big|_{x=0} = [N_1^{(1)} \quad N_2^{(1)}]_{x=0} = [1 \quad 0] \quad (6-95)$$

El resultado (6-95) anterior es evidente teniendo en cuenta cómo son las funciones de forma. Finalmente obtenemos:

$$cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right]_{x=0} = -2i (kcc_g)_{x=0} \phi_{in} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i (kcc_g)_{x=0} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6-96)$$

Si tuviéramos el contorno abierto en el borde  $x = l$ , en lugar del borde  $x = 0$ , y haciendo un desarrollo similar al anterior, obtendríamos:

$$cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right]_{x=l} = -2i (kcc_g)_{x=l} \phi_{in} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i (kcc_g)_{x=l} \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_N \end{bmatrix} \quad (6-97)$$

Expresado en forma matricial global para insertar la condición de contorno abierto, podemos escribir las ecuaciones (6-96) y (6-97) de la siguiente forma genérica:

- Borde cerrado en  $x = 0$ :

$$cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right]_{x=0} = -2i (kcc_g)_{x=0} \phi_{in} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + i (kcc_g)_{x=0} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \phi_1 \quad (6-98)$$

- Borde cerrado en  $x = l$ :

$$\mathbf{f}_2 = cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x=l} = -2i (kcc_g)_{x=l} \phi_{in} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i (kcc_g)_{x=l} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \phi_N \quad (6-99)$$

Los primeros términos de la derecha de las ecuaciones (6-98) y (6-99) son vectores columna constantes mientras que los segundos continenen el potencial desconocido en cada uno de los extremos del dominio. Por ello, estos últimos vectores pasan cambiados de signo al primer término de la ecuación  $\mathbf{K} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{f}$ , modificando la matriz de rigidez  $\mathbf{K} \Rightarrow \mathbf{K}_{mod}$  y el vector de fuerzas  $\mathbf{f} \Rightarrow \mathbf{f}_{mod}$ . Esto nos permite obtener un sistema lineal de ecuaciones que puede resolverse fácilmente.

$$\mathbf{K}_{mod} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{f}_{mod} \quad (6-100)$$

$$\boldsymbol{\phi} = (\mathbf{K}_{mod})^{-1} \mathbf{f}_{mod} \quad (6-101)$$

### 6.7.2.3. Condición de Contorno de Potencial Prescrito (C.C. Esencial o Dirichlet)

En este caso es conocido el valor del potencial  $\phi_i = \bar{\phi}_i$  en uno de los extremos del dominio. Por ello, la incógnita en dicho borde pasa a ser el valor del flujo  $\frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{n}}$ . Esta condición de contorno es fácil de implementar.

Puesto que no estamos interesados en obtener el valor de  $\frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{n}}$ , procedemos de la siguiente manera:

- a) Caso en que el borde con potencial prescrito sea  $x = 0$ .

Veamos como esta condición de contorno afecta al sistema de ecuaciones, que inicialmetne tiene la forma:

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{f} \quad (6-102)$$

Puesto que la condición de potencial prescrito está en  $x = 0$  estamos interesados sólo en el término  $\mathbf{f}_1$ :

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x=0} + cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x=l} \quad (6-103)$$

Ahora tenemos que incluir la interpolación de la función  $\psi$ , teniendo en cuenta que debemos particularizar sus valores en el extremo  $x = 0$  del dominio: nodo 1, donde se sitúa el elemento (1).

$$\mathbf{f}_1 = cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x=0} = cc_g [\mathbf{N}^{(1)T}]_{x=0} \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x=0} \quad (6-104)$$

Veamos cuanto vale el vector  $\mathbf{N}^{(1)}$  en  $x = 0$ . Este vector contiene las funciones de forma del elemento (1).

$$\mathbf{N}^{(1)}]_{x=0} = [N_1^{(1)} \quad N_2^{(1)}]_{x=0} = [1 \quad 0] \quad (6-105)$$

El resultado anterior es evidente teniendo en cuenta cómo son las funciones de forma. Finalmente obtenemos:

$$\mathbf{f}_1 = cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x=0} = (cc_g)_{x=0} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \mathbf{n}} \quad (6-106)$$

Expresado en forma matricial global para insertar la condición de contorno de potencial prescrito, podemos escribir la ecuación (6-106) de la siguiente forma genérica:

$$\mathbf{f}_1 = cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x=0} = (cc_g)_{x=0} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \mathbf{n}} \quad (6-107)$$

Por tanto, la ecuación (6-102) podemos escribirla de la siguiente forma:

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\phi} = (cc_g)_{x=0} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \mathbf{n}} + \mathbf{f}_2 \quad (6-108)$$

Donde el sistema de ecuaciones sería inicialmente:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \cdots & \cdots & K_{1,N-1} & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \cdots & \cdots & K_{2(N-1)} & K_{2N} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \ddots & \cdots & K_{3(N-1)} & K_{3N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K_{(N-1)1} & K_{(N-1)2} & K_{(N-1)3} & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & K_{N3} & \cdots & \cdots & K_{N(N-1)} & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_{N-1} \\ \phi_N \end{bmatrix} = (cc_g)_{x=0} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial \mathbf{n}} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{f}_2 \quad (6-109)$$

Como el valor de  $\bar{\phi}_1$  es conocido por la condición de contorno, debemos llevarlo al término de la derecha de la ecuación (6-109), mientras que el término desconocido con  $\frac{\partial \phi_1}{\partial x}$  pasa a la izquierda, ambos cambiados de signo. Esto es equivalente a intercambiar las columnas como se indica a continuación:

$$\begin{bmatrix} -(cc_g)_{x=0} & K_{12} & K_{13} & \cdots & \cdots & K_{1,N-1} & K_{1N} \\ 0 & K_{22} & K_{23} & \cdots & \cdots & K_{2(N-1)} & K_{2N} \\ 0 & K_{32} & K_{33} & \ddots & \cdots & K_{3(N-1)} & K_{3N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & K_{(N-1)2} & K_{(N-1)3} & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & K_{N2} & K_{N3} & \cdots & \cdots & K_{N(N-1)} & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \mathbf{n}} \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_{N-1} \\ \phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_{11} \\ -K_{21} \\ -K_{31} \\ \vdots \\ \vdots \\ -K_{N-1,1} \\ -K_{NN} \end{bmatrix} \bar{\phi}_1 + \mathbf{f}_2 \quad (6-110)$$

Podemos eliminar la primera fila de la matriz y sustituirla por otra ecuación en la que aparezca  $\phi_1$  de forma que el vector de incógnitas sólo tenga valores en  $\phi_i$ . Esta nueva ecuación es la propia condición de contorno:

$$K_{11}\phi_1 = K_{11}\bar{\phi}_1 \quad (6-111)$$

En definitiva, dejamos con ceros la primera fila y columna de la matriz  $\mathbf{K}$ , excepto el valor de la diagonal  $K_{11}$  que se queda intacto. De esta forma el sistema de ecuaciones queda:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} & \cdots & \cdots & K_{2(N-1)} & K_{2N} \\ 0 & K_{32} & K_{33} & \ddots & \cdots & K_{3(N-1)} & K_{3N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & K_{(N-1)2} & K_{(N-1)3} & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & K_{N2} & K_{N3} & \cdots & \cdots & K_{N(N-1)} & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_{N-1} \\ \phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +K_{11} \\ -K_{21} \\ -K_{31} \\ \vdots \\ \vdots \\ -K_{N-1,1} \\ -K_{N1} \end{bmatrix} \bar{\phi}_1 + \mathbf{f}_2 \quad (6-112)$$

Mantener el valor  $K_{11}$  en la diagonal de  $\mathbf{K}$  tiene su importancia, pues nos da lugar a una matriz  $\mathbf{K}$  bien condicionada para ser invertida numéricamente; todos los términos de  $\mathbf{K}$  son del mismo orden de magnitud, evitando problemas de convergencia numérica en la resolución del sistema de ecuaciones:  $\mathbf{K}_{mod} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{f}_{mod}$ .

b) Caso en que el borde con potencial prescrito sea  $x = l$ .

Veamos como esta condición de contorno afecta al sistema de ecuaciones, que inicialmente tiene la forma:

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{f} = \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_1 \quad (6-113)$$

Puesto que la condición de potencial prescrito está en  $x = l$  estamos interesados sólo en el término  $\mathbf{f}_2$ :

$$\mathbf{f}_2 = cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x=l} \quad (6-114)$$

Ahora tenemos que incluir la interpolación de la función  $\psi$ , teniendo en cuenta que debemos particularizar sus valores en el extremo  $x = l$  del dominio: nodo  $N$ , donde se sitúa el elemento  $(N-1)$ .

$$\mathbf{f}_2 = cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x=l} = cc_g \left[ \mathbf{N}^{(N-1)T} \right]_{x=l} \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x=l} \quad (6-115)$$

Veamos cuanto vale el vector  $\mathbf{N}^{(N-1)}$  en  $x = l$ . Este vector contiene las funciones de forma del elemento  $(N-1)$ .

$$\left[ \mathbf{N}^{(N-1)} \right]_{x=l} = \left[ N_{N-1}^{(N-1)} \quad N_N^{(N-1)} \right]_{x=l} = [0 \quad 1] \quad (6-116)$$

El resultado anterior es evidente teniendo en cuenta cómo son las funciones de forma. Finalmente obtenemos:

$$\mathbf{f}_2 = cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x=l} = (cc_g)_{x=l} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left. \frac{\partial \phi_N}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x=l} \quad (6-117)$$

Expresado en forma matricial global para insertar la condición de contorno de potencial prescrito, podemos escribir la ecuación (6-117) de la siguiente forma genérica:

$$\mathbf{f}_2 = cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x=l} = (cc_g)_{x=l} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6-118)$$

Por tanto, la ecuación (6-113) podemos escribirla de la siguiente forma:

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{f}_1 + (cc_g)_{x=l} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\partial \phi_N}{\partial \mathbf{n}} \quad (6-119)$$

Donde el sistema de ecuaciones sería inicialmente:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \cdots & \cdots & K_{1,N-1} & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \cdots & \cdots & K_{2(N-1)} & K_{2N} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \ddots & \cdots & K_{3(N-1)} & K_{3N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K_{(N-1)1} & K_{(N-1)2} & K_{(N-1)3} & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & K_{N3} & \cdots & \cdots & K_{N(N-1)} & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_{N-1} \\ \bar{\phi}_N \end{bmatrix} = \mathbf{f}_1 + (cc_g)_{x=l} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\partial \phi_N}{\partial \mathbf{n}} \quad (6-120)$$

Como el valor de  $\bar{\phi}_N$  es conocido por la condición de contorno, debemos llevarlo al término de la derecha, mientras que el término desconocido con  $\frac{\partial \phi_N}{\partial \mathbf{n}}$  pasa a la izquierda, ambos cambiados de signo. Esto es equivalente a intercambiar las columnas como se indica a continuación:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \cdots & \cdots & K_{1,N-1} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \cdots & \cdots & K_{2(N-1)} & 0 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \ddots & \cdots & K_{3(N-1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K_{(N-1)1} & K_{(N-1)2} & K_{(N-1)3} & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ K_{N1} & K_{N2} & K_{N3} & \cdots & \cdots & K_{N(N-1)} & -(cc_g)_{x=l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_{N-1} \\ \frac{\partial \phi_N}{\partial \mathbf{n}} \end{bmatrix} = \mathbf{f}_1 + \begin{bmatrix} -K_{1N} \\ -K_{2N} \\ -K_{3N} \\ \vdots \\ \vdots \\ -K_{N-1,N} \\ -K_{NN} \end{bmatrix} \bar{\phi}_N \quad (6-121)$$

Podemos eliminar la última fila de la matriz y sustituirla por otra ecuación en la que aparezca  $\phi_N$  de forma que el vector de incógnitas sólo tenga valores en  $\phi_i$ . Esta nueva ecuación es la propia condición de contorno:

$$K_{NN} \phi_N = K_{NN} \bar{\phi}_N \quad (6-122)$$

En definitiva, dejamos con ceros la última fila y columna de la matriz  $\mathbf{K}$ , excepto el valor de la diagonal  $K_{NN}$  que se queda intacto. De esta forma el sistema de ecuaciones queda:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \cdots & \cdots & K_{1,N-1} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \cdots & \cdots & K_{2(N-1)} & 0 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \ddots & \cdots & K_{3(N-1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K_{(N-1)1} & K_{(N-1)2} & K_{(N-1)3} & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_{N-1} \\ \phi_N \end{bmatrix} = \mathbf{f}_1 + \begin{bmatrix} -K_{11} \\ -K_{21} \\ -K_{31} \\ \vdots \\ \vdots \\ -K_{N-1,1} \\ +K_{N1} \end{bmatrix} \bar{\phi}_N \quad (6-123)$$

Mantener el valor  $K_{NN}$  en la diagonal de  $\mathbf{K}$  tiene su importancia, pues nos da lugar a una matriz  $\mathbf{K}$  bien condicionada para ser invertida numéricamente; todos los términos de  $\mathbf{K}$  son del mismo orden de magnitud, evitando problemas de convergencia numérica en la resolución del sistema de ecuaciones:  $\mathbf{K}_{mod} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{f}_{mod}$ .

#### 6.7.2.4. Condición de Contorno de flujo de potencial prescrito (C.C. Natural o Neumann):

La condición de contorno en este caso prescribe el valor de  $\frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{n}}$  en unos de los bordes del dominio. Con este valor conocido entramos directamente en la forma débil de la ecuación (6-55).

$$cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right]_{x=0} = (cc_g)_{x=0} \frac{\partial \phi_1}{\partial \mathbf{n}} [\mathbf{N}^{(1)T} \mathbf{N}^{(1)}]_{x=0} \quad (6-124)$$

$$cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right]_{x=l} = (cc_g)_{x=l} \frac{\partial \phi_N}{\partial \mathbf{n}} [\mathbf{N}^{(N-1)T} \mathbf{N}^{(N-1)}]_{x=l} \quad (6-125)$$

Como ya conocemos el valor de  $[\mathbf{N}^{(1)T}]_{x=0}$  y  $[\mathbf{N}^{(N-1)T}]_{x=l}$  de las ecuaciones (6-84) y (6-95), obtenemos:

$$cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right]_{x=0} = (cc_g)_{x=0} \frac{\partial \phi_1}{\partial \mathbf{n}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6-126)$$

$$cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right]_{x=l} = (cc_g)_{x=l} \frac{\partial \phi_N}{\partial \mathbf{n}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6-127)$$

Expresado en forma matricial global para insertar la condición de contorno de flujo de potencial prescrito, podemos escribir las ecuaciones (6-126) y (6-127) de la siguiente forma:

$$cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right]_{x=0} = (cc_g)_{x=0} \frac{d\phi_1}{d\mathbf{n}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6-128)$$

$$cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x=l} = (cc_g)_{x=l} \frac{d\phi_N}{d\mathbf{n}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6-129)$$

Los términos de la derecha de las ecuaciones (6-128) y (6-129) son vectores columna constantes.

## 6.8. Procedimiento de ensablaje del sistema de ecuaciones.

### 6.8.1. Ensamblaje de la matriz de rigidez global.

Al igual que ocurre en el MEF aplicado a los problemas de elasticidad, aquí estamos buscando un sistema lineal de ecuaciones algebraicas del tipo:

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{f} \quad (6-130)$$

Por la evidente analogía con el problema mecánico, llamaremos a  $\mathbf{K}$  matriz de rigidez global, a  $\boldsymbol{\phi}$  vector de incógnitas y a  $\mathbf{f}$  vector de fuerzas, aun a sabiendas que  $\mathbf{K}$  no es realmente una matriz de rigidez ni  $\mathbf{f}$  representa ninguna fuerza.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix} \quad (6-131)$$

Es fácil deducir que la matriz  $\mathbf{K}$  global tiene dimensiones  $N \times N$ , siendo  $N$  el número de nodos de la discretización. A su vez,  $\boldsymbol{\phi}$  y  $\mathbf{f}$  son vectores columna de dimensiones  $N \times 1$ .

Una vez discretizado el dominio  $\Omega$  en nodos y elementos, las integrales de dominio pueden calcularse como una suma de integrales en cada elemento  $\Omega_e$ . Este sumatorio se realiza de forma matricial como ya hemos apuntado en el epígrafe 6.7.1, por lo que se trata de un proceso mecánico de “ensablaje” de cada una de la matrices elementales colocadas en su posición correcta para conformar la **matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  global** del sistema.

El proceso de montaje de la matriz de rigidez es un proceso automático y muy simple que se presta a su implementación sencilla mediante un lenguaje de programación tipo Matlab®. En su momento vimos que primero obteníamos las integrales de dominio  $\mathbf{K}^e$  y  $\mathbf{M}^e$  elemento a elemento y luego realizábamos el sumatorio para todo el dominio.

Partimos de las dos matrices elementales (6-64) y (6-65) obtenidas para el elemento lineal de dos nodos genérico ( $e$ ):

$$\mathbf{K}^e = (cc_g)_e \left[ \int_{x_i}^{x_j} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e dx \right] = (cc_g)_e \frac{1}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6-132)$$

$$\mathbf{M}^e = \left( \frac{c_g}{c} \right)_e \left[ \int_{x_i}^{x_j} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e dx \right] = \left( \frac{c_g}{c} \right)_e \frac{L_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (6-133)$$

Con estas dos matrices montamos la matriz  $\mathbf{K}^{ee}$  en cada elemento:

$$K^{ee} = K^e - \omega^2 M^e \tag{6-134}$$

¿Cómo se ensambla la matriz elemental  $K^{ee}$  dentro de la matriz de rigidez global  $K$ ? La respuesta es muy sencilla: justo en las posiciones de filas y columnas marcadas por los índices  $i$  y  $j$ , correspondientes a la numeración de los nodos del elemento( $e$ ) de la discretización. Como aclaración obsérvese la siguiente figura explicativa:

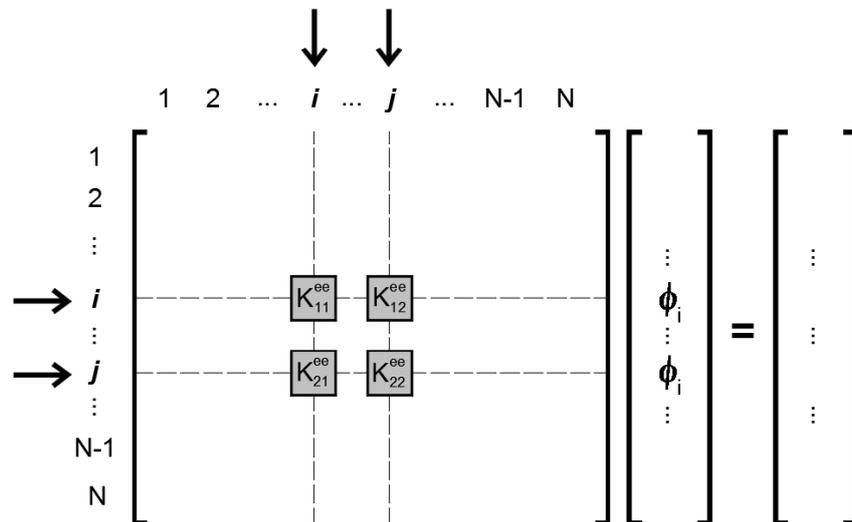


Figura 6-12. Proceso de ensamblaje de la matriz de rigidez  $K$  (elemento  $e$  entre los nodos  $i$ - $j$ ).

En el caso de la MSE 1-D este proceso de ensamblaje es trivial, pues los nodos de la discretización han sido numerados de forma correlativa desde el borde izquierdo  $x = 0$  hasta el borde derecho  $x = l$ . Procediendo de esta forma es sencillo relacionar cualquier elemento de la malla con los nodos que lo conforman (ver figura adjunta). A la relación entre los elementos y los nodos que conforman una malla de elementos finitos se denomina relación topológica, o simplemente **topología de la malla**.

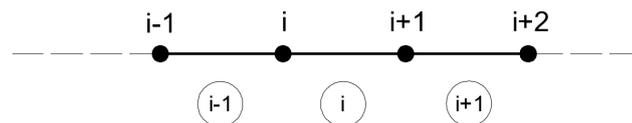


Figura 6-13. Topología de la malla de elementos finitos en el caso 1-D.

### 6.8.2. Ensamblaje de las condiciones de contorno.

Por último, nos queda introducir las condiciones de contorno del problema en el sistema lineal de ecuaciones. En el apartado 6.7.2 vimos que las condiciones de contorno del problema, según el tipo de condición impuesta en cada extremo del dominio, al ser introducidas en el sistema de ecuaciones alteraba la matriz de rigidez  $K$ , dando lugar a una matriz de rigidez modificada  $K_{mod}$  no singular. A su vez, se obtenía el vector de fuerzas modificado  $f_{mod}$ , de forma que el sistema de ecuaciones algebraicas final a resolver sería de la forma:

$$K_{mod} \phi = f_{mod} \tag{6-135}$$

$$\phi = (K_{mod})^{-1} f_{mod} \tag{6-136}$$

A continuación analizaremos como se “montan” las matrices  $\mathbf{K}_{mod}$  y  $\mathbf{f}_{mod}$  para cada una de las condiciones de contorno utilizadas.

- **Borde Cerrado:**

Recordando las ecuaciones (6-87) y (6-88), en función de dónde se impusiera la condición de borde cerrado obtuvimos:

- Borde cerrado en  $x = 0$ :

$$cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x=0} = i (kcc_g)_{x=0} \left( \frac{1-R}{1+R} \right)_{x=0} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6-137)$$

- Borde cerrado en  $x = l$ :

$$cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x=l} = i (kcc_g)_{x=l} \left( \frac{1-R}{1+R} \right)_{x=l} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \phi_N \end{bmatrix} \quad (6-138)$$

Obsérvese que los términos de la derecha de las ecuaciones (6-137) y (6-138) son vectores columna que contienen el potencial desconocido en cada uno de los bordes del dominio. Por ello, estos términos pasan cambiados de signo al primer término de la ecuación  $\mathbf{K} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{f}$ , modificando la matriz  $\mathbf{K} \Rightarrow \mathbf{K}_{mod}$ .

Esta modificación consiste simplemente en:

- Si el borde cerrado se sitúa  $x = 0$ , añadimos al primer término de la diagonal  $\mathbf{K}_{11}$  de la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  el sumando:

$$-i(kcc_g)_{x=0} \left( \frac{1-R}{1+R} \right)_{x=0}$$

- Si el borde cerrado se sitúa  $x = l$ , añadimos al último término de la diagonal  $\mathbf{K}_{NN}$  de la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  el sumando:

$$-i(kcc_g)_{x=l} \left( \frac{1-R}{1+R} \right)_{x=l}$$

Por otro lado, La condición de borde cerrado no contribuye al vector de fuerzas modificado  $\mathbf{f}_{mod}$ .

- **Borde Abierto:**

Recordando las ecuaciones (6-98) y (6-99), en función de dónde se impusiera la condición de borde abierto obtuvimos:

- Borde cerrado en  $x = 0$ :

$$cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x=0} = -2i (kcc_g)_{x=0} \phi_{in} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + i (kcc_g)_{x=0} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \phi_1 \quad (6-139)$$

- Borde cerrado en  $x = l$ :

$$cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x=l} = -2i (kcc_g)_{x=l} \phi_{in} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i (kcc_g)_{x=l} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \phi_N \quad (6-140)$$

Obsérvese que los primeros términos de la derecha de las ecuaciones (6-139) y (6-140) son vectores columna constantes, mientras que los segundos continenen el potencial desconocido en el extremo del dominio donde se impone la condición de borde abierto. Por ello, estos últimos sumandos pasan cambiados de signo al primer término de la ecuación  $\mathbf{K} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{f}$ , modificando la matriz  $\mathbf{K} \Rightarrow \mathbf{K}_{mod}$ .

La modificación de la matriz de rigidez en este caso consiste simplemente en:

- Si el borde abierto se sitúa  $x = 0$ , añadimos al primer término de la diagonal  $K_{11}$  de la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  el sumando:

$$-i (kcc_g)_{x=0}$$

- Si el borde abierto se sitúa  $x = l$ , añadimos al último término de la diagonal  $K_{NN}$  de la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  el sumando:

$$-i (kcc_g)_{x=l}$$

La contribución al vector de fuerzas modificado  $\mathbf{f}_{mod}$  en este caso sería:

- Si el borde cerrado se sitúa  $x = 0$ :  $\mathbf{f}_1 = -2i (kcc_g)_{x=0} \phi_{in} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- Si el borde cerrado se sitúa  $x = l$ :  $\mathbf{f}_2 = -2i (kcc_g)_{x=l} \phi_{in} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$

- **Borde con potencial prescrito (C.C. Esencial o Dirichlet):**

- Si el borde con potencial prescrito es  $x = 0$ .

La Matriz de rigidez global modificada  $\mathbf{K}_{mod}$  la obtendremos dejando con ceros la primera fila y columna de la matriz  $\mathbf{K}$ , excepto el valor de la diagonal  $K_{11}$  que se queda intacto.

$$\mathbf{K}_{mod} = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} & \cdots & \cdots & K_{2(N-1)} & K_{2N} \\ 0 & K_{32} & K_{33} & \ddots & \cdots & K_{3(N-1)} & K_{3N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & K_{(N-1)2} & K_{(N-1)3} & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & K_{N2} & K_{N3} & \cdots & \cdots & K_{N(N-1)} & K_{NN} \end{bmatrix} \quad (6-141)$$

- Si el borde con potencial prescrito es  $x = L$ .

La Matriz de rigidez global modificada  $\mathbf{K}_{mod}$  la obtendremos dejando con ceros la última fila y columna de la matriz  $\mathbf{K}$ , excepto el valor de la diagonal  $K_{NN}$  que se queda intacto.

$$\mathbf{K}_{mod} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \cdots & \cdots & K_{1(N-1)} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \cdots & \cdots & K_{2(N-1)} & 0 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \ddots & \cdots & K_{3(N-1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ K_{(N-1)1} & K_{(N-1)2} & K_{(N-1)3} & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & K_{NN} \end{bmatrix} \quad (6-142)$$

La contribución al vector defuerzas modificado  $\mathbf{f}_{mod}$  en este caso sería:

- Si el borde con potencial prescrito es  $x = 0$ .

La contribución al vector  $\mathbf{f}_{mod}$  es:

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} +K_{11} \\ -K_{21} \\ -K_{31} \\ \vdots \\ \vdots \\ -K_{N-1,1} \\ -K_{N1} \end{bmatrix} \bar{\phi}_1 \quad (6-143)$$

- Si el borde con potencial prescrito es  $x = L$ .

La contribución al vector  $\mathbf{f}_{mod}$  es:

$$\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} -K_{1N} \\ -K_{2N} \\ -K_{3N} \\ \vdots \\ \vdots \\ -K_{N-1,N} \\ +K_{NN} \end{bmatrix} \bar{\phi}_N \quad (6-144)$$

- **Borde con flujo de potencial prescrito (C.C. Natural o Neumann):**

Recordando las ecuaciones (6-128) y (6-129), en función de dónde se impusiera la condición de flujo de potencial prescrito obtuvimos:

$$f_1 = cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x=0} = (cc_g)_{x=0} \frac{\partial \phi_1}{\partial \mathbf{n}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6-145)$$

$$f_2 = cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x=l} = (cc_g)_{x=l} \frac{\partial \phi_N}{\partial \mathbf{n}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6-146)$$

Obsérvese que los términos de la derecha de las ecuaciones (6-145) y (6-146) son vectores columna constantes, por lo que no afectan a la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ . La contribución será aplicada directamente al vector  $\mathbf{f}_{mod}$ .

## 6.9. Implementación en Matlab®

Todo el desarrollo teórico matemático anterior nos ha permitido visualizar que se esconde tras el MEF aplicado a la MSE 1-D. Disponemos ya, por tanto, de una base sólida que nos permitirá programar un algoritmo numérico de elementos finitos en lenguaje Matlab®.

Con este algoritmo vamos a simular cinco problemas clásicos de los que disponemos de solución analítica y/o soluciones numéricas procedentes de la bibliografía técnica especializada:

- **Simulación MSE-1D-000:** propagación de una onda monocromática en **batimetría con fondo constante**. Se trata de un problema trivial, pero importante como un primer calibrado del modelo numérico.
- **Simulación MSE-1D-001:** obtención de los coeficientes de propagación en el caso teórico de “**shoaling puro**”. Este fenómeno sólo puede producirse en caso de batimetrías rectas y paralelas y frentes de onda paralelos a las batimétricas.
- **Simulación MSE-1D-002:** cálculo de las **frecuencias o modos naturales de oscilación** de una dársena unidimensional abierta al mar por un extremo.
- **Simulación MSE-1D-003:** cálculo de las **frecuencias de resonancia** de una dársena unidimensional abierta al mar por un extremo.
- **Simulación MSE-1D-004:** cálculo de los **coeficientes de reflexión de ondas provocados por la pendiente del fondo**. Comprobación de la validez de la hipótesis de fondo suave de Rayleigh para la MSE.

## 6.10. SIMULACIÓN MSE-1D-000. Propagación de Onda Monocromática en Batimetría Constante

### 6.10.1. Descripción física del problema.

Este es un problema trivial resuelto por la teoría lineal de ondas de Airy. No obstante, es un punto de partida pedagógicamente importante para el inicio a los test eficiencia, estabilidad y precisión de nuestro modelo numérico de elementos finitos.

Partiendo como dato el periodo de la onda  $T$  y una profundidad  $h$  constante del fondo marino para una situación de aguas intermedias  $0.05 \leq \frac{h}{L} \leq 0.50$ , siendo  $L$  la longitud de onda local para la profundidad  $h$  obtenida de la ecuación de dispersión de ondas.

Supondremos que un potencial unitario entra por el borde izquierdo del dominio  $x = 0$  y que en el borde derecho ponemos condiciones de borde totalmente absorbente  $R = 0$ , lo que físicamente equivale a que la onda atraviesa este dominio sin ser reflejada.

### 6.10.2. Solución analítica del problema.

La solución analítica del potencial reducido de velocidad de amplitud  $\tilde{\varphi}$  en cualquier punto  $x$  del dominio viene expresado por la siguiente ecuación:

$$\phi(x) = \tilde{\varphi} e^{ikx} \quad (6-147)$$

Por tratarse de una propagación en fondo de profundidad constante, los valores del número de onda  $k$  y amplitud  $\tilde{\varphi}$  permanecen constantes.

Si adoptamos en nuestra simulación unos valores numéricos de  $T = 5''$ , profundidad  $h = 3 \text{ m}$  y amplitud  $\tilde{\varphi} = 1$ , podemos obtener por iteración la longitud de onda a través de la ecuación de dispersión:

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right) \Rightarrow L \approx 24,93 \text{ m} \quad (6-148)$$

Una vez conocida la longitud de onda podemos comprobar que efectivamente nos encontramos en profundidades intermedias:

$$\frac{h}{L} = \frac{3}{24,93} = 0,1203 \Rightarrow 0.05 \leq \frac{h}{L} \leq 0.50 \text{ Profundidad intermedia} \quad (6-149)$$

### 6.10.3. Solución numérica del problema.

Se ha realizado una simulación numérica mediante un código de elementos finitos programado en Matlab®. Se han introducido los siguientes datos al modelo:

Tabla 6-1 Datos numéricos del problema de Propagación en Fondo Constante

DATO	VALOR NUMÉRICO
Potencial de entrada en ( $x = 0$ )	$\phi_{in} = 1$
Periodo de la onda	$T = 5''$
Pendiente del fondo	$m = 0.00$
Coefficiente de reflexión ( $x = l$ )	$R = 0$
Longitud del dominio	$l = 100 \text{ m}$
Número de elementos	$N_{el} = \text{variable}$
Calado	$h = 3 \text{ m}$

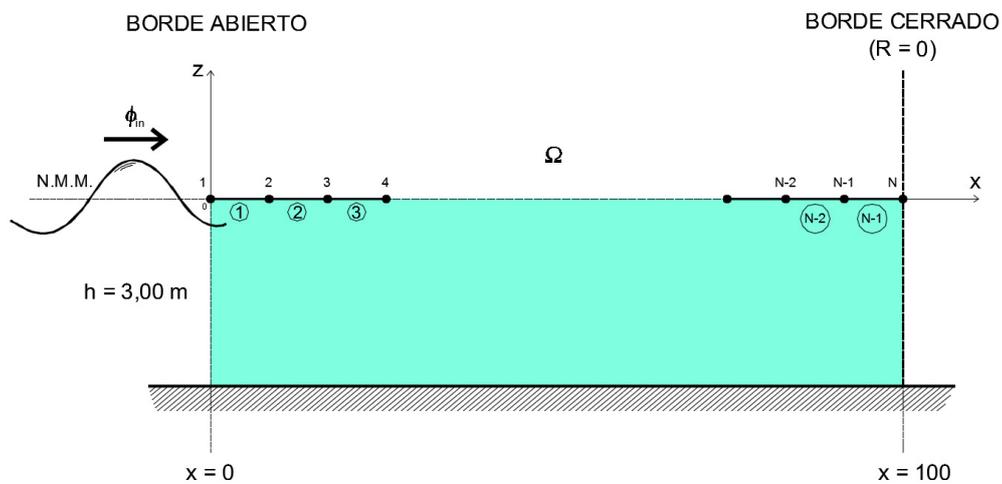


Figura 6-14. Geometría del modelo MSE1D-000.

A continuación se presentan y comentan los resultados obtenidos de la simulación. En primer lugar se muestra un gráfico en el que se muestra la tendencia de reducción del máximo error absoluto cuando aumenta el número de elementos de la malla de elementos finitos.

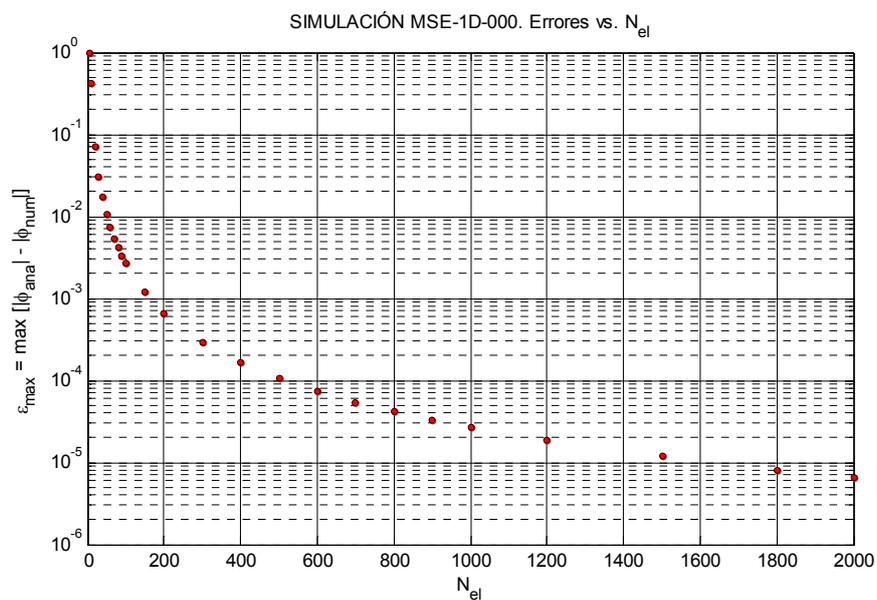


Figura 6-15. Máximo valor absoluto del error en el modelo frente al tamaño de la malla.

Si expresamos el anterior gráfico con ambos ejes logarítmicos, se obtiene que los puntos obtenidos tienden a una recta.

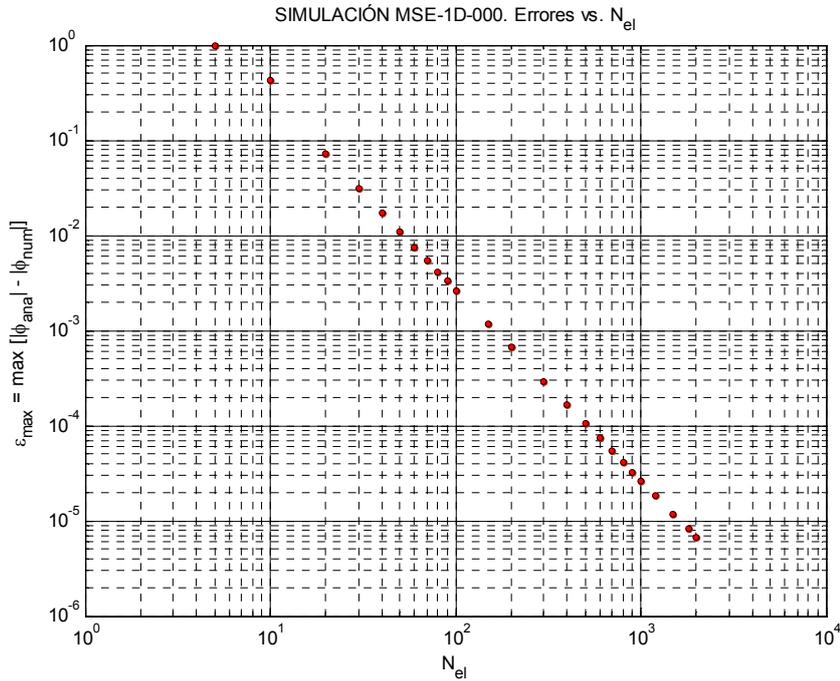


Figura 6-16. Máximo valor absoluto del error en el modelo frente al tamaño de la malla.

Desde un punto de vista puramente práctico en ingeniería marítima, bastarían unos 20 puntos por longitud de onda para definir adecuadamente la forma de la onda. En nuestro caso concreto con un dominio de 100 m y una longitud de onda de unos 25 m, bastarían unos 80-100 elementos. Con esta discretización se alcanzan valores máximos envolventes del error absoluto del potencial entre  $4 \cdot 10^{-3}$  y  $2 \cdot 10^{-3}$ , como se observa en la figura anterior.

En la siguiente figura se presenta un gráfico comparativo entre la solución analítica (puntos) y la numérica (roja continua) para una discretización de 100 elementos (tamaño del elemento 1,00 m). Se observa que la solución numérica se ajusta muy bien a la analítica.

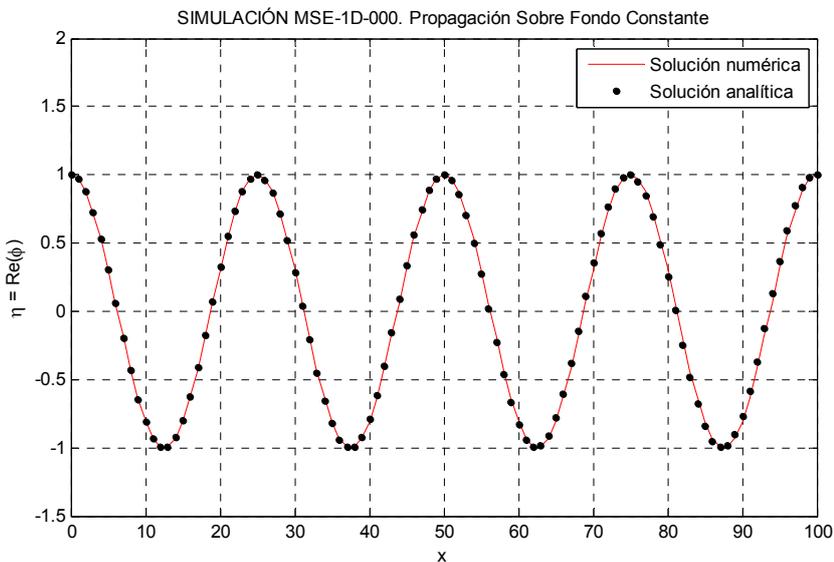


Figura 6-17. Comparativo de solución Analítica vs. Numérica con malla de 100 elementos.

Finalmente se presentan cuatro gráficos comparativos de la solución numérica y analítica, tomando en cada caso un valor creciente del número de elementos  $N_{el}$  de la malla: 20 – 50 – 100 – 200.

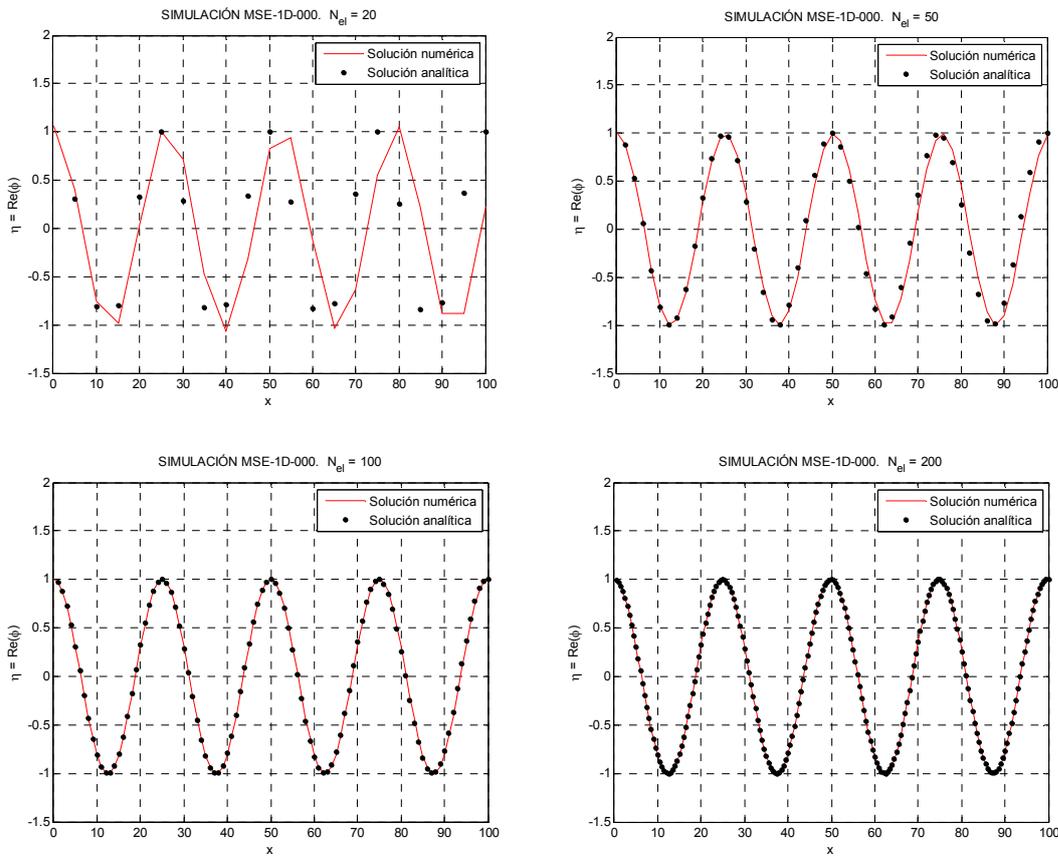


Figura 6-18. Comparación de resultados para diferente número de elementos.

#### 6.10.4. Código de elementos finitos en Matlab®.

Anexo al presente TFM se incluye un CD-Rom que incluye, entre otros, el listado de código de elementos finitos **MSE1D\_000.m** programado en Matlab® empleado para resolver el problema de propagación sobre fondo plano. Así mismo, se incluyen las funciones auxiliares empleadas por el código principal del programa.

## 6.11. SIMULACIÓN MSE-1D-001. Shoaling Puro

### 6.11.1. Descripción física del problema.

Supongamos una playa costera de alineación recta en planta como se observa en la figura adjunta. La batimetría de la playa sumergida se supone también recta y paralela a la línea de costa. Por simplicidad, tomaremos una pendiente  $m$  constante del fondo.

Con esta geometría de la costa, supongamos la propagación de una onda monocromática de amplitud unidad y periodo  $T$  en aguas profundas ( $\frac{h}{L} > 0,5$ ), que se propaga hacia la costa con dirección perpendicular a las batimétricas. Este es un caso teórico denominado **shoaling puro**, pues no va acompañado de ningún otro fenómeno de propagación.

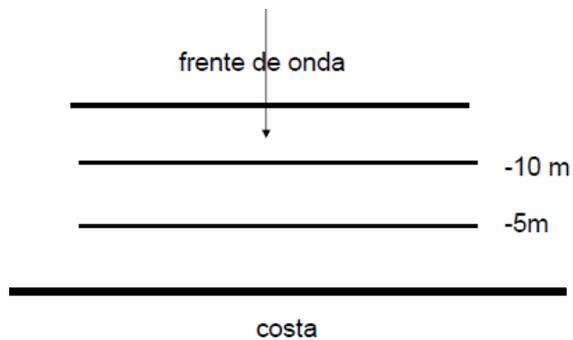


Figura 6-19. Playa de planta rectilínea con batimetría aproximadamente recta y paralela.

En este problema admitiremos que la playa es un obstáculo físico totalmente absorbente ( $R = 0$ ), por lo que aceptaremos que el borde litoral no refleja ondas hacia mar adentro.

Al incidir los frentes de ondas paralelos a la línea de costa, sin la existencia de obstáculos (excepto la propia playa), los frentes de onda no sufren deformaciones en la dirección perpendicular al avance de la onda; el problema se reduce a uno unidimensional con una única variable espacial  $x$  en el sentido de avance de la ola. En la dirección  $\pm y$  los frentes onda se consideran infinitos.

El fenómeno de shoaling puro se caracteriza por una reducción de la longitud ( $L$ ) y celeridad ( $c$ ) de la onda en su avance hacia la costa, acompañado de un aumento del peralte ( $\frac{H}{L}$ ) y altura de la ola ( $H$ ) previo a su rotura. El periodo ( $T$ ) de la onda se mantiene constante durante la propagación.

### 6.11.2. Solución analítica del problema.

El problema de shoaling puro tiene solución analítica. Ésta se obtiene simplemente de aplicar la **conservación del flujo de energía** en la propagación y de considerar que la energía de la onda sólo se transmite frontalmente. Es decir, si imaginamos un **tubo de energía** limitado por dos rayos de avance del frente de onda y el fondo, la energía no se transmite por las paredes laterales del tubo de energía (ver figura adjunta).

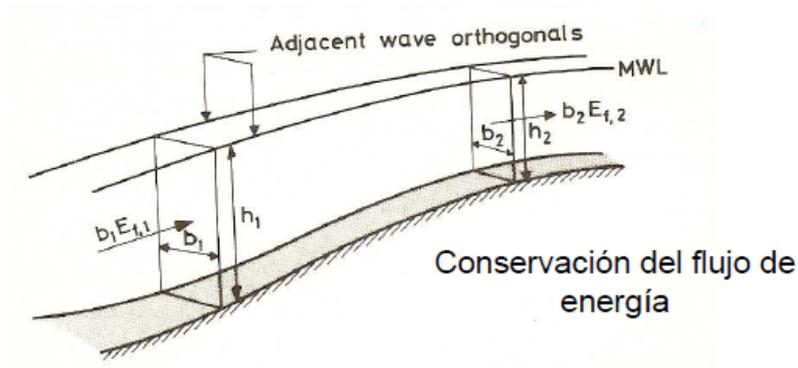


Figura 6-20. Conservación del flujo de energía de la onda.

En el capítulo 4 dedicado a la onda lineal de Airy dedujimos la ecuación del flujo de energía de la onda (4-80):

$$E_f = E c_g \quad E = \frac{1}{8} \rho g H^2 \quad (6-150)$$

Si consideramos dos secciones 1 y 2 de un mismo tubo de energía y planteamos la **conservación del flujo de energía** entrante y saliente se obtiene:

$$b_2 E_{f,2} = b_1 E_{f,1} + \Delta E_{1-2} \quad (6-151)$$

Siendo  $\Delta E_{1-2}$  las pérdidas de energía por fricción con el fondo. Supongamos despreciables las pérdidas de energía por fricción en el fondo. El mecanismo físico de propagación de ondas es extremadamente eficiente por lo que en primera aproximación podemos despreciar las pérdidas de energía por fricción.

$$b_2 E_{f,2} \approx b_1 E_{f,1} \quad (6-152)$$

En el caso de shoaling puro, al no producirse deformaciones en la dirección espacial  $\pm y$ , la anchura  $b_i$  del tubo de energía se mantiene constante durante la propagación, por tanto:

$$E_{f,2} \approx E_{f,1} \quad (6-153)$$

$$c_{g,2} \frac{1}{8} \rho g H_2^2 \approx c_{g,1} \frac{1}{8} \rho g H_1^2 \quad (6-154)$$

Por tanto, conocida la altura de ola en la sección 1 podremos conocer la altura en otra sección 2:

$$H_2 = \sqrt{\frac{c_{g,1}}{c_{g,2}}} H_1 \quad (6-155)$$

Normalmente, en los problemas reales de ingeniería marítima disponemos de datos de alturas de ola procedentes de boyas fondeadas en aguas profundas. Si consideramos que la sección 1 se sitúa en aguas profundas (subíndice 0) y la sección 2 es cualquier otra sección del frente de onda (sin subíndice), llegamos a la siguiente expresión:

$$H = \sqrt{\frac{c_{g0}}{c_g}} H_0 = K_s H_0 \quad (6-156)$$

Siendo  $K_s$  el coeficiente de shoaling.

La expresión analítica del potencial  $\phi(x)$  de velocidad complejo para una onda incidente de amplitud  $A_0$  (en

aguas profundas) propagándose sobre fondo plano de pendiente  $m$  constante, se ha obtenido de la bibliografía técnica [11]:

$$\phi(x) = A_0 \sqrt{\frac{c_{g0}}{c_g}} e^{i \int_{x_0}^x k(x) dx} = A_0 K_S e^{i \int_{x_0}^x k(x) dx} \quad (6-157)$$

### 6.11.3. Solución numérica del problema.

Se ha realizado una simulación numérica mediante un código de elementos finitos programado en Matlab®. Se han empleado los siguientes datos:

Tabla 6-2 Datos numéricos del problema de Shoaling Puro

DATO	VALOR NUMÉRICO
Potencial de entrada en ( $x = 0$ )	$\phi_{in} = 1$
Periodo de la onda	$T = 5''$
Pendiente del fondo	$m = 0.05$
Coefficiente de reflexión (playa)	$R = 0$
Longitud del dominio	$l = 400 \text{ m}$
Número de elementos	$N_{el} = 1000$
Calado máximo ( $x = 0$ )	$h_0 = 20,50 \text{ m}$
Calado mínimo ( $x = l$ )	$h_l = 0,50 \text{ m}$

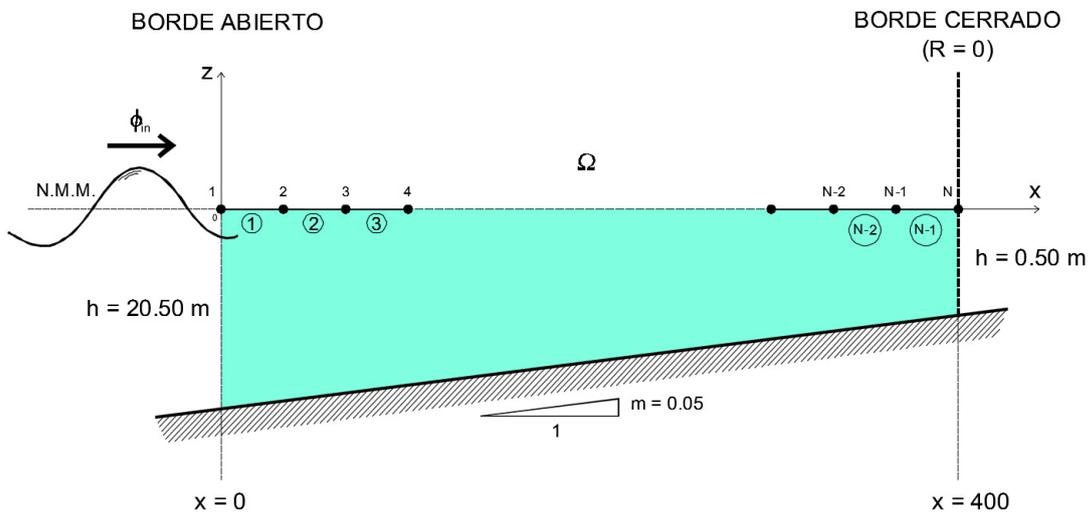


Figura 6-21. Geometría del modelo MSE-1D-001.

En aguas profundas la onda de periodo  $5''$  tienen una longitud de onda:

$$L_0 = \frac{gT^2}{2\pi} = 1,56 T^2 = 39 \text{ m} \quad (6-158)$$

La profundidad límite de aguas profundas ( $\frac{h}{L} = 0,5$ ) se sitúa por tanto a  $h = \frac{39}{2} = 19,50 \text{ m}$ , por ello se ha tomado un calado máximo en  $x = 0$  de  $20,50 \text{ m}$ . De esta forma nos aseguramos que la amplitud del potencial entrante al dominio tiene amplitud unidad, pues no ha sufrido aún el efecto de asomeramiento o shoaling.

Se ha tomado una profundidad mínima de 0,50 m, aún a sabiendas que para dicha profundidad la onda estaría en rotura (aplicando criterio de rotura de McCowan:  $\frac{H}{h} > 0,78$ ). Se ha procedido de esta manera para observar el crecimiento exponencial de la altura de ola y el efecto de peraltamiento al acercarse el frente a la costa.

Iterando con la ecuación de dispersión de ondas podemos obtener la longitud de la onda de periodo  $T = 5''$  y calado  $h = 0,50$  m, resultando:

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh(kh) \Rightarrow L \approx 11 \text{ m} \tag{6-159}$$

Como el dominio de integración es de 400 m y se ha discretizado en  $N = 1000$  elementos, resulta un tamaño de elemento de  $\Delta x = \frac{400}{1000} = 0,40$  m. Por tanto, para el caso más desfavorable de  $L = 11$  m con calado de 0,50 m, se obtiene un número mínimo de 27 nodos por longitud de onda (>20 nodos), lo cual asegura que la discretización adoptada es adecuada.

A continuación mostraremos los resultados gráficos generados con el código de Matlab® y su comparación con los resultados analíticos obtenidos de la bibliografía técnica especializada. Comenzamos mostrando el gráfico adimensional del coeficiente de shoaling puro analítico que aparece en el USACE "Shore Protection Manual" [7]. Este gráfico nos permite contrastar los resultados obtenidos por el modelo.

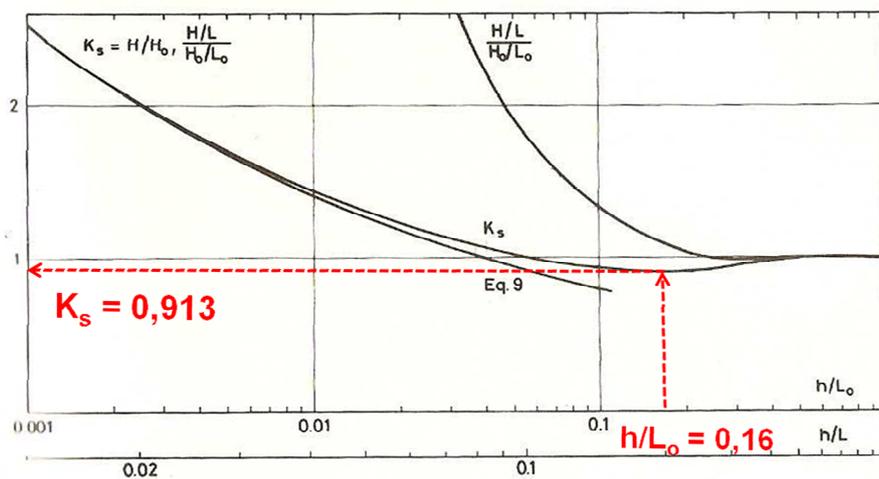


Figura 6-22. Valor analítico del coeficiente de shoaling  $K_s$ . Fuente USACE "Shore Protection Manual".

Observese el comportamiento de la curva de  $K_s$ . En aguas profundas  $K_s = 1$ , pero al aproximarnos a valores  $\frac{h}{L_0} = 0,16$  la curva presenta un mínimo de  $K_s = 0,913$ . A partir de ahí la curva crece exponencialmente (ver curva de  $K_s$ ).

Obsérvese el siguiente gráfico que superpone las soluciones analítica y numérica del coeficiente de shoaling  $K_s$ . Se aprecia que la solución numérica oscila levemente alrededor de la solución analítica; este ruido numérico se ha observado en varios artículos técnicos consultados en la bibliografía técnica [12]. No obstante, se trata de oscilaciones de muy pequeña amplitud (del orden de 0.01) que no tienen consecuencias importantes para su aplicación práctica en ingeniería marítima. De hecho los datos de alturas de ola y periodos de boyas de Puertos del Estado que se emplean para diseño marítimo en España tienen errores superiores al  $\pm 10\%$ .

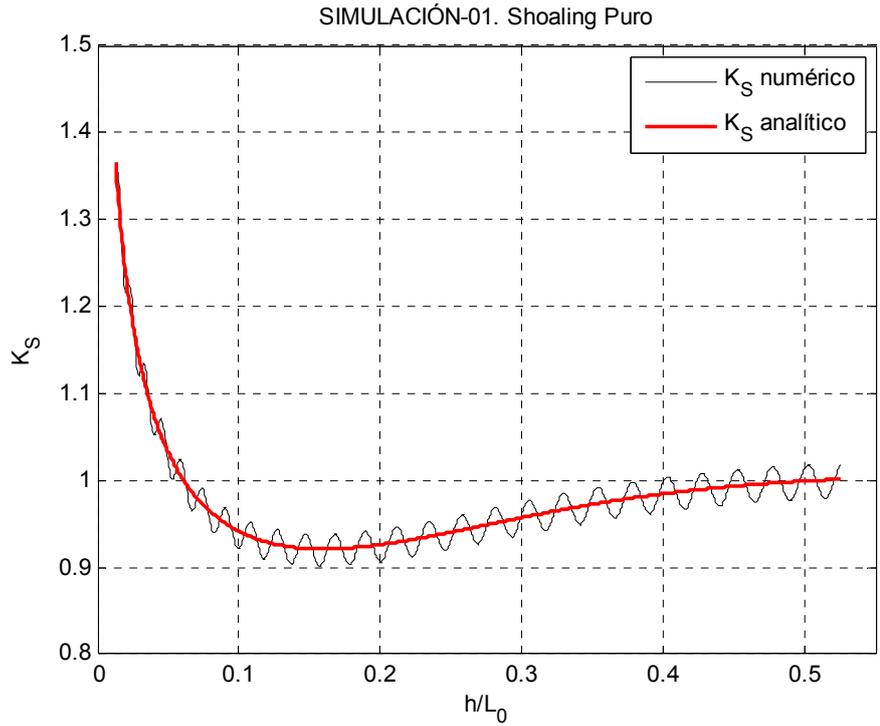


Figura 6-23. Comparativa del coeficiente de shoaling puro  $K_S$  – analítico vs.  $K_S$  – numérico.

En el siguiente gráfico se muestra la onda en  $t = 0$ , correspondiente a la parte real del potencial de velocidad  $\phi$ . Se aprecia claramente un ligero descenso de la amplitud de la onda y después el crecimiento exponencial cuando nos aproximamos a la costa. Se han marcado con círculos rojos las crestas de las ondas para poder apreciar mejor la reducción de la longitud de la onda a medida que desciende el calado al aproximarnos a la costa.

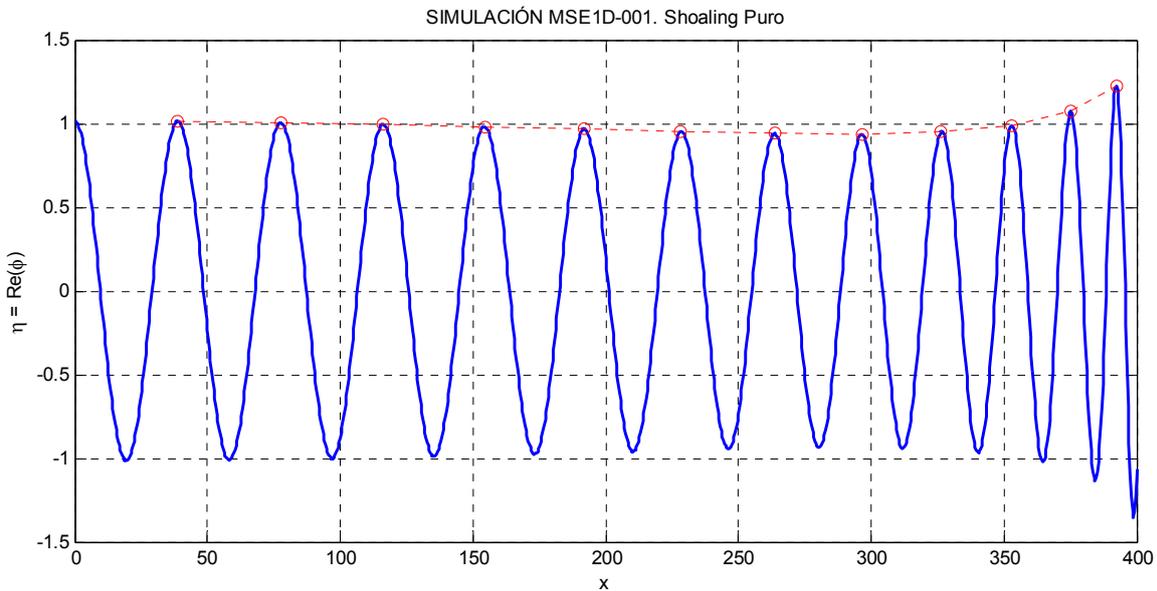


Figura 6-24. Perfil de la superficie libre  $\eta$  en  $t = 0$ . Se corresponde con la parte real de  $\phi$ .

La solución numérica obtenida se compara con la analítica obtenida mediante la ecuación (6-157). En el siguiente gráfico se presentan ambas soluciones superpuestas mostrando un buen encaje; se observan separaciones de ambas curvas en los senos y valles que son debidos a las oscilaciones de la solución numérica ya comentadas.

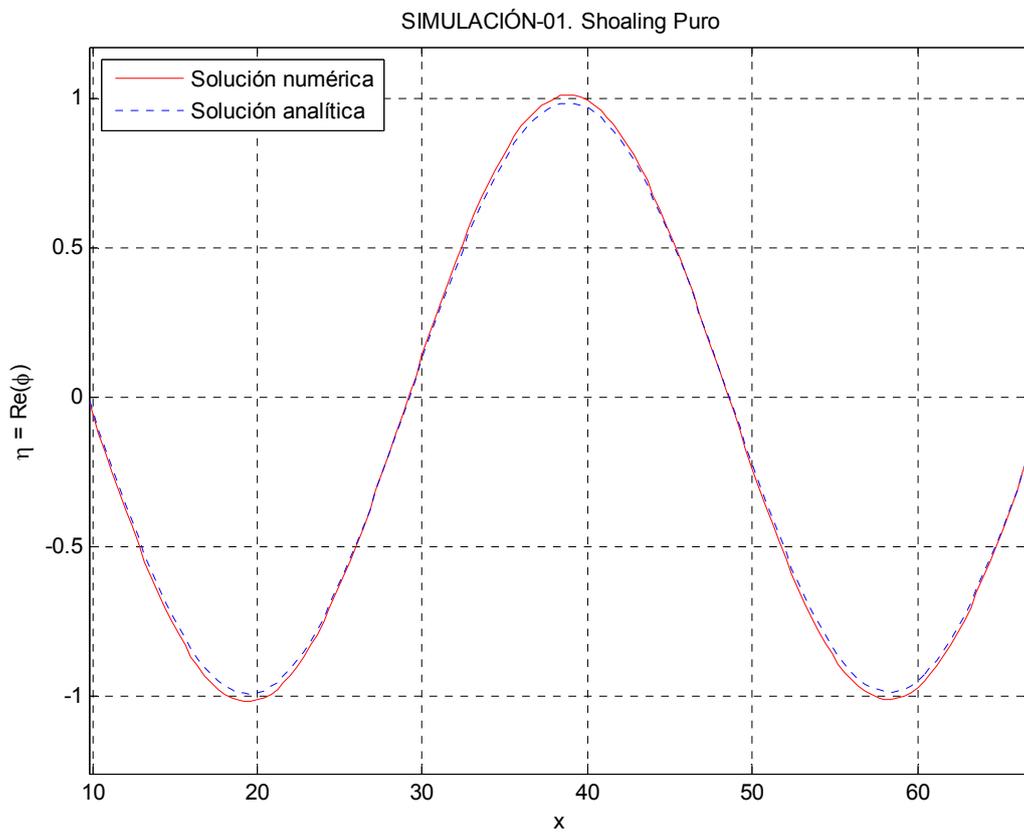
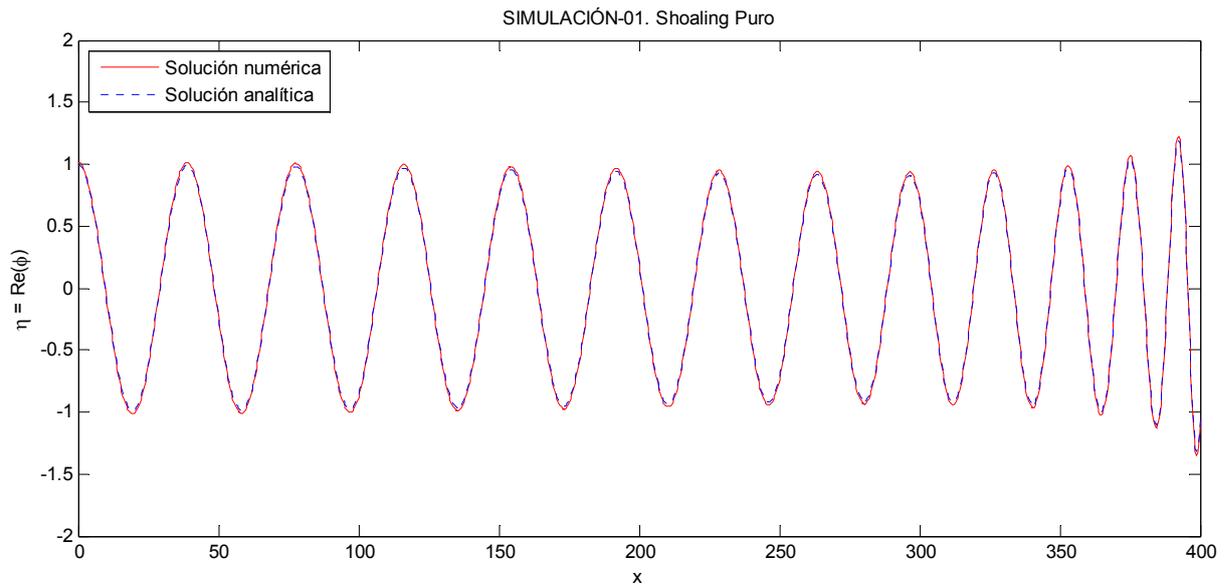


Figura 6-25. Graficos comparativos de la solución Numérica vs. Analítica.

#### 6.11.4. Código de elementos finitos en Matlab®.

Anexo al presente TFM se incluye un CD-Rom que incluye, entre otros, el listado de código de elementos finitos **MSE1D\_001.m** programado en Matlab® empleado para resolver el problema de shoaling puro. Así mismo, se incluyen las funciones auxiliares empleadas por el código principal del programa.

## 6.12. SIMULACIÓN MSE-1D-002. Frecuencias propias de oscilación de dársena unidimensional

### 6.12.1. Descripción física del problema.

Supongamos una dársena portuaria de planta rectangular de ancho  $B$  y longitud  $l$ . La dársena se encuentra abierta la mar en uno de sus extremos y está cerrada en el otro mediante una pared vertical totalmente reflejante ( $R = 1$ ). Se supone que la dársena tiene fondo  $h$  constante.

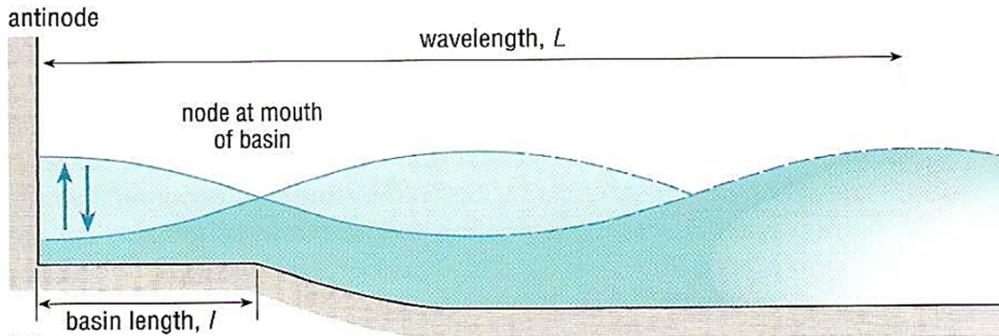


Figura 6-26. Dársena 1-D abierta por un extremo y cerrada por el otro. Extraído de "Waves, Tides and Shallow Water Processes" (Open University) [13].

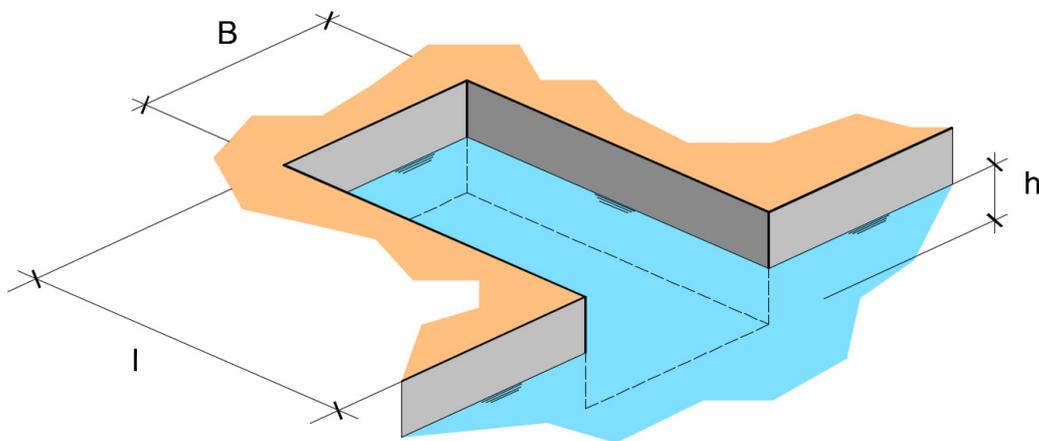


Figura 6-27. Dársena portuaria de geometría sencilla rectangular, abierta por un extremo y cerrada por el otro.

Por el extremo abierto de la dársena entra un oleaje de potencial unidad y periodo  $T$ .

Al chocar la onda contra el fondo cerrado de la dársena se produce una onda reflejada de igual amplitud pero sentido opuesto al incidente, pues hemos considerado que  $R = 1$ . Cuando los valores de frecuencia de la onda incidente alcanzan unos valores adecuados (frecuencias propias naturales) se forma una **onda estacionaria** en la dársena que se caracteriza porque no se desplaza en el espacio, variando solamente de amplitud con el tiempo de forma rítmica. Se observa también que existen unos puntos fijos llamados nodos donde la onda no se mueve verticalmente. Uno de estos nodos se sitúa siempre en la boca de entrada de la dársena (ver figura adjunta).

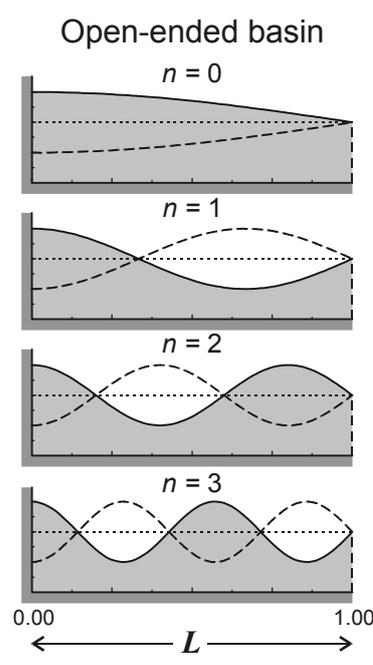


Figura 6-28. Modos naturales de vibración para el caso de dársena abierta.

A la vista de la descripción geométrica planteada, vemos que se trata también de un problema 1-D que podemos resolver con nuestro modelo de elementos finitos unidimensional. Además este problema tiene solución analítica.

**6.12.2. Solución analítica del problema.**

Para el caso de dársena 1-D que estamos estudiando podemos obtener de forma muy sencilla los valores de frecuencias naturales de cada modo natural de oscilación [13]. Para ello supondremos que la onda incidente es muy larga en comparación con el calado de la dársena; en esta situación estaremos en aguas reducidas ( $d/L < 0,05$ ) y la celeridad de la onda tiene la conocida expresión:

$$c = \frac{L}{T} = \sqrt{gh} \tag{6-160}$$

Veamos cómo se obtendría el periodo natural  $T_0$  del primer modo de oscilación (modo fundamental). En este modo sólo hay un nodo situado precisamente en el borde abierto de la dársena.

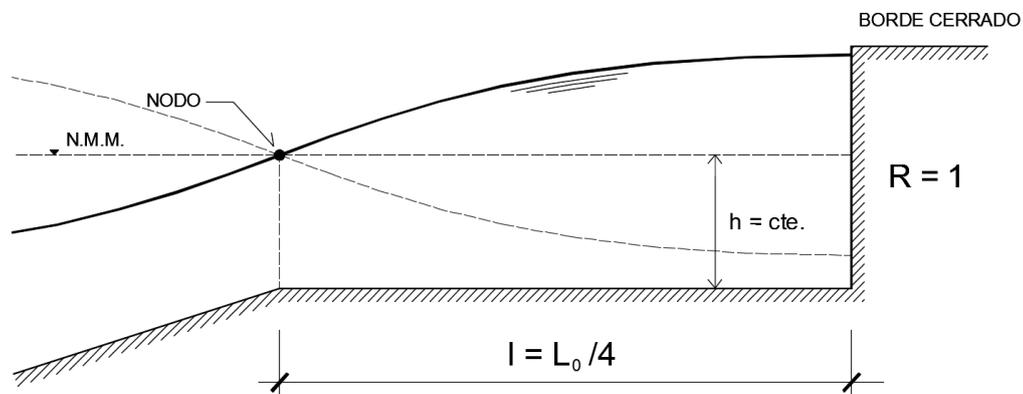


Figura 6-29. Primer modo de oscilación de la dársena.

En ese caso concreto (primer modo) se cumple la condición geométrica de que la longitud de la dársena es igual a cuarto de la longitud de la onda entrante. Por tanto:

$$c = \frac{L_0}{T_0} = \frac{4l}{T_0} = \sqrt{gh} \Rightarrow T_0 = \frac{4l}{\sqrt{gh}} \tag{6-161}$$

Hagamos lo mismo para el segundo modo de oscilación (dos nodos):

$$c = \frac{L_1}{T_1} = \frac{4l}{3T_1} = \sqrt{gh} \Rightarrow T_1 = \frac{4l}{3\sqrt{gh}} \tag{6-162}$$

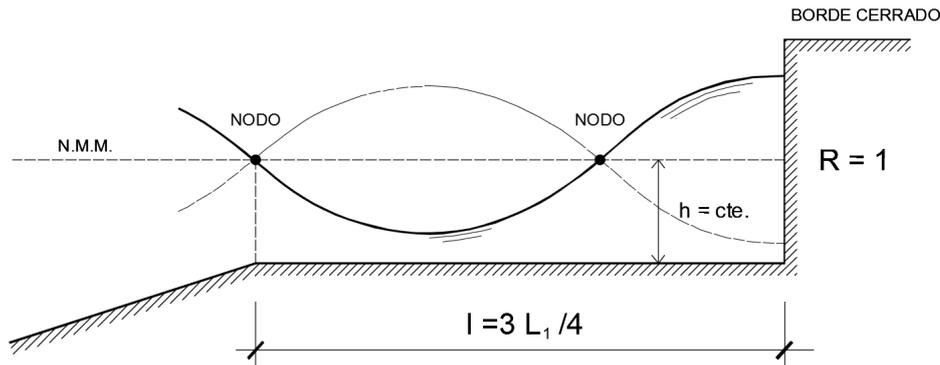


Figura 6-30. Segundo modo de oscilación de la dársena.

Este resultado se puede generalizar para el modo n:

$$T_n = \frac{4l}{(1 + 2n)\sqrt{gh}} \quad n = 0, 1, 2, \dots, n \tag{6-163}$$

De esta forma tan sencilla hemos deducido los valores de las frecuencias propias de oscilación de la dársena.

El fenómeno de **onda estacionaria** que se produce en la dársena puede calcularse de forma analítica teniendo en cuenta que en el punto de entrada a la dársena ( $x=0$ ) tenemos el potencial de entrada  $\phi_{in}$  más el potencial reflejado  $\phi_R$  por el borde cerrado totalmente reflejante  $R$  que sale de la dársena.

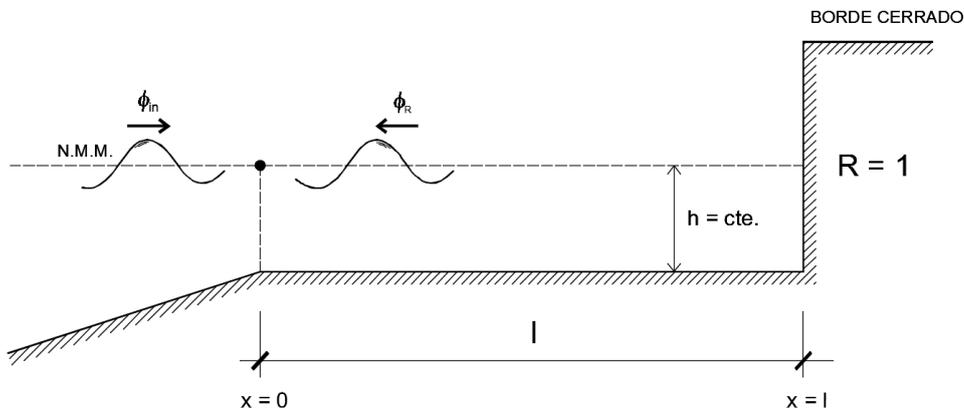


Figura 6-31. Potencial incidente y reflejado en  $x = 0$ .

$$\phi_{in} = \tilde{\varphi} e^{ikx} \tag{6-164}$$

Siendo  $\tilde{\phi}$  la amplitud del potencial entrante conocida.

Sin embargo, el potencial que llega al borde abierto, reflejado desde el borde cerrado  $x = l$ , es:

$$\phi_R = A_R e^{-ikx} \tag{6-165}$$

Siendo  $A_R$  la amplitud de la onda reflejada, desconocida a priori, y que se obtiene imponiendo la condición de reflexión en el borde cerrado  $x = l$ .

$$\phi_R(x = l) = \tilde{\phi} R e^{ikl} \tag{6-166}$$

$$A_R e^{-ikl} = \tilde{\phi} R e^{ikl} \rightarrow A_R = \tilde{\phi} R e^{2ikl} \tag{6-167}$$

Por tanto, la expresión del potencial reflejado  $\phi_R$  en cualquier punto del dominio es:

$$\phi_R = A_R e^{-ikx} = \tilde{\phi} R e^{2ikl} e^{-ikx} \tag{6-168}$$

El potencial  $\phi$  en cualquier punto de la dársena será la suma del incidente más el reflejado:

$$\phi = \phi_{in} + \phi_R = \tilde{\phi} [e^{ikx} + R e^{2ikl} e^{-ikx}] \tag{6-169}$$

Justo en el borde de entrada a la dársena ( $x = 0$ ) tendremos

$$\phi(x = 0) = \tilde{\phi} [1 + R e^{2ikl}] \tag{6-170}$$

En el caso en que  $R = 1$  (borde completamente reflejante) y valor  $\tilde{\phi} = 1$ , nos queda:

$$\phi(x = 0) = 1 + e^{2ikl} \tag{6-171}$$

### 6.12.3. Solución numérica del problema.

Se ha realizado una simulación numérica mediante un código de elementos finitos programado en Matlab®. Este código es muy similar al empleado en la simulación MSE-1D-001 de shoaling puro cambiando los datos de entrada. Se han empleado los siguientes datos:

Tabla 6-3 Datos numéricos del problema de frecuencias naturales en dársena 1-D

DATO	VALOR NUMÉRICO
Potencial de entrada en ( $x = 0$ )	$\phi_{in} = 1$
Pendiente del fondo	$m = 0$ fondo plano horizontal
Coficiente de reflexión (muelle)	$R = 1$
Longitud de dársena	$l = 100 \text{ m}$
Número de elementos	$N_{el} = 100$
Calado de dársena	$h = 2,00 \text{ m}$

Para la configuración geométrica de la dársena elegida se obtienen los valores analíticos de los cuatro primeros

periodos naturales de oscilación:

$$\begin{aligned}
 n = 0 &\Rightarrow T_0 = \frac{4l}{(1+2n)\sqrt{gh}} = \frac{4 \cdot 100}{(1+2 \cdot 0)\sqrt{9,81 \cdot 2}} = 90,3047'' & (6-172) \\
 n = 1 &\Rightarrow T_1 = \frac{4l}{(1+2n)\sqrt{gh}} = \frac{4 \cdot 100}{(1+2 \cdot 1)\sqrt{9,81 \cdot 2}} = 30,1016'' \\
 n = 2 &\Rightarrow T_2 = \frac{4l}{(1+2n)\sqrt{gh}} = \frac{4 \cdot 100}{(1+2 \cdot 2)\sqrt{9,81 \cdot 2}} = 18,0609'' \\
 n = 3 &\Rightarrow T_3 = \frac{4l}{(1+2n)\sqrt{gh}} = \frac{4 \cdot 100}{(1+2 \cdot 3)\sqrt{9,81 \cdot 2}} = 12,9007''
 \end{aligned}$$

Mediante la ecuación de dispersión de ondas se obtienen las longitudes de onda asociadas a cada uno de los periodos  $T_0, T_1, T_2$  y  $T_3, \dots$ , para profundidad  $h = 2,00$  m. Se comprueba que en todos casos cumplimos la condición de aguas someras ( $\frac{h}{L} < 0,05$ ):

$$\begin{aligned}
 n = 0 &\Rightarrow T_0 = 90,30'' \Rightarrow L_0 = 400 \text{ m} \Rightarrow \frac{h}{L_0} = 0,005 < 0,05 & (6-173) \\
 n = 1 &\Rightarrow T_1 = 30,10'' \Rightarrow L_1 = 133 \text{ m} \Rightarrow \frac{h}{L_1} = 0,015 < 0,05 \\
 n = 2 &\Rightarrow T_2 = 18,06'' \Rightarrow L_2 = 80 \text{ m} \Rightarrow \frac{h}{L_2} = 0,025 < 0,05 \\
 n = 3 &\Rightarrow T_3 = 12,90'' \Rightarrow L_3 = 57 \text{ m} \Rightarrow \frac{h}{L_3} = 0,035 < 0,05 \\
 n = 4 &\Rightarrow T_4 = 10,03'' \Rightarrow L_4 = 44 \text{ m} \Rightarrow \frac{h}{L_4} = 0,045 < 0,05
 \end{aligned}$$

Mediante el código de elementos finitos se realiza un barrido de frecuencias para detectar los valores de las mismas que hacen que la amplitud de la onda en un punto fijo (por ejemplo en la bocana de entrada a la dársena) alcance valores nulos, momento en el que en dicho punto se produce un nodo de la onda estacionaria. Luego se compran los valores de frecuencias numéricas con los valores analíticos para validar el resultado.

Como el dominio de integración es de 100 m y se ha discretizado en 100 elementos, resulta un tamaño de elemento de  $\frac{100}{100} = 1$  m. Por tanto, para el caso más desfavorable de  $L_2 = 80$  m, se obtiene un número mínimo de 80 nodos por longitud de onda ( $> 20$  nodos), lo cual asegura que la discretización adoptada es adecuada.

En el siguiente gráfico se muestra la solución numérica del valor absoluto del potencial en la bocana de la dársena con un barrido de periodos de 15 a 100 segundos; se han marcado con línea roja vertical los valores analíticos de los tres primeros periodos naturales de oscilación de la dársena obtenidos en el epígrafe 6.12.3., observándose el correcto ajuste de los resultados.

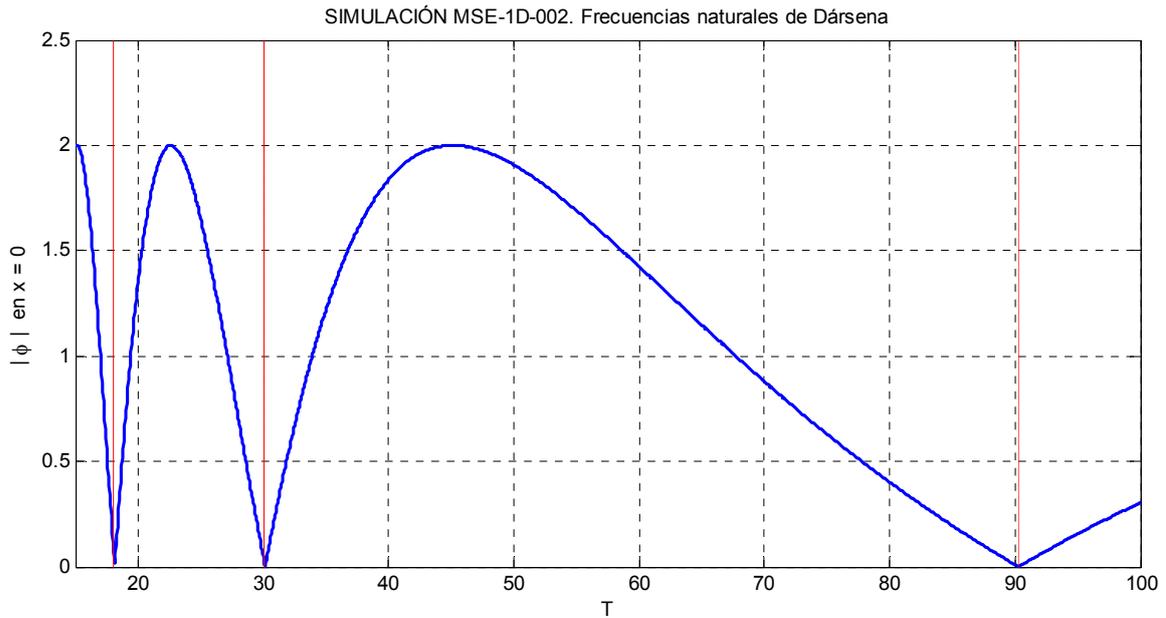


Figura 6-32. Valor absoluto del potencial en la boca de la dársena  $x = 0$ .

Observese que los valles de la curva obtenida conciden con bastante precisión con los periodos naturales. Insistimos en que estos puntos en donde el valor absoluto del potencial es igual a cero, indican la presencia de un nodo de la onda estacionaria en la boca de la dársena.

En la siguiente figura se presentan comparativamente los valores numéricos y analíticos, observándose que la solución numérica concuerda con buena precisión con la solución analítica (6-167).

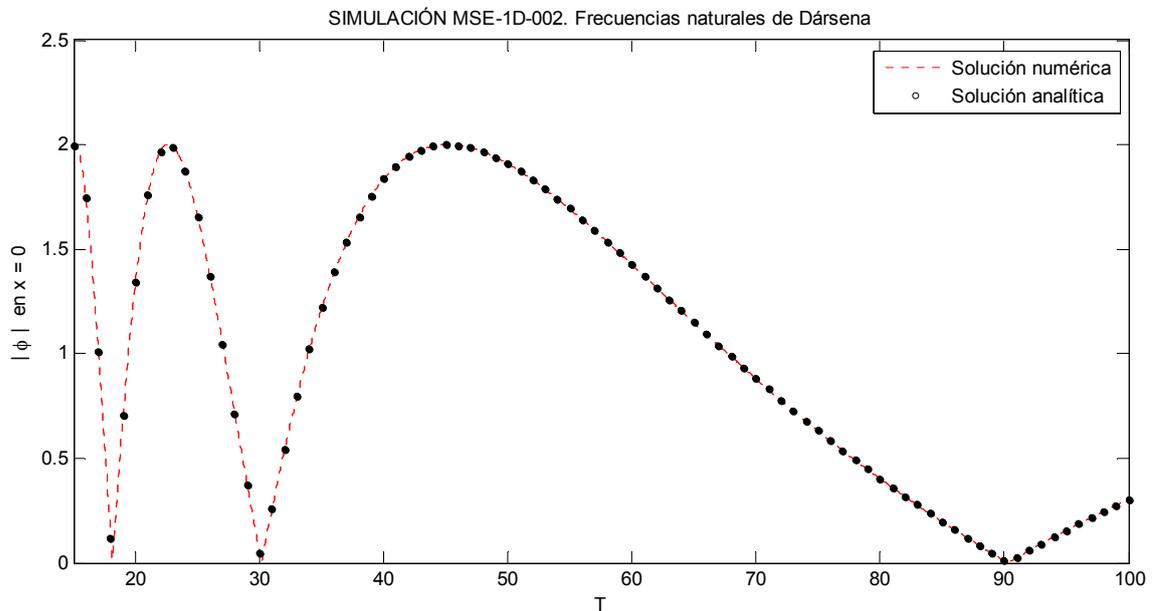


Figura 6-33. Comparativo de la solución Numérica vs. Tnalítica.

En el siguiente gráfico se observan las formas de la superficie libre para los tres primeros modos naturales de oscilación de la dársena, comprobándose que efectivamente un nodo se sitúa en la boca de la dársena.

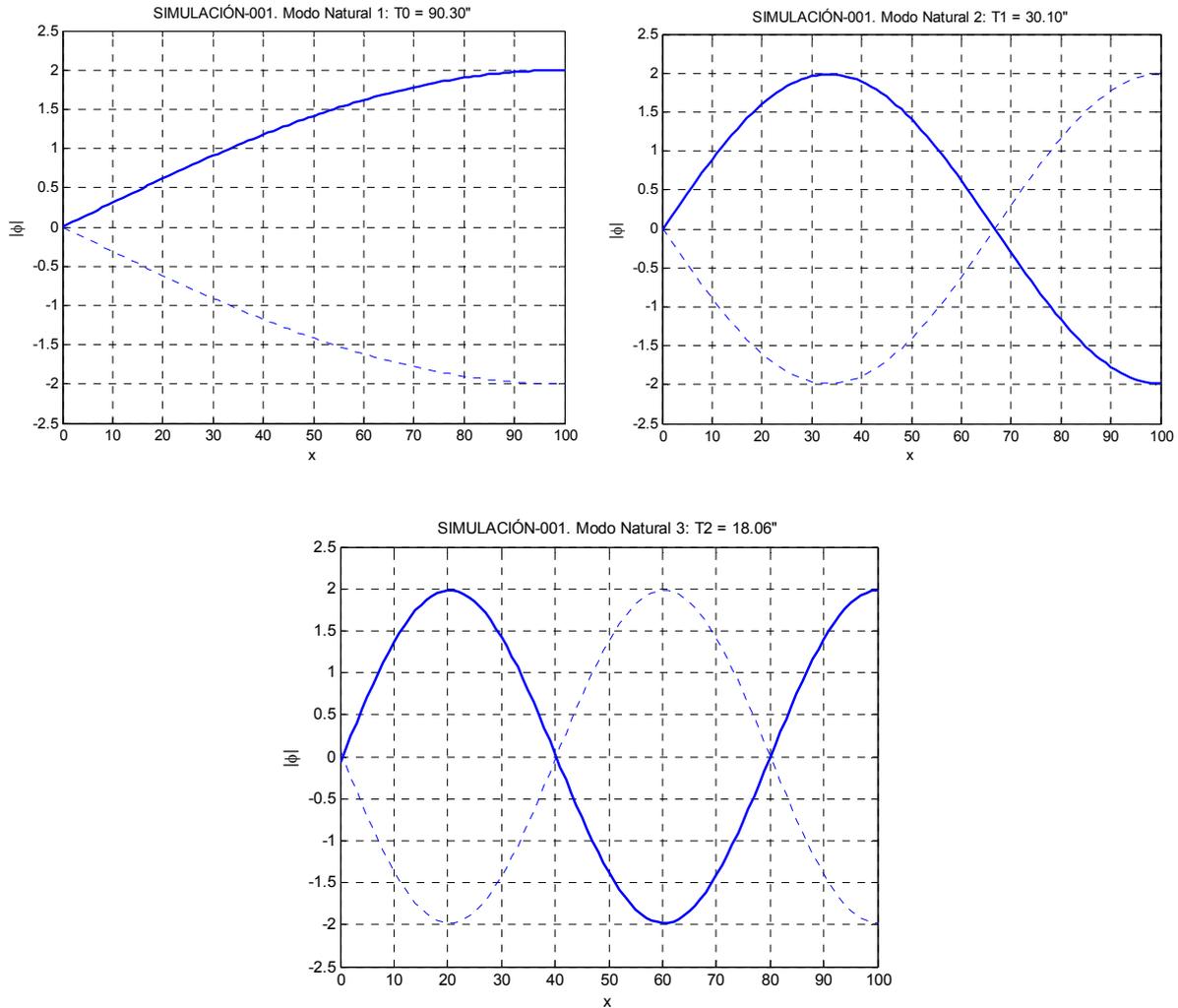


Figura 6-34. Representación de los tres primeros modos naturales de oscilación de la dársena.

Una forma alternativa y elegante de obtener las frecuencias naturales de oscilación de la dársena, aplicable sólo al caso de aguas someras, es obteniendo los autovalores de la matriz de rigidez global del sistema (6-76), introduciendo las modificaciones oportunas por las condiciones de contorno del problema y suponiendo nulos los términos de fuerzas  $f_1$  y  $f_2$

$$[K - \omega^2 M] \phi = f_2 - f_1 \tag{6-174}$$

En (6-160) justificamos que la celeridad de la onda en aguas someras no dependía del periodo:  $c = \frac{l}{T} = \sqrt{gh}$ . De esta forma se obtiene que las matrices  $K$  y  $M$  son constantes e independientes de  $\omega$ . Por esta razón pueden obtenerse las frecuencias propias de oscilación de la dársena por un problema de autovalores. Mediante el procedimiento de ensamblaje explicado en el epígrafe 6.8.2, se obtienen las matrices  $K$  y  $M$  globales que nos permitirán obtener los autovalores  $\omega_i^2$  y autovectores  $\bar{\phi}_i$  (modos de oscilación de la dársena):

$$[K - \omega^2 M] \bar{\phi} = 0 \tag{6-175}$$

Para lograr nuestro objetivo debemos cambiar las condiciones de contorno en el borde izquierdo  $x = 0$ . En lugar de imponer una condición de borde abierto con potencial unidad entrante, vamos a imponer una condición de borde de potencial prescrito  $\phi_1 = 0$ ; esto es lógico, pues en la bocana se localiza un nodo de la onda estacionaria en todos los modos naturales de la dársena.

A su vez, se introduce un valor ficticio alto del periodo al modelo (p.ej.  $T = 500''$ ) de esta forma nos aseguramos

que se trata de una onda muy larga en comparación con la profundidad de la dársena  $h = 2 \text{ m}$ , por lo que cumplimos la condición de aguas someras:  $\frac{h}{L} < 0,05$  y podemos comparar los resultados obtenidos del los periodos propios de la dársena (obtenidos de los autovalores  $\omega_i^2$ ) con los valores analíticos obtenidos en (6-172).

En la tabla siguiente se muestran los valores de los primeros seis periodos naturales obtenidos del problema de autovalores de la matriz de rigidez del sistema; obsérvese la buena concordancia con los valores analíticos obtenidos en (6-172), sobre todo los primeros modos:

Tabla 6-4 Comparación de los valores de  $T_n$  numéricos vs. analíticos y error absoluto

MODO	$T_n$ - NUMÉRICO	$T_n$ - ANALÍTICO	Error $ \epsilon $
1	90.3043	90.3047	0.0004
2	30.0989	30.1016	0.0027
3	18.0564	18.0609	0.0045
4	12.8942	12.9007	0.0065
5	10.0256	10.0339	0.0083
6	8.1994	8.2095	0.0101

En la siguiente figura se han representado los 4 primeros modos de oscilación, que se corresponden con sus correspondientes autovectores.

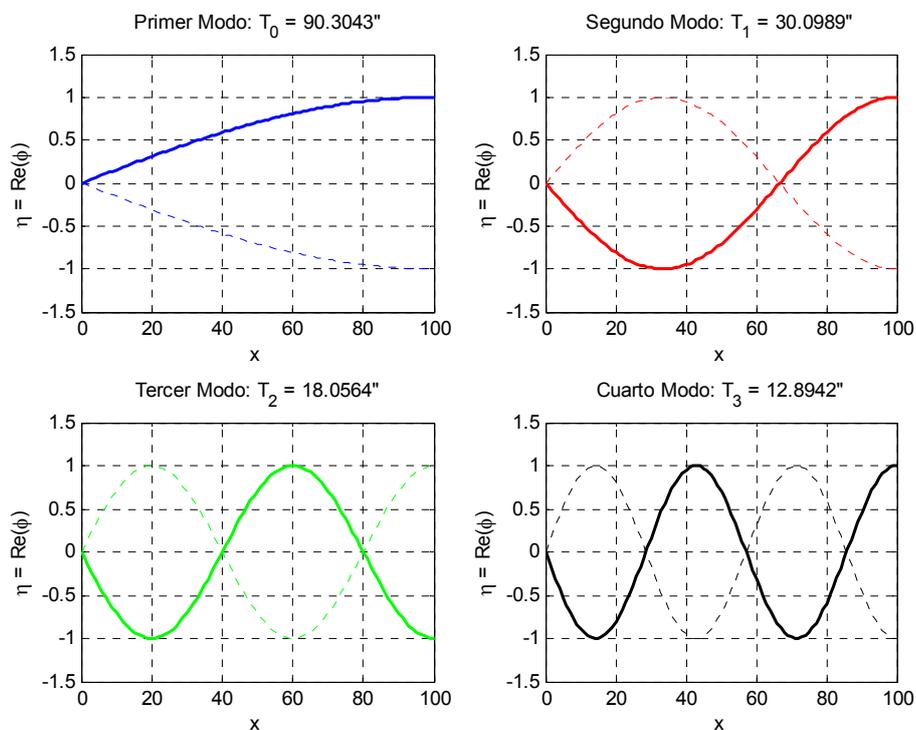


Figura 6-35. Representación de los cuatro primeros modos naturales de oscilación de la dársena obtenidos del problema de autovalores:  $[K - \omega^2 M] \bar{\phi} = 0$ .

Si observamos los valores del error absoluto  $|\varepsilon|$  que tienden a crecer cuanto más nos aproximamos al límite de aguas someras  $\frac{h}{L} < 0,05 \dots$  ¿Por qué? La respuesta es sencilla. La fórmula analítica de los valores de los periodos naturales de oscilación (6-163) supone que la celeridad de la onda es  $c = \sqrt{gh}$ ; este resultado se obtiene de la ecuación de dispersión de ondas cuando  $\tanh(kh) \approx \sinh(kh) \approx kh$ . Es evidente que cuanto mayor sea el valor de la profundidad relativa  $\frac{h}{L}$ , menos precisa será la fórmula analítica.

En el siguiente gráfico se observa la evolución del error absoluto para cada modo de oscilación; en la figura se han representado los primeros 50 modos

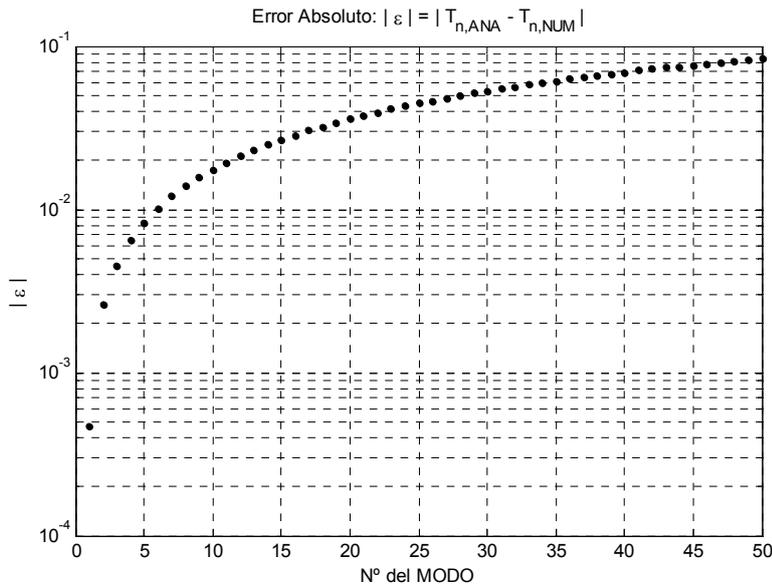


Figura 6-36. Representación del error absoluto en cada modo de oscilación.

#### 6.12.4. Código de elementos finitos en Matlab®.

Anexo al presente TFM se incluye un CD-Rom que incluye, entre otros, el listado de código de elementos finitos **MSE1D\_002.m** programado en Matlab® empleado para resolver el problema de obtención de las frecuencias naturales de la dársena abierta por un extremo. Así mismo, se incluyen las funciones auxiliares empleadas por el código principal del programa.

### 6.13. SIMULACIÓN MSE-1D-003. Problema de reflexión de ondas por inclinación del fondo

#### 6.13.1. Descripción física del problema.

La MSE permite simular los fenómenos de propagación del oleaje con batimetrías irregulares, pero cumpliendo la **condición de pendiente suave de Rayleigh**. En este caso las ondas reflejadas producidas por la propia pendiente del fondo son despreciables.

Cuando la condición de pendiente suave deja de cumplirse la MSE pierde validez, pues violamos una de las hipótesis básicas empleadas para deducir la ecuación. No obstante, la MSE es capaz de predecir, hasta un cierto valor límite de la pendiente de fondo, los fenómenos de propagación y reflexión de ondas por fondo. Este es precisamente el objetivo de la simulación numérica MSE-1D-003.

Para la resolución de este problema nos basamos en los resultados obtenidos por N. Booij [14]. Este investigador realiza una comparación del valor coeficiente de reflexión por fondo obtenido por la MSE y por un modelo tridimensional de elementos finitos que resuelve la ecuación del Laplaciano en el dominio.

El experimento de N. Booij consistió en simular un modelo 1-D de dos plataformas horizontales de profundidad constante unidas por una rampa de pendiente constante  $\tan\alpha$  y desarrollo en planta  $W_s$ . En su modelo empleó parámetros adimensionales; así para las profundidades toma valores de  $k_0 h_1 = 0,6$  y  $k_0 h_2 = 0,2$ , siendo  $k_0$  el valor del número de onda aguas profundas.

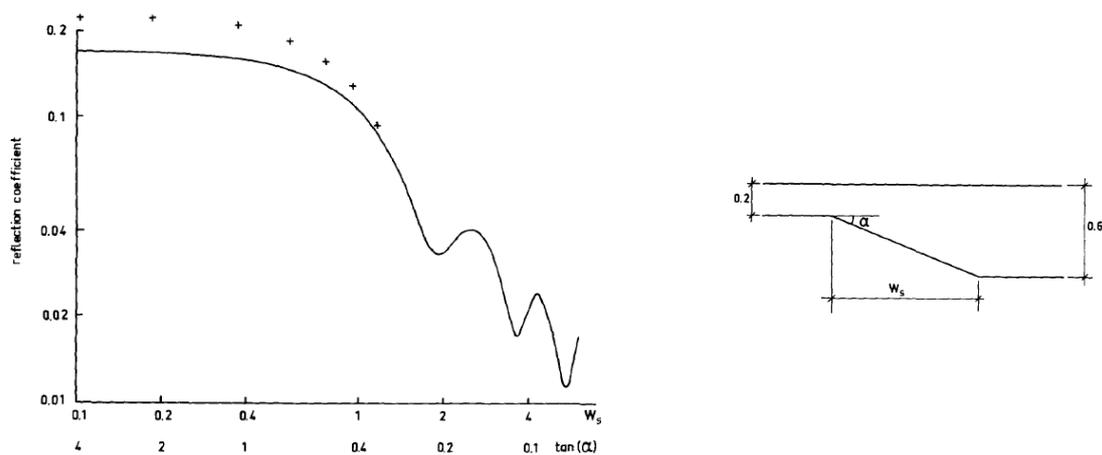


Fig. 4. Reflection coefficient as function of bottom inclination (normal incidence). The cross-section is shown in the upper part of the figure. Curve: refraction-diffraction model. Crosses: three-dimensional model.

Figura 6-37. Resultados del coeficiente de reflexión por pendiente de fondo de N. Booij.

Si se observa la anterior figura sacada del artículo de N. Booij, se aprecia que el modelo MSE da resultados afinados hasta pendientes del fondo de aproximadamente  $\tan\alpha = 0,3 - 0,4$ . A partir de esa pendiente los resultados divergen respecto del modelo tridimensional (Laplaciano), que se supone más afinado y preciso.

En nuestro experimento numérico vamos a considerar una onda monocromática de periodo  $T = 10''$ . Conocido el periodo se obtiene la longitud de onda en aguas profundas:

$$L_0 = \frac{gT^2}{2\pi} = 1,56 T^2 = 156 m$$

Por tanto, el número de ondas en aguas profundas es:

$$k_0 = \frac{2\pi}{L_0} = 0,0403$$

Empleando los mismos valores adimensionales de Booij, obtenemos:

$$k_0 h_1 = 0,6 \quad \rightarrow \quad h_1 = 15 \text{ m}$$

$$k_0 h_2 = 0,2 \quad \rightarrow \quad h_2 = 5 \text{ m}$$

Conocidos el periodo  $T$  y las profundidades  $h_1$  y  $h_2$  podemos obtener los valores de longitud de onda a cada profundidad empleando la ecuación de dispersión de ondas:  $\omega^2 = g k \tanh(kh)$

$$L_1 = 109 \text{ m} \quad \rightarrow \quad \frac{h_1}{L_1} = \frac{15}{109} = 0,1376 \quad \rightarrow \text{Aguas intermedias: } 0,05 < \frac{h_1}{L_1} < 0,50$$

$$L_2 = 68 \text{ m} \quad \rightarrow \quad \frac{h_2}{L_2} = \frac{5}{68} = 0,0735 \quad \rightarrow \text{Aguas intermedias: } 0,05 < \frac{h_2}{L_2} < 0,50$$

Como se puede comprobar, se trata de valores de profundidad relativa correspondientes profundidades intermedias; uno de ellos casi en el límite de aguas poco profundas (shallow water).

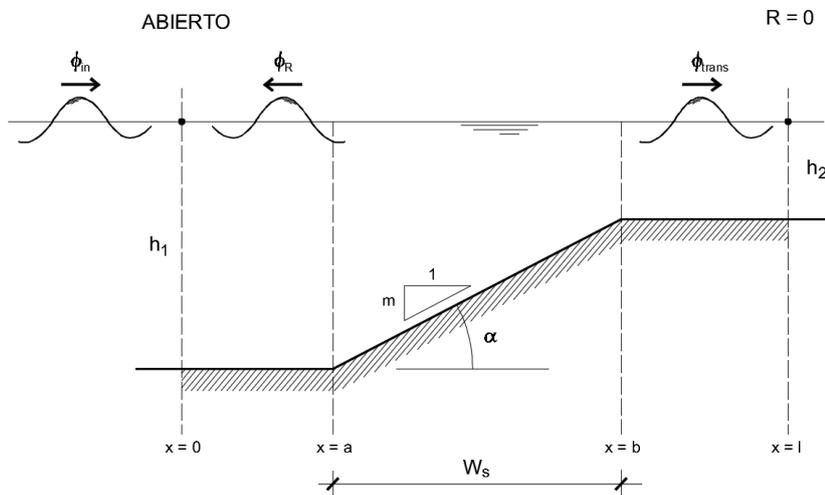


Figura 6-38. Geometría del problema.

Si consideramos un potencial incidente  $\phi_{in} = 1$  en el borde izquierdo  $x = 0$ , parte de este potencial se transmite  $\phi_{trans}$  al borde derecho  $x = l$  y parte se refleja  $\phi_R$  por la presencia de la rampa de pendiente  $m = \tan \alpha$ . Justo en el punto  $x = 0$  el potencial será la suma del incidente más el reflejado:  $\phi = \phi_{in} + \phi_R$ .

### 6.13.2. Solución analítica del problema.

Si consideramos un potencial unidad entrante en el dominio por el borde  $x = 0$ , el potencial  $\phi$  en dicho punto será la suma del incidente más el reflejado:  $\phi = \phi_{in} + \phi_R$ .

$$\phi_{in} = 1 e^{ikx} \quad \rightarrow \quad \text{en } x = 0 \quad \rightarrow \quad \phi_{in}(0) = 1 \quad (6-176)$$

$$\phi_R = A_R e^{-ikx} \quad \rightarrow \quad \text{en } x = 0 \quad \rightarrow \quad \phi_R(0) = A_R \quad (6-177)$$

Definimos el coeficiente de reflexión por fondo  $C_R$  como:

$$C_R = \left( \frac{\phi_R}{\phi_{in}} \right)_{x=0} = \left( \frac{\phi - \phi_{in}}{\phi_{in}} \right)_{x=0} = \left( \frac{\phi}{\phi_{in}} \right)_{x=0} - 1 \quad (6-178)$$

Como el potencial incidente en  $x = 0$  es de valor unidad, el coeficiente de reflexión  $C_R$  será justo el módulo del potencial complejo resultante del modelo de elementos finitos 1-D en el borde izquierdo restándole uno.

### 6.13.3. Solución numérica del problema.

Se ha realizado una simulación numérica mediante un código de elementos finitos programado en Matlab®. Se han empleado los siguientes datos:

Tabla 6-5 Datos numéricos del problema de Cálculo del Coeficiente de Reflexión por fondo

DATO	VALOR NUMÉRICO
Potencial de entrada en ( $x = 0$ )	$\phi_{in} = 1$
Periodo de la onda	$T = 10''$
Pendiente del fondo	$m = [ 0,05 - 4 ]$
Coefficiente de reflexión (borde cerrado $x = l$ )	$R = 0$
Longitud del dominio	$l = 250 \text{ m}$
Número de elementos	$N_{el} = 250$
Calado máximo ( $x = 0$ )	$h_1 = 15 \text{ m}$
Calado mínimo ( $x = l$ )	$h_2 = 5 \text{ m}$

La longitud del dominio  $l = 250 \text{ m}$  se ha tomado de forma que el caso de la pendiente mínima  $m = 0.05$  el valor de  $W_s = 200$ , dejando siempre un tramo de fondo horizontal tanto a la entrada como a la salida de la rampa de longitud mínima 25 m.

Como el dominio de integración es de 250 m y se ha discretizado en  $N = 250$  elementos, resulta un tamaño de elemento de  $\Delta x = \frac{250}{250} = 1 \text{ m}$ . Por tanto, para el caso más desfavorable de  $L = 68 \text{ m}$  con calado de 5 m, se obtiene un número mínimo de 67 nodos por longitud de onda ( $>20$  nodos), lo cual asegura que la discretización adoptada es adecuada.

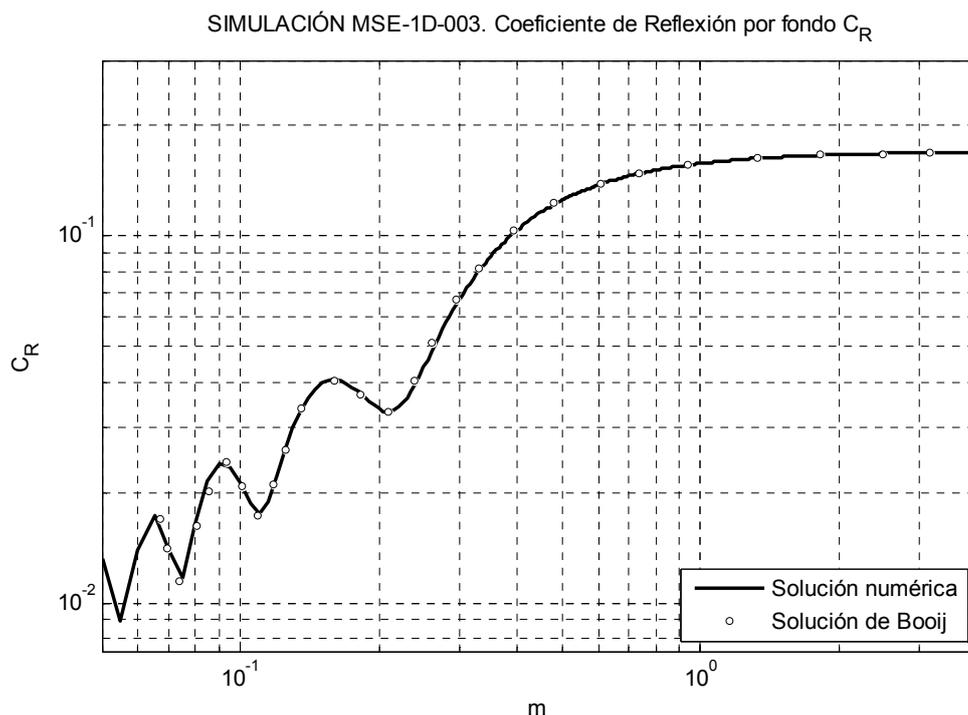


Figura 6-39. Resultado numérico del Coeficiente de Reflexión por fondo.

En la figura anterior se muestran los resultados gráficos generados con el código de Matlab® y su comparación con los resultados obtenidos de la bibliografía técnica especializada [14]. Se observa el buen encaje de los resultados obtenidos del modelo.

#### **6.13.4. Código de elementos finitos en Matlab®.**

Anexo al presente TFM se incluye un CD-Rom que incluye, entre otros, el listado de código de elementos finitos **MSE1D\_003.m** programado en Matlab® empleado para resolver el problema de obtención del coeficiente de reflexión por pendiente del fondo. Así mismo, se incluyen las funciones auxiliares empleadas por el código principal del programa.

## 6.14. SIMULACIÓN MSE-1D-004. Frecuencias de Resonancia de una dársena unidimensional

### 6.14.1. Descripción física del problema.

Cuando un sistema mecánico es excitado por una acción exterior cuya frecuencia se aproxima a la frecuencia natural de oscilación del sistema se produce el fenómeno de resonancia.

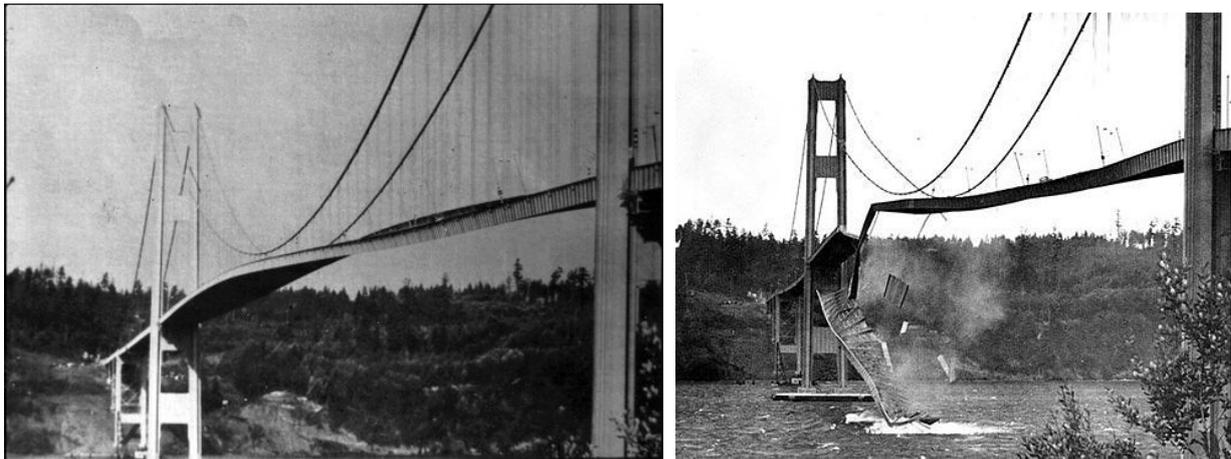


Figura 6-40. Resonancia del Puente Tacoma (1940).

En una dársena portuaria también se pueden producir fenómenos de resonancia. De hecho, este fenómeno se produce de forma muy habitual, sobre todo en los puertos del Cantábrico español. Cuando a la dársena accede una onda de frecuencia próxima a un de los modos naturales de oscilación se produce el espectacular fenómeno de **resonancia de dársenas**, con consecuencias desastrosas para los buques atracados en el puerto. Normalmente estos fenómenos se producen por la entrada de ondas largas de alto periodo como las ondas de “set-up”, tsunamis o fenómenos atmosféricos de variación brusca de la presión atmosférica en la masa de agua.



Figura 6-41. Rissages en el Puerto de Ciutadella. Isla de Menorca.

Como ejemplo de este tipo de fenómenos en España, tenemos el espectacular fenómeno de resonancia (rissages) en la dársena natural del puerto de Ciutadella en Menorca. Variaciones bruscas de la presión atmosférica en las costas del Norte de África originan una perturbación de onda larga, no perceptible por la navegación exterior, que pone de cuando en cuando a resonar la dársena con daños materiales cuantiosos (ver fotos adjuntas).

En el problema MSE-1D-002 (apartado 6.12) obtuvimos las frecuencias naturales de oscilación de la dársena;

como resultado se obtuvieron las formas de oscilación (ondas estacionaria) que daban lugar a un valor nulo del potencial en la bocana de la dársena, debido que ahí justamente se sitúa uno de los nodos de la onda estacionaria.

No obstante, en el modelo MSE-1D-002 no se observaba el fenómeno de resonancia caracterizado por amplitudes de onda que tienden a infinito, típico de los fenómenos de resonancia cuando la frecuencia de excitación se aproxima uno de los modos propios de oscilación de la dársena. La razón se encuentra en el tipo de condición de contorno que impusimos en el problema: Borde abierto  $x = 0$  con entrada de potencial unidad y borde cerrado totalmente reflejante  $x = l$  ( $R = 1$ ).

Para simular el fenómeno de resonancia es necesario cambiar la condición de contorno abierto en  $x = 0$  y sustituirla por una condición de potencial impuesto (Dirichlet), por ejemplo de valor unidad.

Supongamos, como en el caso del problema MSE-1D-002, una dársena portuaria de planta rectangular de ancho  $B$  y longitud  $l$ . La dársena se encuentra abierta la mar en uno de sus extremos y está cerrada en el otro mediante una pared vertical totalmente reflejante ( $R = 1$ ). Se supone que la dársena tiene fondo  $h$  constante.

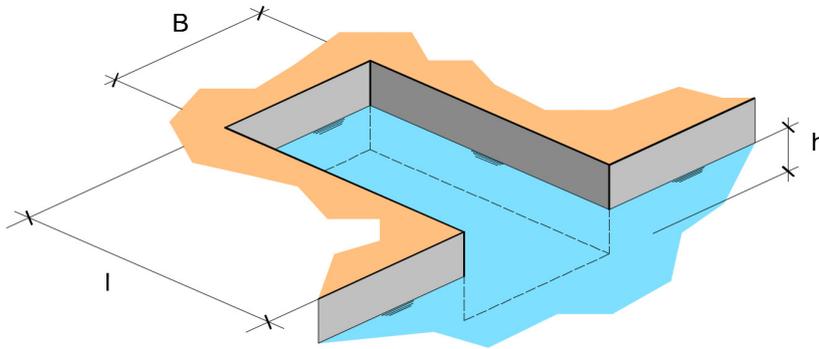


Figura 6-42. Dársena portuaria de geometría sencilla rectangular, abierta por un extremo y cerrada por el otro.

### 6.14.2. Solución analítica del problema.

Imponiendo la condición de contorno Dirichlet en  $x = 0$  (potencial impuesto unidad) debemos obtener que la amplitud de la onda en la pared reflejante tiende a infinito cuando nos acercamos a las frecuencias propias de oscilación de la dársena.

En un punto interior cualquiera del dominio de integración  $\Omega$ , el potencial  $\phi(x)$  será la suma de un potencial que se propaga hacia la derecha ( $R$ ) más uno reflejado que lo hace hacia la izquierda ( $L$ ):

$$\phi(x) = \phi_R e^{ikx} + \phi_L e^{-ikx} \quad (6-179)$$

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = ik \phi_R e^{ikx} - ik \phi_L e^{-ikx} \quad (6-180)$$

No debe olvidarse que en  $x = 0$  hemos impuesto la condición de contorno de potencial prescrito  $\phi(0) = 1$ , mientras que en  $x = l$  tenemos un borde totalmente reflejante  $\frac{\partial \phi(l)}{\partial x} = 0$ , resultando un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas del cual podemos despejar los valores de  $\phi_R$  y  $\phi_L$ .

$$\text{En } x = 0 \rightarrow \phi(0) = 1 = \phi_R + \phi_L \quad (6-181)$$

$$\text{En } x = l \rightarrow \frac{\partial \phi(l)}{\partial x} = 0 = ik \phi_R e^{ikl} - ik \phi_L e^{-ikl} \quad (6-182)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (6-181) (6-182) obtenemos los valores de  $\phi_R$  y  $\phi_L$ .

$$\phi_R = \frac{1}{e^{2ikl} + 1} \quad \phi_L = \frac{e^{2ikl}}{e^{2ikl} + 1} \quad (6-183)$$

Por tanto, la expresión que nos da el potencial en cualquier punto del dominio queda como:

$$\phi(x) = \frac{1}{e^{2ikl} + 1} (e^{ikx} + e^{2ikl} e^{-ikx}) \quad (6-184)$$

Los valores del potencial  $\phi(x) \rightarrow \infty$  cuando  $e^{2ikl} + 1 \rightarrow 0$ . Es decir, tiene que cumplirse la siguiente ecuación:

$$e^{2ikl} + 1 = 0 = 1 + \cos(2kl) + i \operatorname{sen}(2kl) \quad (6-185)$$

Al tratarse de una igualdad de números complejos deben ser iguales las partes reales e imaginarias a ambos términos de la ecuación:

$$1 + \cos(2kl) = 0 \quad (6-186)$$

$$\operatorname{sen}(2kl) = 0 \quad (6-187)$$

Para que las ecuaciones (6-186) y (6-187) se cumplan simultáneamente es necesario que  $2kl$  sea un número impar de veces  $\pi$ , es decir:  $2kl = (2n + 1)\pi$ , con  $n = 0, 1, 2, 3 \dots$ . De esta ecuación podemos despejar el valor del número de onda  $k$  para el cual se produce el fenómeno de la resonancia.

$$k = \frac{2\pi}{L} = \frac{(2n + 1)\pi}{2l} \quad (6-188)$$

$$L = \frac{4l}{(2n + 1)} \quad (6-189)$$

En nuestro caso estamos en aguas someras; en (6-160) justificamos que la celeridad de la onda en aguas someras vale  $c = \frac{L}{T} = \sqrt{gh}$ , por lo que despejando  $T$  e introduciendo el valor de la longitud de onda obtenido en (6-189) obtenemos el valor de las frecuencias de resonancia de la dársena que es coincidente con (6-163):

$$T_n = \frac{4l}{(1 + 2n)\sqrt{gh}} \quad n = 0, 1, 2, \dots, n \quad (6-190)$$

### 6.14.3. Solución numérica del problema.

Se ha realizado una simulación numérica mediante un código de elementos finitos programado en Matlab®. Este código es muy similar al empleado en la simulación MSE-1D-002 cambiando los datos de entrada. Se han empleado los siguientes datos:

Tabla 6-6 Datos numéricos del problema de Resonancia en dársena 1-D

DATO	VALOR NUMÉRICO
Potencial prescrito en ( $x = 0$ )	$\bar{\phi}_1 = 1$
Pendiente del fondo	$m = 0$ fondo plano horizontal
Coefficiente de reflexión (muelle)	$R = 1$
Longitud de dársena	$l = 100$ m
Número de elementos	$N_{el} = 100$
Calado de dársena	$h = 2,00$ m

Igualmente, mediante el código de elementos finitos se realiza un barrido de frecuencias para detectar los valores de las mismas que hacen que la amplitud de la onda en un punto fijo ( $x = l$ ) alcance valores que tienden a infinito, indicativo del fenómeno de resonancia. Luego se comparan los valores de frecuencias numéricas con los valores analíticos para validar el resultado.

En el siguiente gráfico se muestra la solución numérica del valor absoluto del potencial en el extremo cerrado ( $x = l$ ) totalmente reflejante de la dársena con un barrido de periodos de 15 a 100 segundos; se han marcado con línea roja vertical los valores analíticos de los tres primeros periodos naturales de oscilación de la dársena obtenidos en el epígrafe 6.12.3. , observándose el correcto ajuste de los resultados.

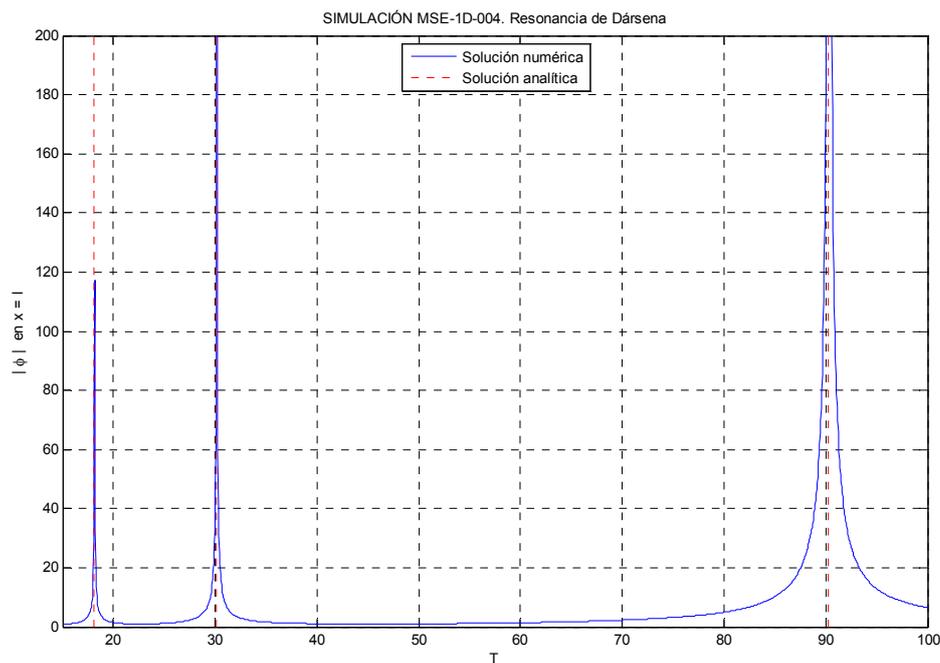


Figura 6-43. Periodos de resonancia.

Observese que los picos de la curva obtenida conciden con bastante precisión con los tres primeros periodos naturales (6-172).

#### 6.14.4. Código de elementos finitos en Matlab®.

Anexo al presente TFM se incluye un CD-Rom que incluye, entre otros, el listado de código de elementos finitos **MSE1D\_004.m** programado en Matlab® empleado para resolver el problema de obtención de las frecuencias de resonancia de la dársena abierta por un extremo. Así mismo, se incluyen las funciones auxiliares empleadas por el código principal del programa.

# 7 APLICACIÓN DEL M.E.F. A LA MILD-SLOPE EQUATION BIDIMENSIONAL (2-D)

*If you want to model nature you must copy nature. If you want to copy nature you must understand nature.*

- Ib A. Svendsen -

**A**similados los conceptos básicos de la implementación del MEF para la Mild Slope Equation 1-D, damos el salto al problema general bidimensional 2-D. El anterior capítulo tenía como objetivo iniciar el problema desde lo más sencillo (caso unidimensional) para afianzar los conceptos fundamentales. De esta manera se aumenta el nivel de dificultad de forma gradual, asentada ya cierta base inicial.

Las bases fundamentales del MEF para la MSE 2-D son las mismas que para el problema 1-D, pero el aparato matemático necesario es más complejo, como era de esperar. Por ejemplo, en la deducción de la forma débil de la ecuación de gobierno ya no aplicaremos la sencilla regla de integración por partes; en su lugar aplicaremos el Teorema de Green-Gauss, que es la versión vectorial 2-D de la derivación por partes en 1-D.

La implementación de la condiciones de contorno es más laboriosa en el caso de la MSE 2-D. Aquí nos encontraremos de lleno con el ya anunciado problema del ángulo de aproximación a los contornos de las ondas reflejadas dentro del dominio, desconocido a priori. Se explicarán técnicas que nos permitirán hacer aproximaciones a dicho ángulo para evitar soluciones poco realistas, contaminadas con ondas espúreas reflejadas por los contornos del dominio de integración.

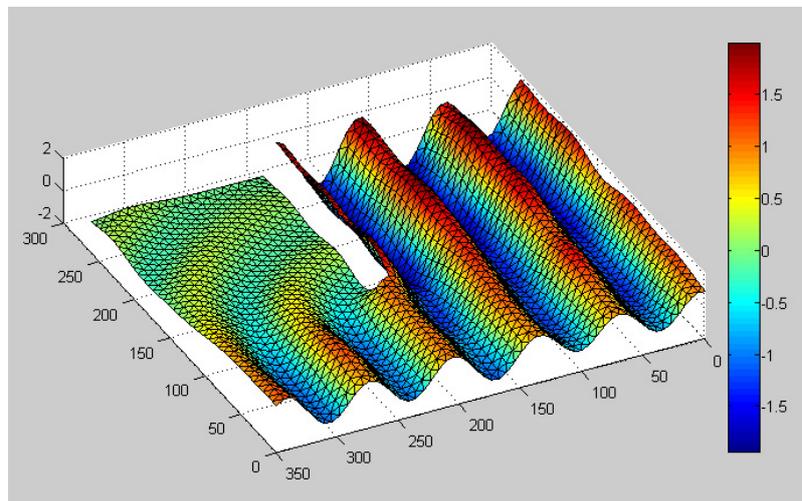


Figura 7-1. Modelo de propagación de ondas con elementos finitos 2-D.

Implementado el modelo 2-D de la MSE podría resolverse casi cualquier problema de propagación aplicable al ejercicio de la ingeniería portuaria. No obstante, este TFM tiene un alcance más limitado, centrado en la vertiente pedagógica y docente, por lo que nos limitaremos a resolver varios casos sencillos que nos permitan vislumbrar la potencia del método y también sus puntos débiles.

Se plantean varios problemas clásicos de propagación de oleaje que serán resueltos numéricamente mediante un código de elementos finitos programado en Matlab®. La solución numérica se comparará, en todos los casos, con la solución analítica para calibrar la bondad del modelo numérico empleado.

## 7.1. La Mild-Slope Equation 2-D

Ya es de sobra conocida la forma general vectorial de la MSE en 2D.

$$\nabla \cdot (cc_g \nabla \phi) + k^2 cc_g \phi = 0 \quad (7-1)$$

Siendo los términos que aparecen en la ecuación:

- $c$  celeridad de fase de la onda.
- $c_g$  celeridad de grupo.
- $k$  número de onda.
- $\phi = \phi(x, y)$  potencial escalar de velocidades del fluido.
- $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$  operador vectorial Nabla en el plano 2D.

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$  Es el operador vectorial "Nabla" en el plano  $x - y$  2-D, que puede actuar sobre un vector o sobre un escalar. Cuando se aplica sobre un vector  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$  se le llama **divergencia** y actúa como un producto escalar, dando como resultado un escalar:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (7-2)$$

Cuando  $\nabla$  actúa sobre un escalar se llama gradiente y da como resultado un vector.

$$\nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) \quad (7-3)$$

El dominio de integración  $\Omega$ , por tanto, está definido en el plano  $x - y$ , considerándose que los potenciales externos acceden al dominio desde los bordes abiertos "no físicos" que truncan el espacio semi-infinito del mar abierto.

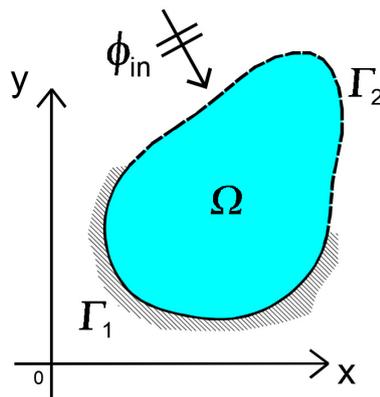


Figura 7-2. Dominio de integración 2-D.

## 7.2. Teorema de Green-Gauss

Como ya comentamos en el apartado introductorio del capítulo, el Teorema de Green-Gauss es el equivalente en 2-D a la regla de integración por partes en una variable.

Supongamos un dominio cerrado  $\Omega$  en el plano  $x - y$  limitado por un contorno cerrado  $\Gamma$ . Se define el vector

unitario normal  $\mathbf{n}$  exterior al dominio en cada punto del contorno, recorrido éste en el sentido contrario a las agujas del reloj (ver figura adjunta).

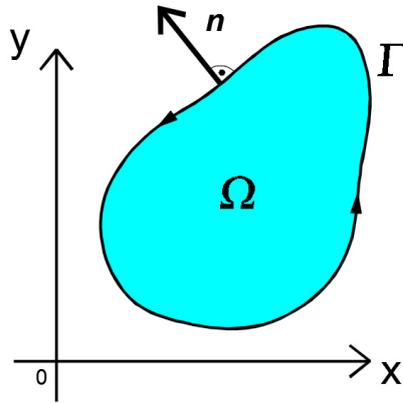


Figura 7-3. Dominio de integración  $\Omega$  de contorno  $\Gamma$  y normal exterior  $\mathbf{n}$ .

Sea  $\mathbf{q}$  un campo vectorial y  $\phi$  un campo escalar, ambos definidos en el dominio  $\Omega$ . El teorema de Gauss, o Teorema de la Divergencia, establece que la integral de la divergencia del campo  $\nabla \cdot \mathbf{q}$  en el dominio es igual a la integral de contorno del producto escalar  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{q} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (7-4)$$

Por otra parte, sabemos que la divergencia es un operador diferencial lineal, por lo que:

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{q}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla \phi \cdot \mathbf{q} \quad (7-5)$$

Combinando las ecuaciones (7-4) y (7-5) obtenemos:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\phi \mathbf{q}) \, d\Omega = \int_{\Gamma} \phi \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (7-6)$$

Desarrollando la primera integral de la izquierda de la ecuación (7-6), sustituyéndolo por el resultado (7-5), obtenemos la primera identidad de Green o Teorema de Green.

$$\int_{\Omega} \phi \nabla \cdot \mathbf{q} \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \mathbf{q} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \phi \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (7-7)$$

Esta ecuación tiene un gran parecido con la regla de integración por partes para una variable, de hecho es su equivalente para el caso bidimensional. La ecuación (7-7) se empleará en su momento para obtener la forma débil de la ecuación de gobierno en el problema bidimensional.

### 7.3. Formulación débil de la Mild-Slope Equation 2-D

Para obtener la **forma integral o débil** de la MSE 2-D, primero elegimos una función de peso o ponderal  $\psi(x, y)$

arbitraria y planteamos la siguiente igualdad:

$$\psi [\nabla(cc_g \nabla \phi) + k^2 cc_g \phi] = 0 \quad (7-8)$$

Ahora integramos en todo el dominio  $\Omega$ , obteniéndose:

$$\int_{\Omega} \psi [\nabla(cc_g \nabla \phi) + k^2 cc_g \phi] d\Omega = 0 \quad (7-9)$$

$$\int_{\Omega} \psi \nabla(cc_g \nabla \phi) d\Omega + \int_{\Omega} k^2 cc_g \psi \phi d\Omega = 0 \quad (7-10)$$

Si aplicamos la primera identidad de Green (7-7) a la primera integral de la ecuación (7-10) se obtiene el siguiente resultado:

$$\int_{\Gamma} cc_g \psi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} cc_g \nabla \psi \cdot \nabla \phi d\Omega + \int_{\Omega} k^2 cc_g \psi \phi d\Omega = 0 \quad (7-11)$$

Sabiendo que  $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \nabla \phi \cdot \mathbf{n}$  e introduciendo este resultado en la ecuación (7-11) obtenemos la **forma débil** de la ecuación MSE en 2-D:

$$\int_{\Gamma} cc_g \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Omega} cc_g \nabla \psi \cdot \nabla \phi d\Omega + \int_{\Omega} k^2 cc_g \psi \phi d\Omega = 0 \quad (7-12)$$

Esta ecuación es totalmente equivalente a la **forma fuerte** (7-1) de la MSE 2-D. El motivo por el que se le llama **forma débil**, es precisamente porque se le exige a la variable de campo  $\phi(x, y)$  un orden menos de derivación que en la forma fuerte, a costa de aumentar el orden de derivación de la función arbitraria de peso  $\psi(x, y)$ . Lo veremos con detalle un poco más adelante.

El MEF usa el método de los **residuos ponderados de Galerkin**. Este método emplea como funciones  $\psi(x, y)$  de **ponderación de los residuos** a las propias funciones de forma para interpolar la solución.

Cuando en la ecuación de gobierno de nuestro problema (6-2) introducimos una aproximación  $\bar{\phi}(x, y) \approx \phi(x, y)$  de la variable de estado, en lugar de su valor exacto  $\phi(x, y)$ , es evidente que la ecuación no se cumple. Aparece entonces el concepto de residuo.

$$\nabla(cc_g \nabla \bar{\phi}) + k^2 cc_g \bar{\phi} = r \neq 0 \quad (7-13)$$

$$\int_{\Omega} \psi [\nabla(cc_g \nabla \bar{\phi}) + k^2 cc_g \bar{\phi}] d\Omega = \int_{\Omega} \psi r d\Omega = 0 \quad (7-14)$$

El método de Galerkin se basa en minimizar este residuo mediante un **reparto ponderado del error en todo el dominio de integración**  $\Omega$ . Para ello emplea las funciones de forma (interpolación) como funciones de ponderación del residuo.

## 7.4. Condiciones de contorno del problema

En la forma débil de la ecuación de gobierno (7-12) necesitamos conocer los valores de  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$  o flujo de potencial en los contornos del dominio de integración  $\Omega$ . Estas serán precisamente las condiciones de contorno de nuestro problema 2-D.

Al igual que en el problema 1-D, tendremos cuatro tipos de condición de contorno:

- C. C. de Borde cerrado reflejante ( $0 \leq R \leq 1$ ).
- C. C. de Borde abierto con potencial entrante desde el exterior conocido  $\phi_{in}$ .
- C. C. de potencial prescrito, esencial o tipo Dirichlet.
- C. C. de flujo de potencial prescrito, natural o tipo Neumann.

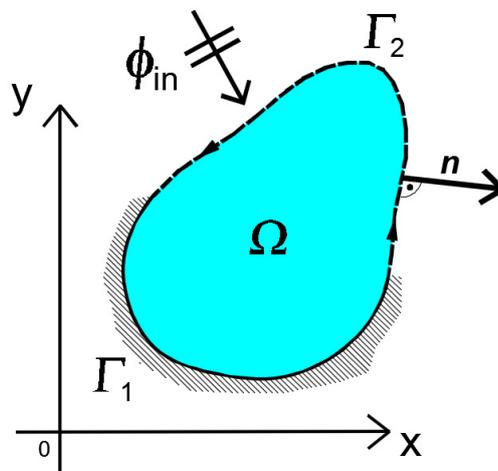


Figura 7-4. Condiciones de contorno del problema.

La diferencia fundamental con el problema 1-D, estriba en que en este caso nos encontramos de lleno con el problema de conocer el ángulo  $\theta$  de aproximación del potencial reflejado hacia el contorno; en el caso 2-D el ángulo  $\theta$  es un parámetro desconocido a priori, mientras que en 1-D  $\theta$  es siempre igual a cero (perpendicular al contorno).

### 7.4.1. Condición de contorno de borde cerrado

Como ya sabemos, son bordes físicos del dominio (costa, dique, muelle,...etc.) con cierta capacidad de reflexión del oleaje incidente, el cual se mide a través del coeficiente de reflexión  $R$ :  $0 \leq R \leq 1$ . Un borde totalmente absorbente tendría un coeficiente de reflexión  $R = 0$ , mientras que uno totalmente reflejante tendría  $R = 1$ .

Supongamos que en un punto cualquiera de un contorno reflejante cerrado  $\Gamma_1$  disponemos un **sistema de coordenadas local**  $x - y$  con origen en el contorno. Estos ejes locales no deben ser confundidos con los ejes de referencia globales.

El eje  $x$  se orienta según la dirección de la normal exterior al contorno  $\mathbf{n}$  y el eje  $y$  según la dirección del propio contorno, recorriéndolo en el sentido contrario a las agujas del reloj. Se forma así un sistema local de ejes cartesianos dextrógiro (ver figura adjunta).

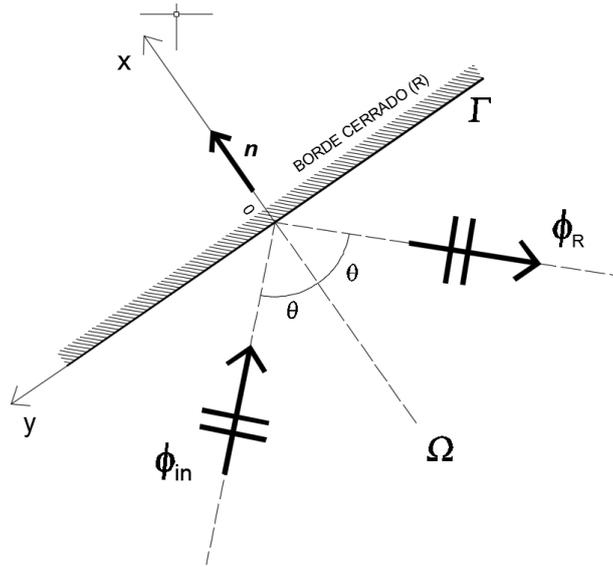


Figura 7-5. Condición de contorno cerrado.

Hacia el contorno se aproxima una onda  $\phi_{in}$  formando un ángulo  $\theta$  respecto de la normal, que es reflejada  $\phi_R$  con un ángulo  $\theta$  igual al de incidencia. La capacidad de reflexión del contorno está definida por el valor del coeficiente de reflexión  $R$ . A continuación se muestran las expresiones de los potenciales complejos reducidos de las ondas incidente y reflejada referidos al sistema local  $x - y$ :

$$\phi_{in} = \tilde{\varphi} e^{ik_x x} e^{-ik_y y} \quad (7-15)$$

$$\phi_R = R \tilde{\varphi} e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} \quad (7-16)$$

Siendo  $\tilde{\varphi}$  la amplitud de la onda incidente al contorno.  $k_x = k \cos\theta$  y  $k_y = k \sin\theta$ .

El valor total del potencial reducido justo en el contorno será la suma del potencial incidente y el reflejado:

$$\phi = \phi_{in} + \phi_R = \tilde{\varphi} (e^{ik_x x} + R e^{-ik_x x}) e^{-ik_y y} \quad (7-17)$$

La cantidad de potencial que atraviesa el contorno, o flujo de potencial  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ , será:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \nabla \phi \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (7-18)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \tilde{\varphi} (ik_x e^{ik_x x} - R ik_x e^{-ik_x x}) e^{-ik_y y} \quad (7-19)$$

En nuestro caso concreto, justo en el contorno  $x = 0$ , las ecuaciones (7-17) y (7-19) nos quedan:

$$\phi|_{x=0} = \tilde{\varphi} (1 + R) e^{-ik_y y} \quad (7-20)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=0} = ik_x \tilde{\varphi} (1 - R) e^{-ik_y y} \quad (7-21)$$

Combinando las ecuaciones (7-20) y (7-21) obtenemos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = i k_x \frac{1-R}{1+R} \phi \quad \text{en } x=0 \quad (7-22)$$

Hay que prestar mucha atención en este punto, pues es justo aquí donde se aprecia el problema de las condiciones de contorno para la MSE:

---

$k_x = k \cos \theta$  *depende del ángulo  $\theta$  con el que se aproxima la onda incidente al contorno, reflejada desde el interior del dominio  $\Omega$ . Este ángulo  $\theta$  no es conocido a priori.*

---

¿Cómo podemos resolver este problema? En la bibliografía técnica se pueden encontrar varias alternativas.

- **Aproximación de primer orden (Sommerfeld-like):**

La más sencilla (pero la más imprecisa), es el empleo de la aproximación de “primer orden” o “Sommerfeld-like”, consistente en considerar que  $\theta = 0$ . En este caso la condición de contorno quedaría:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = i k \frac{1-R}{1+R} \phi \quad \text{en } x=0 \quad (7-23)$$

- **Aproximación de segundo orden:**

Otra opción es aproximar el  $\cos \theta$  con un desarrollo de Taylor de segundo orden centrado en  $\theta = 0$ .

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta} \approx 1 - \frac{1}{2} \text{sen}^2 \theta$$

Tomamos del valor de  $\phi|_{x=0}$  y lo derivamos dos veces respecto de  $y$ :

$$\phi|_{x=0} = \tilde{\varphi} (1+R) e^{-ik_y y} \quad (7-24)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{x=0} = -i k_y \tilde{\varphi} (1+R) e^{-ik_y y} \quad (7-25)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right|_{x=0} = -k_y^2 \tilde{\varphi} (1+R) e^{-ik_y y} = -k_y^2 \phi|_{x=0} = -k^2 \text{sen}^2 \theta \phi|_{x=0} \quad (7-26)$$

De la ecuación (7-26) despejamos el  $\text{sen}^2 \theta$ :

$$\text{sen}^2 \theta = - \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{1}{k^2 \phi} \right|_{x=0} \quad (7-27)$$

Por lo que finalmente la condición de contorno en el borde cerrado quedaría:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = i k \cos \theta \frac{1-R}{1+R} \phi = i \frac{1-R}{1+R} \left[ k \phi + \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] \quad \text{en } x=0 \quad (7-28)$$

- **Empleo de “Esponjas Numéricas” (Perfectly Matched Layer):**

Dejaremos esta técnica para el próximo capítulo 8 de este TFM, pues se trata de un cambio conceptual importante que pedagógicamente debe ser abordado una vez que el lector haya asumido el problema del ángulo  $\theta$ . Es necesario que vea y “sufra” sus consecuencias en cada uno de los ejemplos numéricos propuestos al final de este capítulo.

### 7.4.2. Condición de contorno de borde abierto

Se trata de contornos ficticios “no físicos” que necesitamos imponer para cerrar el dominio y que éste sea computacional. Este contorno produce un truncamiento del dominio semi-infinito (mar abierto) en el que debemos garantizar condiciones de “total permeabilidad”, tanto a las ondas que llegan a él desde el exterior, como de las reflejadas desde los contornos físicos del dominio y que salen del dominio. Es decir, las ondas no deben “sentir” su presencia.

Supongamos que en un punto cualquiera de un contorno abierto  $\Gamma_2$  disponemos un sistema de coordenadas local  $x - y$  con origen en el contorno. El eje  $x$  se dispone según la dirección de la normal exterior al contorno  $\mathbf{n}$  y el eje  $y$  según la dirección del propio contorno, recorriéndolo en el sentido contrario a las agujas del reloj y formando un sistema local de ejes cartesianos dextrógiro (ver figura adjunta).

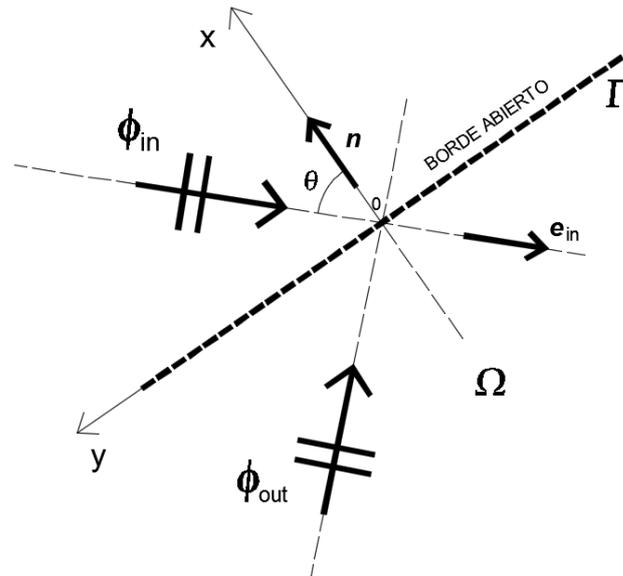


Figura 7-6. Condición de contorno abierto.

Desde el exterior del dominio se aproxima una onda conocida  $\phi_{in}$  (dato de nuestro problema) con vector director  $\mathbf{e}_{in}$ , mientras que desde el interior sale una onda reflejada por los contornos físicos del dominio  $\phi_{out}$  que es desconocida a priori.

$$\phi_{in} = \tilde{\varphi} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \quad (7-29)$$

Siendo  $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_{in}$  y  $\mathbf{x} = (x, y)$ .  $\tilde{\varphi}$  es la amplitud de la onda incidente conocida.

La derivada del potencial entrante respecto a la dirección normal será:

$$\frac{\partial \phi_{in}}{\partial \mathbf{n}} = \nabla \phi_{in} \cdot \mathbf{n} = \left[ \frac{\partial \phi_{in}}{\partial x} \quad \frac{\partial \phi_{in}}{\partial y} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\partial \phi_{in}}{\partial x} \quad (7-30)$$

$$\frac{\partial \phi_{in}}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \phi_{in}}{\partial x} = i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}) \phi_{in} = i k (\mathbf{e}_{in} \cdot \mathbf{n}) \phi_{in} \quad (7-31)$$

Ahora bien, la onda  $\phi_{out}$  tiene que salir del dominio sin ser reflejada por el contorno abierto ficticio. Retomando la condición de contorno ya estudiada para el contorno cerrado (7-28), este caso es idéntico a asumir una condición de absorción total ( $R = 0$ ):

$$\frac{\partial \phi_{out}}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \phi_{out}}{\partial x} = i \left[ k \phi_{out} + \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 \phi_{out}}{\partial y^2} \right] \quad \text{en } x = 0 \quad (7-32)$$

El potencial existente en el contorno será la suma de los potenciales entrante y saliente del dominio

$$\phi = \phi_{in} + \phi_{out} \quad (7-33)$$

Por tanto:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi_{in}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_{out}}{\partial x} \quad (7-34)$$

Finalmente, la condición de contorno en el borde abierto será:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = i k \phi_{in} (\mathbf{e}_{in} \cdot \mathbf{n}) + i k (\phi - \phi_{in}) + \frac{i}{2k} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi_{in}}{\partial y^2} \right) \quad \text{en } x = 0 \quad (7-35)$$

Obsérvese que en la anterior ecuación (7-35) hemos considerado la **aproximación de segundo orden** que incluye los términos de derivadas segundas respecto a la coordenada y local del contorno  $\left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi_{in}}{\partial y^2} \right)$ . En el caso de optar por la **condición de primer orden** (Sommerfeld-like), este sumando desaparecería, quedando la condición de contorno de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = i k \phi_{in} (\mathbf{e}_{in} \cdot \mathbf{n}) + i k (\phi - \phi_{in}) \quad \text{en } x = 0 \quad (7-36)$$

### 7.4.3. Condición de contorno de potencial prescrito, esencial o tipo Dirichlet

Mediante esta condición se prescribe un valor conocido del potencial  $\phi_i = \bar{\phi}_i$  en el contorno del dominio de integración. Esta condición de contorno no tiene un símil físico que permita visualizarla de forma evidente. No obstante, es bastante interesante desde un punto de vista práctico. Permite fijar valores de potencial en el contorno obtenidos de otros modelos por la técnica de anidamiento de mallas, de más a menos resolución. Es decir, se emplean modelos menos afinados (p.ej. parabólicos) para aproximación a la zona de estudio y en el contorno del dominio de integración se fijan los valores de potencial obtenido de dichos modelos.

Otra aplicación importante de esta condición de contorno es en la obtención de los modos naturales de oscilación y frecuencias de resonancia en dársenas portuarias.

### 7.4.4. Condición de contorno de flujo potencial prescrito, natural o tipo Neumann

Esta es la condición de contorno más fácil de implementar, pues nos da directamente el valor de  $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}$  en el contorno. Podría representar físicamente la generación de una onda por una pala generadora de oleaje en un túnel de oleaje en laboratorio o en una piscina de olas en un parque acuático. En estos casos, el valor de  $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}$  representa una velocidad en la superficie del fluido que es producida por la pala en movimiento (ver figura adjunta).



Figura 7-7. Pala generadora de oleaje. Condición de contorno tipo natural o de Neumann.

## 7.5. Discretización del dominio

Mediante la aplicación de métodos numéricos, como el MEF, renunciamos a obtener una solución analítica continua del problema  $\phi(x, y)$  en todo el dominio de integración  $\Omega$ . En su lugar, nos conformaremos con una aproximación a la solución en un número  $N$  discreto de puntos (nodos)  $\phi_i = \phi(x_i, y_i)$ , con  $i = 1, 2, 3 \dots, N$ .

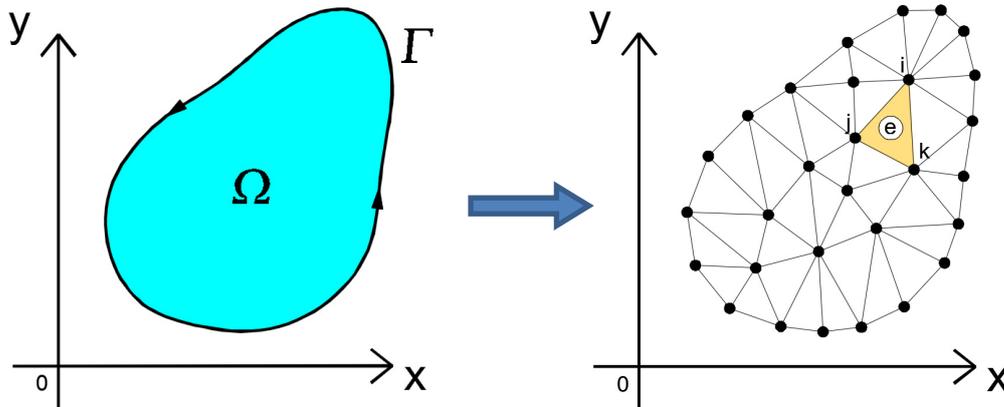


Figura 7-8. Discretización del dominio de integración 2-D.

En el ejemplo de la figura anterior hemos discretizado el dominio  $\Omega$  mediante  $N$  elementos triangulares de tres nodos. Una vez obtenida la solución numérica en los nodos de la discretización  $\phi_i = \phi(x_i, y_i)$ , los valores de la función en cualquier otro punto  $\phi(x, y)$  del dominio se obtendrán por interpolación.

Para nuestro caso concreto, la discretización del dominio elegida (número de nodos y de elementos) tiene gran incidencia en la calidad de la solución. Al tratarse de un fenómeno periódico, debemos asegurarnos que existan un número mínimo de elementos por longitud de onda para que el modelo numérico represente bien la solución. El tamaño de la malla será función del tipo de elemento elemento elegido en cada caso.

La generación de la malla de triángulos en este TFM se ha realizado mediante la colección de **funciones DistMesh** [15], de uso libre y gratuito, programadas en lenguaje Matlab®. Esta colección de funciones permite generar y manipular mallas de triángulos no estructuradas basadas en el algoritmo de **triangulación de Delaunay**. Pueden descargarse la librería de funciones, manuales de uso y ejemplos en: <http://persson.berkeley.edu/distmesh/>

Una triangulación de Delaunay, es una red de triángulos que cumple la **condición de Delaunay**. Esta condición

dice que la circunferencia circunscrita de cada triángulo de la red no debe contener ningún vértice de otro triángulo.

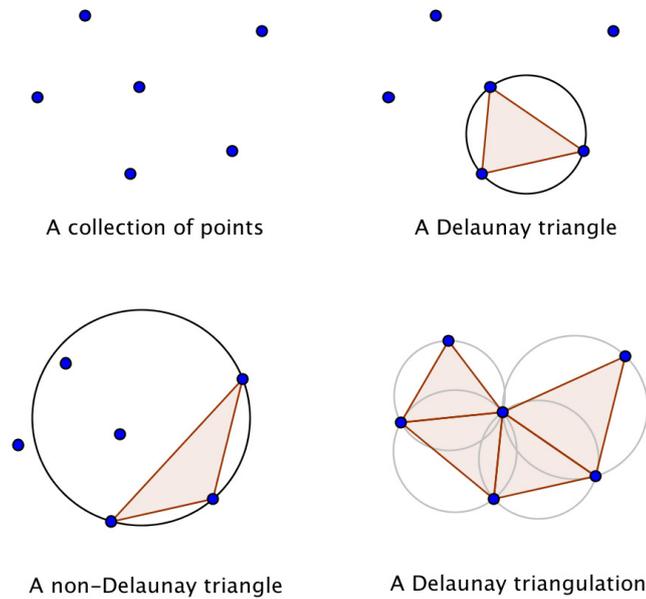
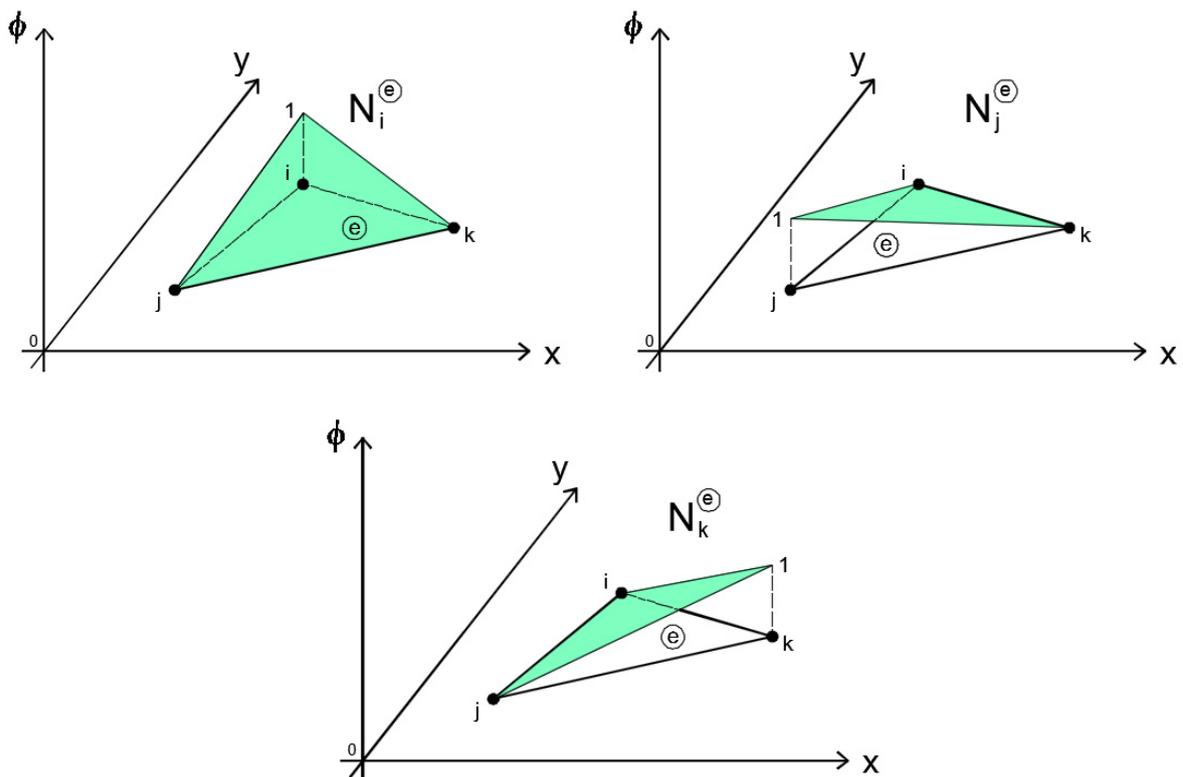
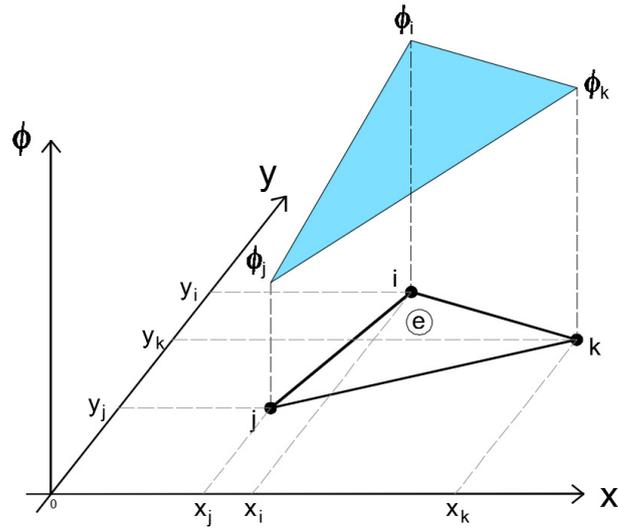


Figura 7-9. Triangulación de Delaunay.

### 7.6. Funciones de forma o interpolación

En aras de la simplicidad de la exposición, se emplearán elementos triangulares de tres nodos en la discretización y funciones de interpolación (funciones de forma) polinómicas de grado 1 (planos), aunque podrían emplearse polinomios de grado superior 2, 3, ..., n sin pérdida de generalidad.



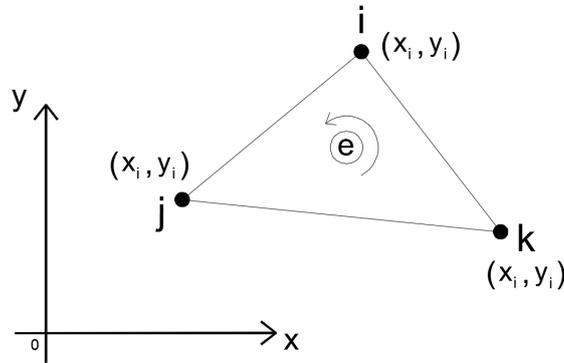


$$\phi = \phi_i N_i^e(x, y) + \phi_j N_j^e(x, y) + \phi_k N_k^e(x, y)$$

Figura 7-10. Funciones de interpolación del elemento e (nodos  $i - j - k$ ).

Una vez elegida la discretización del dominio  $\Omega$  conoceremos la posición (coordenadas) de todos los nodos:  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ .

Para el elemento general ( $e$ ), formado por los nodos  $i - j - k$ , las funciones de interpolación  $N_i^e(x, y)$  en **coordenadas cartesianas** tienen las siguientes expresiones:



$$N_i^e(x, y) = \frac{1}{2A} [x_j y_k - x_k y_j + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y] \tag{7-37}$$

$$N_j^e(x, y) = \frac{1}{2A} [x_k y_i - x_i y_k + (y_k - y_i)x + (x_i - x_k)y] \tag{7-38}$$

$$N_k^e(x, y) = \frac{1}{2A} [x_i y_j - x_j y_i + (y_i - y_j)x + (x_j - x_i)y] \tag{7-39}$$

Siendo  $A_e$  el área del elemento ( $e$ ).

$$2A_e = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \end{vmatrix} > 0 \tag{7-40}$$

La desigualdad (7-40) sólo se cumple si se recorre el contorno del elemento  $e$  en sentido antihorario.

La función de interpolación  $N_i^e(x, y)$  tienen la propiedad de tomar valor unidad en el nodo  $i$  y cero en el resto, por lo que la interpolación lineal de los valores de  $\phi$  dentro del elemento se obtiene como:

$$\phi(x, y) = \phi_i N_i^e(x, y) + \phi_j N_j^e(x, y) + \phi_k N_k^e(x, y) \tag{7-41}$$

Comenzaremos a emplear la notación vectorial por ser la empleada en el MEF. Así la anterior ecuación (7-41) podemos expresarla como:

$$\boldsymbol{\phi}^e = \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{N}^e = [N_i^e \quad N_j^e \quad N_k^e] \tag{7-42}$$

$$\phi = \mathbf{N}^e \boldsymbol{\phi}^e \tag{7-43}$$

Veamos ahora como se obtiene el valor  $\nabla\phi$ :

$$\nabla\phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} & \frac{\partial N_j^e}{\partial x} & \frac{\partial N_k^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} & \frac{\partial N_j^e}{\partial y} & \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{bmatrix} = \mathbf{B}^e \boldsymbol{\phi}^e \tag{7-44}$$

Las derivadas  $\frac{\partial N_i^e}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial N_i^e}{\partial y}$  se obtienen fácilmente, pues conocemos las expresiones de las funciones de forma  $N_i^e(x, y)$ , ecuaciones (7-37),(7-38) y (7-39). En el caso concreto de uso de funciones de interpolación lineal, la matriz  $\mathbf{B}^e$  es de términos constantes conocidos que dependen sólo de las coordenadas cartesianas  $(x_i, y_i)$  de los nodos:

$$\mathbf{B}^e = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j \\ x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i \end{bmatrix} \tag{7-45}$$

### 7.6.1. Transformación a coordenadas naturales.

En la aplicación del MEF es muy común el empleo de transformaciones de coordenadas para trabajar en un sistema de coordenadas naturales  $(\xi_i)$  triangulares que simplifican muchísimo el cálculo de integrales numéricas.

La posición de un punto dentro de un triángulo viene determinada por tres coordenadas  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  que no son independientes entre sí, pues fijadas dos de ellas la tercera viene impuesta por la siguiente relación:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1 \tag{7-46}$$

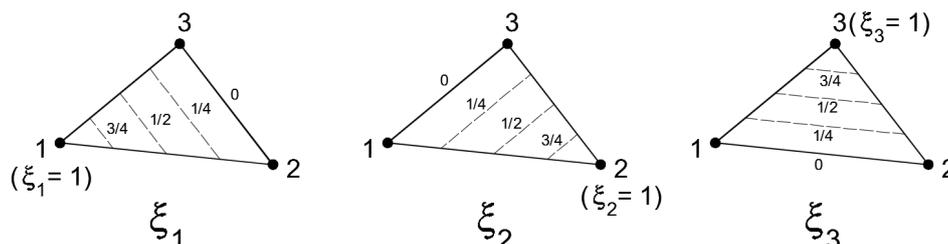


Figura 7-11. Coordenadas triangulares ( $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ )

En el caso concreto del elemento triangular de tres nodos las funciones de forma  $N_i^e$  son:

$$N_1^e = \xi_1 \quad ; \quad N_2^e = \xi_2 \quad ; \quad N_3^e = \xi_3 \quad (7-47)$$

Por tanto, el valor interpolado del potencial  $\phi(x, y)$  en el elemento  $e$ :

$$\phi = \phi_1 \xi_1 + \phi_2 \xi_2 + \phi_3 \xi_3 \quad (7-48)$$

Expresada la ecuación (7-48) en formato vectorial, tenemos:

$$\boldsymbol{\phi}^e = \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{N}^e = [N_i^e \quad N_j^e \quad N_k^e] = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3] \quad (7-49)$$

$$\phi = \mathbf{N}^e \boldsymbol{\phi}^e \quad (7-50)$$

La transformación de coordenadas cartesianas a triangulares se obtiene de la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \quad (7-51)$$

La transformación inversa se obtiene invirtiendo la matriz anterior, obteniéndose:

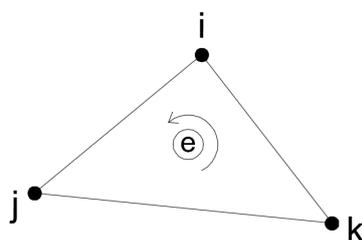
$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \quad (7-52)$$

De las ecuaciones de transformación de coordenadas (7-51) y (7-52) pueden obtenerse las siguientes derivadas:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_i} = x_i \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial \xi_i} = y_i \quad (7-53)$$

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x} = \frac{1}{2A_e} (y_j - y_k) \quad ; \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial y} = \frac{1}{2A_e} (x_k - x_j) \quad (7-54)$$

Cuando los nodos del elemento  $i - j - k$  se recorren en sentido antihorario:



Veamos ahora como se obtiene el valor  $\nabla\phi$ :

$$\nabla\phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{7-55}$$

Los términos  $\frac{\partial\phi}{\partial x}$  y  $\frac{\partial\phi}{\partial y}$  se obtienen aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial\xi_1} \frac{\partial\xi_1}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial\xi_2} \frac{\partial\xi_2}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial\xi_3} \frac{\partial\xi_3}{\partial x} \tag{7-56}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial\xi_1} \frac{\partial\xi_1}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial\xi_2} \frac{\partial\xi_2}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial\xi_3} \frac{\partial\xi_3}{\partial y} \tag{7-57}$$

Las ecuaciones (7-56) (7-57) pueden expresarse en formato matricial compacto:

$$\nabla\phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\xi_1}{\partial x} & \frac{\partial\xi_2}{\partial x} & \frac{\partial\xi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial\xi_1}{\partial y} & \frac{\partial\xi_2}{\partial y} & \frac{\partial\xi_3}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial\xi_1} \\ \frac{\partial\phi}{\partial\xi_2} \\ \frac{\partial\phi}{\partial\xi_3} \end{bmatrix} \tag{7-58}$$

Si en (7-58) introducimos los valores obtenidos para las derivadas (7-53) (7-54) obtenemos:

$$\nabla\phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^e \boldsymbol{\phi}^e \tag{7-59}$$

$$\mathbf{B}^e = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \tag{7-60}$$

Se observa que la matriz  $\mathbf{B}^e$  es de términos constantes conocidos que sólo dependen de las coordenadas de los nodos del elemento. Además, se ha obtenido la misma matriz (7-45) que en coordenadas cartesianas, como es lógico.

Cuando se trabaja en el espacio de coordenadas naturales triangulares  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , se cumple la siguiente propiedad que resulta muy útil para el **cálculo numérico de integrales de dominio** en el elemento:

$$\int_{\Omega_e} \xi_1^i \xi_2^j \xi_3^k d\Omega = \frac{i! j! k!}{(i + j + k + 2)!} 2A_e \tag{7-61}$$

### 7.7. Función de peso. Método de Galerkin

El MEF emplea el método de los residuos ponderados de Galerkin, el cual toma como función de peso  $\psi(x, y)$

una combinación lineal arbitraria de las funciones de forma  $N_i^e$ , por tanto:

$$\psi = \mathbf{N}^e \mathbf{c} = \mathbf{c}^T \mathbf{N}^{eT} \quad (7-62)$$

Siendo  $\mathbf{c}$  un vector de coeficientes constantes arbitrarias. El superíndice  $T$  indica el vector o matriz traspuesto.

Para implementar el MEF, necesitamos también conocer el valor de sus derivadas:

$$\nabla \psi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{bmatrix} = \nabla(\mathbf{c}^T \mathbf{N}^{eT}) = \mathbf{c}^T \mathbf{B}^{eT} \quad (7-63)$$

Aunque lo veremos en próximos epígrafes, el vector  $\mathbf{c}^T$  va a aparecer en todos los términos sumandos integrales de la forma débil o integral de la MSE, por lo que puede ser extraído como un factor común. Como se trata de un vector arbitrario y su producto matricial por el resto de términos de la forma débil (llamémoslo  $\mathbf{Q}$ ) está igualado a cero, podemos olvidarnos de él en lo que sigue, puesto que:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{Q} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q} = 0 \quad (7-64)$$

## 7.8. Discretización de la forma débil de la MSE

Volvamos ahora a la ecuación integral o forma débil de la MSE (7-12).

$$\int_{\Gamma} c c_g \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Omega} c c_g \nabla \psi \cdot \nabla \phi d\Omega + \int_{\Omega} k^2 c c_g \psi \phi d\Omega = 0 \quad (7-65)$$

Sabiendo que  $c = \frac{\omega}{k}$  podemos expresar la forma integral (7-65) de esta otra forma:

$$\int_{\Gamma} c c_g \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Omega} c c_g \nabla \psi \cdot \nabla \phi d\Omega + \omega^2 \int_{\Omega} \frac{c_g}{c} \psi \phi d\Omega = 0 \quad (7-66)$$

$\omega^2$  sale de la integral pues es un parámetro constante y conocido (dato de partida del problema), al ser la MSE un modelo monocromático de propagación de ondas.

El primer sumando de (7-66) contiene las **condiciones de contorno** del problema que estudiaremos en el próximo apartado.

$$\int_{\Gamma} c c_g \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \quad (7-67)$$

Los dos restantes sumandos son **integrales de dominio**  $\Omega$ , que pueden expresarse como un sumatorio de las integrales en cada elemento  $\Omega_e$  de la malla de elementos finitos.

$$\int_{\Omega} c c_g \nabla \psi \cdot \nabla \phi d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} c c_g \nabla \psi \cdot \nabla \phi d\Omega \quad (7-68)$$

$$\int_{\Omega} \frac{c_g}{c} \psi \phi \, d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} \frac{c_g}{c} \psi \phi \, d\Omega \quad (7-69)$$

Nos centraremos ahora en las integrales de dominio a nivel de un elemento general  $\Omega_e$ ; posteriormente se explicará el proceso de sumatorio de las integrales de dominio elementales; expresado de forma matricial este sumatorio supone un **proceso de ensamblaje de matrices** del que se obtiene la matriz de rigidez global del sistema.

Vamos a suponer que nuestra discretización es lo suficientemente fina como para admitir que los valores de  $c$  y  $c_g$  son aproximadamente constantes en cada elemento ( $e$ ), por lo que pueden sacarse de las integrales como constantes a nivel de elemento  $\Omega_e$ .

$$\int_{\Omega_e} c c_g \nabla \psi \cdot \nabla \phi \, d\Omega = (c c_g)_e \int_{\Omega_e} \nabla \psi \cdot \nabla \phi \, d\Omega \quad (7-70)$$

$$\int_{\Omega_e} \frac{c_g}{c} \psi \phi \, d\Omega = \left(\frac{c_g}{c}\right)_e \int_{\Omega_e} \psi \phi \, d\Omega \quad (7-71)$$

Los valores de  $k_e$ ,  $c_e$  y  $c_{ge}$  locales se obtienen de la ecuación de dispersión  $\omega^2 = gk \tanh(kh)$ , conocido el periodo de la onda  $T$  y tomando un valor promedio de la profundidad  $\bar{h}_e$  en el elemento ( $e$ ).

### 7.8.1. Integrales de dominio.

Vamos a introducir en las ecuaciones (7-70) y (7-71) los valores interpolados de  $\phi$ ,  $\nabla \phi$ ,  $\psi$ ,  $\nabla \psi$  obtenidos en las ecuaciones (7-43) (7-44) (7-62) (7-63), respectivamente.

$$(c c_g)_e \int_{\Omega_e} \nabla \psi \cdot \nabla \phi \, d\Omega = (c c_g)_e \mathbf{c}^T \left[ \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e \, d\Omega \right] \boldsymbol{\phi}^e = \mathbf{c}^T \mathbf{K}^e \boldsymbol{\phi}^e \quad (7-72)$$

$$\left(\frac{c_g}{c}\right)_e \int_{\Omega_e} \psi \phi \, d\Omega = \left(\frac{c_g}{c}\right)_e \mathbf{c}^T \left[ \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e \, d\Omega \right] \boldsymbol{\phi}^e = \mathbf{c}^T \mathbf{M}^e \boldsymbol{\phi}^e \quad (7-73)$$

Siendo:

$$\mathbf{K}^e = (c c_g)_e \left[ \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e \, d\Omega \right] \quad (7-74)$$

$$\mathbf{M}^e = \left(\frac{c_g}{c}\right)_e \left[ \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e \, d\Omega \right] \quad (7-75)$$

El vector  $\mathbf{c}^T$  de términos constantes arbitrarios, va a aparecer como factor común en todos los sumandos de la ecuación integral o forma débil (7-66), tanto en los términos de integrales de dominio como en las condiciones de contorno. Ya fue explicada en el epígrafe 7.7 la razón por la cual podemos olvidarnos de él en todos los desarrollos que siguen.

Calculemos ahora las integrales que aparecen en las anteriores ecuaciones. Recordemos que la matriz  $\mathbf{B}^e$  resultó ser una matriz de términos constantes para el elemento triangular de tres nodos (7-60).

$$\mathbf{B}^e = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad (7-76)$$

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e d\Omega = \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e \int_{\Omega_e} d\Omega = A_e \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e \quad (7-77)$$

Por tanto, la integral de dominio elemental  $\mathbf{K}^e$  quedaría finalmente como:

$$\mathbf{K}^e = (cc_g)_e A_e \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e \quad (7-78)$$

Veamos ahora la otra integral de dominio:  $\int_{\Omega_e} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e d\Omega$ . Para el cálculo de esta integral si va a resultar útil hacer la transformación a coordenadas triangulares.

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e d\Omega = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{bmatrix} d\Omega = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \xi_1^2 & \xi_1 \xi_2 & \xi_1 \xi_3 \\ \xi_1 \xi_2 & \xi_2^2 & \xi_2 \xi_3 \\ \xi_1 \xi_3 & \xi_2 \xi_3 & \xi_3^2 \end{bmatrix} d\Omega \quad (7-79)$$

Esta integrál puede calcularse de forma muy sencilla y de forma exacta aplicando la propiedad de las coordenadas triangulares (7-61).

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e d\Omega = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \xi_1^2 & \xi_1 \xi_2 & \xi_1 \xi_3 \\ \xi_1 \xi_2 & \xi_2^2 & \xi_2 \xi_3 \\ \xi_1 \xi_3 & \xi_2 \xi_3 & \xi_3^2 \end{bmatrix} d\Omega = \frac{A_e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (7-80)$$

Finalmente, sustituyendo el anterior resultado obtenemos la matriz  $\mathbf{M}^e$ :

$$\mathbf{M}^e = \left(\frac{c_g}{c}\right)_e \frac{A_e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (7-81)$$

Una vez obtenidas las matrices  $\mathbf{K}^e$  y  $\mathbf{M}^e$  y reordenando términos de la ecuación, veamos como queda finalmente la forma débil discreta de la MSE:

$$\int_{\Omega} cc_g \nabla \psi \cdot \nabla \phi d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega} \frac{c_g}{c} \psi \phi d\Omega = \int_{\Gamma} cc_g \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \quad (7-82)$$

$$\left[ \sum_e \mathbf{K}^e - \omega^2 \sum_e \mathbf{M}^e \right] \boldsymbol{\phi} = \mathbf{f} \quad (7-83)$$

$$\sum_e [\mathbf{K}^e - \omega^2 \mathbf{M}^e] \boldsymbol{\phi} = \mathbf{f} \quad (7-84)$$

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{f} \quad (7-85)$$

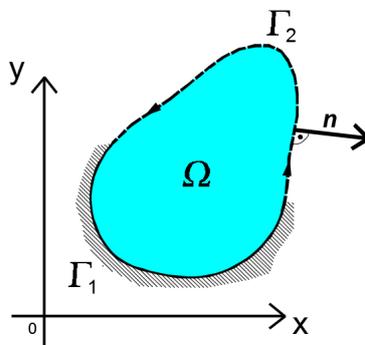
Siendo  $\mathbf{K}$  la matriz de "rigidez" global,  $\boldsymbol{\phi}$  el vector de incógnitas nodales para todo el dominio y  $\mathbf{f}$  el vector de

“fuerzas”. La Matriz  $\mathbf{K}$  se obtiene por un procedimiento de ensamblaje que se explicará en próximos apartados.

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_{N-1} \\ \phi_N \end{bmatrix} \tag{7-86}$$

### 7.8.2. Aplicación de la condiciones de contorno.

El sumando de la derecha de la ecuación (7-82) de la forma débil de la MSE contiene las **condiciones de contorno** del problema. En el caso 2-D necesitamos conocer los flujos de potencial  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$  en todo el contorno del dominio de integración:  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$



$$\int_{\Gamma} cc_g \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma_1} cc_g \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} cc_g \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma \tag{7-87}$$

$\Gamma_1$  representa los contorno de tipo cerrado (bordes físicos) y  $\Gamma_2$  los contornos abiertos.

Una vez discretizado el dominio en  $N$  elementos triangulares de tres nodos, el contorno queda también discretizado por una poligonal de segmentos lineales definidos por dos nodos  $i - j$ , pertenecientes a las aristas de los elementos triangulares más periféricos del dominio. En cada uno de estos segmentos definimos un sistema de ejes local  $x - y$  dextrogiro, con eje de abscisas  $x$  según la normal exterior al dominio  $\mathbf{n}$  y eje de ordenadas  $y$  según la dirección tangente al contorno y en sentido de avance antihorario (No confundir estos ejes locales con los ejes globales  $X - Y$ . Ver figura adjunta.

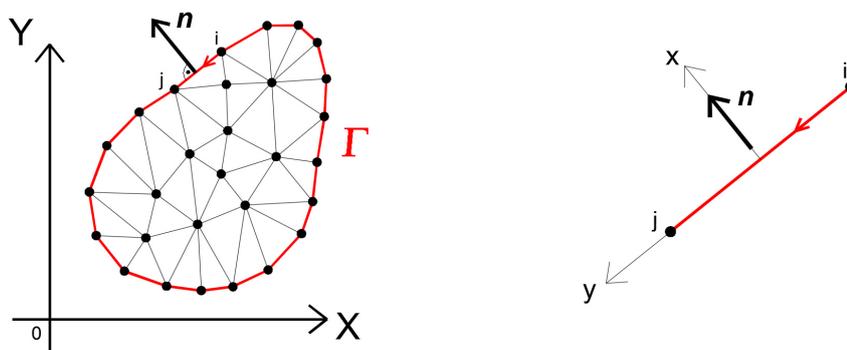


Figura 7-12. Discretización del contorno en elementos lineales de dos nodos.

De esta forma, las integrales de contorno (7-87) son integrales de línea en la coordenada local  $y$ . Por tratarse de elementos lineales de dos nodos en el contorno, las funciones de interpolación serán lineales:

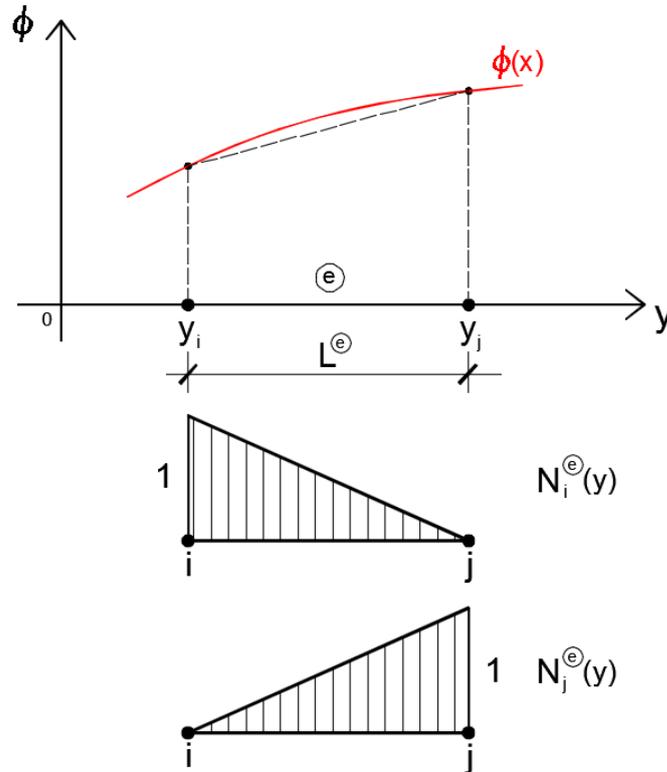


Figura 7-13. Funciones de forma lineales.

En la aplicación del MEF es muy común el empleo de transformaciones de coordenadas para trabajar en un sistema de coordenadas naturales ( $\xi$ ) que simplifica muchísimo el cálculo de integrales numéricas empleando cuadraturas de Gauss. En el caso general, transformaremos el sistema de coordenadas cartesiano por a un sistema de coordenadas natural a través del jacobiano de la transformación J.



En el sistema de coordenadas naturales ( $\xi$ ) las funciones de forma tienen la siguiente expresiones:

$$N_i^e(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \tag{7-88}$$

$$N_j^e(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \tag{7-89}$$

Por tanto, el valor interpolado del potencial en el elemento será:

$$\phi = \phi_i N_i^e(\xi) + \phi_j N_j^e(\xi) \quad (7-90)$$

Empleando la notación vectorial, la anterior ecuación (7-90) podemos expresarla como:

$$\boldsymbol{\phi}^e = \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}^e = [N_i^e(\xi) \quad N_j^e(\xi)] \quad (7-91)$$

$$\boldsymbol{\phi} = \mathbf{N}^e \boldsymbol{\phi}^e \quad (7-92)$$

La coordenada espacial y local del elemento puede ser expresada en coordenadas naturales mediante la siguiente ecuación:

$$y = y_i N_i^e(\xi) + y_j N_j^e(\xi) = -\frac{y_i}{2}(\xi - 1) + \frac{y_j}{2}(\xi + 1) \quad (7-93)$$

Es decir, a cada punto del espacio en coordenadas cartesianas le corresponde un único punto en el espacio de coordenadas naturales. Si calculamos el diferencial de la ecuación (7-93) y aplicamos la regla de la cadena obtenemos:

$$dy = \frac{dy}{d\xi} d\xi = \left(-\frac{y_i}{2} + \frac{y_j}{2}\right) d\xi = \frac{L_e}{2} d\xi \quad (7-94)$$

Por tanto, el factor  $\frac{L_e}{2}$  es el jacobiano de la transformación de coordenadas.

Veamos ahora como se obtiene el valor  $\frac{d\boldsymbol{\phi}}{dy}$ :

$$\frac{d\boldsymbol{\phi}}{dy} = \frac{d}{dy} [\mathbf{N}^e \boldsymbol{\phi}^e] = \frac{d\mathbf{N}^e}{dy} \boldsymbol{\phi}^e = \mathbf{B}^e \boldsymbol{\phi}^e \quad (7-95)$$

Siendo  $\mathbf{B}^e$  el vector de derivadas de las funciones de forma:

$$\mathbf{B}^e = \frac{d\mathbf{N}^e}{dy} = \begin{bmatrix} \frac{dN_i^e}{dy} & \frac{dN_j^e}{dy} \end{bmatrix} \quad (7-96)$$

Las derivadas  $\frac{dN_i^e}{dy}$  se obtienen fácilmente pues conocemos las expresiones de las funciones de forma  $N_i^e$ .

$$\frac{dN_i^e}{dy} = \frac{dN_i^e}{d\xi} \frac{d\xi}{dy} = -\frac{1}{L_e} \quad (7-97)$$

$$\frac{dN_j^e}{dy} = \frac{dN_j^e}{d\xi} \frac{d\xi}{dy} = \frac{1}{L_e} \quad (7-98)$$

$$\mathbf{B}^e = \frac{d\mathbf{N}^e}{dy} = \begin{bmatrix} \frac{dN_i^e}{dy} & \frac{dN_j^e}{dy} \end{bmatrix} = \frac{1}{L_e} [-1 \quad 1] \quad (7-99)$$

Resultando que en el caso concreto de uso de funciones de interpolación lineal, el vector  $\mathbf{B}^e$  es de términos constantes conocidos. Por tanto:

$$\frac{d\phi}{dy} = \mathbf{B}^e \boldsymbol{\phi}^e = \frac{1}{L^e} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{bmatrix} \quad (7-100)$$

- **Contornos cerrados  $\Gamma_1$ :**

La condición de contorno cerrado obtenida en (7-28) tenía la siguiente expresión:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = i \frac{1-R}{1+R} \left[ k\phi + \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] \quad \text{en } x = 0 \quad (7-101)$$

Por lo tanto:

$$\int_{\Gamma_1} cc_g \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = \sum_e \int_{\Gamma_{1e}} cc_g \psi \frac{\partial \phi}{\partial x} dy = \sum_e \int_{\Gamma_{1e}} cc_g \psi i \frac{1-R}{1+R} \left[ k\phi + \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] dy \quad (7-102)$$

Para simplificar la ecuación (7-102) definimos el factor de reflexión del borde cerrado  $f_R$ .

$$f_R = \frac{1-R}{1+R} \quad (7-103)$$

Nos centramos en la integral de contorno de un elemento  $e$  general perteneciente al contorno cerrado  $\Gamma_1$ . Suponemos que la discretización del contorno es lo suficientemente fina para suponer que los términos  $c$ ,  $c_g$  y  $k$  son constantes a nivel de elemento, por lo que salen de la integral.

$$\int_{\Gamma_{1e}} cc_g \psi i f_R \left[ k\phi + \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] dy = i (cc_g f_R)_e \left[ k_e \int_{y_i}^{y_j} \psi \phi dy + \frac{1}{2k_e} \int_{y_i}^{y_j} \psi \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dy \right] \quad (7-104)$$

Si integramos por partes la segunda integral de (7-104), que contiene el término  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$ , podremos eliminar la derivada segunda y transformarla en una derivada primera:

$$\int_{y_i}^{y_j} \psi \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dy = \psi \frac{d\phi}{dy} \Big|_{y_i}^{y_j} - \int_{y_i}^{y_j} \frac{d\psi}{dy} \frac{d\phi}{dy} dy \quad (7-105)$$

Esta misma integración por partes aparece también en el contorno abierto  $\Gamma_1$ , como veremos en seguida. Por ello, al ser el dominio  $\Omega$  cerrado, los términos  $\psi \frac{d\phi}{dy} \Big|_{y_i}^{y_j}$  se cancelan dos a dos, siendo nula su suma global en todo el contorno del dominio por lo que podemos olvidarnos de ese sumando.

$$\int_{y_i}^{y_j} \psi \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dy = - \int_{y_i}^{y_j} \frac{d\psi}{dy} \frac{d\phi}{dy} dy \quad (7-106)$$

La integral de contorno queda de la siguiente forma:

$$\int_{\Gamma_{1e}} cc_g \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = i (cc_g f_R)_e \left[ k_e \int_{y_i}^{y_j} \psi \phi dy - \frac{1}{2k_e} \int_{y_i}^{y_j} \frac{d\psi}{dy} \frac{d\phi}{dy} dy \right] \quad (7-107)$$

Introduciendo en (7-107) los valores interpolados de  $\psi$ ,  $\phi$ ,  $\frac{d\psi}{dy}$ ,  $\frac{d\phi}{dy}$  nos queda:

$$\int_{\Gamma_{1e}} cc_g \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = i (cc_g f_R)_e \left[ k_e \int_{y_i}^{y_j} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e dy - \frac{1}{2k_e} \int_{y_i}^{y_j} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e dy \right] \boldsymbol{\phi}^e \quad (7-108)$$

Calculemos ahora las integrales que aparecen en (7-108). Recordemos que la matriz  $\mathbf{B}^e$  resultó ser una matriz de términos constantes cuando las funciones de forma  $N_i^e$  son lineales.

$$\mathbf{B}^e = \frac{1}{L^e} [-1 \quad 1]$$

$$\int_{y_i}^{y_j} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e dy = \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e \int_{y_i}^{y_j} dy = L_e \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e = \frac{1}{L^e} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} [-1 \quad 1] = \frac{1}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7-109)$$

Veamos ahora la otra integral de dominio:  $\int_{x_i}^{x_j} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e dx$ . Para el cálculo de esta integral sí va a resultar útil hacer la transformación a coordenadas naturales.

$$\int_{y_i}^{y_j} \mathbf{N}^{eT}(y) \mathbf{N}^e(y) dy = \int_{-1}^{+1} \mathbf{N}^{eT}(\xi) \mathbf{N}^e(\xi) \frac{L_e}{2} d\xi \quad (7-110)$$

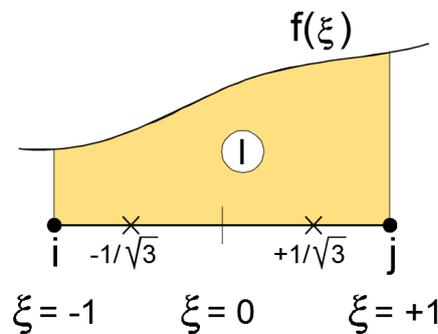
$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \mathbf{N}^{eT}(\xi) \mathbf{N}^e(\xi) \frac{L_e}{2} d\xi &= \frac{L_e}{2} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) \\ \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} d\xi = \\ &= \frac{L_e}{8} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} (1-\xi)^2 & 1-\xi^2 \\ 1-\xi^2 & (1+\xi)^2 \end{bmatrix} d\xi \end{aligned} \quad (7-111)$$

Esta integrál puede calcularse numéricamente de forma muy sencilla mediante cuadratura de Gauss con dos puntos de integración. Además, al ser polinomios de grado  $n = 2$ , la integral numérica es exacta.

*Para n puntos de integración la cuadratura o integración numérica de Gauss da soluciones de integración exactas para polinomios de orden  $2n - 1$ .*

Para el caso de  $n = 2$ , las posiciones ( $\xi_i$ ) y pesos ( $w_i$ ) correspondientes son:

$$\xi_i = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad w_i = 1$$



$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_i f(\xi_i) w_i = f(\xi_1) w_1 + f(\xi_2) w_2$$

Del cálculo numérico por cuadratura de Gauss la anterior integral se obtiene:

$$\int_{y_i}^{y_j} \mathbf{N}^e \mathbf{T} \mathbf{N}^e dy = \frac{L_e}{8} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} (1-\xi)^2 & 1-\xi^2 \\ 1-\xi^2 & (1+\xi)^2 \end{bmatrix} d\xi = \frac{L_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (7-112)$$

Empleando los resultados (7-109) y (7-112), para el elemento lineal de dos nodos, se obtiene:

$$\mathbf{K}_\Gamma^e = (cc_g)_e \int_{y_i}^{y_j} \mathbf{B}^e \mathbf{T} \mathbf{B}^e dy = (cc_g)_e \frac{1}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7-113)$$

$$\mathbf{M}_\Gamma^e = (cc_g)_e \int_{y_i}^{y_j} \mathbf{N}^e \mathbf{T} \mathbf{N}^e dy = (cc_g)_e \frac{L_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (7-114)$$

En las que se ha empleado el subíndice  $\Gamma$  para diferenciarlas de las integrales de dominio  $\mathbf{K}^e$  y  $\mathbf{M}^e$ . Finalmente, la condición de borde cerrado queda de la siguiente forma:

$$\int_{\Gamma_{1e}} cc_g \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = i (f_R)_e \left[ k_e \mathbf{M}_\Gamma^e - \frac{1}{2k_e} \mathbf{K}_\Gamma^e \right] \boldsymbol{\phi}^e \quad (7-115)$$

$$\int_{\Gamma_{1i}} cc_g \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = i (cc_g f_R)_e \left[ \frac{k_e L_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2k_e L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right] \boldsymbol{\phi}^e \quad (7-116)$$

- **Contornos Abiertos  $\Gamma_2$ :**

La condición de contorno abierto obtenida en (7-35) tenía la siguiente expresión:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = i k \phi_{in} (\mathbf{e}_{in} \cdot \mathbf{n}) + i k (\phi - \phi_{in}) + \frac{i}{2k} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi_{in}}{\partial y^2} \right) \quad \text{en } x = 0 \quad (7-117)$$

Por lo tanto:

$$\int_{\Gamma_2} cc_g \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = \sum_e \int_{\Gamma_{2e}} cc_g \psi \left[ i k \phi_{in} (\mathbf{e}_{in} \cdot \mathbf{n}) + i k (\phi - \phi_{in}) + \frac{i}{2k} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi_{in}}{\partial y^2} \right) \right] dy \quad (7-118)$$

Nos centramos en la integral de contorno de un elemento  $e$  general perteneciente al contorno abierto  $\Gamma_2$ . Suponemos que la discretización de elementos del contorno es suficientemente fina para suponer que los términos  $c$ ,  $c_g$  y  $k$  son constantes a nivel de elemento, por lo que salen como constantes de la integral.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{2e}} cc_g \psi \left[ i k \phi_{in} (\mathbf{e}_{in} \cdot \mathbf{n}) + i k (\phi - \phi_{in}) + \frac{i}{2k} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi_{in}}{\partial y^2} \right) \right] dy & \quad (7-119) \\ &= (i cc_g)_e \left[ k_e (\mathbf{e}_{in} \cdot \mathbf{n})_e \int_{y_i}^{y_j} \psi \phi_{in} dy + k_e \int_{y_i}^{y_j} \psi \phi dy - k_e \int_{y_i}^{y_j} \psi \phi_{in} dy \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2k_e} \int_{y_i}^{y_j} \psi \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dy - \frac{1}{2k_e} \int_{y_i}^{y_j} \psi \frac{\partial^2 \phi_{in}}{\partial y^2} dy \right] \end{aligned}$$

Si integramos por partes lo sumandos de (7-119), que contienen los términos  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$  y  $\frac{\partial^2 \phi_{in}}{\partial y^2}$ , podremos eliminar la derivada segunda  $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$  y transformarla en una derivada primera  $\frac{\partial}{\partial y}$ :

$$\int_{y_i}^{y_j} \psi \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dy = \psi \frac{d\phi}{dy} \Big|_{y_i}^{y_j} - \int_{y_i}^{y_j} \frac{d\psi}{dy} \frac{d\phi}{dy} dy \quad (7-120)$$

$$\int_{y_i}^{y_j} \psi \frac{\partial^2 \phi_{in}}{\partial y^2} dy = \psi \frac{d\phi_{in}}{dy} \Big|_{y_i}^{y_j} - \int_{y_i}^{y_j} \frac{d\psi}{dy} \frac{d\phi_{in}}{dy} dy \quad (7-121)$$

Ya se explicó en el apartado 7.7 que, al ser el dominio  $\Omega$  cerrado, los términos  $\psi \frac{d\phi}{dy} \Big|_{y_i}^{y_j}$  de la ecuación (7-120) se cancelan dos a dos, siendo nula su suma global en todo el contorno del dominio por lo que podemos olvidarnos de ese sumando.

$$\int_{y_i}^{y_j} \psi \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dy = \psi \frac{d\phi}{dy} \Big|_{y_i}^{y_j} - \int_{y_i}^{y_j} \frac{d\psi}{dy} \frac{d\phi}{dy} dy = - \int_{y_i}^{y_j} \frac{d\psi}{dy} \frac{d\phi}{dy} dy \quad (7-122)$$

En cuanto al término  $\psi \frac{d\phi_{in}}{dy} \Big|_{y_i}^{y_j}$ , desgraciadamente no ocurre lo mismo; los términos se cancelan dos a dos, pero no se eliminan los términos en los extremos del dominio abierto  $\Gamma_2$ . Podemos, no obstante, despreciarlos pues sólo aparecen en los extremos de dicho contorno y su contribución es pequeña.

$$\int_{y_i}^{y_j} \psi \frac{\partial^2 \phi_{in}}{\partial y^2} dy = \psi \frac{d\phi_{in}}{dy} \Big|_{y_i}^{y_j} - \int_{y_i}^{y_j} \frac{d\psi}{dy} \frac{d\phi_{in}}{dy} dy = - \int_{y_i}^{y_j} \frac{d\psi}{dy} \frac{d\phi_{in}}{dy} dy \quad (7-123)$$

La integral de contorno queda entonces de la siguiente forma:

$$\int_{\Gamma_{2e}} cc_g \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = i(cc_g)_e \left[ k_e \{(\mathbf{e}_{in} \cdot \mathbf{n})_e - 1\} \int_{y_i}^{y_j} \psi \phi_{in} dy + k_e \int_{y_i}^{y_j} \psi \phi dy - \frac{1}{2k_e} \int_{y_i}^{y_j} \frac{d\psi}{dy} \frac{d\phi}{dy} dy + \frac{1}{2k_e} \int_{y_i}^{y_j} \frac{d\psi}{dy} \frac{d\phi_{in}}{dy} dy \right] \quad (7-124)$$

Introduciendo en (7-124) los valores interpolados de  $\psi$ ,  $\phi$ ,  $\frac{d\psi}{dy}$ ,  $\frac{d\phi}{dy}$  y definiendo el vector de valores nodales conocidos  $\boldsymbol{\phi}_{in}$ , la ecuación nos queda:

$$\int_{\Gamma_{2e}} cc_g \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = i(cc_g)_e \left[ k_e \{(\mathbf{e}_{in} \cdot \mathbf{n})_e - 1\} \int_{y_i}^{y_j} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e dy + \frac{1}{2k_e} \int_{y_i}^{y_j} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e dy \right] \boldsymbol{\phi}_{in} + i(cc_g)_e \left[ k_e \int_{y_i}^{y_j} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e dy - \frac{1}{2k_e} \int_{y_i}^{y_j} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e dy \right] \boldsymbol{\phi}^e \quad (7-125)$$

Empleando los resultados (7-109) y (7-112), para el elemento lineal de dos nodos, se obtiene:

$$\mathbf{K}_\Gamma^e = (cc_g)_e \int_{y_i}^{y_j} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e dy = (cc_g)_e \frac{1}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7-126)$$

$$\mathbf{M}_\Gamma^e = (cc_g)_e \int_{y_i}^{y_j} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e dy = (cc_g)_e \frac{L_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (7-127)$$

En las que se ha empleado el subíndice  $\Gamma$  para diferenciarlas de las integrales de dominio  $\mathbf{K}^e$  y  $\mathbf{M}^e$ . Finalmente se obtiene:

$$\int_{\Gamma_{ze}} cc_g \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = i \left[ k_e \{(\mathbf{e}_{in} \cdot \mathbf{n})_e - 1\} \mathbf{M}_\Gamma^e + \frac{1}{2k_e} \mathbf{K}_\Gamma^e \right] \boldsymbol{\phi}_{in} + i \left[ k_e \mathbf{M}_\Gamma^e - \frac{1}{2k_e} \mathbf{K}_\Gamma^e \right] \boldsymbol{\phi}^e \quad (7-128)$$

Obsérvese que el primer sumando de la derecha de (7-125) es un vector columna 2x1 de términos constantes, pues  $\boldsymbol{\phi}_{in}$  es un vector conocido. Sin embargo, el segundo sumando de la derecha de (7-125) es un vector 2x1 que contiene los valores nodales incógnita del potencial en el elemento  $e$ , limitado por los nodos  $i$ - $j$ .

- **Borde con potencial prescrito (C.C. Esencial o Dirichlet)  $\Gamma_3$ :**

En este caso es conocido el valor del potencial  $\phi_i = \bar{\phi}_i$  en parte del contorno del dominio  $\Gamma_3$  donde se impone la condición esencial o Dirichlet. Por ello, la incógnita en dicho contorno pasa a ser el valor del flujo  $\frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{n}}$ .

Veamos como esta condición de contorno afecta al sistema de ecuaciones del sistema, que inicialmente tiene la forma:

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{f} \quad (7-129)$$

Puesto que la condición de potencial prescrito está en  $\Gamma_3$ :

$$\mathbf{f} = \int_{\Gamma_3} cc_g \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = \sum_e \int_{\Gamma_{3e}} cc_g \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \quad (7-130)$$

Por tanto, el vector de "fuerzas"  $\mathbf{f}$  se monta mediante un sistema de ensamblaje similar al empleado para la matriz de rigidez, pero particularizado a los elementos que forman el contorno  $\Gamma_3$ . Nos centramos en un elemento general  $e \in \Gamma_3$  cuyos nodos extremos son  $i - j$ :

$$\mathbf{f}_e = \int_{\Gamma_{3e}} cc_g \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = \int_{y_i}^{y_j} cc_g \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} dy \quad (7-131)$$

Suponemos también en este caso que los valores de  $c$  y  $c_g$  son constantes a nivel de elemento por lo que salen como constantes de la integral.

$$\mathbf{f}_e = \int_{y_i}^{y_j} cc_g \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} dy = (cc_g)_e \int_{y_i}^{y_j} \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} dy \quad (7-132)$$

Ahora tenemos que incluir la interpolación de las funciones  $\psi$  y  $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}$ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{N}^e \boldsymbol{\phi}_n^e \quad (7-133)$$

$$\mathbf{f}_e = (cc_g)_e \left[ \int_{y_i}^{y_j} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e dy \right] \boldsymbol{\phi}_n^e = \mathbf{M}_\Gamma^e \boldsymbol{\phi}_n^e \quad (7-134)$$

Siendo  $\boldsymbol{\phi}_n^e$  el vector de incógnitas (flujos) del elemento  $e$ :

$$\phi_n^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{n}} \\ \frac{\partial \phi_j}{\partial \mathbf{n}} \end{bmatrix} \tag{7-135}$$

Expresado en forma matricial global para insertar la condición de contorno de potencial prescrito, mediante un proceso de ensamblaje similar al ya visto para el montaje de la matriz de rigidez, podemos escribir la ecuación (7-134) de la siguiente forma genérica:

$$\mathbf{f} = \int_{\Gamma_3} cc_g \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = \mathbf{M}_\Gamma \phi_n \tag{7-136}$$

Siendo:

- $\mathbf{M}_\Gamma$  la matriz de masa global en el contorno de dimensiones  $N \times N$ ; siendo  $N$  en número total de nodos de la malla (en próximos apartados se explicará cómo se realiza el proceso de ensamblaje de esta matriz).
- $\phi_n$  el vector global de flujos incógnitas.

$$\phi_n = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \mathbf{n}} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial \mathbf{n}} \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi_{N-1}}{\partial \mathbf{n}} \\ \frac{\partial \phi_N}{\partial \mathbf{n}} \end{bmatrix} \tag{7-137}$$

En el caso 2-D, veremos que el proceso de implementación de la condición de contorno de potencial prescrito no es tan sencillo y directo como en el caso 1-D, aunque es completamente homólogo, tratado desde una perspectiva matricial. Expresemos el sistema de ecuaciones (7-129) de esta otra forma matricial:

$$\mathbf{K} \phi = \mathbf{f} = \mathbf{M}_\Gamma \phi_n \tag{7-138}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{cc} & \mathbf{K}_{cd} \\ \mathbf{K}_{dc} & \mathbf{K}_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_c \\ \phi_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\Gamma dd} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{n,d} \\ \bar{\phi}_{n,c} \end{bmatrix} \tag{7-139}$$

Hemos expresado el sistema de ecuaciones de una forma matricial “reordenada” que nos permita visualizar las diferentes posiciones de los **términos conocidos** (subíndice  $c$ ) y los **términos desconocidos o incógnitas** (subíndice  $d$ ). Si en un contorno son conocidos los valores del potencial  $\phi_i = \bar{\phi}_i$ , entonces los flujos  $\frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{n}}$  son incógnita, y viceversa. No debe olvidarse que los términos dentro de las matrices de (7-139) son, a su vez, cajas que contienen vectores y/o matrices; esta forma de operar nos permitirá visualizar como se introduce la

condición de contorno de forma sencilla.

Si en el sistema (7-139) reordenamos los términos, de forma que todas las incógnitas pasen a la izquierda y los valores conocidos a la derecha, nos queda:

$$\begin{bmatrix} -M_{\Gamma dd} & K_{cd} \\ \underline{\mathbf{0}} & K_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{n,d} \\ \phi_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_{cc} & \underline{\mathbf{0}} \\ -K_{dc} & \underline{\mathbf{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_c \\ \bar{\phi}_{n,c} \end{bmatrix} \quad (7-140)$$

Puesto que no estamos interesados en obtener el valor de  $\phi_{n,d}$ , procedemos de la siguiente manera: eliminamos la primera fila de las matriz (7-140) y la sustituimos por otra ecuación en la que sólo aparezcan los valores del potencial. Esta nueva ecuación es la propia condición de contorno:

$$K_{cc} \phi_c = K_{cc} \bar{\phi}_c \quad (7-141)$$

Introduciendo la ecuación (7-141) en (7-140) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} K_{cc} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & K_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_c \\ \phi_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{cc} & \underline{\mathbf{0}} \\ -K_{dc} & \underline{\mathbf{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_c \\ \bar{\phi}_{n,c} \end{bmatrix} \quad (7-142)$$

$$K_{mod} \phi = f_{mod} \quad (7-143)$$

Mantener el valor  $K_{cc}$  en la diagonal de (7-142) en lugar de la matriz inidad  $I$ , tiene su importancia, pues nos da lugar a una matriz  $K_{mod}$  bien condicionada para ser invertida numéricamente; todos los términos de  $K_{mod}$  son del mismo orden de magnitud, evitando problemas de convergencia numérica en la resolución del sistema de ecuaciones:  $K_{mod} \phi = f_{mod}$ .

Como aclaración final, es evidente que (7-142) es una expresión matricial compacta y muy visual del sistema de ecuaciones en la que las incógnitas están separadas entre conocidas y desconocidas. En realidad los términos conocidos y desconocidos se encuentran entremezclados; la numeración real de los nodos y la topología de la malla de elementos finitos obtenidos del mallador de triángulos (DistMesh) será el que determine la posición exacta de cada término de las matrices en su posición definitiva (el proceso de ensamblaje de las matrices será descrito en próximos apartados).

- **Borde con flujo de potencial prescrito (C.C. Natural o Neumann)  $\Gamma_4$ :**

La condición de contorno en este caso prescribe el valor del flujo de potencial  $\phi_{i,n} = \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial \mathbf{n}} = \bar{\phi}_{i,n}$  en la parte del contorno del dominio  $\Gamma_4$  donde se impone la condición natural o de Neumann.

$$f = \int_{\Gamma_4} cc_g \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = \sum_e \int_{\Gamma_{4e}} cc_g \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \quad (7-144)$$

Por tanto, el vector de “fuerzas”  $f$  se monta mediante un sistema de ensamblaje similar al empleado para la matriz de rigidez, pero particularizado a los elementos que forman el contorno  $\Gamma_4$ . Nos centramos en un elemento general  $e \in \Gamma_4$  cuyos nodos extremos son  $i - j$ :

$$f_e = \int_{\Gamma_{4e}} cc_g \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = \int_{y_i}^{y_j} cc_g \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} dy \quad (7-145)$$

Suponemos también en este caso que los valores de  $c$  y  $c_g$  son constantes a nivel de elemento por lo que salen como constantes de la integral.

$$f_e = \int_{y_i}^{y_j} c c_g \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dy = (c c_g)_e \int_{y_i}^{y_j} \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dy \tag{7-146}$$

Ahora tenemos que incluir la interpolación de las funciones  $\psi$  y  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = N^e \bar{\phi}_n^e \tag{7-147}$$

$$f_e = (c c_g)_e \left[ \int_{y_i}^{y_j} N^{eT} N^e dy \right] \bar{\phi}_n^e = M_\Gamma^e \bar{\phi}_n^e \tag{7-148}$$

Siendo  $\bar{\phi}_n^e$  el vector de flujo conocido del elemento  $e$ :

$$\bar{\phi}_n^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial n} \\ \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial n} \end{bmatrix} \tag{7-149}$$

Expresado en forma matricial global para insertar la condición de contorno de potencial prescrito, mediante un proceso de ensamblaje similar al ya visto para el montaje de la matriz de rigidez, podemos escribir la ecuación (7-134) de la siguiente forma genérica:

$$f = \int_{\Gamma_3} c c_g \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma = M_\Gamma \bar{\phi}_n \tag{7-150}$$

Siendo:

- $M_\Gamma$  la matriz de masa global en el contorno de dimensiones  $N \times N$ ; siendo  $N$  en número total de nodos de la malla (en próximos apartados se explicará cómo se realiza el proceso de ensamblaje de esta matriz).
- $\bar{\phi}_n$  el vector global de flujos de potencial.

$$\bar{\phi}_n = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi_{N-1}}{\partial n} \\ \frac{\partial \phi_N}{\partial n} \end{bmatrix} \tag{7-151}$$

## 7.9. Procedimiento de ensamblaje del sistema de ecuaciones.

### 7.9.1. Ensamblaje de la matriz de rigidez global.

Al igual que ocurre en el MEF aplicado a los problemas de elasticidad, aquí estamos buscando un sistema lineal de ecuaciones algebraicas del tipo:

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{f} \quad (7-152)$$

Por la evidente analogía con el problema mecánico, llamaremos a  $\mathbf{K}$  matriz de rigidez global, a  $\boldsymbol{\phi}$  vector de incógnitas y a  $\mathbf{f}$  vector de fuerzas, aun a sabiendas que  $\mathbf{K}$  no es realmente una matriz de rigidez ni  $\mathbf{f}$  representa ninguna fuerza.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix} \quad (7-153)$$

Es fácil deducir que la matriz  $\mathbf{K}$  global tiene dimensiones  $N \times N$ , siendo  $N$  el número de nodos de la discretización. A su vez,  $\boldsymbol{\phi}$  y  $\mathbf{f}$  son vectores columna de dimensiones  $N \times 1$ .

Una vez discretizado el dominio  $\Omega$  en nodos y elementos, las integrales de dominio pueden calcularse como una suma de integrales en cada elemento  $\Omega_e$ . Este sumatorio se realiza de forma matricial como ya apuntábamos en el epígrafe 7.8, por lo que se trata de un proceso mecánico de "ensamblaje" de cada una de la matrices elementales colocadas en su posición correcta para conformar la **matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  global** del sistema.

El proceso de montaje de la matriz de rigidez es un proceso automático y muy simple que se presta a su implementación sencilla mediante un lenguaje de programación tipo Matlab®. En su momento vimos que primero obteníamos las integrales de dominio  $\mathbf{K}^e$  y  $\mathbf{M}^e$  elemento a elemento y luego realizábamos el sumatorio para todo el dominio.

Partimos de las dos matrices elementales (7-74) y (7-75) obtenidas para el elemento triangular lineal de tres nodos genérico ( $e$ ):

$$\mathbf{K}^e = (cc_g)_e \left[ \int_{x_i}^{x_j} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e dx \right] \quad (7-154)$$

$$\mathbf{M}^e = \left( \frac{cg}{c} \right)_e \left[ \int_{x_i}^{x_j} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e dx \right] \quad (7-155)$$

Con estas dos matrices montamos la matriz  $\mathbf{K}^{ee}$  en cada elemento:

$$\mathbf{K}^{ee} = \mathbf{K}^e - \omega^2 \mathbf{M}^e \quad (7-156)$$

¿Cómo se ensambla la matriz elemental  $\mathbf{K}^{ee}$  dentro de la matriz de rigidez global  $\mathbf{K}$ ? La respuesta es fácil: justo en las posiciones de filas y columnas marcadas por los índices  $i - j - k$ , correspondientes a la numeración de los nodos del elemento( $e$ ) de la discretización. Como aclaración obsérvese la siguiente figura explicativa:

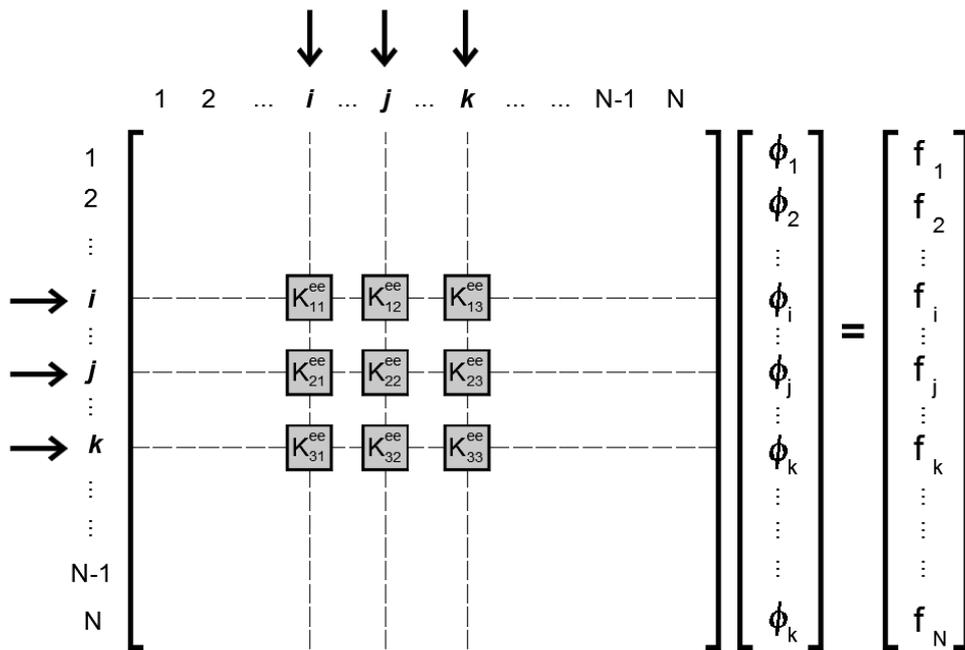


Figura 7-14. Proceso de ensamblaje de la matriz de rigidez  $K$  (elemento  $e$ , nodos  $i$ - $j$ - $k$ ).

En el caso de la MSE 2-D este proceso de ensamblaje es también muy sencillo de implementar, pues el mallador de triángulos empleado (DistMesh) genera automáticamente **la matriz de topología de la malla**. Si se hubiesen empleado funciones internas de Matlab® generadoras de mallas de triángulos no estructuradas basadas en el algoritmo de **triangulación de Delaunay**, éstas también generan automáticamente la topología de la malla.

Vamos a explicar con un sencillo ejemplo gráfico **qué es la matriz de topología de la malla de elementos finitos** y su importancia en el implementación numérica del MEF.

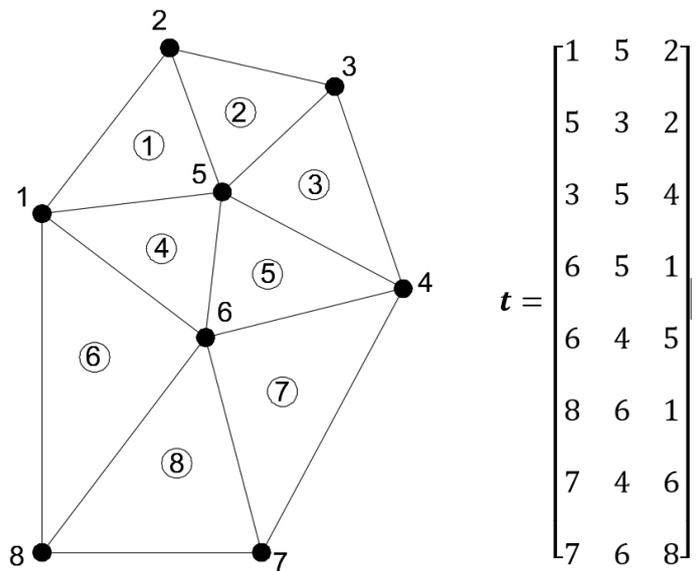


Figura 7-15. Ejemplo de matriz de topología de malla de elementos finitos.

En la figura anterior tenemos una malla de  $N_e = 8$  elementos finitos triangulares de tres nodos. La malla tiene además  $N = 8$  nodos. La **matriz topológica** en este caso es una matriz que tiene tantas filas como elementos tiene la malla, y tantas columnas como nodos tenga el elemento finito seleccionado; en nuestro caso  $t$  es una

matriz ( $8 \times 3$ ). La fila  $i$  de la matriz representa al elemento  $i$  y cada columna tiene la numeración de los nodos que forman el elemento cuando éste se recorre en sentido antihorario.

Ya se habrá percatado el lector de la importancia de esta matriz en el **proceso de ensamblaje** de matrices que hemos comentado en anteriores apartados. Conocida la matriz  $\mathbf{t}$ , el proceso de montaje de la matriz es trivial, pues en cada fila nos está indicando las posiciones o “índices” que un determinado elemento de la malla debe ocupar dentro de la matriz de rigidez global del sistema.

En el caso 1-D también empleábamos una matriz de topología, pero es en este caso no lo hacíamos de forma explícita, porque la numeración de los nodos era correlativa, dadas las ventajas computacionales que esto tenía a la hora de invertir la matriz de rigidez del sistema.

### 7.9.2. Ensamblaje de las condiciones de contorno.

Por último, nos queda introducir las condiciones de contorno del problema en el sistema lineal de ecuaciones. En el apartado 7.8.2 vimos que las condiciones de contorno del problema, según el tipo de condición impuesta en contorno del dominio, al ser introducidas en el sistema de ecuaciones alteraban la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ , dando lugar a una matriz de rigidez modificada  $\mathbf{K}_{mod}$  no singular. A su vez, se obtenía el vector de fuerzas modificado  $\mathbf{f}_{mod}$ , de forma que el sistema de ecuaciones algebraicas final a resolver sería de la forma:

$$\mathbf{K}_{mod} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{f}_{mod} \quad (7-157)$$

$$\boldsymbol{\phi} = (\mathbf{K}_{mod})^{-1} \mathbf{f}_{mod} \quad (7-158)$$

A continuación analizaremos cómo se “montan” las matrices  $\mathbf{K}_{mod}$  y  $\mathbf{f}_{mod}$  para cada una de las condiciones de contorno utilizadas.

- **Borde Cerrado**  $\Gamma_1$ :

Recordando la ecuación (7-115) de la condición de contorno en borde cerrado:

$$\int_{\Gamma_{1e}} c c_g \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = i (f_R)_e \left[ k_e \mathbf{M}_\Gamma^e - \frac{1}{2k_e} \mathbf{K}_\Gamma^e \right] \boldsymbol{\phi}^e = \begin{bmatrix} R_{ii} & R_{ij} \\ R_{ji} & R_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{bmatrix} \quad (7-159)$$

Se observa que todo el término entre corchetes de la derecha de (7-159) es una matriz ( $2 \times 2$ ), mientras que  $\boldsymbol{\phi}^e$  es el vector de incógnitas nodales del elemento  $e$  de dimensiones ( $2 \times 1$ ). Por tanto, contiene valores de las incógnitas que pasan cambiados de signo al primer término de la ecuación  $\mathbf{K} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{f}$ , modificando la matriz  $\mathbf{K} \Rightarrow \mathbf{K}_{mod}$ .

Esta modificación puede visualizarse fácilmente en el siguiente esquema:

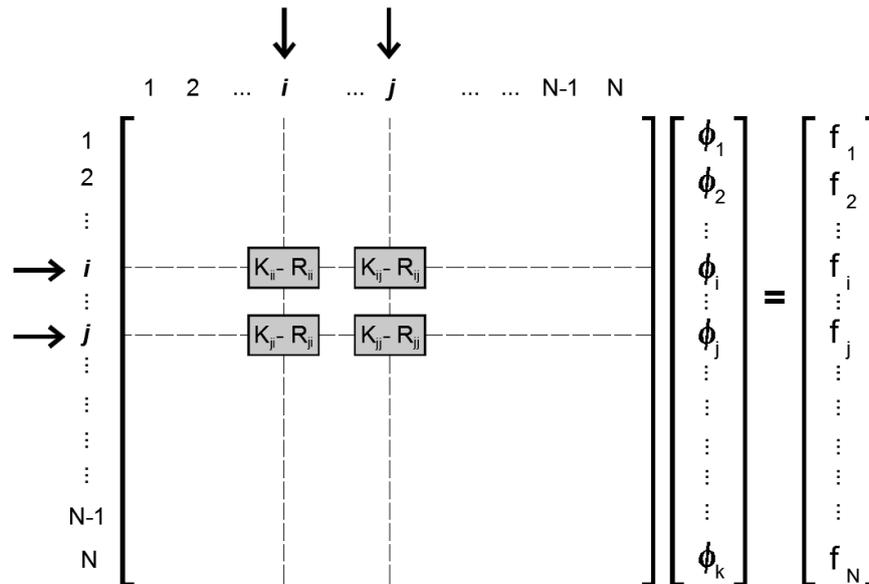


Figura 7-16. Montaje de la condición de contorno cerrado.

Por otro lado, La condición de borde cerrado no contribuye al vector de fuerzas modificado  $f_{mod}$ .

- **Borde Abierto**

Recordando la ecuación (7-128), de la condición de contorno de borde abierto:

$$\int_{\Gamma_{2e}} cc_g \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = i \left[ k_e \{(\mathbf{e}_{in} \cdot \mathbf{n})_e - 1\} \mathbf{M}_r^e + \frac{1}{2k_e} \mathbf{K}_r^e \right] \phi_{in} + i \left[ k_e \mathbf{M}_r^e - \frac{1}{2k_e} \mathbf{K}_r^e \right] \phi^e \tag{7-160}$$

$$= \begin{bmatrix} S_i \\ S_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{ii} & R_{ij} \\ R_{ji} & R_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{bmatrix}$$

Se observa que el término entre corchetes del segundo sumando de la derecha de (7-160) es una matriz (2 × 2), mientras que  $\phi^e$  es el vector de incógnitas nodales del elemento  $e$  de dimensiones (2 × 1). Por tanto, contiene valores de las incógnitas que pasan cambiados de signo al primer término de la ecuación  $\mathbf{K} \phi = \mathbf{f}$ , modificando la matriz  $\mathbf{K} \Rightarrow \mathbf{K}_{mod}$ . El porceso de montaje en la matriz de rigidez es idéntico al visto para la condición de contorno de borde cerrado.

Sin embargo, el primer sumando de la derecha de (7-160) es un vector (2 × 1) de términos contantes, por lo que se queda a la derecha del sistema  $\mathbf{K} \phi = \mathbf{f}$ , contribuyendo al vector  $\mathbf{f}$ . La posición en el vector vendrá dada por los índices de los nodos del elemento i-j.

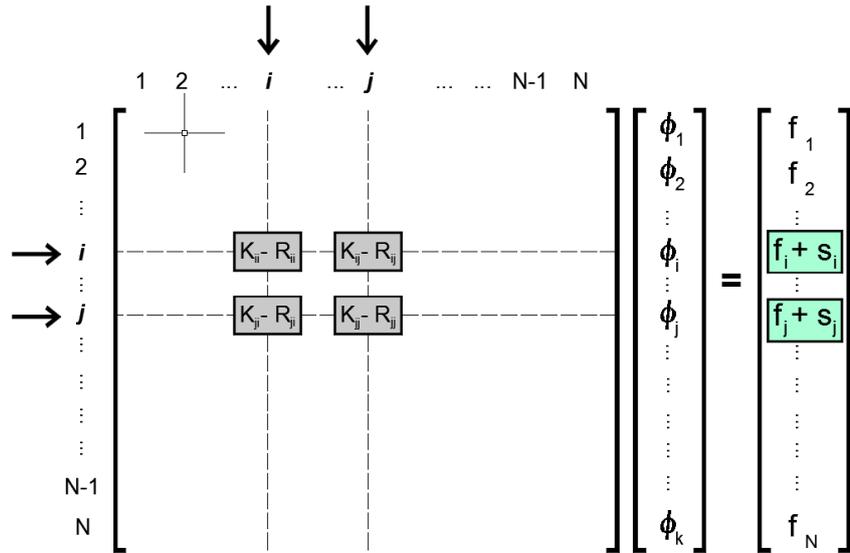


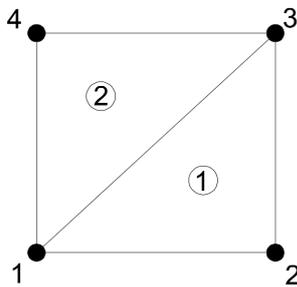
Figura 7-17. Montaje de la condición de contorno abierto.

• **Borde con potencial prescrito (C.C. Esencial o Dirichlet)  $\Gamma_2$ :**

En (7-142) obtuvimos la expresión matricial del montaje de la condición de contorno tipo Dirichlet.

$$\begin{bmatrix} K_{cc} & \underline{0} \\ \underline{0} & K_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_c \\ \phi_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{cc} & \underline{0} \\ -K_{dc} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_c \\ \bar{\phi}_{n,c} \end{bmatrix} \tag{7-161}$$

Para evitar posibles confusiones y clarificar la anterior notación matricial, vamos a realizar la implementación de la condición de contorno tipo Dirichlet a un modelo muy simple de malla de 2 elementos y cuatro nodos; supongamos que es conocido el potencial en los nodos 1 y 4, es decir, es conocido el potencial en el contorno definido por los nodos 1 y 4:  $\bar{\phi}_1$  y  $\bar{\phi}_4$



Veamos el sistema de ecuaciones  $(K - \omega^2 M) \phi = f$  que desarrollado tiene la siguiente forma (se indican con gorro  $\bar{\phi}$  los valores conocidos):

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \bar{\phi}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{\Gamma_{11}} & 0 & 0 & M_{\Gamma_{14}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{\Gamma_{41}} & 0 & 0 & M_{\Gamma_{44}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{n,1} \\ \bar{\phi}_{n,2} \\ \bar{\phi}_{n,3} \\ \phi_{n,4} \end{bmatrix} \tag{7-162}$$

Agrupemos todas las incógnitas en el término de la izquierda y todos los valores conocidos a la derecha:

$$\begin{bmatrix} -M_{\Gamma_{11}} & K_{12} & K_{13} & -M_{\Gamma_{14}} \\ 0 & K_{22} & K_{23} & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & 0 \\ -M_{\Gamma_{41}} & K_{42} & K_{43} & -M_{\Gamma_{44}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{n,1} \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_{n,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_{11} & 0 & 0 & -K_{14} \\ -K_{21} & 0 & 0 & -K_{24} \\ -K_{32} & 0 & 0 & -K_{34} \\ -K_{41} & 0 & 0 & -K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_{n,2} \\ \bar{\phi}_{n,3} \\ \bar{\phi}_4 \end{bmatrix} \quad (7-163)$$

Puesto que no estamos interesados en obtener los valores de flujo  $\phi_{n,i}$  desconocidos, procedemos de la siguiente manera: eliminamos las filas de la 1 y 4 de (7-163) y las sustituimos por otra ecuación en la que sólo aparezcan los valores del potencial  $\phi_i$ . Estas nuevas ecuaciones son las propias condiciones de contorno:

$$K_{11} \phi_1 + K_{14} \phi_4 = K_{11} \bar{\phi}_1 + K_{14} \bar{\phi}_4 \quad (7-164)$$

$$K_{41} \phi_1 + K_{44} \phi_4 = K_{41} \bar{\phi}_1 + K_{44} \bar{\phi}_4$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 & K_{14} \\ 0 & K_{22} & K_{23} & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & 0 \\ K_{41} & 0 & 0 & K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 & K_{14} \\ -K_{21} & 0 & 0 & -K_{24} \\ -K_{32} & 0 & 0 & -K_{34} \\ K_{41} & 0 & 0 & K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_{n,2} \\ \bar{\phi}_{n,3} \\ \bar{\phi}_4 \end{bmatrix} \quad (7-165)$$

Si observamos atentamente (7-165), se aprecia la similitud con el caso 1D. En este caso, la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  se modifica dejando a ceros todos los términos de las filas y las columnas correspondientes al número de nodo donde el potencial es conocido, excepto los términos del propio nodo. En cuanto a la matriz a la derecha de (7-165), ésta se monta con las columnas de  $\mathbf{K}$  correspondientes al nodo cambiadas de signo, excepto los términos del nodo que permanecen intactos.

- **Borde con flujo de potencial prescrito (C.C. Natural o Neumann)  $\Gamma_4$ :**

Recordando la ecuación (7-150), de condición de flujo de potencial prescrito en una parte  $\Gamma_4$  del contorno:

$$\mathbf{f} = \int_{\Gamma_3} c c_g \psi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = \mathbf{M}_{\Gamma} \bar{\boldsymbol{\phi}}' \quad (7-166)$$

Obsérvese que en este caso que el término de la derecha de las ecuaciones (7-166) es un vector columna de términos constantes conocidos, por lo que no afectan a la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ . La contribución será aplicada directamente al vector  $\mathbf{f}_{mod}$ .

## 7.10. Implementación en Matlab®

Todo el desarrollo teórico matemático anterior nos ha permitido visualizar que se esconde tras el MEF aplicado a la MSE 2-D. Disponemos ya, por tanto, de una base sólida que nos permita programar un algoritmo numérico de elementos finitos en lenguaje Matlab®.

Con este algoritmo vamos a simular varios problemas clásicos de los que disponemos de solución analítica:

- **Simulación MSE2D-00:** propagación de onda sobre fondo de profundidad constante.
- **Simulación MSE2D-01:** shoaling y refracción en propagación sobre fondo plano de batimetría recta y paralela.
- **Simulación MSE2D-02:** difracción por un dique de abrigo con dársena de fondo constante.

## 7.11. SIMULACIÓN MSE2D\_00. Propagación en fondo de profundidad constante

### 7.11.1. Descripción física del problema.

Este es un problema trivial resuelto por la teoría lineal de ondas de Airy. No obstante, es un punto de partida pedagógicamente importante para el inicio a los test eficiencia, estabilidad y precisión de nuestro modelo numérico de elementos finitos. Con este sencillo ejercicio vamos a visualizar de una forma muy clara el problema del ángulo de aproximación del potencial reflejado al contorno. Para ello vamos a definir un dominio de integración como el que aparece en la siguiente figura:

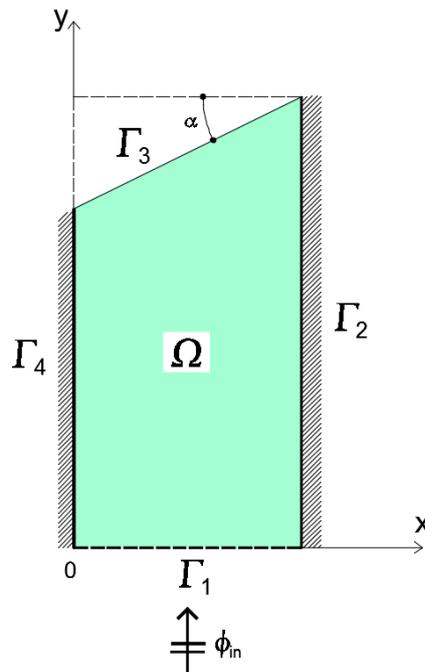


Figura 7-18. Esquema del dominio de integración en función del ángulo  $\alpha$ .

El dominio está limitado por 4 contornos:

- **Contorno  $\Gamma_1$ :** borde abierto con entrada de potencial unidad en dirección perpendicular al contorno.
- **Contorno  $\Gamma_2$ :** borde cerrado  $R=1$
- **Contorno  $\Gamma_3$ :** borde cerrado  $R=0$
- **Contorno  $\Gamma_4$ :** borde cerrado  $R=1$

Por el contorno  $\Gamma_1$  entra el potencial unidad en dirección del eje  $+Y$ . Los contornos  $\Gamma_2$  y  $\Gamma_4$  se modelizan como totalmente reflejantes, pues suponemos que al ser el fondo plano e incidir la onda en dirección  $+Y$  no habrá flujo de potencial a través de estos contornos:  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ .

En el contorno  $\Gamma_3$  se pone una condición de absorción total para simular que la onda incidente lo atraviesa sin sentir su presencia. No obstante, se ha dispuesto este borde inclinado un ángulo  $\alpha$ . Hacemos esto para probar si la aproximación de segundo orden para el borde cerrado absorbente es afinada y hasta qué ángulo funciona adecuadamente.

Nótese que en este caso tan sencillo sí es conocido el ángulo de aproximación del potencial con la normal, pues es precisamente el valor del ángulo  $\alpha$  que adoptemos en cada simulación. Esto se debe a que la onda atraviesa el dominio sin deformarse.

### 7.11.2. Solución analítica del problema.

La solución analítica del potencial reducido de velocidad de amplitud  $\tilde{\varphi}$  en cualquier punto  $x$  del dominio viene expresado por la siguiente ecuación:

$$\phi(x) = \tilde{\varphi} e^{ikx} \quad (7-167)$$

Por tratarse de una propagación en fondo de profundidad constante, los valores del número de onda  $k$  y amplitud  $\tilde{\varphi}$  permanecen constantes.

### 7.11.3. Solución numérica del problema.

Se ha realizado una simulación numérica mediante un código de elementos finitos programado en Matlab®. Se han introducido los siguientes datos al modelo:

Tabla 7-1 Datos numéricos del problema de Propagación en Fondo Constante

DATO	VALOR NUMÉRICO
Potencial de entrada en ( $x = 0$ )	$\phi_{in} = 1$
Periodo de la onda	$T = 10''$
Pendiente del fondo	$m = 0.00$
Longitud del dominio	$l = 100 \text{ m}$
Anchura del dominio	$b = 50 \text{ m}$
Calado	$h = 3 \text{ m}$

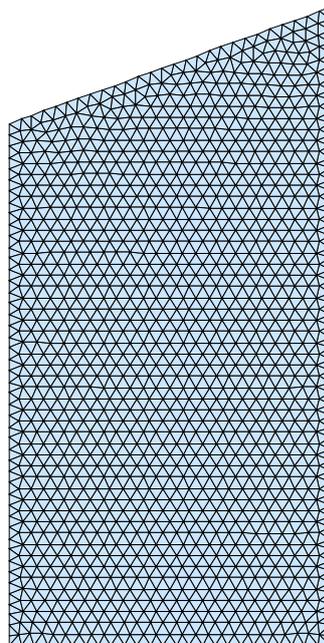
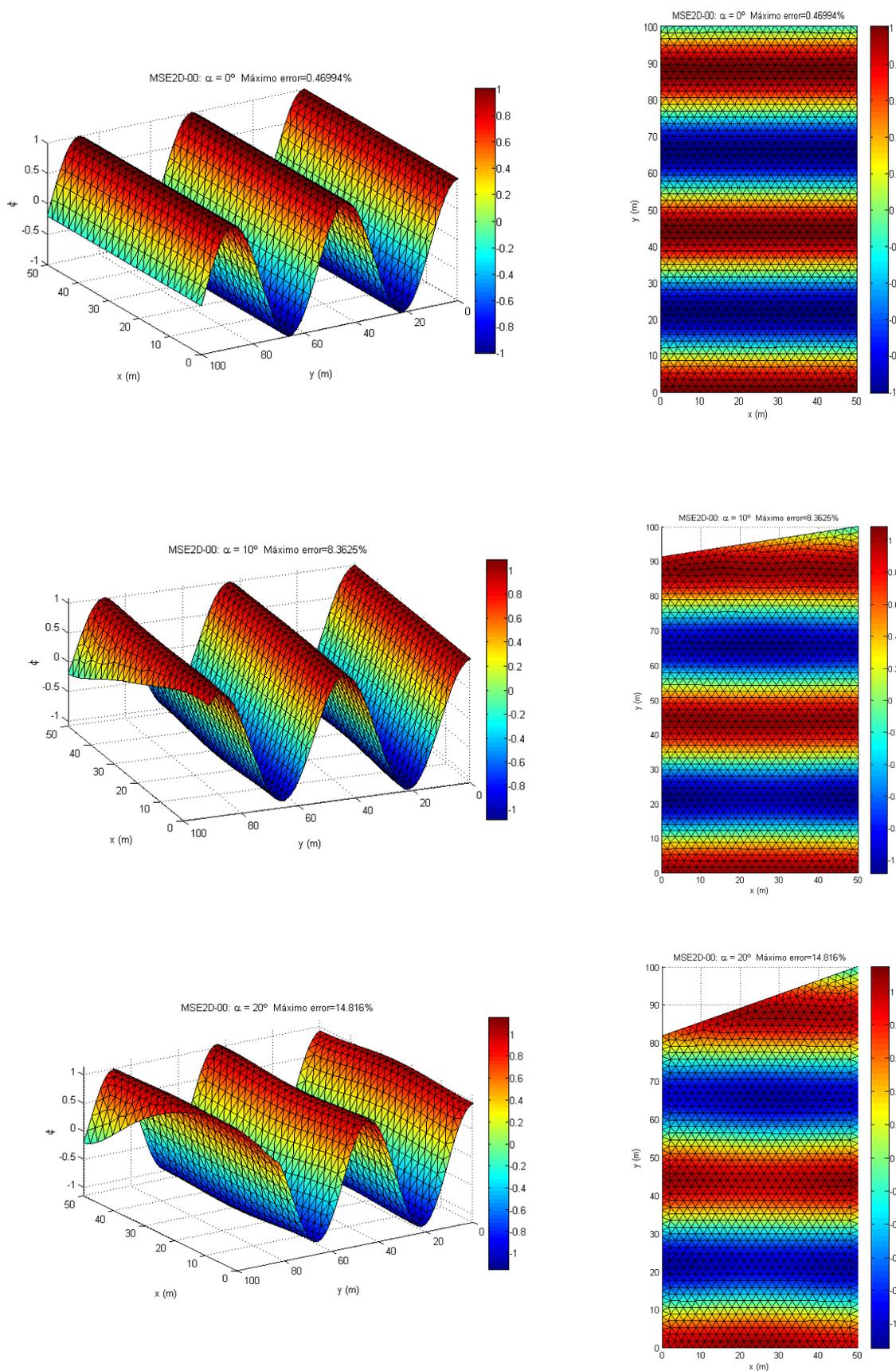
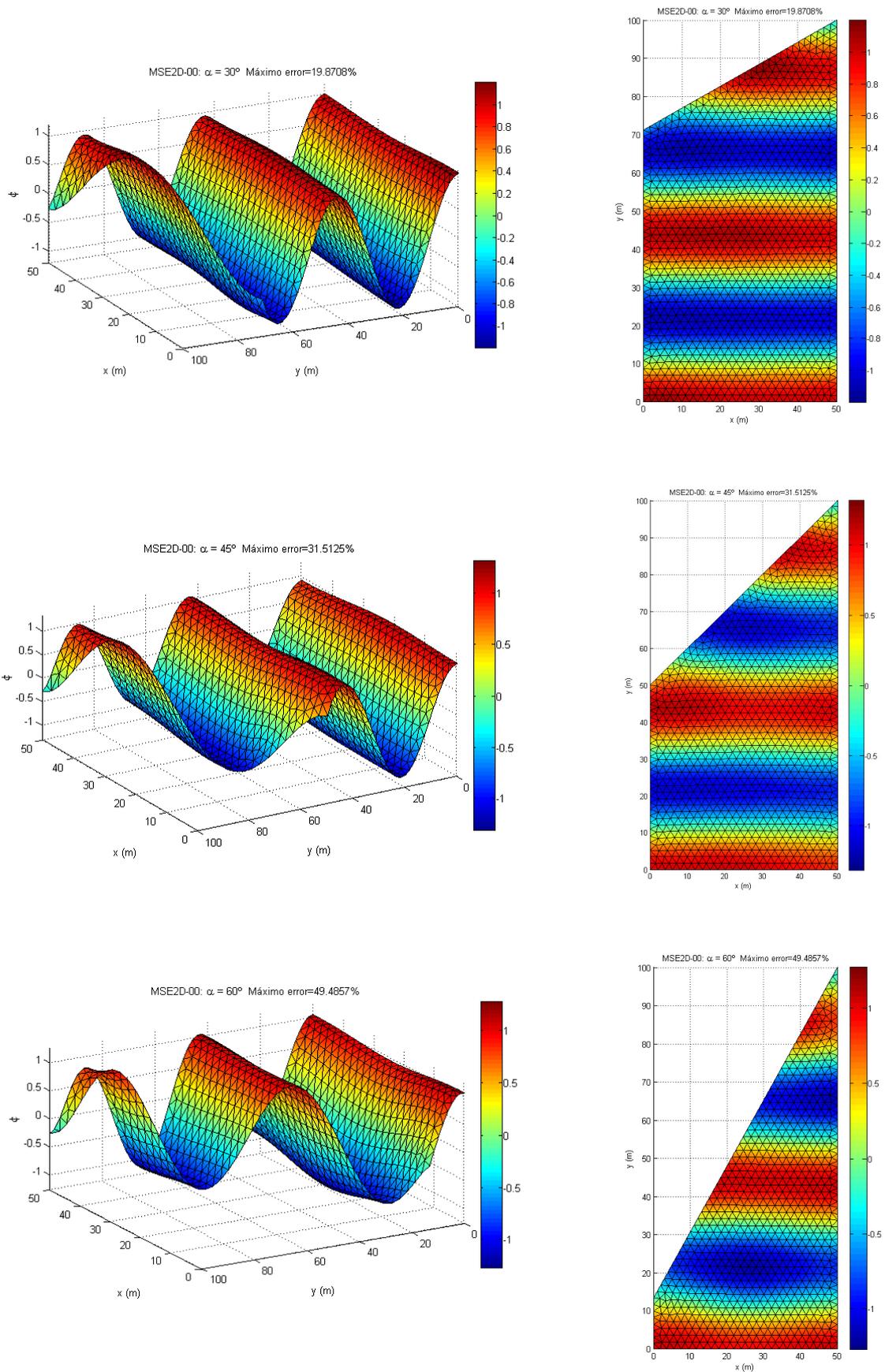


Figura 7-19. Ejemplo de mallado tirangula para  $\alpha = 20^\circ$ . Aristas de triángulos de 2,00 m.

Se ha tomado un tamaño de aristas de los triángulos de 2 m. Se realizarán distintas simulaciones para valores distintos del ángulo  $\alpha$ :  $0^\circ - 10^\circ - 20^\circ - 30^\circ - 45^\circ - 60^\circ$ , de esta forma podemos observar como crece el error cuando aumenta el ángulo y, por tanto, la aproximación de segundo orden se hace cada vez menos precisa.

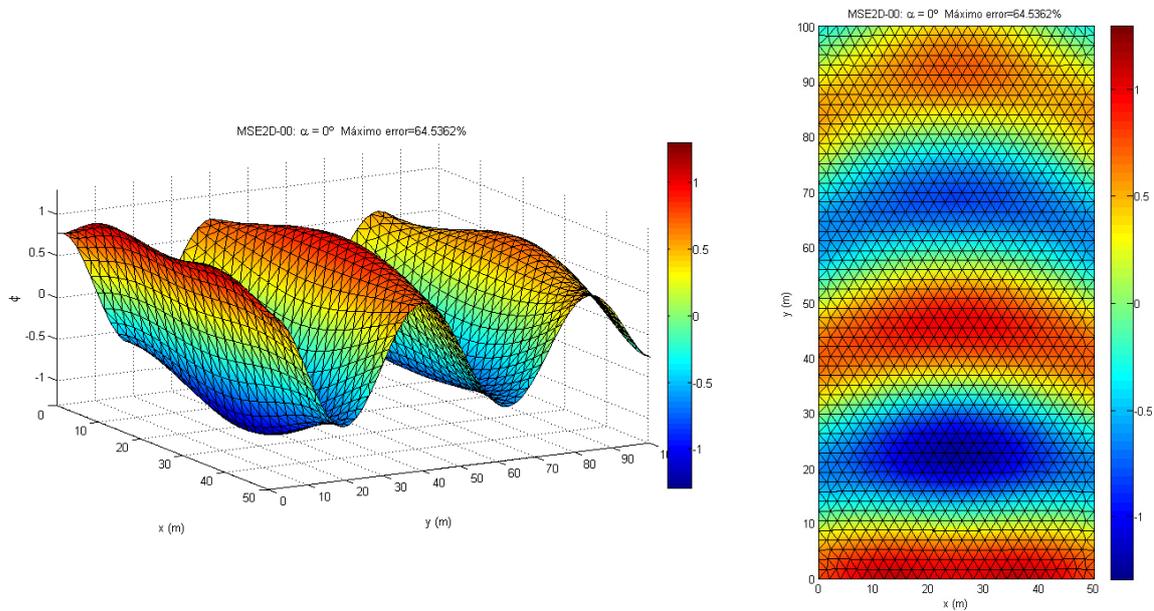




Con este sencillo ejemplo se observa como a medida que crece el valor del ángulo  $\alpha$ , peores son los resultados que da el modelo. Obsérvese como los frentes presentan deformaciones que desvían el resultado del potencial del valor unidad (solución analítica).

Se insiste en que la razón estriba en que nuestro modelo aproxima el ángulo de llegada del potencial al contorno  $\Gamma_3$  con una a aproximación de segundo orden (serie de Taylor centrada en cero) que es aceptable cuando el ángulo de aproximación es menor de  $15^\circ$ .

Veamos otro ejemplo para aclarar más el problema del ángulo; vamos a resolver el problema planteado con un ángulo  $\alpha = 0^\circ$ ; el potencial entra en el dominio perpendicular respecto al eje  $OX$ , pero ahora en los bordes  $\Gamma_2, \Gamma_3$  y  $\Gamma_4$  se impone condición de contorno absorbente. Veamos los resultados:



El efecto del ángulo es ahora aún más evidente, distorsionando completamente la solución numérica respecto a la solución analítica; se observan errores relativos de  $64,54\%$

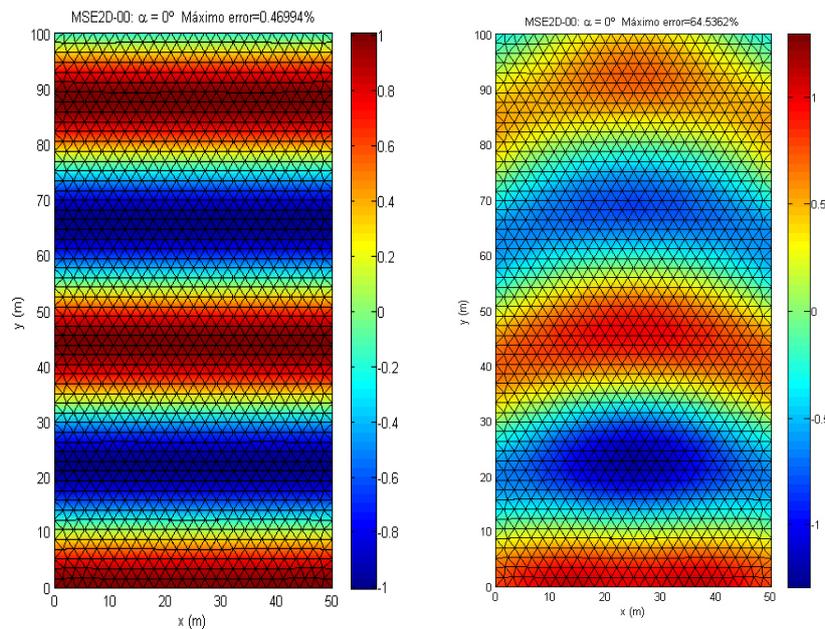


Figura 7-20. Comparación de la solución analítica y numérica

#### **7.11.4. Código de elementos finitos en Matlab®.**

Anexo al presente TFM se incluye un CD-Rom que incluye, entre otros, el listado de código de elementos finitos **MSE2D\_00.m** programado en Matlab® empleado para resolver el problema de propagación sobre fondo plano. Así mismo, se incluyen las funciones auxiliares empleadas por el código principal del programa.

## 7.12. SIMULACIÓN MSE2D\_01. Refracción y shoaling sobre batimetría recta y paralela

### 7.12.1. Descripción física del problema.

En este experimento numérico vamos a simular la propagación de un oleaje cuyos frentes forman un ángulo  $\alpha$  con las líneas batimétricas a cierta profundidad. Suponemos que el fondo es plano con batimetría recta y paralela a la línea de costa.

La línea de costa se simula como un dominio totalmente absorbente (playa). Este es un típico problema de **shoaling y refracción** del oleaje pues no existen obstáculos para el avance de los frentes de olas aparte de la línea costera. Este fenómeno se visualiza muy bien en playas de alineación recta y se manifiesta por una incurvación de los frentes de onda que tratan de ponerse paralelos a la línea de costa, no lográndolo completamente (ver fotografía adjunta).



Figura 7-21. Refracción de oleaje en playa de alineación recta

### 7.12.2. Solución analítica del problema.

En el caso de batimetría recta y paralela podemos obtener una expresión analítica del coeficiente de refracción y shoaling  $K_R \cdot K_S$  del oleaje en su aproximación a la costa. Esta expresión se obtiene de aplicar la **conservación del flujo de energía** en la propagación y de considerar que la energía de la onda sólo se transmite frontalmente.

Si imaginamos un **tubo de energía** limitado por dos rayos de avance del frente de onda y el fondo, la energía no se transmite por las paredes laterales del tubo de energía (ver figura adjunta).

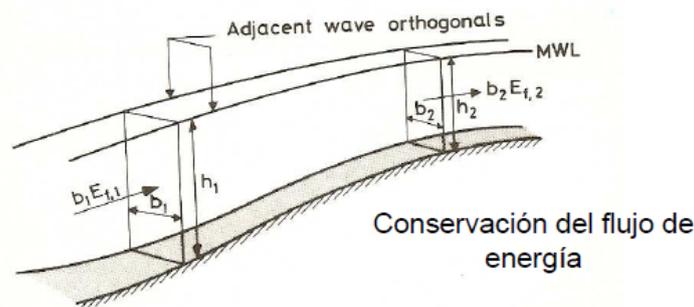


Figura 7-22. Conservación del flujo de energía de la onda. Figura extraída de [9]

En el capítulo 4 dedicado a la onda lineal de Airy dedujimos la ecuación del flujo de energía de la onda (4-80):

$$E_f = E c_g \quad E = \frac{1}{8} \rho g H^2 \quad (7-168)$$

Si consideramos dos secciones 1 y 2 de un mismo tubo de energía y planteamos la **conservación del flujo de energía** entrante y saliente se obtiene:

$$b_2 E_{f,2} = b_1 E_{f,1} + \Delta E_{1-2} \quad (7-169)$$

Siendo  $\Delta E_{1-2}$  las pérdidas de energía por fricción con el fondo. Supongamos despreciables las pérdidas de energía por fricción en el fondo. El mecanismo físico de propagación de ondas es extremadamente eficiente por lo que en primera aproximación podemos despreciar las pérdidas de energía por fricción.

$$b_2 E_{f,2} \approx b_1 E_{f,1} \quad (7-170)$$

En el caso de Refracción y shoaling sobre batimetría irregular la anchura  $b_i$  del tubo de energía no se mantiene constante durante la propagación, por tanto:

$$c_{g,2} b_2 \frac{1}{8} \rho g H_2^2 \approx c_{g,1} b_1 \frac{1}{8} \rho g H_1^2 \quad (7-171)$$

Por tanto, conocida la altura de ola en la sección 1 podremos conocer la altura en otra sección 2:

$$H_2 = \sqrt{\frac{c_{g,1}}{c_{g,2}}} \sqrt{\frac{b_1}{b_2}} H_1 = K_R K_S H_1 \quad (7-172)$$

En el apartado 6.11.2, ecuación (6-155), ya se identificó el primer factor de la derecha de la ecuación (7-172) como el coeficiente de shoaling  $K_S$ . Por tanto el factor restante tiene que ser el coeficiente de refracción  $K_R$ .

Para el caso de batimetría recta y paralela, si imaginamos un rayo de propagación y nos desplazamos una distancia  $x$  a un punto cercano en la dirección de las batimétricas, entonces el rayo que pasa por dicho punto debe ser idéntico al anterior, pues al desplazarnos al nuevo punto se ha mantenido la profundidad constante (ver figura adjunta).

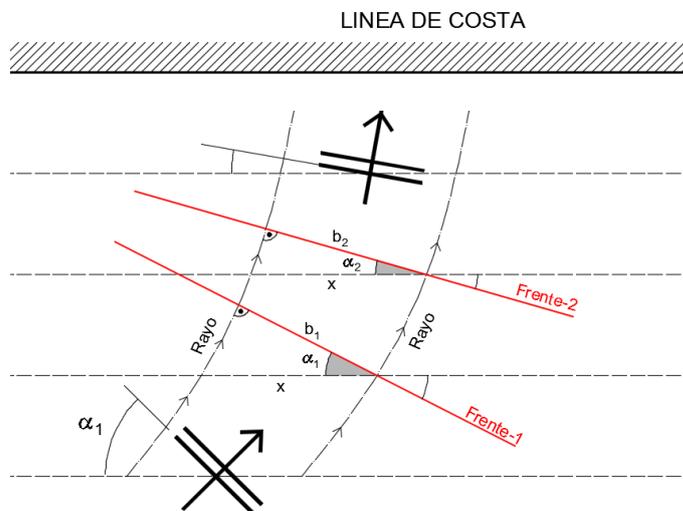


Figura 7-23. Conservación del flujo de energía de la onda. Figura extraída de [9]

De la anterior figura pueden extraerse las siguientes relaciones geométricas:

$$b_1 = x \cos(\alpha_1) \quad b_2 = x \cos(\alpha_2) \tag{7-173}$$

Por tanto,

$$K_R = \sqrt{\frac{b_1}{b_2}} = \sqrt{\frac{\cos(\alpha_1)}{\cos(\alpha_2)}} \tag{7-174}$$

Por analogía con la propagación de la luz, en el fenómeno de propagación de ondas es también de aplicación la **Ley de Snell**, que matemáticamente se expresa como:

$$c_1 \operatorname{sen}(\alpha_2) = c_2 \operatorname{sen}(\alpha_1) \tag{7-175}$$

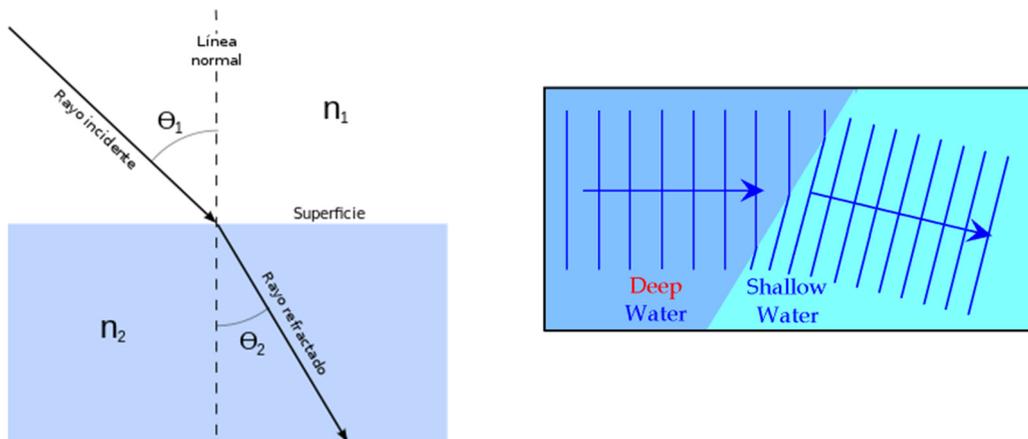


Figura 7-24. Ley de Snell

Conocido el ángulo  $\alpha_1$  de aproximación del oleaje a una profundidad  $h_1$ , aplicando la ecuación (7-175) podemos obtener el ángulo  $\alpha_2$  a la profundidad  $h_2$ .

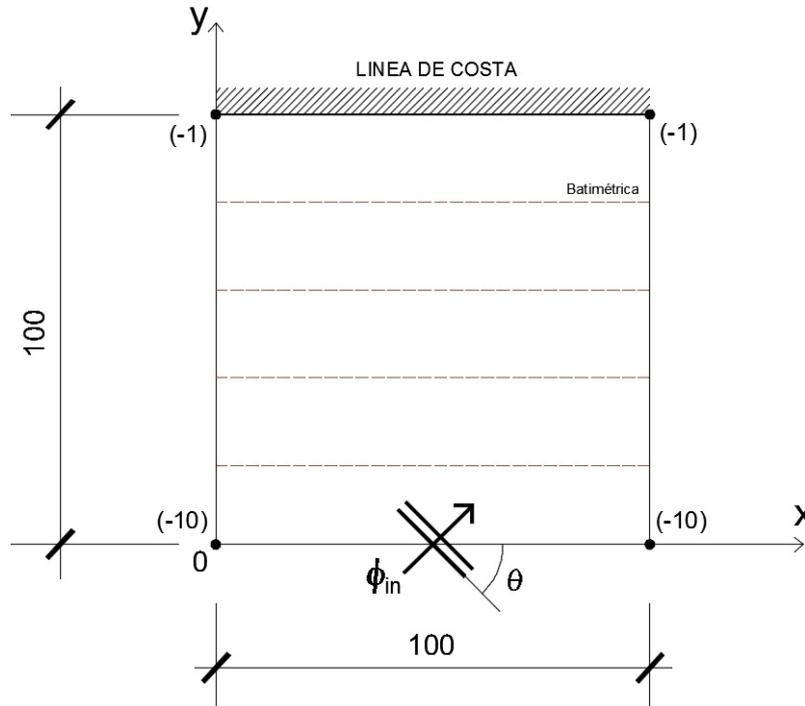
La expresión analítica del potencial  $\phi(x, y)$  de velocidad complejo para una onda incidente de amplitud  $A_1$  propagándose sobre fondo irregular con batimetría recta y paralela se ha obtenido de la bibliografía técnica [11]:

$$\phi(x, y) = A_1 K_R K_S e^{i \int_{x_1}^x k \cos(\alpha) dx + my} \tag{7-176}$$

Siendo  $m = k \operatorname{sen}(\alpha) = cte$ , una consecuencia directa de la Ley de Snell.

A continuación vamos a realizar el cálculo analítico del potencial reducido de velocidad para el caso de un dominio cuadrado 100x100 m con fondo plano de batimetría recta y paralela a la línea de costa. Se adopta un oleaje de periodo  $T = 7''$  cuyos frentes a la profundidad -10 m forman un ángulo de  $\theta = 60^\circ$  con las líneas batimétricas (ver figura adjunta).

Suponemos que la línea de costa es un borde totalmente absorbente, por lo que no refleja ondas. La solución analítica que exponemos aquí será de gran utilidad para la aplicación de condiciones de contorno en bordes abiertos exteriores con potencial entrante conocido. Alejándonos lo suficiente de la zona de interés, podemos suponer la existencia de batimetría recta y paralela. Los resultados que se obtienen de esta forma son bastante buenos, siendo ésta una práctica muy común en modelización de oleaje con modelos elípticos y parabólicos basados en la MSE [11].



En la siguiente figura se representa la solución analítica de la ecuación (7-176) en el dominio definido. Obsérvese como el resultado muestra los efectos de shoaling y refracción del oleaje; se aprecia la incurvación de los frentes de ola por efecto de la refracción, así como la reducción de la longitud de onda a medida que el frente de onda avanza a zonas de menor profundidad. Se presenta también un gráfico con los coeficientes de propagación  $K_R K_S$  en todos los puntos del dominio

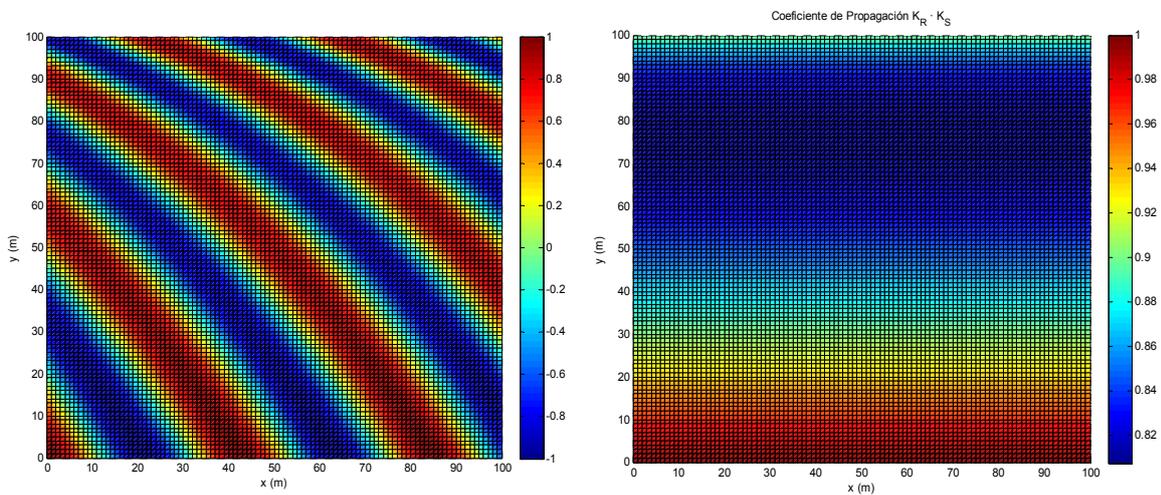


Figura 7-25. Solución analítica de propagación de ondas en fondo con batimetría recta y paralela a la línea de costa (izquierda). Coeficientes de propagación  $K_R K_S$

### 7.12.3. Solución numérica del problema.

Se ha realizado una simulación numérica mediante un código de elementos finitos programado en Matlab®. Se han introducido los siguientes datos al modelo:

Tabla 7-2 Datos numéricos del problema de shoaling y refracción con batimetría recta y paralela

DATO	VALOR NUMÉRICO
Potencial de entrada en ( $x = 0$ )	$\phi_{in} = 1$
Ángulo de incidencia	$\theta = 60^\circ$
Periodo de la onda	$T = 5''$
Pendiente del fondo	$m = 0.09$
Longitud del dominio	$l = 100 \text{ m}$
Anchura del dominio	$b = 100 \text{ m}$
Calado	<i>variable:</i> $h(x,y) = -0.09 \cdot y + 10$

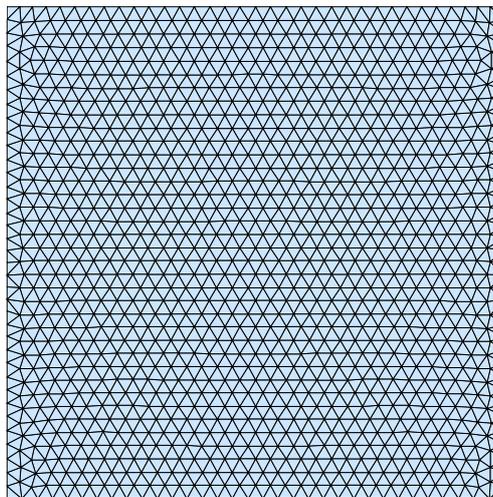
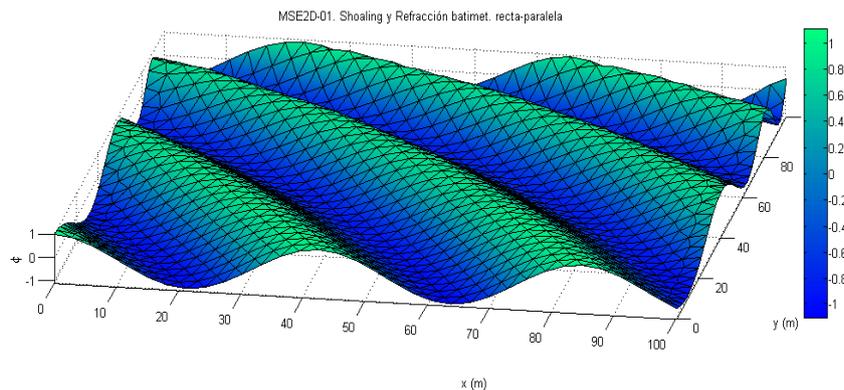


Figura 7-26. Malla de elementos finitos. Aristas de triángulos de 3,00 m.

El dominio de integración está limitado por 4 contornos:

- **Contorno  $\Gamma_1$ :** borde abierto con entrada de potencial unidad formando un ángulo  $\theta$  con la normal al contorno.
- **Contorno  $\Gamma_2$ :** borde abierto con potencial entrante conocido aplicando la ley de Snell
- **Contorno  $\Gamma_3$ :** borde cerrado  $R=0$  absorbente
- **Contorno  $\Gamma_4$ :** borde abierto con potencial entrante conocido aplicando la ley de Snell



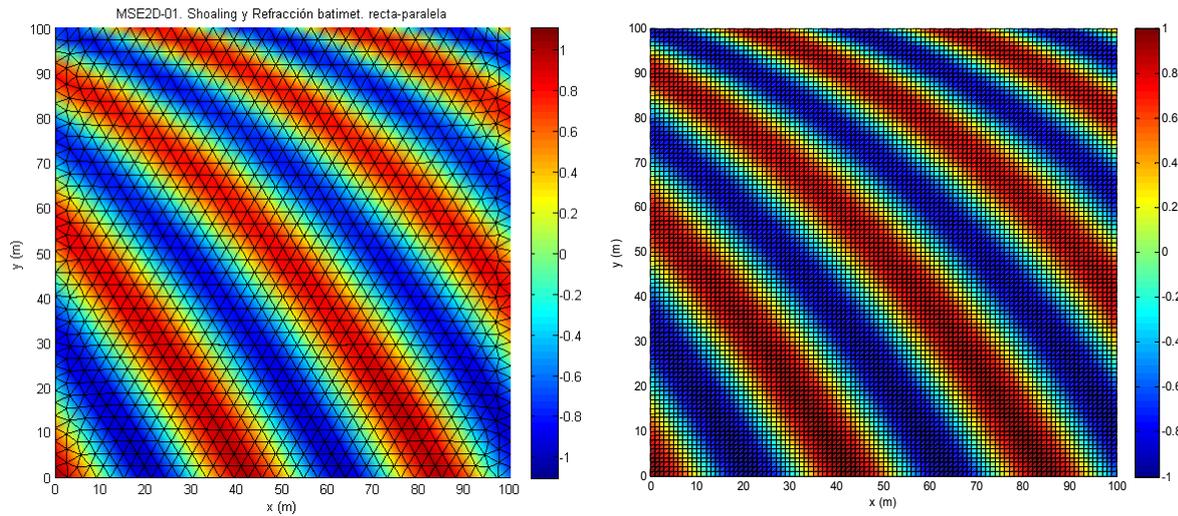


Figura 7-27. Solución numérica del problema de shoaling-refracción en fondo con batimetría recta y paralela (izquierda), comparada con la solución analítica (derecha).

Se aprecia un buen ajuste del resultado del modelo con la solución analítica obtenida en 7.12.2.

#### 7.12.4. Código de elementos finitos en Matlab®.

Anexo al presente TFM se incluye un CD-Rom que incluye, entre otros, el listado de código de elementos finitos **MSE2D\_01.m** programado en Matlab® empleado para resolver el problema de shoaling y refracción sobre fondo de batimetría recta y paralela. Así mismo, se incluyen las funciones auxiliares empleadas por el código principal del programa.

## 7.13. SIMULACIÓN MSE2D\_02. Difracción en dique

### 7.13.1. Descripción física del problema.

En este experimento numérico vamos a simular el fenómeno de difracción de un frente de ondas provocado por la presencia de un obstáculo artificial como puede ser un dique de abrigo portuario. De hecho, vamos a modelizar un caso muy similar al que aparece en la siguiente figura.



Figura 7-28. Difracción provocada por un dique (Por cortesía de Vicente Negro).

Los frentes de oleaje se propagan paralelos a la alineación del dique de abrigo y cuando alcanzan el morro del dique se produce el fenómeno de la difracción que se aprecia claramente en la figura; la difracción, a diferencia de los fenómenos de shoaling y refracción, puede interpretarse en la cesión lateral de energía provocada por los fuertes gradientes de altura de ola a lo largo de un mismo frente de onda.

Los frentes de onda son difractados desde el morro del dique (punto M), el cual se comporta como un foco emisor de ondas radiales que atenúan su altura a medida que la onda penetra dentro de la zona de abrigo, de ahí su importancia en ingeniería de puertos.

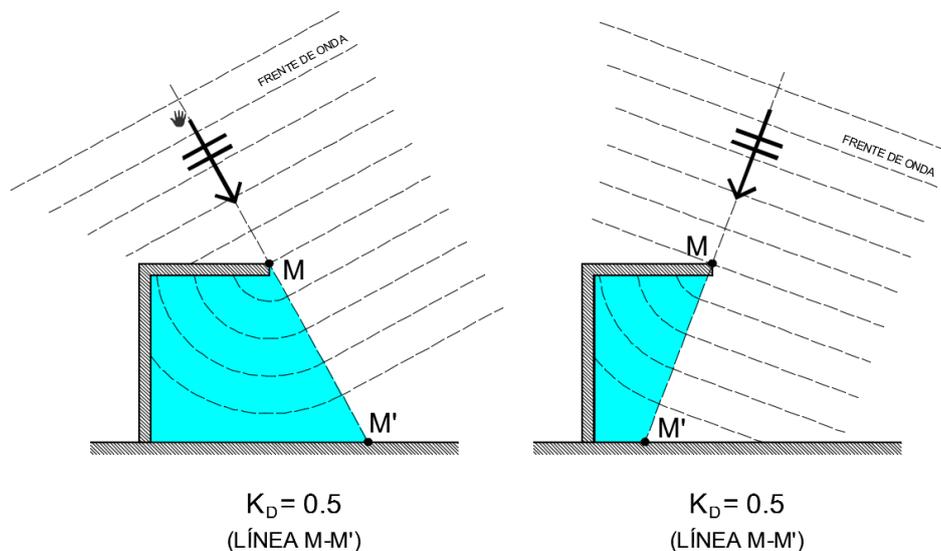


Figura 7-29. Efecto de abrigo portuario producido por la difracción del oleaje.

7.13.2. Solución analítica del problema.

Los resultados de la simulación serán comparados con los ábacos adimensionales de difracción de Weigel recogidos en el "Shore Protection Manual" de 1984 [7], para el caso de fondo de profundidad constante y dique semiinfinito.

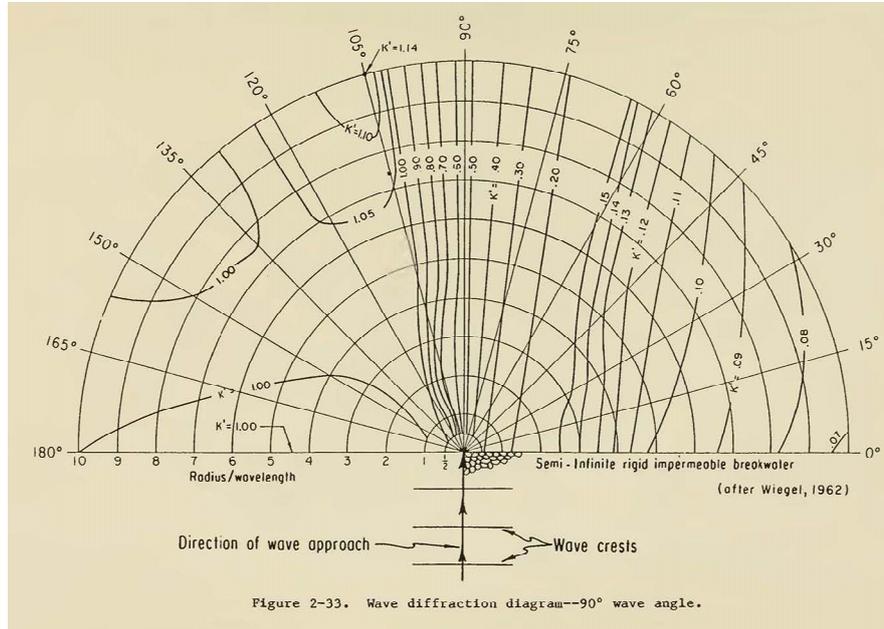


Figura 7-30. Ábaco de difracción de Weigel del SPM.

Para poder aplicar este ábaco a nuestro modelo debemos asegurarnos de que el ancho de la bocana B es al menos cinco veces la longitud de onda, pues en caso contrario estaríamos en el caso de bocana estrecha en la que cada uno de los bordes de la bocana afectan a la difracción en el borde opuesto; en este caso tendríamos que aplicar otros ábacos también recogidos en el SPM, como el mostrado en la siguiente figura para el caso de  $B=2L$ .

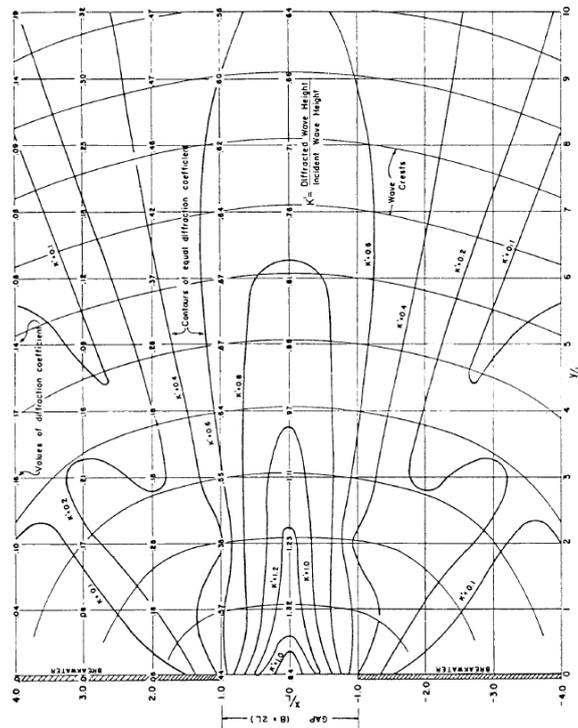


Figura 7-31. Ábaco de difracción de del SPM para caso de bocana estrecha  $B=2L$ .

### 7.13.3. Solución numérica del problema.

Se ha realizado una simulación numérica mediante un código de elementos finitos programado en Matlab®. Se han introducido los siguientes datos al modelo:

Tabla 7-3 Datos numéricos del problema de Difracción

DATO	VALOR NUMÉRICO
Potencial de entrada	$\phi_{in} = 1$
Periodo de la onda	$T = 7''$
Pendiente del fondo	$m = 0.00$
Longitud del dominio	$l = 200 \text{ m}$
Anchura del dominio	$b = 150 \text{ m}$
Calado	$h = 2 \text{ m}$

Por las razones que se justificarán un poco más adelante, se han realizado dos modelos numéricos alternativos cuya diferencia sólo está en la geometría del dominio de integración  $\Omega$ . Sirva de avance en este momento, que la razón por la cual se procede de esta forma es para comprobar el comportamiento de las aproximaciones de segundo orden introducidas en las condiciones de contorno de borde absorbente. A continuación se esquematizan los dominios de integración empleados en la simulación:

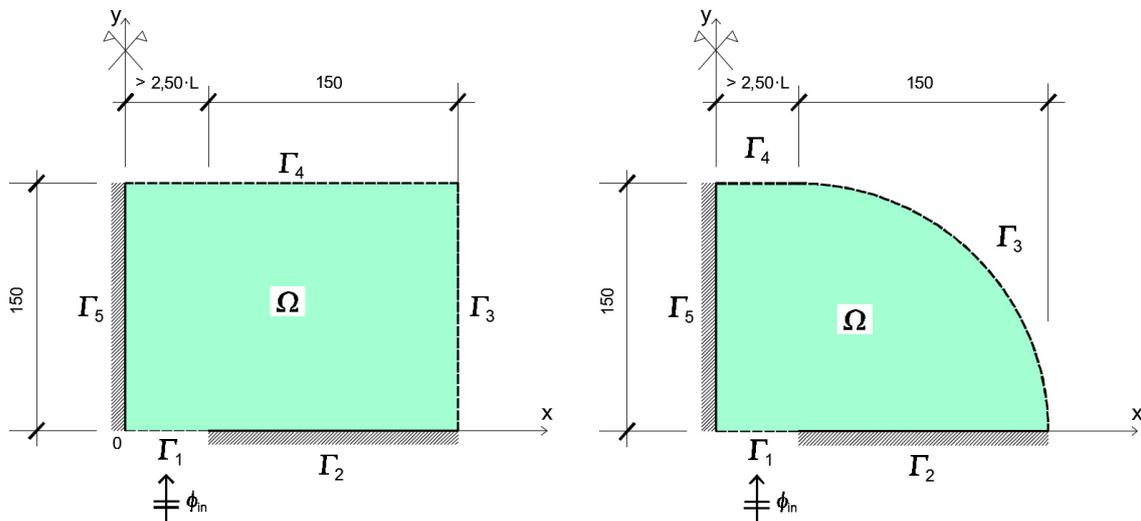


Figura 7-32. Modelo de difracción con dominio rectangular (izquierda) y rectangular truncado con sector circular de radio 150 m (derecha).

Las dimensiones del dominio se han elegido para que la onda difractada penetre hasta un mínimo de 5 longitudes de onda en el interior de la zona de abrigo del trasdós del dique y de esta forma poder visualizar adecuadamente los resultados de la simulación; para periodo de  $T = 7''$  y profundidad constante  $h = 2,00 \text{ m}$ , de la ecuación de dispersión se obtiene una longitud de onda de 30 m.

En cuanto a las condiciones de contorno impuestas al modelo, el dominio de integración está limitado por cinco contornos:

- **Contorno  $\Gamma_1$ :** borde abierto con entrada de potencial unidad formando un ángulo  $\alpha = 0^\circ$  con la perpendicular al contorno.
- **Contorno  $\Gamma_2$ :** borde cerrado ( $R = 1$ ) totalmente reflejante.

- **Contorno  $\Gamma_3$ :** borde cerrado ( $R = 0$ ) absorbente.
- **Contorno  $\Gamma_4$ :** borde cerrado ( $R = 0$ ) absorbente.
- **Contorno  $\Gamma_5$ :** borde cerrado ( $R = 1$ ) totalmente reflejante.

7.13.3.1. Simulación con dominio rectangular

Es el momento de justificar porqué se modelizado el dominio con dos geometrías; en esta primera el dominio tiene forma rectangular situándose los dos bordes absorbentes que limitan la zona de abrigo arriba y a la derecha según las direcciones del eje  $x$  e  $Y$ , respectivamente.

Sebemos que la solución analítica del problema dará lugar a una onda difractada desde el morro del dique y que se porpaga radialmente desde dicho punto; la onda radial difractada llegará a los contornos absorbentes con diferentes ángulos de aproximación que varían desde  $0^\circ$  a  $45^\circ$ . Por tanto, a medida que este ángulo crece menor será la precisión de la condición de absorción, tal y como quedó explicado en el apartado 7.11.3. Son de esperar entonces reflexiones desde los dominios absorbentes que afectarán a la calidad del resultado numérico obtenido.

A continuación se muestran los resultados graficos de la modelización, en los que se aprecia que el modelo simula el fenómeno de la difracción de forma adecuada y realista.

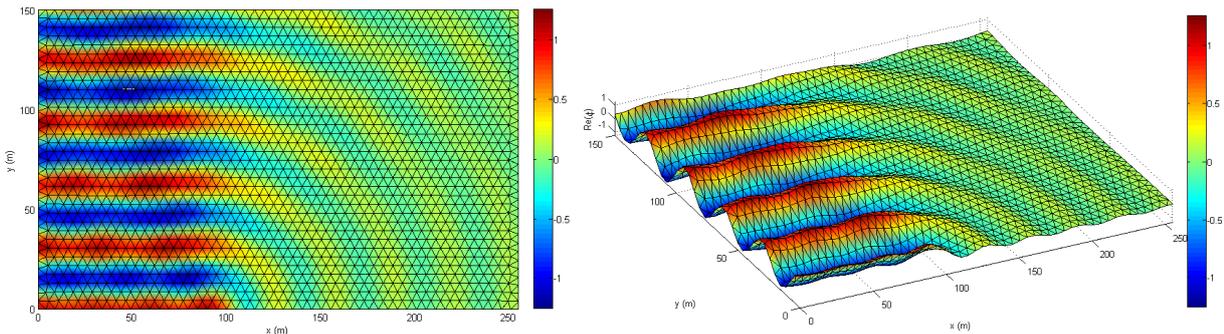


Figura 7-33. Deformación de la superficie libre  $\eta = Re(\phi)$  en  $t = 0$ .

Representamos esta vez un mapa de curvas de nivel con la solución numérica (línea continua) del coeficiente de difracción  $K_D$  comparada con los valores de solución gráfica de los ábacos de Wiegel (línea discontinua).

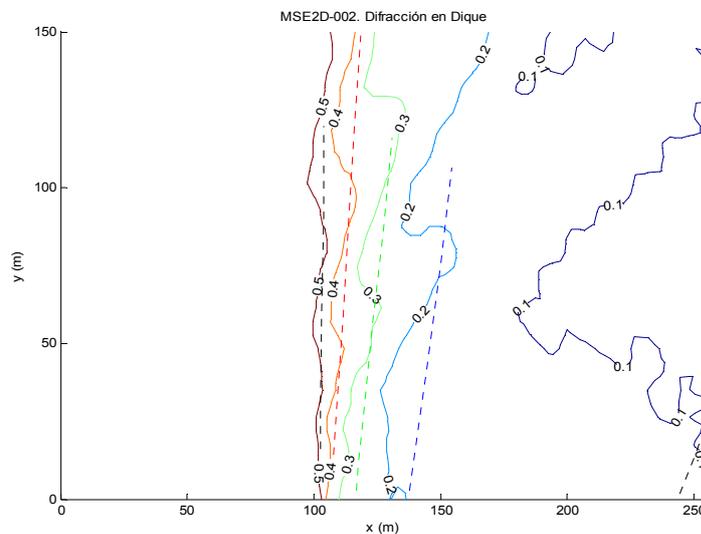


Figura 7-34. Comparación de resultados numéricos con los del ábaco de Wiegel.

### 7.13.3.2. Simulación con dominio circular

Si en lugar de disponer un dominio rectangular, truncamos la esquina superior derecha del dominio con un contorno circular con centro en el morro del dique, conseguimos que el frente de onda difractado ataque perpendicularmente al contorno absorbente en todos sus puntos. De esta manera eliminamos el error de la aproximación de segundo orden de la condición de contorno absorbente.

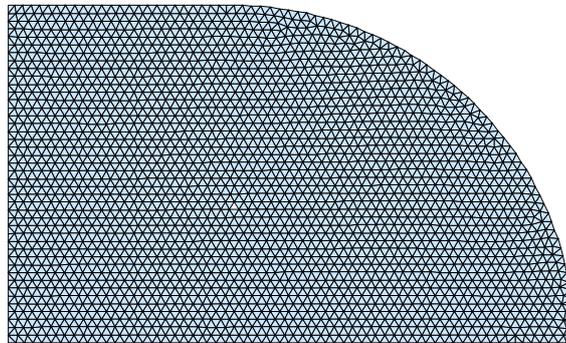


Figura 7-35. Malla de elementos finitos triangulares

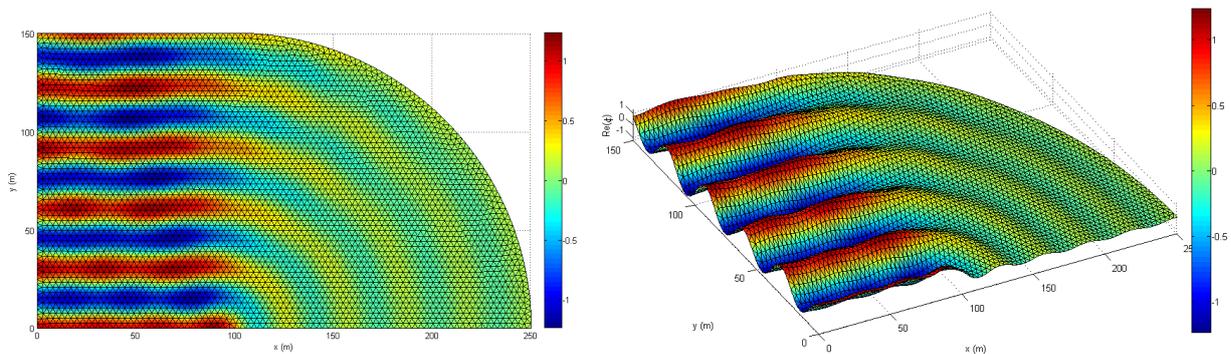


Figura 7-36. Deformación de la superficie libre  $\eta = Re(\phi)$  en  $t = 0$ .

Representamos esta vez un mapa de curvas de nivel con la solución numérica (línea continua) del coeficiente de difracción  $K_D$  comparada con los valores de solución gráfica de los ábacos de Wiegel (línea discontinua).

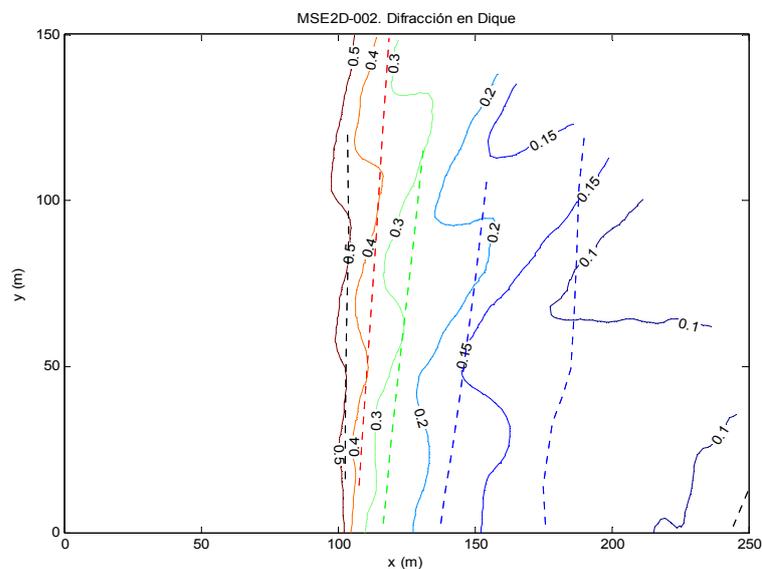


Figura 7-37. Comparación de resultados numéricos con los del ábaco de Wiegel.

Si se comparan los dos gráficos de curvas de nivel obtenidos en cada simulación se aprecia que en este último caso con la geometría del dominio mejorada se obtienen unas curvas más suaves, pero en ambos casos no se aprecia un ajuste exacto con los resultados del ábaco de Wiegel, aunque sí una tendencia a que el resultado de Wiegel promedia la solución numérica. No obstante, desde un punto de vista práctico los resultados numéricos son adecuados para diseño

7.13.3.3. Simulación de bocana estrecha

Por último vamos a simular el caso una bocana estrecha de apertura  $B = 2L$ . Para el caso concreto que estamos tratando, con periodo de 7'' y profundidad constante de 2,00 m obtenemos un valor de la longitud de onda de 30 m, por tanto el ancho de bocana  $B = 60$  m.

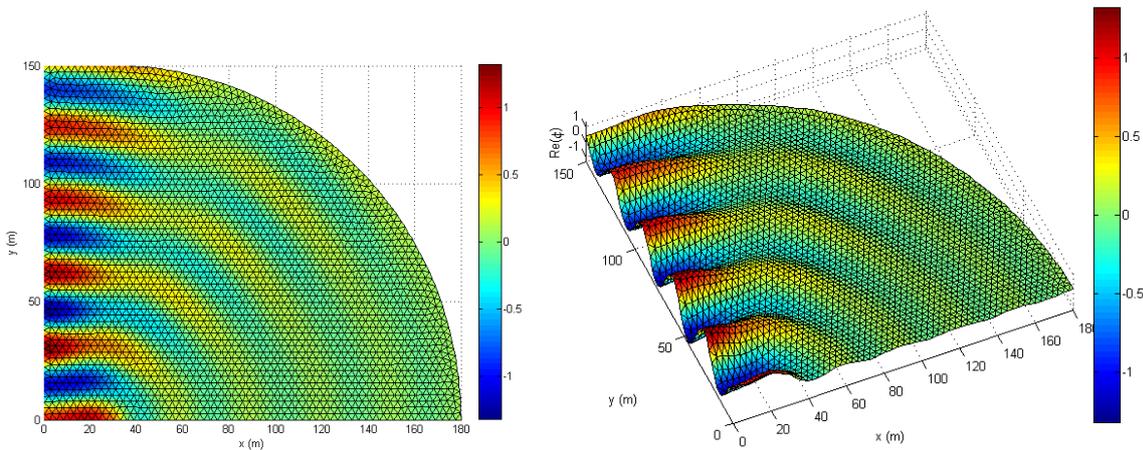


Figura 7-38. Deformación de la superficie libre  $\eta = Re(\phi)$  en  $t = 0$ .

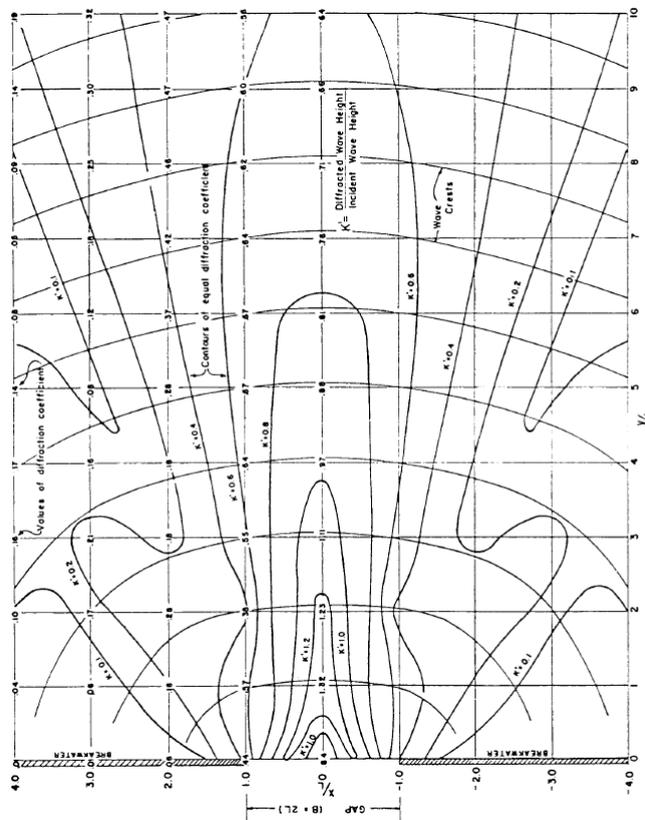


Figure 2-42. Generalized diffraction diagram for a breakwater gap width of two wavelengths ( $B/L = 2$ ).

Figura 7-39. Valores del coeficiente de difracción analíticos del SPM para bocana  $B=2L$ .

En este caso se aprecia un buen ajuste con la solución analítica del ábaco del SPM para el caso de bocana estrecha  $B=2 \cdot L$ .

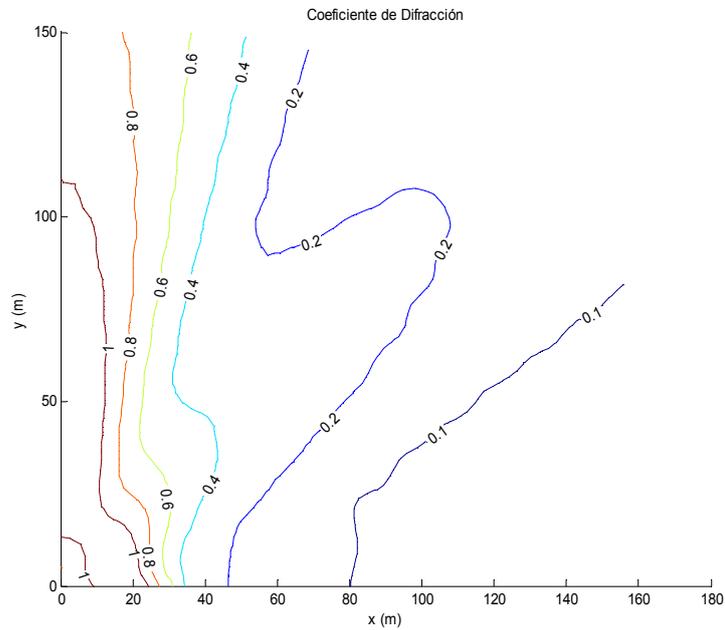


Figura 7-40. Resultados numéricos del coeficiente de difracción.

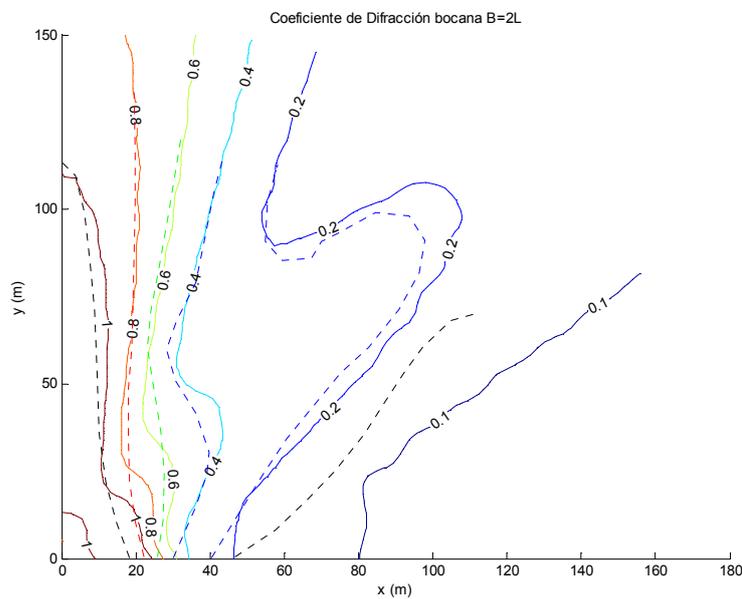


Figura 7-41. Comparación de Resultados analíticos y numéricos del coeficiente de difracción.

#### 7.13.4. Código de elementos finitos en Matlab®.

Anexo al presente TFM se incluye un CD-Rom que incluye, entre otros, el listado de código de elementos finitos **MSE2D\_02.m** programado en Matlab® empleado para resolver el problema de difracción. Así mismo, se incluyen las funciones auxiliares empleadas por el código principal del programa.

## 7.14. Modelización de una dársena portuaria

Para finalizar, y como resumen final y conclusión de este tema, se modelizará una dársena portuaria de geometría sencilla como se indica en la siguiente figura.

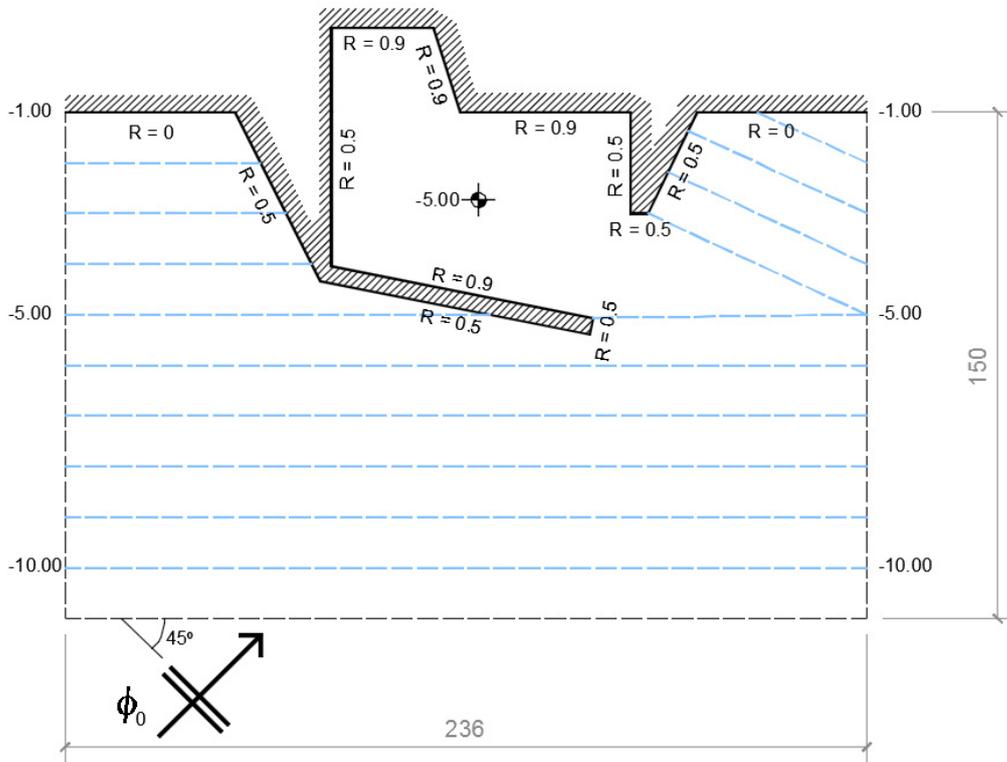


Figura 7-42. Geometría del modelo de dársena portuaria y batimetría.

Se ha considerado un oleaje de periodo 5", amplitud unidad a la profundidad -11.00 y formando un ángulo de 45° con las batimétricas. En todos los contornos abiertos del modelo se introduce un potencial entrante obtenido por la ley de Snell en batimetría recta y paralela, tal y como se explica en el apartado 7.12.2. En los contornos cerrados se define el valor de R en función del tipo de obstáculo considerado (muelle o dique vertical, dique deescollera, playa,...etc.).

Se han realizado una discretización del dominio mediante una triangulación de Delaunay con tamaño de arista de 3,00 m.

A continuación se muestran los resultados gráfico obtenidos del modelo, en el que se aprecia la bondad de los resultados obtenidos y su capacidad para ser empleado en proyectos reales de ingeniería marítima portuaria como modelo de propagación y agitación en dársenas.

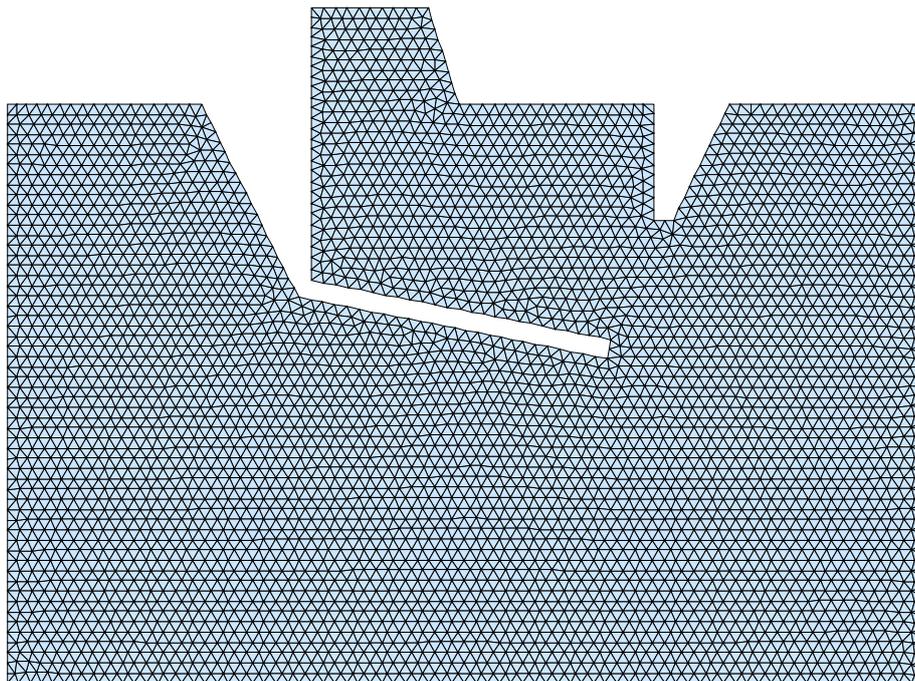


Figura 7-43. Malla de elementos finitos triangulares de tres nodos. Arista 3,00 m.

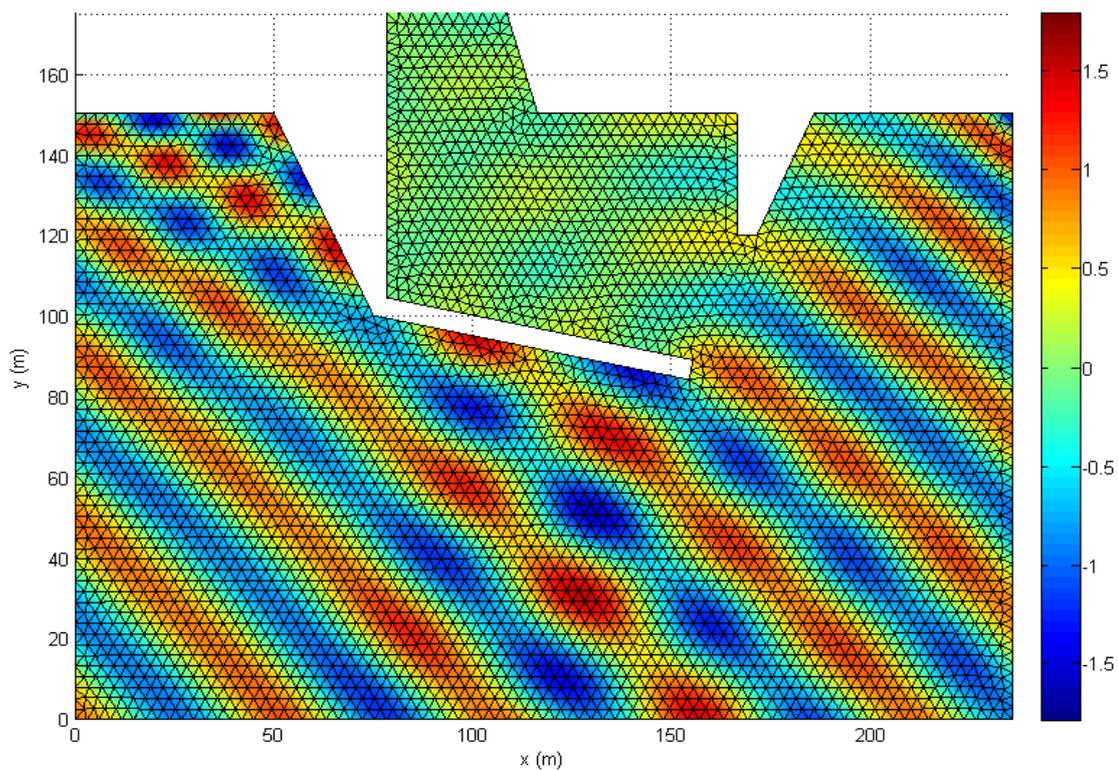


Figura 7-44. Mapa de superficie libre del fluido en  $t = 0$ . Vista cenital.

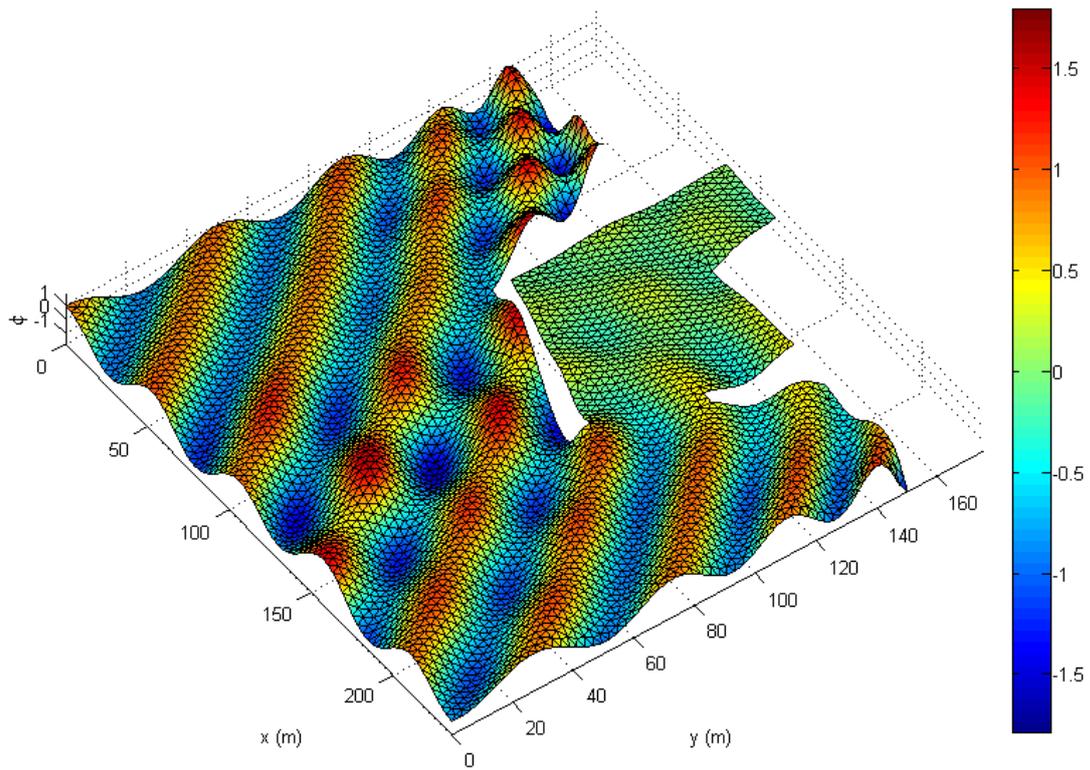


Figura 7-45. Mapa de superficie libre del fluido en  $t = 0$ . Vista lateral.

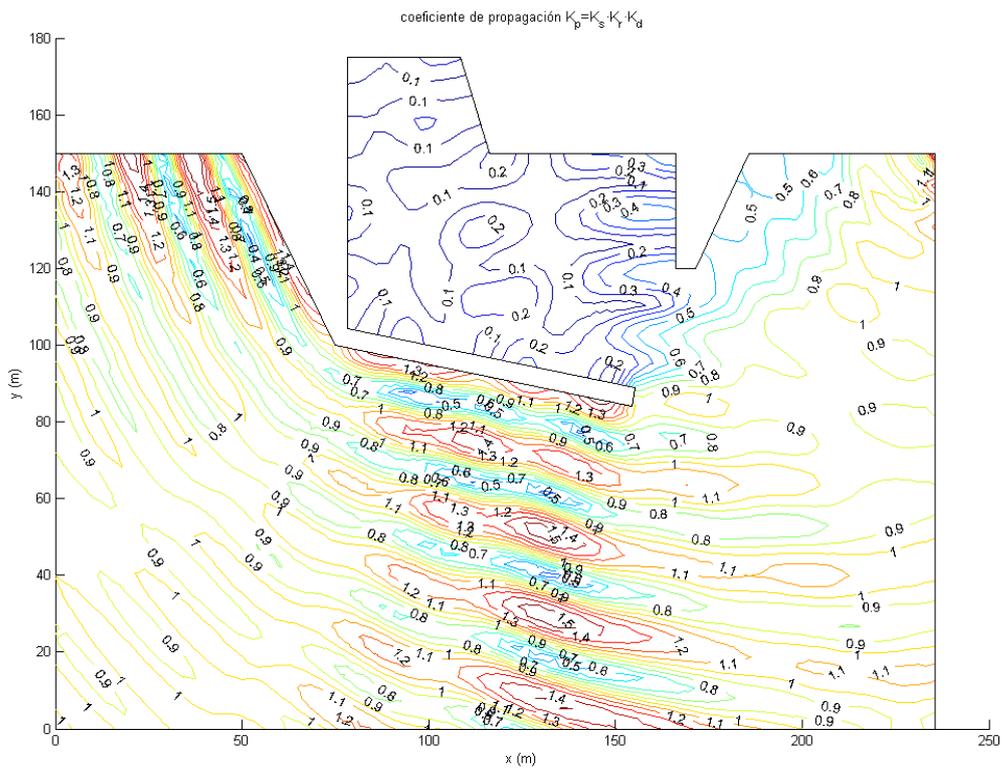


Figura 7-46. Coeficiente de propagación (valor absoluto de  $\phi$ )

# 8 EMPLEO DE ESPONJAS NUMÉRICAS “PERFECTLY MATCHED LAYER”

*El único lugar donde el éxito viene antes de trabajar es el diccionario.*

*- Albert Einstein -*

**E**n este capítulo damos un nuevo salto conceptual importante, que por razones pedagógicas ha tenido que esperar hasta este momento. El tema debe ser abordado una vez que el lector haya “sufrido” y asumido el problema no trivial del desconocimiento del ángulo  $\theta$  de aproximación de los potenciales reflejados a los contornos y sus consecuencias en la bondad de los resultados obtenidos del modelo numérico de elementos finitos.

Se introduce aquí el concepto de **región absorbente** o “**esponja numérica**” desarrollado inicialmente por Berenger en 1994 [6] para problemas de electromagnetismo. A grandes rasgos esta técnica consiste en la introducción en los bordes del dominio de integración de una capa numérica totalmente absorbente, independientemente del ángulo de incidencia  $\theta$  de la onda, que no genera reflexiones de ondas hacia el interior del dominio y que produce un decaimiento exponencial de la amplitud de la onda incidente que alcanza esta capa, a modo de amortiguador de constante  $c$  en un sistema mecánico masa-muelle subamortiguado.

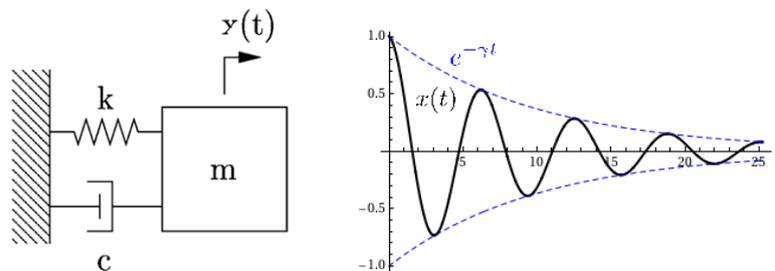


Figura 8-1. Analogía del sistema masa-muelle con amortiguamiento “ $c$ ”.

Imaginemos la superficie de un estanque en total calma. En un instante lanzamos una pequeña piedra que genera una onda superficial que se propaga radialmente desde el punto de impacto.



Figura 8-2. Onda radial producida por un impacto puntual en una masa de agua en reposo.

Si definimos un dominio teórico cerrado en forma de cuadrado que rodea al punto de impacto, la onda alcanzará el contorno de dicho dominio pasado un tiempo  $t$  desde que se generó la perturbación. Si necesitáramos modelizar este fenómeno con precisión, necesitaríamos garantizar que el contorno del dominio de integración no refleja la onda radial que le llega en cada punto. En la siguiente figura se observa con claridad la diferencia entre un contorno reflejante (izquierda) y otro totalmente absorbente (derecha). El contorno reflejante origina una reflexión espúrea hacia el interior del dominio que altera el resultado real del problema. Sin embargo, el contorno absorbente permite que la onda incidente lo atravesase sin que ésta “sienta” su presencia... Este es nuestro objetivo, y se advierte al lector que no es un asunto baladí.

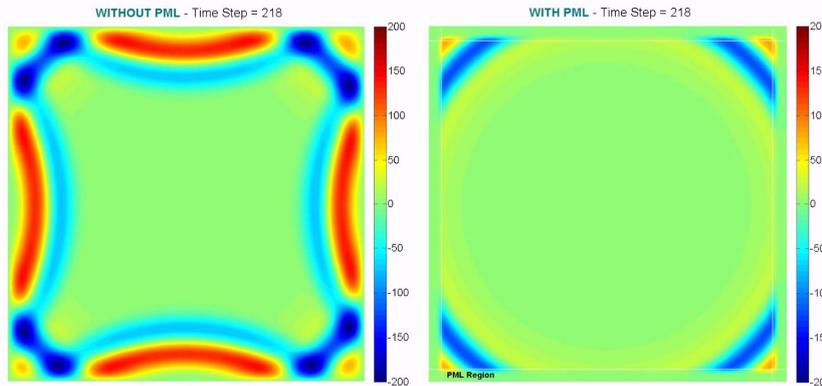


Figura 8-3. Empleo de “esponjas numéricas” para eliminar ondas reflejadas espúreas.

En este TFM nos centraremos en la implementación numérica de la Perfectly Matched Layer (PML) para el caso unidimensional, dejando el caso 2-D general para futuros desarrollos.

### 8.1. Perfectly Matched Layer

La “Perfectly Matched Layer” (PML) es una capa numérica añadida al contorno del dominio de integración que tiene propiedades de absorción total de las ondas que le llegan reflejadas desde el interior del dominio. En la figura siguiente se observa el caso unidimensional de una onda entrante por el borde izquierdo del dominio  $x = 0$  y que avanza por  $\Omega_{int}$  hacia la capa PML. Esta capa tendría que atenuar la onda incidente hasta hacerla prácticamente desaparecer, por lo que obtendríamos una condición absorbente total en el borde derecho que sería nuestro objetivo.

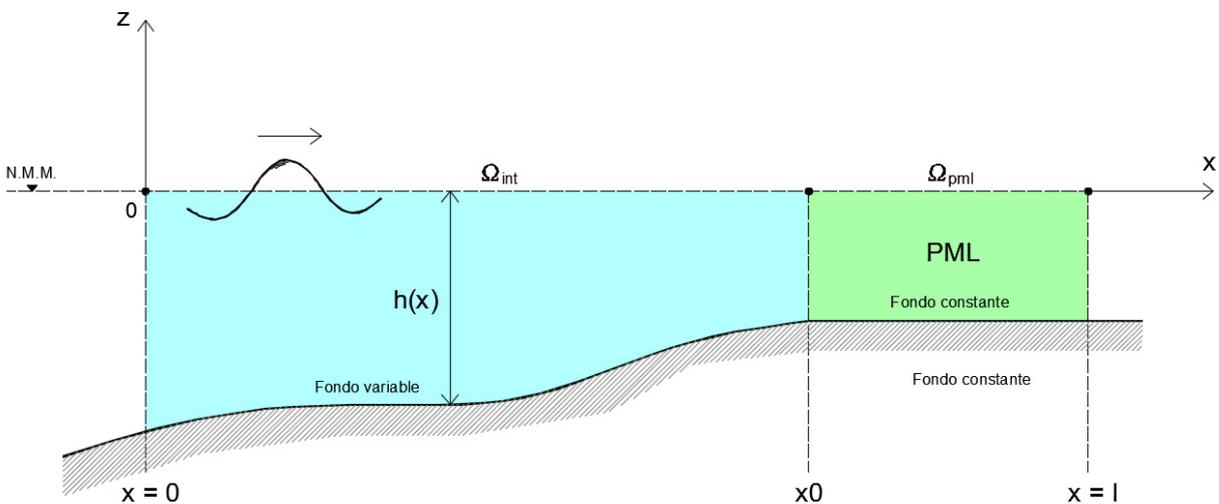


Figura 8-4. Colocación del PML en el dominio.

Es evidente que en el caso 1-D esta misma condición de absorción total podría haberse conseguido con una simple condición de borde cerrado con  $R=0$  como se vió en 6.3.1. Por tanto, la aplicación práctica del PML al caso 1-D es limitada pero esencial desde un punto de vista conceptual. Por motivos pedagógicos se ha hecho una aproximación al problema unidimensional pues es de implementación más sencilla y contiene los fundamentos de la técnica PML para su posterior aplicación al caso general 2-D.

Obsérvese que la batimetría irregular en el dominio interior  $\Omega_{int}$  es la real del fondo marino, mientras que dentro del PML  $\Omega_{pml}$ , la batimetría se convierte artificialmente en otra de fondo constante. Situando los contornos del dominio suficientemente alejados de la zona de interés, esta aproximación ingenieril es bastante buena y presenta ventajas computacionales claras, como veremos en los próximos apartados de este capítulo.

El lector ya debería haberse percatado de un asunto crucial de cara a la implementación de la técnica del PML. La estrategia de adoptar en los bordes PML una batimetría no real de fondo constante nos deja con una onda saliente que se propaga en todos los casos sobre fondo constante. En este caso conocemos su solución analítica para el caso que se propaga en el sentido  $+x$  :

$$\phi(x) = a e^{ikx} \quad (8-1)$$

Siendo  $a$  y  $k$  la amplitud y el número de onda, respectivamente, ambos constantes. El objetivo que buscamos es amortiguar este potencial cuando la onda se propaga en el interior de la PML.

### 8.1.1. Cambio de variable al campo complejo.

La implementación de la técnica PML se basa en un cambio de la variable real  $x$  a una nueva variable  $\tilde{x}$  en el campo complejo.

$$\phi(\tilde{x}) = a e^{ik\tilde{x}} = a e^{ik[\text{Re}(\tilde{x}) + i \text{Im}(\tilde{x})]} = a e^{ik \text{Re}(\tilde{x})} e^{-k \text{Im}(\tilde{x})} \quad (8-2)$$

En (8-2) observamos que en el campo complejo la expresión del potencial  $\phi(\tilde{x})$  tiene un primer término correspondiente a una onda propagante y un segundo término amortiguador o de decaimiento exponencial que crece a medida que aumenta  $\text{Im}(\tilde{x}_i)$ .

El cambio de variable viene definido por la siguiente expresión:

$$\tilde{x} = x + i F(x) \quad (8-3)$$

Siendo  $F(x)$  la función de amortiguamiento definida en la variable real  $x$ . Esta función será tal, que su valor es nulo en el contorno de  $\Omega_{int}$ , donde se cumple que  $\tilde{x} = x$ .

Sustituyendo la ecuación (8-3) en (8-2) obtenemos:

$$\text{Re}(\tilde{x}) = x \quad ; \quad \text{Im}(\tilde{x}) = F(x) \quad (8-4)$$

$$\phi(\tilde{x}) = \tilde{\phi} = a e^{ik\tilde{x}} = a e^{ik[\text{Re}(\tilde{x}) + i \text{Im}(\tilde{x})]} = a e^{ikx} e^{-kF(x)} \quad (8-5)$$

Hemos obtenido, por tanto, la expresión de  $\phi(\tilde{x})$  en función de la variable real  $x$ .

Las derivadas respecto de la variable real  $x$  pueden expresarse en función de la variable compleja  $\tilde{x}$  aplicando la regla de derivación de la cadena.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} = \left[ 1 + i \frac{dF(x)}{dx} \right] \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = s_x \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \quad (8-6)$$

En lugar de definir la función  $F(x)$ , lo que nos interesa realmente es la "velocidad de amortiguación" definida por su derivada espacial  $\frac{dF(x)}{dx}$ :

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{\sigma}{\omega} \quad ; \quad \sigma = \sigma(x) \geq 0 \quad (8-7)$$

En el artículo de Berenger [6] se define  $\sigma$  como la conductividad numérica artificial del material absorbente de la PML. La función  $\sigma(x)$  tiene forma polinómica que se anula fuera de PML, mientras que crece de forma potencial a medida que la onda se propaga dentro del PML hacia el contorno abierto exterior.

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_0 \frac{(|x - x_0|)^n}{L_{pml}} & \rightarrow \text{en } \Omega_{pml} \\ 0 & \rightarrow \text{en otro caso} \end{cases} \quad (8-8)$$

Los parámetros que necesitamos para definir el PML son:  $\sigma_0$ ,  $n$  y  $L_{pml}$ . La coordenada  $x_0$  define la línea de contacto entre el dominio interior  $\Omega_{int}$  y  $\Omega_{pml}$  del PML.

## 8.2. Forma fuerte de la MSE

En (6-2) vimos la expresión de la forma fuerte de la MSE para el caso 1-D:

$$\frac{d}{dx} \left( cc_g \frac{d\phi}{dx} \right) + k^2 cc_g \phi = 0 \quad (8-9)$$

Aplicando el cambio de variable compleja  $\tilde{x}$  tenemos la siguiente expresión de la forma fuerte de la MSE:

$$\frac{d}{d\tilde{x}} \left( cc_g \frac{d\tilde{\phi}}{d\tilde{x}} \right) + k^2 cc_g \tilde{\phi} = 0 \quad (8-10)$$

Si hacemos la transformación de la variable y las derivadas complejas a su forma real (8-6) se obtiene:

$$\frac{1}{s_x} \frac{d}{dx} \left( \frac{cc_g}{s_x} \frac{d\phi}{dx} \right) + k^2 cc_g \phi = 0 \quad (8-11)$$

Siendo el coeficiente  $s_x$ :  $s_x = 1 + i \frac{\sigma(x)}{\omega}$ . Es decir, es un coeficiente que sólo depende de la variable  $x$ . Si en (8-11) multiplicamos ambos términos de la ecuación por  $s_x$  nos queda:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{cc_g}{s_x} \frac{d\phi}{dx} \right) + k^2 cc_g s_x \phi = 0 \quad (8-12)$$

Se obtiene así una forma fuerte de la ecuación MSE muy similar al formato clásico 1-D (8-9), excepto por el término  $s_x$ . Cuando estamos dentro de  $\Omega_{int}$  se cumple  $s_x = 1$ , recuperándose la forma original de la MSE (8-9).

### 8.3. Formulación débil de la Mild-Slope Equation 1-D

Para obtener la **forma integral o débil** de la MSE 1-D, primero elegimos una función de peso o ponderal  $\psi(x)$  arbitraria y planteamos la siguiente igualdad:

$$\psi \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{cc_g}{s_x} \frac{d\phi}{dx} \right) + k^2 cc_g s_x \phi \right] = 0 \quad (8-13)$$

Ahora integramos en todo el dominio  $\Omega$ :  $0 \leq x \leq l$ , obteniéndose:

$$\int_0^l \psi \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{cc_g}{s_x} \frac{d\phi}{dx} \right) + k^2 cc_g s_x \phi \right] dx = 0 \quad (8-14)$$

$$\int_0^l \psi \frac{d}{dx} \left( \frac{cc_g}{s_x} \frac{d\phi}{dx} \right) dx + \int_0^l k^2 cc_g s_x \psi \phi dx = 0 \quad (8-15)$$

Si aplicamos la regla de integración por partes a la primera integral de la ecuación (8-15) se obtiene el siguiente resultado:

$$\int_0^l \psi \frac{d}{dx} \left( \frac{cc_g}{s_x} \frac{d\phi}{dx} \right) dx = \left. \frac{cc_g}{s_x} \psi \frac{d\phi}{dx} \right|_0^l - \int_0^l \frac{cc_g}{s_x} \frac{d\psi}{dx} \frac{d\phi}{dx} dx \quad (8-16)$$

Por tanto, introduciendo la ecuación (8-16) en (8-15) obtenemos la forma débil de la MSE en 1-D:

$$\left. \frac{cc_g}{s_x} \psi \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=0}^{x=l} - \int_0^l \frac{cc_g}{s_x} \frac{d\psi}{dx} \frac{d\phi}{dx} dx + \int_0^l k^2 cc_g s_x \psi \phi dx = 0 \quad (8-17)$$

La ecuación (8-17) podemos expresarla de esta otra forma:

$$\int_0^l \frac{cc_g}{s_x} \frac{d\psi}{dx} \frac{d\phi}{dx} dx + \omega^2 \int_0^l \frac{c_g}{c} s_x \phi \psi dx = \left. \frac{cc_g}{s_x} \psi \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=0}^{x=l} \quad (8-18)$$

El término de la derecha de (8-18) contiene las condiciones de contorno del problema 1-D en los bordes  $x = 0$  y  $x = l$ . Obsérvese también que dentro del dominio  $\Omega_{int}$ ,  $s_x$  toma valor unidad, por lo que la ecuación de la forma débil (8-18) adoptaría la misma forma obtenida en el capítulo 6.

Ahora bien, debido a que la ecuación de la MSE y condición de contorno de borde en el PML la hemos planteado sólo en términos del potencial reflejado, vamos a expresar la forma débil de la MSE (8-18) de esta otra forma completamente análoga, introduciendo un factor auxiliar  $\gamma$  que vale cero cuando el elemento considerado está dentro de  $\Omega_{int}$  y uno cuando pertenece a  $\Omega_{pml}$ :

$$\begin{aligned} & \left[ \int_0^l \frac{cc_g}{s_x} \frac{d\psi}{dx} \frac{d\phi}{dx} dx - \gamma \int_0^l \frac{cc_g}{s_x} \frac{d\psi}{dx} \frac{d\phi_0}{dx} dx \right] + \omega^2 \left[ \int_0^l \frac{c_g}{c} s_x \psi \phi dx - \gamma \int_0^l \frac{c_g}{c} s_x \psi \phi_0 dx \right] \\ & = \left. \frac{cc_g}{s_x} \psi \frac{d\phi}{dx} - \gamma \frac{cc_g}{s_x} \psi \frac{d\phi_0}{dx} \right]_{x=0}^{x=l} \end{aligned} \quad (8-19)$$

Obsérvese que cuando en (8-19) ponemos  $\gamma = 0$  se recupera el formato de la forma débil de la MSE (8-18), mientras que si ponemos  $\gamma = 1$  la ecuación se plantea en términos del potencial reflejado  $\phi_R = \phi - \phi_0$ .

## 8.4. Condiciones de contorno del problema

En este caso sólo vamos a incluir las condiciones de contorno de borde cerrado reflejante y borde abierto, dejando para futuros desarrollos las condiciones de contorno de tipo esencial (Dirichlet) y natural (Neumann).

### 8.4.1. Condición de contorno de borde reflejante.

Como ya sabemos, son bordes físicos del dominio (costa, dique, muelle...etc.) con cierta capacidad de reflexión del oleaje incidente, el cual se mide a través del coeficiente de reflexión  $R$ :  $0 \leq R \leq 1$ . Un borde totalmente absorbente tendría un coeficiente de reflexión  $R = 0$ , mientras que uno totalmente reflejante tendría  $R = 1$ .

Para el caso 1-D ya obtuvimos la expresión general de la condición de contorno cerrado reflejante:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = i k \frac{1-R}{1+R} \phi = i k f_R \phi \quad \text{en borde cerrado} \quad (8-20)$$

Sabemos que en todos los puntos del contorno del dominio de integración, el potencial  $\phi$  será la suma de un potencial incidente desde el exterior  $\phi_0$  más el potencial reflejado por los contornos cerrados del dominio  $\phi_R$ :

$$\phi = \phi_0 + \phi_R \quad (8-21)$$

Pues bien, el PML debe ser capaz de absorber el potencial  $\phi_R$ , dejando intacto a  $\phi_0$ . Para el caso concreto de los contornos exteriores del PML aplicamos la condición de absorción parcial de primer orden del potencial reflejado  $\phi_R$ :

$$\frac{1}{s_x} \frac{d\phi_R}{dn} = i k \phi_R = i k (\phi - \phi_0) \quad \text{en } \Gamma_{pml} \quad (8-22)$$

Aplicando la condición de contorno sólo al potencial reflejado nos aseguramos de que la onda atenuada por la PML sea la reflejada, dejando intacta a la onda entrante desde el exterior del dominio.

### 8.4.2. Condición de contorno el borde abierto.

Se trata de contornos ficticios "no físicos" que necesitamos imponer para cerrar el dominio y que éste sea computacional. Este contorno produce un truncamiento del dominio semi-infinito (mar abierto) en el que debemos garantizar condiciones de "total permeabilidad", tanto a las ondas que llegan a él desde el exterior, como a las reflejadas desde los contornos físicos que salen del dominio. Es decir, las ondas no deben "sentir" su presencia.

Para el caso 1-D ya obtuvimos la expresión general de la condición de contorno abierto:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = -ik\phi_{in} + ik\phi_{out} = -2ik\phi_{in} + ik\phi \quad \text{en borde abierto} \quad (8-23)$$

Siendo  $\phi_{in}$  el potencial entrante al dominio por el contorno abierto.

## 8.5. Discretización de la forma débil de la MSE

No volveremos a repetir aquí los desarrollos matemáticos para la discretización del dominio obtenida en el capítulo 6, y que en el caso de aplicación de la PML son idénticos.

### 8.5.1. Integrales de dominio.

Nos centraremos inicialmente en las **integrales de dominio**  $\Omega$  de la forma débil (8-19), que pueden expresarse como un sumatorio de las integrales en cada elemento  $\Omega_e$  de la malla de elementos finitos. Obtendremos la forma discreta de las integrales de dominio a nivel de un elemento general  $\Omega_e$ ; posteriormente se realizará el **proceso de ensamblaje de matrices** del que se obtiene la matriz de rigidez global del sistema.

Vamos a suponer, como se ha hecho hasta ahora, que nuestra discretización es lo suficientemente refinada como para admitir que los valores de  $s_x$ ,  $k$ ,  $c$  y  $c_g$  son aproximadamente constantes en cada elemento (e), por lo que pueden sacarse de las integrales como constantes, sólo a nivel de elemento  $\Omega_e$ . Los valores de  $k_e$ ,  $c_e$  y  $c_{ge}$  locales se obtienen de la ecuación de dispersión  $\omega^2 = gk \tanh(kh)$ , conocido el periodo de la onda  $T$  y tomando un valor promedio de la profundidad  $\bar{h}_e$  en el elemento (e). Por su parte, el valor de  $s_x$  se obtiene para la coordenada  $x = \bar{x}$  del punto medio de cada elemento.

Vamos a introducir en las anteriores ecuaciones los valores interpolados de  $\phi$ ,  $\frac{d\phi}{dx}$ ,  $\psi$ ,  $\frac{d\psi}{dx}$  obtenidos en las ecuaciones (6-41), (6-42), (6-51) y (6-52), respectivamente.

$$\left(\frac{cc_g}{s_x}\right)_e \int_{x_i}^{x_j} \frac{d\psi}{dx} \frac{d\phi}{dx} dx = \left(\frac{cc_g}{s_x}\right)_e \left[ \int_{x_i}^{x_j} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e dx \right] \boldsymbol{\phi}^e = \frac{1}{s_x} \mathbf{K}^e \boldsymbol{\phi}^e \quad (8-24)$$

$$\left(\frac{c_g}{c} s_x\right)_e \int_{x_i}^{x_j} \phi \psi dx = \left(\frac{c_g}{c} s_x\right)_e \left[ \int_{x_i}^{x_j} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e dx \right] \boldsymbol{\phi}^e = s_x \mathbf{M}^e \boldsymbol{\phi}^e \quad (8-25)$$

Siendo:

$$\mathbf{K}^e = (cc_g)_e \left[ \int_{x_i}^{x_j} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e dx \right] \quad (8-26)$$

$$\mathbf{M}^e = \left(\frac{c_g}{c}\right)_e \left[ \int_{x_i}^{x_j} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e dx \right] \quad (8-27)$$

Las integrales de dominio en  $\phi_0$  se obtendría de forma idéntica a (8-24) y (8-25), salvo que en este caso el vector de valores nodales del potencial es el vector de potencial entrante de términos conocidos  $\boldsymbol{\phi}_0^e$ . Los vectores  $\boldsymbol{\phi}_0^e$  en cada elemento del PML pueden ser calculados de forma analítica, puesto que como veremos a continuación fijaremos un calado constante en la capa PML. Por lo tanto el potencial  $\phi_0$  en cada nodo dentro del PML vale:

$$\phi_0(x_i) = a e^{ikx_i} \quad (8-28)$$

Siendo  $a$  y  $k$  la amplitud y el número de onda, respectivamente, ambos constantes

### 8.5.2. Aplicación de la condiciones de contorno.

El término de la derecha de la ecuación (8-19) contiene la condiciones de contorno de nuestro problema.

$$\begin{aligned} \frac{cc_g}{s_x} \psi \frac{d(\phi - \phi_0)}{dx} \Big|_{x=0}^{x=l} &= cc_g \psi \frac{1}{s_x} \frac{d(\phi - \phi_0)}{dx} \Big|_{x=l} - cc_g \psi \frac{1}{s_x} \frac{d(\phi - \phi_0)}{dx} \Big|_{x=0} \\ &= cc_g \psi \frac{1}{s_x} \frac{d(\phi - \phi_0)}{dn} \Big|_{x=l} + cc_g \psi \frac{1}{s_x} \frac{d(\phi - \phi_0)}{dn} \Big|_{x=0} \end{aligned} \quad (8-29)$$

Hemos supuesto un dominio de integración de longitud  $l$  cuyos bordes o contornos se sitúan en  $x = 0$  y  $x = l$ , respectivamente. En la siguiente figura se presenta el caso de un borde abierto al mar, donde situamos el origen de nuestro sistema de referencia a la cota del mar en reposo, y un borde cerrado con coeficiente de reflexión  $R$ . Supongamos también que el borde cerrado derecho se encuentra dentro del PML, como se muestra en la figura adjunta.

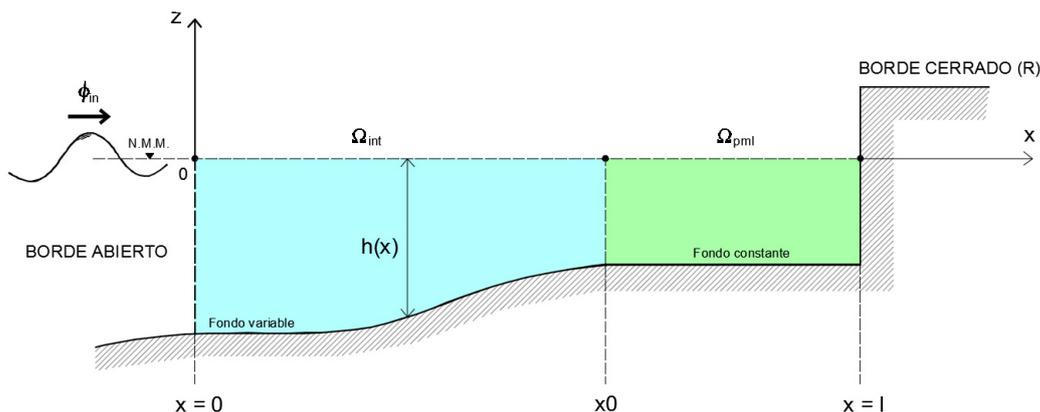


Figura 8-5. Ejemplo de dominio con borde abierto en  $x = 0$  y cerrado en  $x = l$ , con coeficiente de reflexión  $R$ .

Aunque a primera vista no tiene mucho sentido disponer un borde reflejante en el borde del PML, esta decisión se debe a que permitiendo que las ondas atenuadas por la PML que lleguen a dicho borde se reflejen, podemos visualizar muy bien el comportamiento y la bondad de los parámetros seleccionados para el PML. Volveremos sobre este asunto al final del capítulo en las simulaciones numéricas realizadas.

Es necesario hacer notar que en el ejemplo propuesto las integrales de dominio en  $\phi_0$  que aparecen en la ecuación (8-19) son nulas debido a que en este caso no está entrando ningún potencial por el borde cerrado en  $x = l$ . Por tanto, las integrales de dominio en  $\phi_0$  tendrán valores distintos de cero cuando el potencial incidente entre por el contorno del PML, como se esquematiza en la siguiente figura.

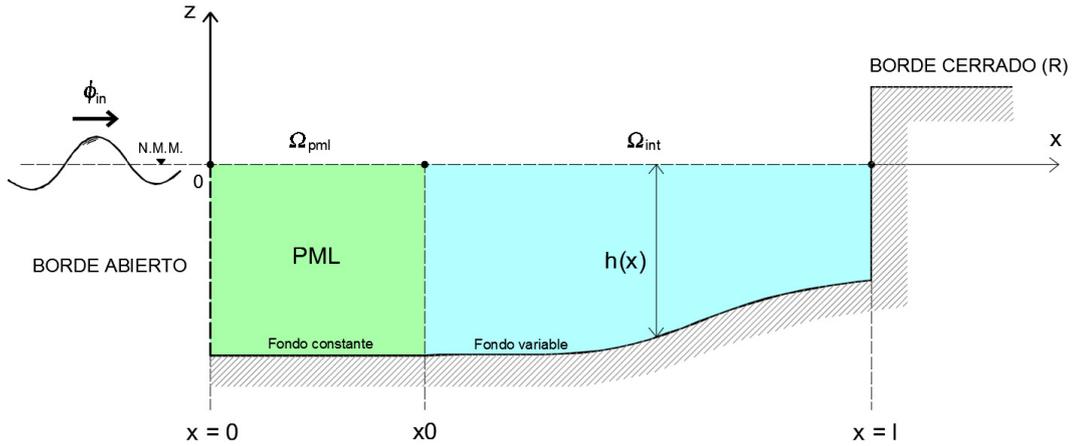


Figura 8-6. Caso de dominio con borde abierto en  $x = 0$  (donde se sitúa el PML) y cerrado en  $x = l$ , con coeficiente de reflexión  $R$ .

### 8.5.2.1. Condición de Contorno de Borde Cerrado

En el caso que estamos estudiando el borde cerrado se encuentra en el borde derecho  $x = l$ , donde se sitúa el PML. Por ello, la condición de contorno se plantea en términos del potencial reflejado  $\phi_R = \phi - \phi_0$ . No obstante, no hay entrada de potencial por dicho borde ( $\phi_0 = 0$ ).

$$cc_g \psi \left. \frac{1}{s_x} \frac{d\phi_R}{dn} \right]_{x=l} = ikcc_g f_R \psi (\phi - \phi_0) \Big|_{x=l} = ikcc_g f_R \psi \phi \quad \text{en } x = l \quad (8-30)$$

Ahora tenemos que incluir las interpolaciones de las funciones  $\psi$  y  $\phi$ , teniendo en cuenta que debemos particularizar sus valores en el extremo  $x = l$  del dominio: nodo  $N$ , donde se sitúa el elemento  $(N-1)$ .

$$cc_g \psi \left. \frac{1}{s_x} \frac{d\phi_R}{dn} \right]_{x=l} = i (kcc_g f_R)_{x=l} [\mathbf{N}^{(N-1)T} \mathbf{N}^{(N-1)}] \begin{bmatrix} \phi_{N-1} \\ \phi_N \end{bmatrix} \quad (8-31)$$

Veamos cuanto vale el vector  $\mathbf{N}^{(N-1)}$  en  $x = l$ . Este vector contiene las funciones de forma del elemento  $(N - 1)$ .

$$\mathbf{N}^{(N-1)} \Big|_{x=l} = [N_{N-1}^{N-1} \quad N_N^{N-1}]_{x=l} = [0 \quad 1] \quad (8-32)$$

El resultado anterior (6-84) es evidente teniendo en cuenta cómo son las funciones de forma. Finalmente obtenemos:

$$cc_g \psi \left. \frac{1}{s_x} \frac{d\phi_R}{dn} \right]_{x=l} = i (kcc_g f_R)_{x=l} \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_N \end{bmatrix} \quad (8-33)$$

Expresado en forma matricial global para insertar la condición de contorno cerrado:

$$cc_g \psi \left. \frac{1}{s_x} \frac{d\phi_R}{dn} \right]_{x=l} = i (kcc_g f_R)_{x=l} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \phi_N \end{bmatrix} \quad (8-34)$$

El término de la derecha de la ecuación (8-34) es un vector columna que contiene el potencial desconocido en el borde derecho del dominio  $x = l$ . Por ello, este término pasa cambiado de signo al primer término de la ecuación  $\mathbf{K} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{f}$ , modificando la matriz de rigidez  $\mathbf{K} \Rightarrow \mathbf{K}_{mod}$ .

### 8.5.2.2. Condición de Contorno de Borde Abierto

En el caso que estamos estudiando el borde abierto se encuentra en el borde izquierdo  $x = 0$ , donde se sitúa el dominio de interés  $\Omega_{int}$ . Por ello,  $s_x = 1$  y la condición de contorno se plantea en términos del potencial total  $\phi$ . Por este borde abierto entra un potencial exterior  $\phi_{in}$ .

$$cc_g \psi \left. \frac{d\phi}{dn} \right]_{x=0} \quad (8-35)$$

Recordemos que la condición de contorno de borde abierto de nuestro problema venía expresada por la ecuación (6-31):

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = -2ik\phi_{in} + ik\phi \quad \Rightarrow \quad \frac{d\phi}{dx} = 2ik\phi_{in} - ik\phi \quad \text{en borde abierto } x = 0 \quad (8-36)$$

$$cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right]_{x=0} = -2i kcc_g \phi_{in} \psi \Big|_{x=0} + i k cc_g \psi \phi \Big|_{x=0} \quad (8-37)$$

Ahora tenemos que incluir las interpolaciones de las funciones  $\psi$  y  $\phi$ , teniendo en cuenta que debemos particularizar sus valores en el extremo  $x = 0$  del dominio: nodo 1, donde se sitúa el elemento (1).

$$cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right]_{x=0} = -2i (kcc_g)_{x=0} \phi_{in} [\mathbf{N}^{(1)T}]_{x=0} + i (kcc_g)_{x=0} [\mathbf{N}^{(1)T} \mathbf{N}^{(1)}]_{x=0} \phi_1 \quad (8-38)$$

Veamos cuanto vale el vector  $\mathbf{N}^{(1)}$  en  $x = 0$ . Este vector contiene las funciones de forma del elemento (1).

$$\mathbf{N}^{(1)} \Big|_{x=0} = [N_1^{(1)} \quad N_2^{(1)}]_{x=0} = [1 \quad 0] \quad (8-39)$$

El resultado anterior es evidente teniendo en cuenta cómo son las funciones de forma. Finalmente obtenemos:

$$cc_g \psi \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right]_{x=0} = -2i (kcc_g)_{x=0} \phi_{in} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i (kcc_g)_{x=0} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8-40)$$

Expresado en forma matricial global para insertar la condición de contorno abierto, podemos escribir (8-40) de la siguiente forma genérica:

$$cc_g \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{x=0} = -2i (kcc_g)_{x=0} \phi_{in} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + i (kcc_g)_{x=0} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \phi_1 \tag{8-41}$$

El primer término de la derecha de la ecuación (8-41) es un vector columna constante mientras que el segundo contiene el potencial desconocido en el extremo  $x = 0$  del dominio.

### 8.6. Implementación en Matlab®

Todo el desarrollo teórico matemático anterior nos ha permitido visualizar que se esconde tras la implementación de la PML en el modelo MSE unidimensional. Disponemos ya, por tanto, de una base sólida que nos permitirá programar un algoritmo numérico de elementos finitos en lenguaje Matlab®.

Con este algoritmo vamos a simular dos problemas clásicos sencillos de los que disponemos de solución analítica:

- **Simulación MSE-1D-PML-01:** propagación de onda sobre fondo de profundidad constante con PML en situado en el extremo  $x = l$  del dominio, entrada de potencial unidad en borde el abierto  $x = 0$  y condición de borde cerrado en el borde  $x = l$ .
- **Simulación MSE-1D-PML-02:** propagación de onda sobre fondo de profundidad constante con PML en situado en el extremo  $x = 0$  del dominio, entrada de potencial unidad en borde el abierto  $x = 0$  y condición de borde cerrado en el borde  $x = l$ .

### 8.7. SIMULACIÓN MSE-1D-PML-01. Propagación de Onda Monocromática Sobre Constante y PML en Borde $x = l$ .

#### 8.7.1. Descripción física del problema.

En esta simulación vamos a resolver el problema trivial de propagación de una onda de periodo  $T$  sobre fondo constante empleando la técnica del contorno absorbente PML. Supondremos que un potencial unitario entra por el borde izquierdo del dominio  $x = 0$  y que en el borde derecho fijamos condiciones de borde cerrado con coeficiente de reflexión  $R$ . En el siguiente croquis se esquematiza la geometría del problema

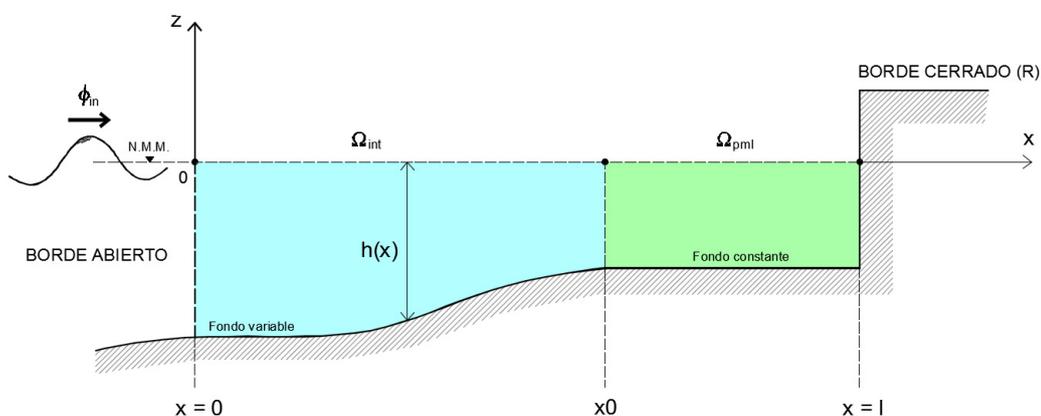


Figura 8-7. Geometría del problema MSE-1D-PML-01

La onda entrante al dominio en  $x = 0$  atraviesa primero el dominio  $\Omega_{int}$  y a la derecha se sitúa una capa absorbente  $\Omega_{pml}$  que debe ser capaz de atenuar el potencial hasta hacerlo prácticamente igual a cero en el borde  $x = l$ .

En el borde  $x = l$  hemos dispuesto una condición de borde cerrado; podría parecer extraño adoptar el caso de borde totalmente reflejante ( $R = 1$ ) en  $x = l$ . No obstante, este problema es interesante desde un punto de vista pedagógico, pues da una idea clara del funcionamiento atenuador de la PML. Si adoptáramos un espesor  $L_{pml}$  reducido o unos parámetros de atenuación de la onda reflejada  $\sigma_0$ ,  $n$  leves, podría darse el caso que el PML no pudiera eliminar completamente la onda reflejada, apareciendo así una onda reflejada espuria en  $\Omega_{int}$  que se superpone a la onda incidente falseando los resultados del modelo. Este efecto lo veremos en alguna de las simulaciones que se presentan más adelante.

### 8.7.2. Solución analítica del problema.

La solución analítica del potencial reducido de velocidad de amplitud unidad  $\tilde{\varphi} = 1$  en cualquier punto  $x$  del dominio viene expresado por la siguiente ecuación:

$$\phi(x) = \tilde{\varphi} e^{ikx} \quad (8-42)$$

Por tratarse de una propagación en fondo de profundidad constante, los valores del número de onda  $k$  y amplitud  $\tilde{\varphi}$  permanecen constantes.

### 8.7.3. Solución numérica del problema.

Se ha realizado una simulación numérica mediante un código de elementos finitos programado en Matlab®. Se han introducido los siguientes datos al modelo:

Tabla 8-1 Datos numéricos de la simulación MSE-1D-PML-01

DATO	VALOR NUMÉRICO
Potencial de entrada en ( $x = 0$ )	$\phi_{in} = 1$
Periodo de la onda	$T = 10''$
Pendiente del fondo	$m = 0.00$
Coefficiente de reflexión ( $x = l$ )	$R = 1$ ( <i>Reflexión total</i> )
Longitud del dominio	$l = 200 \text{ m}$
Número de elementos	$N_{el} = 400$
Calado	$h = 1 \text{ m}$
Espesor del PML	$L_{pml} = 50 \text{ m}$
Parámetro del PML	$\sigma_0 = 0.25$
Grado polinomio de atenuación	$n = 1$

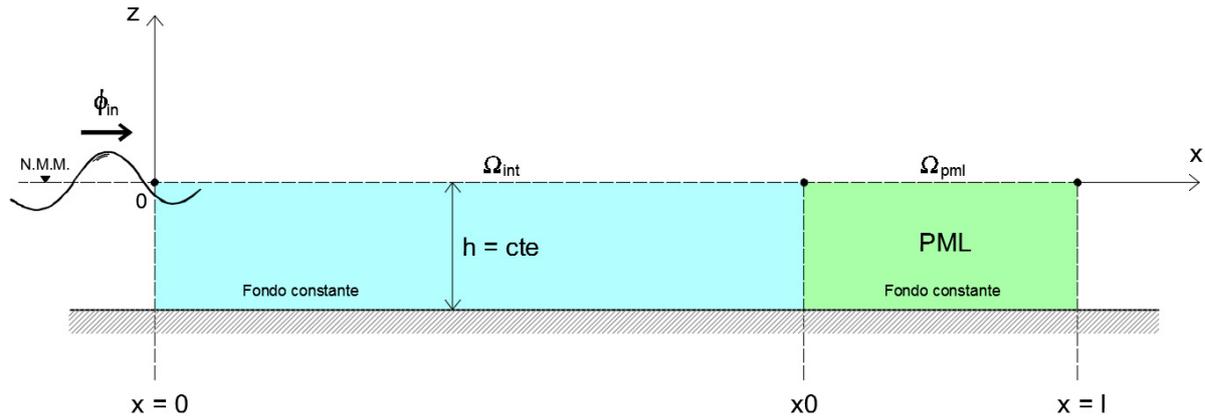


Figura 8-8. Geometría del modelo.

A continuación se presentan y comentan los resultados obtenidos de la simulación. Observese que en este primer caso que se han elegido intencionadamente parámetros de atenuación de la onda bajos para observar el comportamiento del borde totalmente reflejante en  $x = l$ .

En este caso es obvio que la onda no llega completamente atenuada en  $x = l$ , lo cual significa que el modelo devuelve una onda reflejada hacia la izquierda que también será atenuada por la capa PML pero no le da tiempo a eliminarla completamente en el trayecto de ida y vuelta de la onda.

En las siguientes figuras se representan los resultados de la superficie libre del fluido  $\eta = Re(\phi)$  y del valor absoluto del potencial  $|\phi|$ . Se observa claramente que la onda no llega atenuada al borde  $x = l$ , por lo que es reflejada. En su trayecto de vuelta sigue actuando la capa PML, pero ésta no es capaz de atenuarla completamente. Como resultado se observa que la solución de  $|\phi|$  oscila levemente alrededor de 1 que es el resultado analítico esperado.

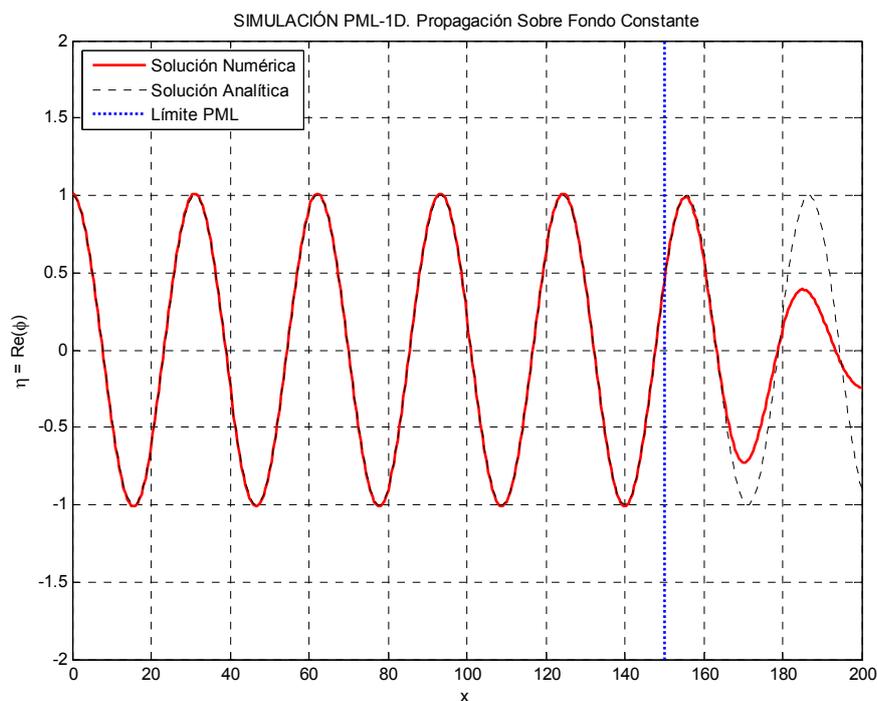


Figura 8-9. Representación de la superficie libre del fluido. Observar que la onda llega a  $x = l$  sin estar completamente atenuada, por lo que es reflejada hacia la izquierda.

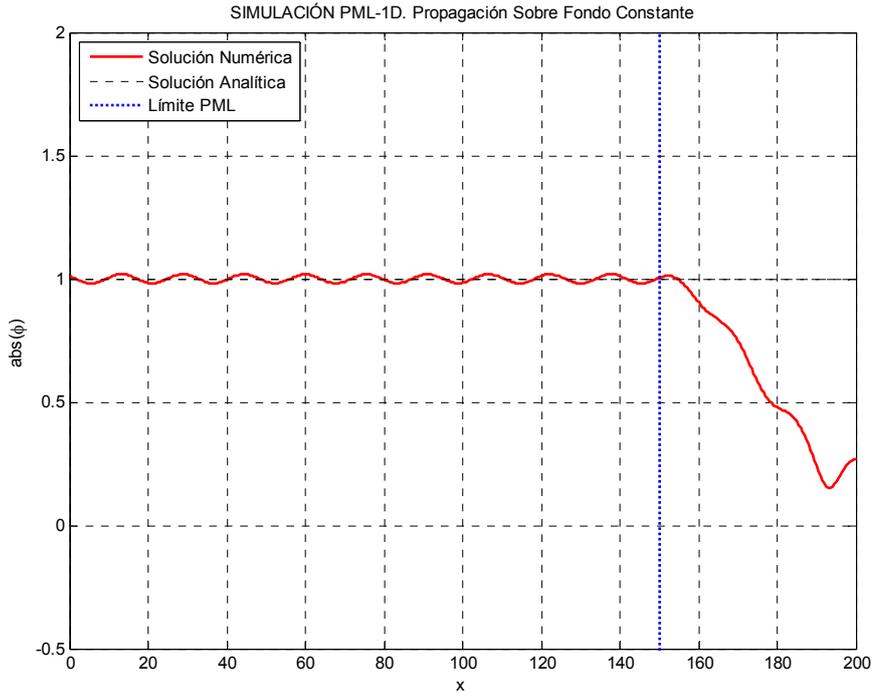


Figura 8-10. Representación del valor absoluto del potencial. Observar que la onda no atenuada en  $x = l$  vuelve reflejada hacia la izquierda contaminando la solución en el dominio  $\Omega_{int}$ .

Observado ya este comportamiento, volvamos a simular el problema pero en este caso aumentando el espesor del PML a  $L_{pml} = 50 \text{ m}$  y el parámetro  $\sigma_0 = 0,50$ . Obsérvese como ahora la onda llega casi completamente atenuada al borde  $x = l$ , por lo que no refleja nada hacia el dominio de interés  $\Omega_{int}$ , donde el valor absoluto del potencial toma el valor  $|\phi| = 1$  esperado.

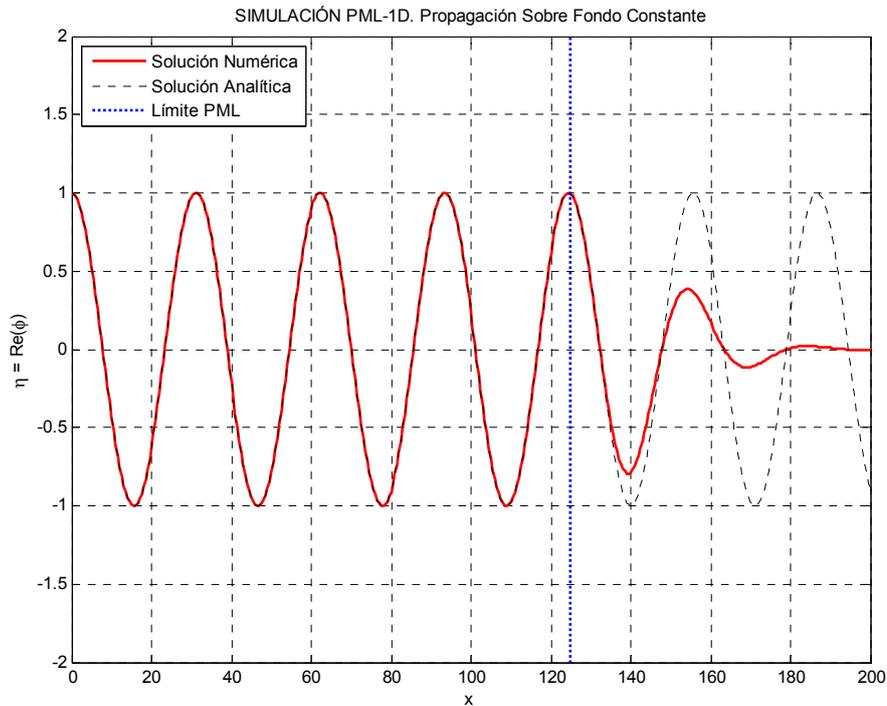


Figura 8-11. Representación de la superficie libre del fluido. Observar que la onda llega a  $x = l$  completamente atenuada, por lo que no es reflejada hacia la izquierda.

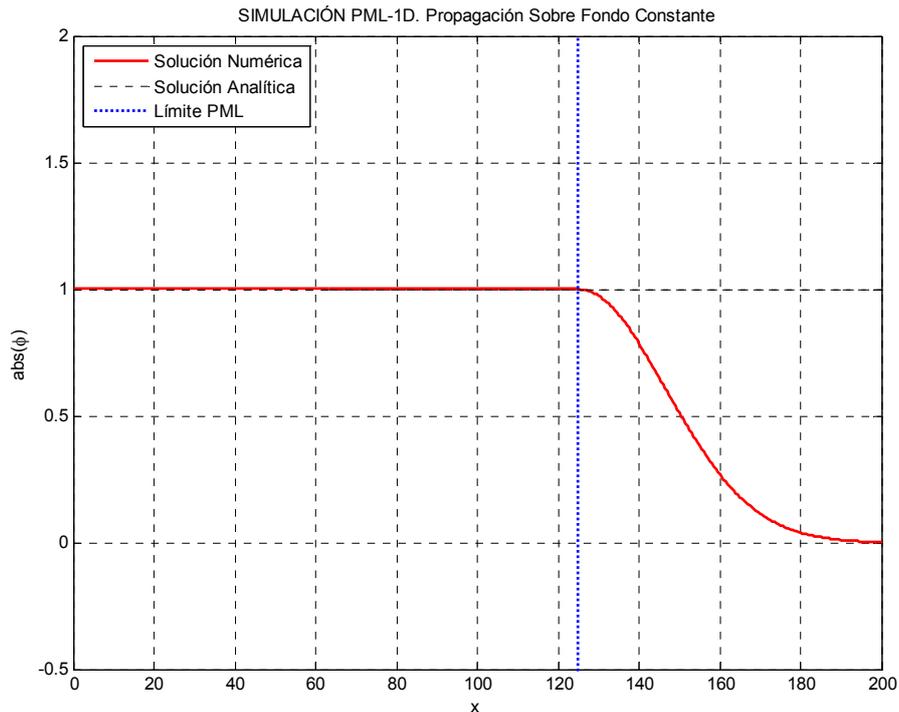


Figura 8-12. Representación del valor absoluto del potencial. Observar que la onda casi totalmente atenuada en  $x = l$  no vuelve reflejada hacia la izquierda.

#### 8.7.4. Código de elementos finitos en Matlab®.

Anexo al presente TFM se incluye un CD-Rom que incluye, entre otros, el listado de código de elementos finitos **MSE1D\_PML-01.m** programado en Matlab® empleado para resolver el problema de propagación sobre fondo plano aplicando condiciones absorbentes de los contornos mediante la técnica PML. Así mismo, se incluyen las funciones auxiliares empleadas por el código principal del programa.

### 8.8. SIMULACIÓN MSE-1D-PML-02. Propagación de Onda Monocromática Sobre Constante y PML en Borde $x = 0$ .

#### 8.8.1. Descripción física del problema.

En este caso también vamos a resolver el problema trivial de propagación de una onda de periodo  $T$  sobre fondo constante empleando la técnica del contorno absorbente PML, pero a diferencia de la anterior simulación situaremos el PML justo en el borde  $x = 0$  por donde entra el potencial conocido.

Por lo tanto, supondremos que un potencial unitario entra por el borde izquierdo del dominio  $x = 0$  y que en el borde derecho fijamos condiciones de borde cerrado con coeficiente de reflexión  $R$ . En el siguiente croquis se esquematiza la geometría del problema.

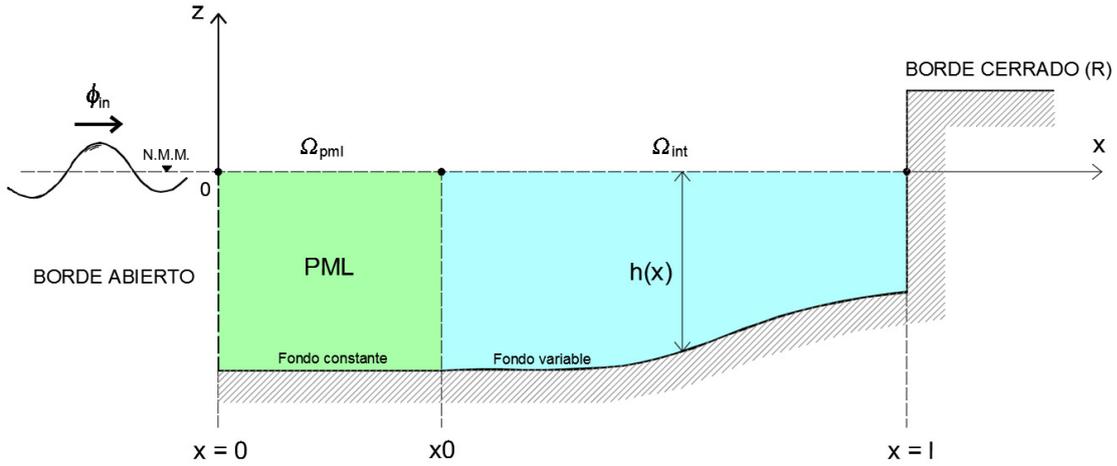


Figura 8-13. Geometría del problema MSE-1D-PML-02

La onda entrante al dominio en  $x = 0$  atraviesa primero el dominio  $\Omega_{pml}$  donde se sitúa el PML y a la derecha se sitúa el dominio de interés  $\Omega_{int}$ . La razón de simular esta variante al problema es porque pretendemos mostrar el comportamiento numérico de la capa absorbente y que, efectivamente, el PML atenúa los potenciales reflejados en el interior del dominio  $\Omega_{int}$ , pero deja intactos los potenciales entrantes desde el exterior.

En el borde  $x = l$  hemos dispuesto una condición de borde cerrado; simularemos los casos de borde totalmente absorbente ( $R = 0$ ) y totalmente reflejante ( $R = 1$ ) para apreciar la diferencia.

**8.8.2. Solución analítica del problema.**

Para el caso en que en  $x = l$  dispongamos una condición de borde cerrado totalmente absorbente ( $R = 0$ ), la solución analítica del potencial reducido de velocidad de amplitud unidad  $\tilde{\varphi} = 1$  en cualquier punto  $x$  del dominio viene expresado por la siguiente ecuación:

$$\phi(x) = \tilde{\varphi} e^{ikx} \tag{8-43}$$

Por tratarse de una propagación en fondo de profundidad constante, los valores del número de onda  $k$  y amplitud  $\tilde{\varphi}$  permanecen constantes.

Por el contrario, si en  $x = l$  disponemos una condición de borde cerrado totalmente reflejante ( $R = 1$ ), ya obtuvimos en el apartado 6.12.2 que la solución analítica del potencial reducido de velocidad daba lugar a un esquema de onda estacionaria producido por la superposición de la onda incidente de amplitud unidad  $\tilde{\varphi} = 1$  y la reflejada por el borde cerrado cuya expresión analítica es:

$$\phi = \tilde{\varphi} [e^{ikx} + R e^{2ikl} e^{-ikx}] \tag{8-44}$$

**8.8.3. Solución numérica del problema.**

Se ha realizado una simulación numérica mediante un código de elementos finitos programado en Matlab®. Se han introducido los siguientes datos al modelo:

Tabla 8-2 Datos numéricos de la simulación MSE-1D-PML-02

DATO	VALOR NUMÉRICO
Potencial de entrada en ( $x = 0$ )	$\phi_{in} = 1$
Periodo de la onda	$T = 10''$
Pendiente del fondo	$m = 0.00$
Coefficiente de reflexión ( $x = l$ )	$R = 0 / 1$
Longitud del dominio	$l = 200 \text{ m}$
Número de elementos	$N_{el} = 400$
Calado	$h = 1 \text{ m}$
Espesor del PML	$L_{pml} = 100 \text{ m}$
Parámetro del PML	$\sigma_0 = 1$
Grado polinomio de atenuación	$n = 1$

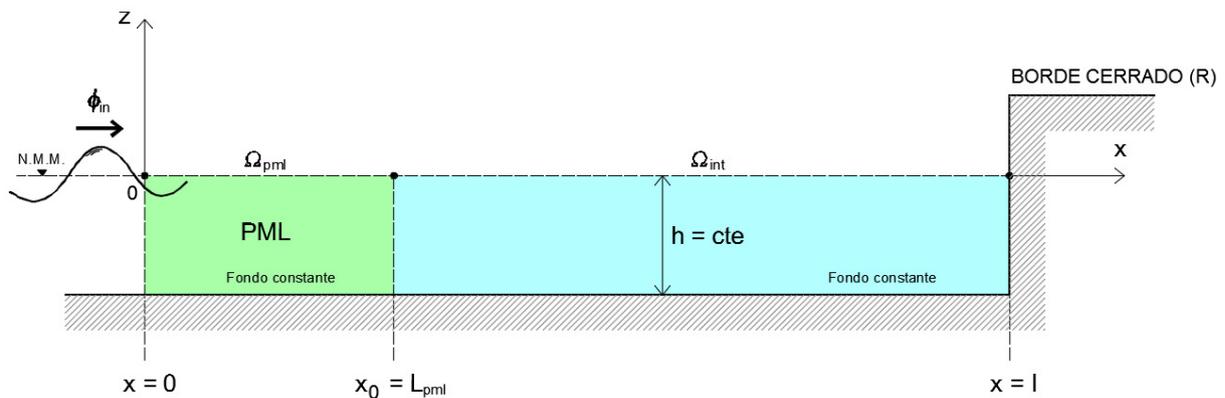


Figura 8-14. Geometría del modelo.

A continuación se presentan y comentan los resultados numéricos obtenidos. Obsérvese que se han elegido intencionadamente parámetros de atenuación de la onda bajos como los empleados en la simulación anterior. En las siguientes figuras se representan los resultados de la superficie libre del fluido  $\eta = Re(\phi)$  y del valor absoluto del potencial  $|\phi|$ . Se han realizado los cálculos para los casos de borde cerrado completamente absorbente ( $R = 0$ ) y completamente reflejante ( $R = 1$ ).

- **Borde cerrado en  $x = l$  completamente reflejante ( $R = 1$ ):**

En este caso se produce un fenómeno de onda estacionaria con amplitud máxima igual a 2. En la figura siguiente se representa la superficie libre del fluido en  $t = 0$ . Obsérvese como el la onda reflejada que retorna al PML la que es atenuada exponencialmente, dejando el potencial entrante unitario intacto.

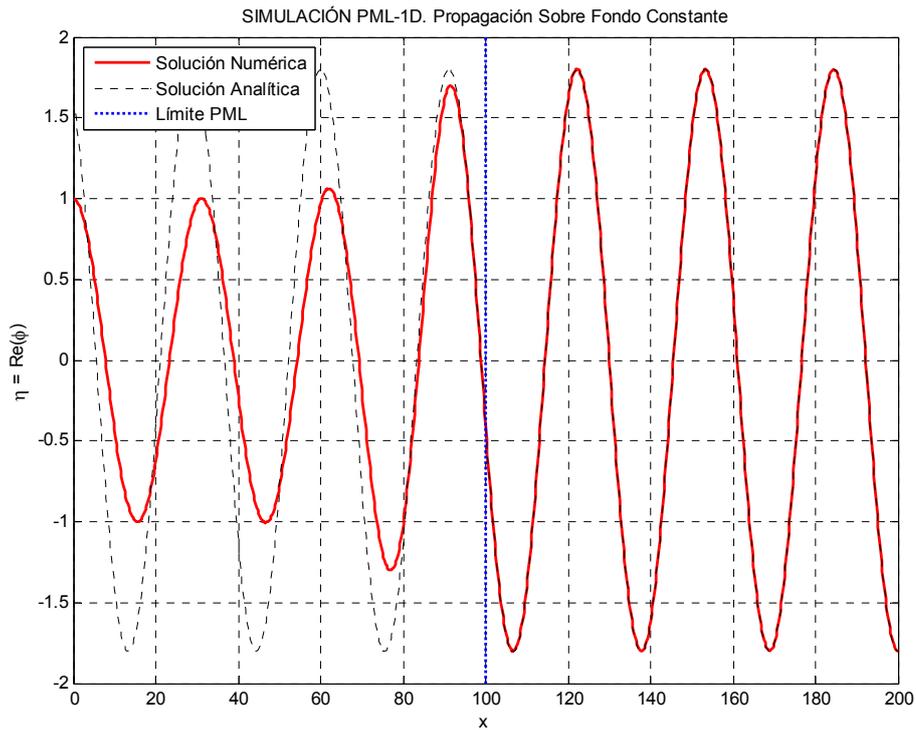


Figura 8-15. Representación de la superficie libre del fluido en  $t = 0$ .

A continuación se presenta el valor absoluto del potencial que muestra claramente la existencia de una onda estacionaria como muestran los picos de valor nulo del potencial correspondientes a los nodos de la onda estacionaria.

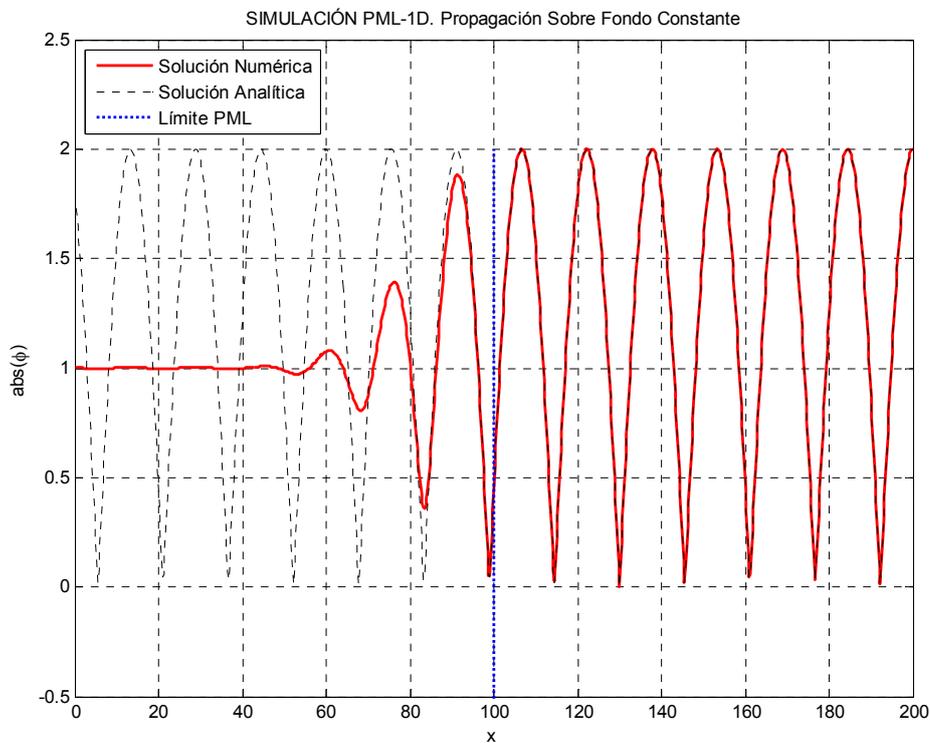


Figura 8-16. Representación del valor absoluto del potencial. Observar como la onda reflejada es la atenuada a su paso por el PML.

• **Borde cerrado en  $x = l$  completamente absorbente ( $R = 0$ ):**

En este caso la onda debe atravesar el dominio imperturbada por el PML pues no le llegan potenciales reflejados desde el borde cerrado totalmente absorbente.

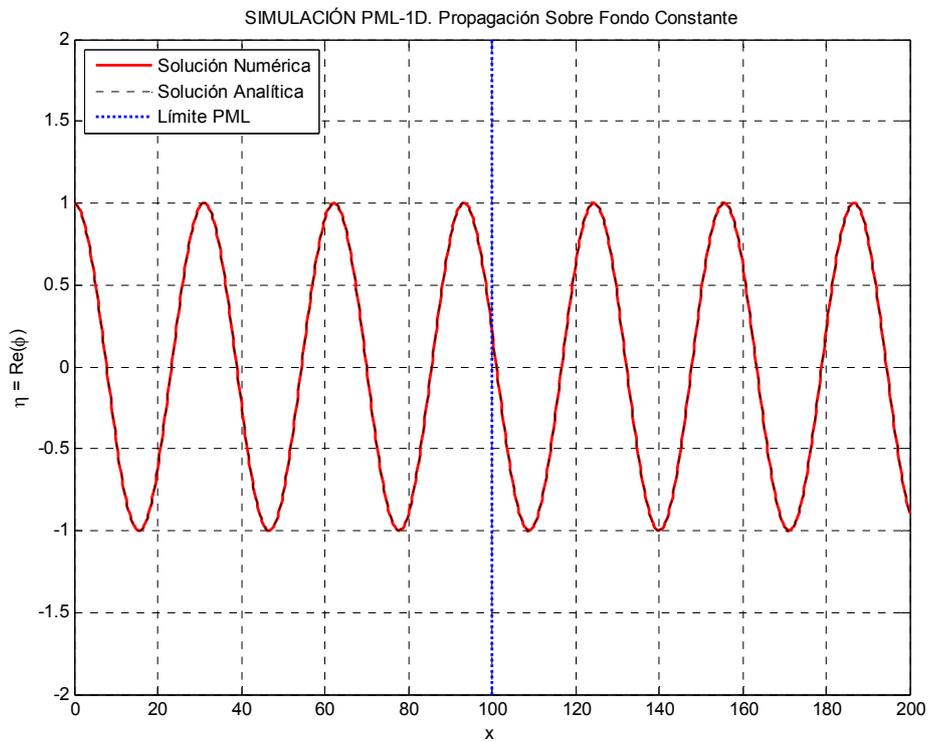


Figura 8-17. Representación de la superficie libre del fluido.

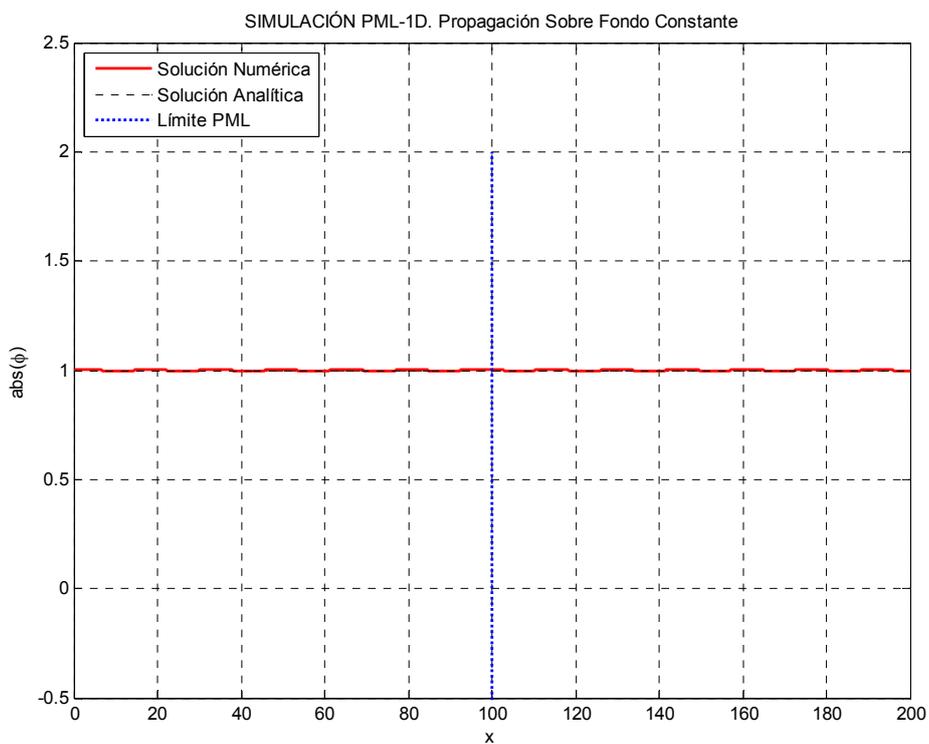


Figura 8-18. Representación del valor absoluto del potencial.

#### **8.8.4. Código de elementos finitos en Matlab®.**

Anexo al presente TFM se incluye un CD-Rom que incluye, entre otros, el listado de código de elementos finitos **MSE1D\_PML-02.m** programado en Matlab® empleado para resolver el problema de propagación sobre fondo plano aplicando condiciones absorbentes de los contornos mediante la técnica PML. Así mismo, se incluyen las funciones auxiliares empleadas por el código principal del programa.

# 9 CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS

---

*Caminante, son tus huellas  
el camino y nada más;  
Caminante, no hay camino,  
se hace camino al andar.  
Al andar se hace el camino,  
y al volver la vista atrás  
se ve la senda que nunca  
se ha de volver a pisar.  
Caminante no hay camino  
sino estelas en la mar.*

- Antonio Machado -

**L**egados a este punto, es momento de concluir con un tema tan amplio y que personalmente me resulta tan fascinante, como es la modelización numérica de los fenómenos de propagación de oleaje para su empleo en el diseño de obras costeras y portuarias. Sinceramente, me hubiera gustado añadir algún que otro capítulo adicional a este TFM, pero como en casi todas las cosas de la vida hay que definir un alcance y un objetivo final para dejar que los futuros TFG y TFM de otros alumnos de grado y máster desarrollen otros temas que no han sido tratados en este trabajo.

Me daría por satisfecho si al menos con este TFM otros compañeros en el futuro encontraran luz y se impregnaran de mi pasión por los temas de ingeniería marítima y su aplicación práctica en el diseño de obras costeras y portuarias. Este TFM tiene un alcance limitado, pero sienta las bases teóricas para el desarrollo de futuros trabajos interesantísimos en la materia.

Una de las conclusiones personales más importantes que como autor he alcanzado al realizar este trabajo, es que para llegar a ser un ingeniero solvente en la aplicación de modelos matemáticos es imprescindible disponer de un asentado conocimiento físico de los fenómenos de propagación de oleaje, sentido común y mucha intuición. En algunos momentos, mi Director José Manuel Galan y yo nos hemos encontrado con soluciones de los modelos inesperadas que sólo podían ser explicadas, validadas o descartadas, porque conocíamos a priori como se comporta el mar; esto es simplemente el fruto de años de experiencia en el ejercicio profesional.

Con ello no estamos afirmando que un ingeniero joven no sea capaz de emplear modelos matemáticos; todo lo contrario. No obstante, debe apoyarse durante su etapa de formación en el conocimiento y experiencia de los mayores, que seguro no saben de modelos ni de elementos finitos, pero saben a groso modo que tiene que salir como resultado. Como dice el sabio refranero popular español: “Mas sabe el demonio por viejo que por demonio”.

## 9.1. Conclusiones

Con este TFM se han cumplido los objetivos marcados en el capítulo 1 de introducción.

Se ha desarrollado un modelo eficiente de elementos finitos para la solución de la MSE, tanto para el caso unidimensional (1-D) como el caso general bidimensional (2-D). En ambos casos se ha realizado una aproximación de Galerkin continua empleando elementos lineales de dos nodos y triangulares de tres nodos, respectivamente, y funciones de forma lineales; se han obtenido resultados adecuados sin necesidad de emplear elementos de orden superior (p.ej. triángulo de 6 nodos). Los buenos resultados obtenidos con las aproximaciones y funciones de forma o interpolación de primer orden (lineal) se deben a que en nuestros

modelos de propagación de oleaje hemos aplicado el criterio habitual de mallado que aparece en la literatura técnica especializada, consistente en el empleo de mallas de elementos finitos suficientemente densas, con un mínimo de 20 elementos por longitud de onda.

La entrada de datos al programa es muy sencilla y automática; el usuario tan sólo debe introducir los siguientes datos:

- la batimetría del fondo marino mediante un fichero .txt que lee el código del programa y que contiene las coordenadas XYZ de los puntos de toma de la sonda o modelo digital del terreno. El programa interpola la profundidad del fondo en cada uno de los nodos de la malla de elementos finitos.
- los vértices que forman el dominio cerrado y las condiciones de contorno de cada borde definido por cada dos vértices consecutivos. A su vez, debe definir el potencial exterior entrante en cada contorno y su ángulo de inclinación respecto de la normal exterior al dominio.

El programa impone las condiciones de contorno en los bordes abiertos del dominio aplicando la aproximación parabólica del potencial mediante la ley de Snell, como si la batimetría del fondo marino fuera del dominio de integración fuera aproximadamente recta y paralela [11]. Con esta aproximación se ha simulado una dársena portuaria con resultados satisfactorios para el diseño como se presenta en el apartado 7.14.

Se han resuelto problemas aplicando las condiciones de contorno tipo Dirichlet, Neumann y Robin. Se ha comprobado que es necesario aplicar condiciones de contorno tipo esencial o Dirichlet en los bordes abiertos de entrada a dársenas portuarias para la obtención de los fenómenos de resonancia y el cálculo de las frecuencias naturales de oscilación.

Se ha logrado un código eficiente, con tiempos de cálculo reducidos cuando el tamaño del elemento cumple el criterio de mallado de un mínimo de 20 elementos por longitud de onda. Incluso con mallas de triángulos más densas se consiguen tiempos de cálculo del orden de minutos. Esto se ha logrado, en parte, eliminando la necesidad de resolver integrales numéricas empleando cuadraturas de Gauss, gracias a que en el caso de interpolación lineal con elementos de dos nodos (en contornos) y tres nodos (en el dominio) se obtienen matrices de interpolación  $\mathbf{N}$  y  $\mathbf{B}$  de términos constantes. Además, se ha considerado que los valores de  $c$ ,  $c_g$  y  $k$  son prácticamente constantes a nivel de cada elemento de la malla, por lo que salen de las integrales como constantes. Se ha comprobado que esta aproximación es plausible con tamaños normales de elemento, adoptando el criterio de 20 elementos por longitud de onda, reduciéndose de forma apreciable el coste computacional.

Los resultados de calibración y validación de resultados han mostrado la eficiencia y bondad de resultados del modelo numérico de elementos finitos.

En los problemas 2-, se ha comprobado y “sufrido” el efecto de las condiciones de contorno de los bordes cerrados reflejantes en los resultados del problema, visualizándose claramente las oscilaciones espurias que se superponen a la solución debido a ondas reflejadas por los contornos abiertos con entrada de potencial conocido o bordes cerrados totalmente absorbentes; precisamente el error cometido en la estimación del ángulo de aproximación hace que estos contornos, en teoría absorbentes, reflejen ondas hacia el interior del dominio. Se ha comprobado que en este caso la técnica del PML es enormemente eficaz, pues con la elección adecuada de los parámetros de definición del PML, se logra que las ondas reflejadas sean eliminadas por el término exponencial decreciente.

En opinión del autor, el trabajo cumple con los objetivos pedagógicos y de contenidos teóricos marcados en el inicio del trabajo. No obstante, debe ser el lector quien implacablemente juzgue si este objetivo se ha cumplido o no.

## 9.2. Trabajos y desarrollos futuros

A continuación se da una lista de temas muy interesantes no tratados en este TFM que podrían dar continuidad al trabajo desarrollado y con la envergadura necesaria para el alcance de un TFG o un TFM:

- Implementación de términos disipativos de energía en la MSE que simulen las pérdidas de energía por

rozamiento en el fondo y rotura del oleaje [3] [16].

- La simulación de fenómenos transitorios mediante la MSE en su formato temporal, no estacionario [10].
- Simulación de fenómenos de refracción de oleaje por corrientes marinas.
- La implementación de PML en dominios bidimensionales 2D [4].
- El estudio de las formas parabólicas de la MSE [11] [16] [10].
- Aunque en la bibliografía técnica especializada consultada nos encontramos con otros tipos de condiciones de contorno más sofisticadas, como por ejemplo el caso de potenciales que atraviesan los contornos físicos por permeabilidad (diques permeables) [16], éstos no han sido introducidos en el presente TFG por considerarse que deben ser tratados en futuros desarrollos específicos y no en un trabajo introductorio con marcado carácter pedagógico. Además, este tipo de condiciones de contorno no suelen ser muy empleadas en casos reales de proyecto.
- La implementación de elementos triangulares y cuadrangulares de orden superior (6 nodos, etc.) y el estudio de su influencia en el tamaño necesario de la malla y el coste computacional [5] [12].

Debo reconocer especialmente, que por falta de tiempo para compaginar mi actividad profesional y académica, no se ha incluido en este TFG un tema muy importante como es el de implementación de la técnica PML al caso general bidimensional (2-D). No obstante, sí se ha incluido un capítulo introductorio a este tema pero para el caso unidimensional, que al menos sienta las bases teóricas de esta técnica y permite una aproximación suave y gradual a un tema de por sí complicado. Con la introducción al problema del PML unidimensional pueden desarrollarse trabajos futuros que permitan implementar esta técnica para su uso efectivo en modelos reales de propagación de oleaje para uso en diseño marítimo.

No quiero terminar este trabajo sin antes volver a agradecer a José Manuel Galán las horas que me ha dedicado en detrimento de su esposa Balbina y sus tres hijos; a ellos mis disculpas. Lo malo es que, si Dios lo quiere, ahora comienzo mi andadura por la Tesis Doctoral, también con José Manuel, por lo que seguiré abusando de su amabilidad, al menos unos pocos de años más...

Me es grato recordar aquí los ratos de amable discusión entre José Manuel y yo acerca de como redacto. Se ve con mucha claridad en mi forma de escribir mi "contaminación" por la experiencia profesional y en ciertos momentos mis "rencillas" con el mundo académico, que me aparta en momentos de los cánones de la escritura científica y el rigor matemático necesarios y que José Manuel ha intentado corregir continuamente. Gracias por hacerlo compañero.

Sevilla, septiembre de 2016



Gabriel Chamorro Sosa

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

# REFERENCIAS

---

- [1] J. Berkhoff, *Mathematical Models for Simple Harmonic Linear Water Waves. Wave Diffraction and Refraction*, 1976.
- [2] Oleck C. Zienkiewicz, Robert L. Taylor, P. Nithiarasu, *The Finite Element Method for Fluid Dynamics*. 6th. Edition, Elsevier, 2005.
- [3] G. E. v. d. Sande, *The Mild-Slope Equation and its numerical implematation.*, Paises Bajos: Delft University of Technology, 2011.
- [4] D. Modesto, S. Fernández-Méndez, A. Huerta, «Elliptic harbor wave model with perfectly matched layer and exterior bathymetry effects,» *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, nº 10.1061/(ASCE)WW.1943-5460.0000336 , 04016008., pp. 04016008-1,14, 2016.
- [5] Zienkiewicz-Taylor, *The Finite Element Method (Vol.1). The Basis*, B-H, 2000.
- [6] J. Berenger, «A perfectly matched layed for the absorption of electomagnetic waves,» *Journal of Computational Physics*, vol. 1, nº 114, pp. 185-200, 1994.
- [7] United States Army Corps of Engineers, *Shore Protection Manual*, 1984.
- [8] Y. Goda, *Random Seas and Design of Maritime Structures*, World Scientific, 2010.
- [9] I. A. Svendsen, *Introduction to Nearshore Hydrodynamics. Advanced Series on Ocean Engineering Vol. 24*, World Scientific, 2006.
- [10] M. Losada, *Fundamentos del Movimiento Oscilatorio*, Universidad de Granada, 2005.
- [11] J. T. Kirby, «Open boundary condition in parabolic equation method,» *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 112, nº 3, pp. 460-465, 1986.
- [12] D. Modesto, *Modelación Numérica del Oleaje en Zonas Costeras con Batimetría no Constante Mediante Elementos Finitos*, Barcelona: Universidad Politécnica de Cataluña. Master de Métodos Numéricos en Ingeniería. Tesis de Master, 2009.
- [13] *Waves, Tides and Shallow-Water Processes*, The Open University, 2006.
- [14] N. Booij, «A Note on the Accuracy of the Mild-Slope Equation,» *Coastal Engineering*, nº 7, pp. 191-203, 1983.
- [15] Per-Olof Persson and Gilbert Strang, «A simple Mesh Generator in MATLAB,» *SIAM*, vol. 46, nº 2, 2004.
- [16] M. Dingemans, *Water Wave Propagation Over Uneven Bottoms*, Delft Hydraulics, The Netherlands: World Scientific, 1997.
- [17] F. París, *Teoría de la Elasticidad*, 1996.

